Йорданова алгебра алгебры Мальцева*

А. Ю. ГОЛУБКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: artgolub@hotmail.com

УДК 512.554.382+512.554.383+512.554.7

Ключевые слова: алгебраическая алгебра Мальцева, алгебра Мальцева с алгебраическим регулярным представлением, невырожденная алгебра Мальцева, йорданова алгебра алгебры Ли, первичная алгебра.

Аннотация

Работа посвящена обобщению на алгебры Мальцева конструкции йордановой алгебры алгебры Ли и известных теорем о локальной конечномерности PI-алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением.

Abstract

A. Yu. Golubkov, A Jordan algebra of a Mal'tsev algebra, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 3, pp. 49—74.

This paper is devoted to the generalization of the construction of a Jordan algebra of a Lie algebra and the known theorems on the local finite-dimensionality of Lie PI-algebras with an algebraic adjoint representation to Mal'tsev algebras.

Введение

Йордановы алгебры алгебр Ли определены в [29] по аналогии с локальными алгебрами ассоциативных алгебр и тройных йордановых систем. В работе вводится их обобщённая версия для алгебр Мальцева. Доказывается, что йордановы алгебры алгебры Мальцева наследуют её невырожденность и сильную первичность. Это свойство, рассуждения из [14, 15, 30, 36] и описание центральных замыканий первичных алгебр Мальцева из [19] позволяют перенести теоремы о локальной конечномерности PI-алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением над полями характеристики нуль и алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением ограниченной степени над полями достаточно большой положительной характеристики из [5, 11] на алгебры Мальцева. Данные обобщения, теоремы 2.3 и 2.4, являются центральными

*Исследование выполнено за счёт гранта МЦФПМ в МГУ им. М. В. Ломоносова «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем».

результатами работы. В дополнении приведены варианты их доказательств на базе свойств йордановых алгебр алгебр лиевых умножений алгебр Мальцева.

Все рассматриваемые нами алгебры определены над произвольным ассоциативным коммутативным кольцом с единицей F (полем $\mathbb{F}$ во второй части), которое, как правило, будет иметь аддитивную группу без 6-кручения. Для удобства мы будем считать, что алгебры над кольцом F являются левыми и правыми унитарными модулями над F с идентичным левым и правым действием.

Алгебра, полученная из алгебры R заменой её операции умножения на кольцевой коммутатор элементов $[\,,\,]$, $[x,y]=xy-yx$, $x,y\in R$, будет обозначаться через $R^{(-)}$. Алгебры умножений, лиевых умножений, дифференцирований и внутренних дифференцирований алгебры R мы будем обозначать через $M(R)$, $\mathrm{Lie}(R)$, $\mathrm{Der}(R)$ и $\mathrm{Inder}(R)$ соответственно. Напомним, что $M(R)$ и $\mathrm{Lie}(R)$ — подалгебры алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(R)$ F-модуля R и её алгебры Ли $\mathrm{End}_F(R)^{(-)}$, которые порождают все операторы левого и правого умножения l_x и r_x на элементы $x\in R$, $l_x\colon y\longmapsto xy$ и $r_x\colon y\longmapsto yx$, $y\in R$, $\mathrm{Der}(R)$ — подалгебра $\mathrm{End}_F(R)^{(-)}$, состоящая из всех дифференцирований алгебры R, и $\mathrm{Inder}(R)=\mathrm{Lie}(R)\cap\mathrm{Der}(R)$. Отметим также, что в работе эндоморфизмы $\phi\in\mathrm{End}_F(R)$ действуют на элементы $x\in R$ слева: $\phi x=\phi(x)$. Последнее, естественно, меняет форму записи используемых известных операторных соотношений.

1. Йорданова алгебра по дифференцированию

Нильпотентное дифференцирование алгебры индекса нильпотентности не выше 3 мы будем называть *йордановым*. Алгебры, аддитивные группы которых не имеют k-кручения, $k>1$, мы будем называть *алгебрами без k-кручения*.

Замечание 1.1. Пусть R — алгебра без 3-кручения над кольцом F, D — её йорданово дифференцирование и $R^{(D)}$ — алгебра, полученная из R заменой операции умножения на операцию $\cdot_D$, $x\cdot_D y=(Dx)y$, $x,y\in R$. Тогда

1) $\mathrm{Ker}\,D^2=\{x\in R\mid D^2x=0\}$ — идеал алгебры $R^{(D)}$;
2) алгебра $R_D=R^{(D)}/\,\mathrm{Ker}\,D^2$ изоморфна алгебре D^2R, полученной из F-модуля D^2R введением операции умножения $\cdot$, $D^2x\cdot D^2y=(D^2x)(Dy)$, $x,y\in R$, при помощи изоморфизма $x+\mathrm{Ker}\,D^2\longmapsto D^2x$, $x\in R$;
3) если алгебра R антикоммутативна (коммутативна), алгебра R_D коммутативна (антикоммутативна).

Доказательство. В первом пункте достаточно заметить, что для любых $x,y\in R$

$$\begin{aligned}0&=D^3(xy)=(D^3x)y+3(D^2x)(Dy)+3(Dx)(D^2y)+x(D^3y)=\\&=(D^2x)(Dy)+(Dx)(D^2y),\\D^2\big((Dx)y\big)&=(D^3x)y+2(D^2x)(Dy)+(Dx)(D^2y)=(D^2x)(Dy)=\\&=-(Dx)(D^2y),\end{aligned}\tag{1}$$

и потому $D^2\big((Dx)y\big) = D^2\big((Dy)x\big) = 0$ при всех $x \in \operatorname{Ker} D^2$, $y \in R$. Второй и третий пункты следуют из (1) и того, что

$$D^2\big((Dx)y\big) = (D^2x)(Dy) = \varepsilon(Dy)(D^2x) = \\ = -\varepsilon(D^2y)(Dx) = -\varepsilon D^2\big((Dy)x\big) \quad (x, y \in R),$$

где $\varepsilon = -1$ ($\varepsilon = 1$), если алгебра R антикоммутативна (коммутативна). $\square$

Так как $\operatorname{ad}_T t_x = [T, t_x] = t_{Tx}$ для любых алгебры R, $T \in \operatorname{Der}(R)$, $t_x \in \{l_x, r_x\}$, $x \in R$, в случае алгебры без 3-кручения R и её йорданова дифференцирования D

$$0 = t_{D^3x} = \operatorname{ad}_D^3 t_x = D^3t_x - 3D^2t_xD + 3Dt_xD^2 - t_xD^3 = \\ = D^2t_xD - Dt_xD^2 = D^2t_xD^2 \quad (x \in R), \quad (2)$$

и потому для всех $x, y \in R$, $t_x \in \{l_x, r_x\}$, $t_y \in \{l_y, r_y\}$

$$t_{D^2x}t_{D^2y} = (D^2t_x - 2Dt_xD + t_xD^2)(D^2t_y - 2Dt_yD + t_yD^2) = \\ = D^2t_xt_yD^2 - 2D^2t_xDt_yD + 4Dt_xD^2t_yD - 2Dt_xDt_yD^2 = D^2t_xt_yD^2, \quad (3)$$

$t^3_{D^2x} = 0$, $(D^2R)\big((D^2R)R\big) \subseteq D^2R$,

$$t_{D^2x}D = \operatorname{ad}_D^2 t_xD = D^2t_xD - 2Dt_xD^2 = -D^2t_xD.$$

Это означает также, что алгебра R_D имеет нулевое умножение, если и только если $D^2l_xD = 0$ при любом $x \in R$.

Алгебрами Мальцева называются антикоммутативные алгебры, удовлетворяющие тождеству

$$(xy)(zu) + \big((uy)z\big)x + \big((yz)x\big)u + \big((zx)u\big)y + \big((xu)y\big)z = 0.$$

По крайней мере такое их определение не вызывает разночтений в интересующем нас случае алгебр без 2-кручения.

Теорема 1.2. *Пусть R — алгебра Мальцева без 6-кручения над кольцом F и D — её йорданово дифференцирование. Тогда алгебра R_D является йордановой, если и только если*

$$D^2r_x^2Dr_xD^2 = D^2r_xDr_x^2D^2$$

для всех $x \in R$ и, в частности, если $\operatorname{ad}_D^4 \operatorname{Lie}(R) = \{0\}$.

Доказательство. Йордановость алгебры R_D равносильна включению

$$\Big(D\big((Dx)x\big)\Big)\big((Dx)y\big) - (Dx)\Big(\Big(D\big((Dx)x\big)\Big)y\Big) = \big[r_{(D^2x)x}, r_{Dx}\big]y \in \operatorname{Ker} D^2 \\ (x, y \in R),$$

а значит, равенству

$$\begin{aligned}0 &= D^2\bigl[r_{(D^2x)x}, r_{Dx}\bigr] = D^2\Bigl[\bigl[D, r_{(Dx)x}\bigr], [D, r_x]\Bigr] =\\ &= -D^2 r_{(Dx)x} D(Dr_x - r_x D) + D^2 r_x D\bigl(Dr_{(Dx)x} - r_{(Dx)x}D\bigr) =\\ &= D^2 r_{(Dx)x} D r_x D - D^2 r_x D r_{(Dx)x} D =\\ &= D^2 r_{(Dx)x} D r_x D - D r_x D r_{(Dx)x} D^2 =\\ &= D^2 r_{(Dx)x}(r_{Dx} + r_x D)D + D(r_{Dx} - Dr_x) r_{(Dx)x} D^2 =\\ &= D^2 r_{(Dx)x} r_{Dx} D + D r_{Dx} r_{(Dx)x} D^2 + D^2\bigl[r_{(Dx)x}, r_x\bigr]D^2 \quad (x \in R)\end{aligned}$$

(см. утверждение 2) замечания 1.1). Напомним, что для всех $x, y, z \in R$

$$\begin{aligned}&r_{(yz)x} = r_{xy} r_z - r_y r_{zx} + [r_x, r_z r_y],\\ &0 = r_y r_{xy} + r_{xy} r_y + [r_x, r_y^2],\\ &r_{(yx)x} = r_{xy} r_x + [r_x, r_x r_y] = -r_x r_{xy} - [r_x, r_y r_x],\\ &[r_{xy}, r_x] = 2r_{(yx)x} + \bigl[[r_x, r_y], r_x\bigr]\end{aligned}$$

(см. [36, (2.13)]). Поэтому

$$\begin{aligned}&D^2 r_{(Dx)x} r_{Dx} D + D r_{Dx} r_{(Dx)x} D^2 =\\ &\quad = D^2\bigl(r_{(x(Dx))(Dx)} - [r_{Dx}, r_{Dx} r_x]\bigr)D - D\bigl(r_{(x(Dx))(Dx)} + [r_{Dx}, r_x r_{Dx}]\bigr)D^2 =\\ &\quad = -D^2[r_{Dx}, r_{Dx} r_x]D - D[r_{Dx}, r_x r_{Dx}]D^2 =\\ &\quad = D^2 r_{Dx}[r_x, r_{Dx}]D + D[r_x, r_{Dx}] r_{Dx} D^2 =\\ &\quad = D^2[D, r_x]\bigl[r_x, [D, r_x]\bigr]D + D\bigl[r_x, [D, r_x]\bigr][D, r_x]D^2 =\\ &\quad = D^2 r_x D(r_x^2 D - 2r_x D r_x + D r_x^2)D - D(r_x^2 D - 2r_x D r_x + D r_x^2) D r_x D^2 =\\ &\quad = D^2 r_x D r_x^2 D^2 - 2D^2 r_x D r_x D r_x D + D^2 r_x D^2 r_x^2 D - D r_x^2 D^2 r_x D^2 +\\ &\quad + 2D r_x D r_x D r_x D^2 - D^2 r_x^2 D r_x D^2 = \ D^2 r_x D r_x^2 D^2 - D^2 r_x^2 D r_x D^2,\\ &D^2[r_{(Dx)x}, r_x]D^2 = D^2[r_x, [r_x, r_{Dx}]]D^2 = -D^2(\operatorname{ad}^3_{r_x} D)D^2 =\\ &\quad = -D^2(r_x^3 D - 3r_x^2 D r_x + 3r_x D r_x^2 - D r_x^3)D^2 = 3D^2 r_x^2 D r_x D^2 - 3D^2 r_x D r_x^2 D^2,\\ &9D^2\bigl[r_{(D^2x)x}, r_{Dx}\bigr] = 18(D^2 r_x^2 D r_x D^2 - D^2 r_x D r_x^2 D^2) = -6D^2(\operatorname{ad}^3_{r_x} D)D^2 =\\ &\quad = -\operatorname{ad}^4_D \operatorname{ad}^3_{r_x} D = \operatorname{ad}^4_D\bigl[r_{(Dx)x}, r_x\bigr] = 6\bigl[r_{(D^2x)(Dx)}, r_{D^2x}\bigr].\end{aligned}$$

Остаётся заметить, что алгебру $\mathrm{Lie}(R)$ составляют конечные суммы операторов r_x и $[r_y, r_z]$, $x, y, z \in R$ (см. [36, теорема 5.1]). □

Согласно теореме 1.2 и [29, теорема 2.4] для любых алгебры Ли без 6-кручения R и её йорданова дифференцирования D алгебра R_D является йордановой.

Йорданову алгебру R_D из теоремы 1.2 мы будем называть *йордановой алгеброй алгебры Мальцева R по дифференцированию D*.

Напомним, что алгебра, не содержащая ненулевых идеалов с нулевыми квадратами (произведение любых двух ненулевых идеалов которой отлично от нуля), называется *полупервичной* (*первичной*).

Первичные нелиевы алгебры Мальцева без 2-кручения не имеют также 3-кручения (см. [18]). Поэтому, говоря в дальнейшем о таких алгебрах над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, мы будем предполагать по умолчанию, что $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2, 3$.

Элемент x йордановой алгебры J, оператор U_x квадратичного умножения на который равен нулю, называется *абсолютным делителем нуля*. В случае линейной йордановой алгебры J оператор U_x имеет вид $U_x = 2r_x^2 - r_{x^2}$. *Абсолютными делителями нуля* алгебр Мальцева называются их элементы, операторы умножения на которые имеют нулевые квадраты. Йордановы алгебры и алгебры Мальцева, в которых нет ненулевых абсолютных делителей нуля, называются *невырожденными* (принятое в алгебрах Ли условие невырожденности совпадает с данным условием при отсутствии 2-кручения). Первичные невырожденные алгебры из этих классов называются *сильно первичными*.

Теорема 1.3. *Алгебра Мальцева без* 6*-кручения* R *над кольцом* F *является сильно первичной тогда и только тогда, когда* $r_x r_y \neq 0$ *для любых* $0 \neq x, y \in R$.

Доказательство. Ввиду результатов [32] (точнее, [31, с. 133]), [19] и того, что алгебры с таким условием первичны и не содержат ненулевых элементов, операторы умножения на которые имеют нулевые квадраты, нам следует лишь проверить его выполнение в любой семимерной простой алгебре Мальцева $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2, 3$, $0 \neq \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$. Данная алгебра — подалгебра алгебры Мальцева $\mathcal{O}(\alpha, \beta, \gamma)^{(-)}$ алгебры Кэли—Диксона $\mathcal{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ над полем $\mathbb{F}$, состоящая из всех элементов с нулевым следом. Выберем базис $\{e_0 = 1, e_1, \ldots, e_7\}$ алгебры $\mathcal{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ с таблицей умножения неединичных элементов

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	α	e_3	αe_2	e_5	αe_4	$-e_7$	$-\alpha e_6$
e_2	$-e_3$	β	$-\beta e_1$	e_6	e_7	βe_4	βe_5
e_3	$-\alpha e_2$	βe_1	$-\alpha\beta$	e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$-\alpha\beta e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	γ	$-\gamma e_1$	$-\gamma e_2$	$-\gamma e_3$
e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	$-\alpha e_6$	γe_1	$-\alpha\gamma$	γe_3	$\alpha\gamma e_2$
e_6	e_7	$-\beta e_4$	βe_5	γe_2	$-\gamma e_3$	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma e_1$
e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$\alpha\beta e_4$	γe_3	$-\alpha\gamma e_2$	$\beta\gamma e_1$	$\alpha\beta\gamma$

(см. [8, с. 18]) и отождествим алгебру $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ с подпространством ${}_{\mathbb{F}}\langle e_1, \ldots, e_7\rangle$, на котором введена операция умножения

$$[x, y] = xy - yx = 2xy - 2\sum_{i=1}^{7} x_i y_i e_i^2 \quad \left(x = \sum_{i=1}^{7} x_i e_i,\ y = \sum_{i=1}^{7} y_i e_i \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)\right),$$

где правые части равенств определены в рамках $\mathcal{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ (в [14—16] вместо $[\,,\,]$ используется $(1/2)[\,,\,]$). Допустим, что $r_x r_y = 0$ для некоторых $0 \neq x, y \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$,

$$r_x r_y z = 4(zy)x - 4\sum_{i=1}^{7}(zy)_i x_i e_i^2 = -4(yz)x + 4\sum_{i=1}^{7}(yz)_i x_i e_i^2 = 0 \quad (z \in \mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma)),$$

где

$$yz = \sum_{i=0}^{7}(yz)_i e_i, \quad zy = \sum_{i=0}^{7}(zy)_i e_i.$$

Если бы $x^2 = 0$, то вследствие альтернативности алгебры $\mathcal{O}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$0 = (zy)x^2 = x\sum_{i=1}^{7}(zy)_i x_i e_i^2 = \sum_{i=1}^{7}(zy)_i x_i e_i^2 = (zy)x,$$

аналогично $0 = (yz)x$ для всех $z \in \mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma)$, и потому $0 = (e_i y + y e_i)x = 2y_i e_i^2 x$, $y_i = 0$, $i = 1,\ldots,7$, и $y = \sum\limits_{i=1}^{7} y_i e_i = 0$?! Значит, $x^2 = -n(x) \neq 0$, $x^{-1} = -n(x)^{-1}x$ и

$$zy = x^{-1}\sum_{i=1}^{7}(zy)_i x_i e_i^2 \quad (z \in \mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma)).$$

В случае если $y^2 = 0$,

$$0 = zy^2 = x^{-1}y\sum_{i=1}^{7}(zy)_i x_i e_i^2 = y\sum_{i=1}^{7}(zy)_i x_i e_i^2 = zy \quad (z \in \mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma))$$

и, как следствие, $e_i y = 0$, $i = 1,\ldots,7$, $y = 0$?! Поэтому $x^2, y^2 \neq 0$,

$$z = \Big(\big((zy)x\big)x^{-1}\Big)y^{-1} = x^{-1}y^{-1}\sum_{i=1}^{7}(zy)_i x_i e_i^2 \quad (z \in \mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma))$$

и $7 = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma) \leqslant 1$?! □

Теорема 1.3 дополняет теорему 1.6 из [32] (теорему 7.2.2 из [31]). С её помощью мы докажем следующий вариант предложения 2.15 и теоремы 2.2 из [29] и [32].

Теорема 1.4. *Если D — такое йорданово дифференцирование невырожденной (сильно первичной) алгебры Мальцева без 6-кручения R над кольцом F, что $\mathrm{ad}_D^4 \operatorname{Lie}(R) = \{0\}$, то йорданова алгебра R_D является невырожденной (сильно первичной).*

Доказательство. Так как для любых $a, b \in R$

$$U_{\bar a}\bar b = 2(Da)\big((Da)b\big) - \big((D^2a)a\big)b + \operatorname{Ker} D^2 = \big(2r_{Da}^2 + r_{(D^2a)a}\big)b + \operatorname{Ker} D^2,$$

где $\bar x = x + \operatorname{Ker} D^2$, $x \in R$, и

$$D^2[r_a, r_{Da}] = -D^2(r_a^2 D - 2r_a D r_a + D r_a^2) = -D^2 r_a^2 D + 2D^2 r_a D r_a,$$

мы можем записать

$$\begin{aligned}&D^2\bigl(2r^2_{Da}+r_{(D^2a)a}\bigr)=D^2\bigl(2[D,r_a]^2+\bigl[D,r_{(Da)a}\bigr]\bigr)=\\&=2D^2r_aDr_aD-D^2r_{(Da)a}D=D^2\bigl([r_a,r_{Da}]-r_{(Da)a}\bigr)D+D^2r_a^2D^2=\\&=D^2\bigl[D,[r_{Da},r_a]+r_{(Da)a}\bigr]+D^2r_a^2D^2=D^2\bigl([r_{D^2a},r_a]+r_{(D^2a)a}\bigr)+r^2_{D^2a}\end{aligned}$$

(см. (2) и (3)). Кроме того,

$$D^2\bigl([r_{D^2a},r_a]+r_{(D^2a)a}\bigr)b=D^2([r_a,r_b]+r_{ab})D^2a=0\quad(b\in R),$$

поскольку по условию $D^2\operatorname{Lie}(R)D^2=\{0\}$, и $U_{\bar a}\bar b=\overline{r_a^2D^2b}$, $b\in R$. Поэтому $U_{\bar a}=0$, если и только если $r^2_{D^2a}=0$, $a\in\operatorname{Ker}D^2$, $\bar a=0$. Вместе с тем

$$\begin{aligned}&D^2\bigl(2r^2_{Da+Db}+r_{(D^2a+D^2b)(a+b)}-2r^2_{Da}-r_{(D^2a)a}-2r^2_{Db}-r_{(D^2b)b}\bigr)=\\&=D^2(r^2_{a+b}-r^2_a-r^2_b)D^2=D^2(r_ar_b+r_br_a)D^2=D^2(2r_ar_b-[r_a,r_b])D^2=\\&=2D^2r_ar_bD^2=2r_{D^2a}r_{D^2b}\quad(a,b\in R)\end{aligned}$$

(см. (3)). Следовательно, согласно теореме 1.3 в случае сильно первичной алгебры R

$$2U_{\bar a,\bar b}=U_{\overline{a+b}}-U_{\bar a}-U_{\bar b}\neq 0\quad(0\neq\bar a,\bar b\in R_D),$$

что равносильно сильной первичности йордановой алгебры R_D (см. [1]). $\square$

Заметим, что в теоремах 1.2, 1.4 условие $\operatorname{ad}^4_D\operatorname{Lie}(R)=\{0\}$ можно заменить условием $\operatorname{ad}^4_D\operatorname{Inder}(R)=\{0\}$ (см. (2) и [36, предложение 8.3]).

В теореме 1.4 алгебра Мальцева R может быть заменена любой антикоммутативной алгеброй R, которая имеет йорданову алгебру R_D по йорданову дифференцированию D, $\operatorname{ad}^4_D\operatorname{Lie}(R)=\{0\}$. При этом вместо условия сильной первичности следует использовать условие теоремы 1.3.

В качестве иллюстрации к теореме 1.2 рассмотрим подалгебру $\mathcal{M}(F)$ элементов с нулевым следом алгебры Мальцева $\mathcal{O}(F)^{(-)}$ матричной алгебры Кэли—Диксона $\mathcal{O}(F)$ над кольцом без 6-кручения F. Алгебра $\mathcal{M}(F)$ является свободным F-модулем, базис которого $\{e_1,\ldots,e_7\}$ может быть выбран с таблицей умножения

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2e_2$	$2e_3$	$2e_4$	$-2e_5$	$-2e_6$	$-2e_7$
e_2	$-2e_2$	0	$2e_7$	$-2e_6$	e_1	0	0
e_3	$-2e_3$	$-2e_7$	0	$2e_5$	0	e_1	0
e_4	$-2e_4$	$2e_6$	$-2e_5$	0	0	0	e_1
e_5	$2e_5$	$-e_1$	0	0	0	$-2e_4$	$2e_3$
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	0	$2e_4$	0	$-2e_2$
e_7	$2e_7$	0	0	$-e_1$	$-2e_3$	$2e_2$	0

(см. [36, п. 3.2]). В этом базисе матрицы любого дифференцирования алгебры $\mathcal{M}(F)$ и оператора умножения r_z, $z=z_1e_1+\ldots+z_7e_7\in\mathcal{M}(F)$, имеют вид

$$D=\begin{pmatrix} 0 & d_5 & d_6 & d_7 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \\ 2d_2 & d_8 & d_{11} & d_{14} & 0 & d_7 & -d_6 \\ 2d_3 & d_9 & d_{12} & d_{15} & -d_7 & 0 & d_5 \\ 2d_4 & d_{10} & d_{13} & -d_8-d_{12} & d_6 & -d_5 & 0 \\ -2d_5 & 0 & -d_4 & d_3 & -d_8 & -d_9 & -d_{10} \\ -2d_6 & d_4 & 0 & -d_2 & -d_{11} & -d_{12} & -d_{13} \\ -2d_7 & -d_3 & d_2 & 0 & -d_{14} & -d_{15} & d_8+d_{12} \end{pmatrix},$$

$$R_z=\begin{pmatrix} 0 & z_5 & z_6 & z_7 & -z_2 & -z_3 & -z_4 \\ 2z_2 & -2z_1 & 0 & 0 & 0 & -2z_7 & 2z_6 \\ 2z_3 & 0 & -2z_1 & 0 & 2z_7 & 0 & -2z_5 \\ 2z_4 & 0 & 0 & -2z_1 & -2z_6 & 2z_5 & 0 \\ -2z_5 & 0 & 2z_4 & -2z_3 & 2z_1 & 0 & 0 \\ -2z_6 & -2z_4 & 0 & 2z_2 & 0 & 2z_1 & 0 \\ -2z_7 & 2z_3 & -2z_2 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 \end{pmatrix}$$

(см. [36, (8.20), (8.21)]). Обозначим через $D_{i_1,\dots,i_s}$ дифференцирование с $d_{i_j}=1$ и $d_i=0$, $i\neq i_j$, $j=1,\dots,s$, и сохраним это обозначение для его матрицы в базисе $\{e_1,\dots,e_7\}$. Тогда дифференцирования $T=D_{9,13}$ и $S=D_7$ йордановы,

$$T=E_{32}+E_{43}-E_{56}-E_{67},\quad S=E_{14}+E_{26}-E_{35}-2E_{71},$$

где $\{E_{ij}\}$ — элементарные матрицы, причём T не удовлетворяет условию теоремы 1.2,

$$\begin{aligned} &T^2R_{e_2}^2TR_{e_2}T^2=4E_{42}=\\ &\quad=(E_{42}+E_{57})(-2E_{25})(E_{32}+E_{43}-E_{56}-E_{67})\times\\ &\quad\times(2E_{21}-E_{15}+2E_{64}-2E_{73})(E_{42}+E_{57})=\\ &\quad\neq(E_{42}+E_{57})(2E_{21}-E_{15}+2E_{64}-2E_{73})\times\\ &\quad\times(E_{32}+E_{43}-E_{56}-E_{67})(-2E_{25})(E_{42}+E_{57})=\\ &\quad=4E_{57}=T^2R_{e_2}TR_{e_2}^2T^2, \end{aligned}$$

а S ему удовлетворяет, $S^2DS^2=4E_{74}DE_{74}=0$, $D\in\mathrm{Der}\big(\mathcal{M}(F)\big)$. Алгебра $\mathcal{M}(F)_T$ является свободным F-модулем с базисом $\{\bar e_i=e_i+\mathrm{Ker}\,T^2\mid i=2,7\}$ и таблицей умножения

	$\bar e_2$	$\bar e_7$
$\bar e_2$	$-2\bar e_7$	0
$\bar e_7$	0	$2\bar e_2$

.

По теореме 1.2 она не является йордановой,

$$\bar e_2^2\cdot_T(\bar e_2\cdot_T\bar e_7)=0\neq\bar e_2\cdot_D(\bar e_2^2\cdot_T\bar e_7)=8\bar e_7.$$

Алгебра $\mathcal{M}(F)_S$ изоморфна алгебре $F^{(2)}$, полученной из F-алгебры F заменой операции умножения на операцию $x\cdot_2 y=2xy$, $x,y\in F$ ($\mathcal{M}(F)_S\cong F$, если и только если $1/2\in F$).

Заметим, что невырожденность (сильная первичность) алгебры Мальцева $\mathcal{M}(F)$ над кольцом без 2-кручения F равносильна полупервичности (целостности) F.

Замечание 1.5. Йорданово дифференцирование D алгебры Мальцева $\mathcal{M}(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2, 3$, удовлетворяет условию $\operatorname{ad}_D^4 \operatorname{Lie}(R) = \{0\}$, если и только если $\operatorname{rk} D^2 \leqslant 1$.

Доказательство. Из описания жордановой нормальной формы дифференцирования D следует, что $\operatorname{rk} D^2 \leqslant 2$. Если $\operatorname{rk} D^2 \leqslant 1$, то $\operatorname{ad}_D^4[r_x, r_y] = 6[r_{D^2x}, r_{D^2y}] = 0$, $x, y \in \mathcal{M}(\mathbb{F})$, и потому $\operatorname{ad}_D^4 \operatorname{Lie}(R) = \{0\}$ (см. также (2)). По теореме 1.4 и теореме 5 из [10] в случае если $\operatorname{ad}_D^4 \operatorname{Lie}(R) = \{0\}$, йорданова алгебра $\mathcal{M}(\mathbb{F})_D$ сильно первична и либо равна нулю, либо является полем, $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{M}(\mathbb{F})_D = \operatorname{rk} D^2$. Вместе с тем алгебру Мальцева $\mathcal{M}(\mathbb{F})$ можно рассматривать в качестве $\mathbb{F}$-подалгебры алгебры Мальцева $M(\bar{\mathbb{F}})$ над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{F}}$ поля $\mathbb{F}$ с тем же базисом $\{e_1, \ldots, e_7\}$, а её дифференцирования — как ограничения на $\mathcal{M}(\mathbb{F})$ тех дифференцирований $\mathcal{M}(\bar{\mathbb{F}})$, матрицы которых в этом базисе имеют коэффициенты из $\mathbb{F}$. Поэтому любое йорданово дифференцирование D алгебры $\mathcal{M}(\mathbb{F})$, $\operatorname{ad}_D^4 \operatorname{Lie}\big(\mathcal{M}(\mathbb{F})\big) = \{0\}$, продолжается до йорданова дифференцирования алгебры $\mathcal{M}(\bar{\mathbb{F}})$, $\operatorname{ad}_D^4 \operatorname{Lie}\big(\mathcal{M}(\bar{\mathbb{F}})\big) = \{0\}$, и $\operatorname{rk} D^2 \leqslant 1$. □

Оставляя в стороне описание конструкций центроида Мартиндейла (расширенного центроида) и центрального замыкания полупервичной алгебры из [17, 23, 24, 28, 37], приведём необходимые нам сведения о первичных нелиевых алгебрах Мальцева.

Центральное замыкание $P(R)$ любой первичной нелиевой алгебры Мальцева без 2-кручения R над кольцом F изоморфно простой алгебре Мальцева $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ над её центроидом Мартиндейла $\operatorname{CM}(R)$ для некоторых $0 \neq \alpha, \beta, \gamma \in \operatorname{CM}(R)$ (см. [18, 19]). При этом центроид $\operatorname{CM}(R) = \operatorname{CM}\big(P(R)\big)$ является полем и совпадает с полем частных в нём центра $Z\big(M(R)\big)$ алгебры умножений $M(R)$ алгебры R (см. [27, теорема 1.7]). Скалярное расширение $\overline{P(R)}$ алгебры $P(R)$ над алгебраическим замыканием $\overline{\operatorname{CM}(R)}$ поля $\operatorname{CM}(R)$ изоморфно расщепляемой простой алгебре Мальцева $\mathcal{M}\big(\overline{\operatorname{CM}(R)}\big)$ над полем $\overline{\operatorname{CM}(R)}$ (см. [15, теоремы 3.8, 3.11; 28, теорема 3.9]). Все дифференцирования алгебры $\overline{P(R)}$ являются внутренними, её алгебры дифференцирований и лиевых умножений $\operatorname{Der}\big(\overline{P(R)}\big)$ и $\operatorname{Lie}\big(\overline{P(R)}\big)$ — простые алгебры Ли типов G_2 и B_3, $\overline{P(R)}$ — неприводимый $\operatorname{Der}\big(\overline{P(R)}\big)$-модуль (см. [6, с. 156, 258; 15, доказательство предложения 5.1; 36, ч. 8, (2.17)]).

В дальнейшем при обращении к этим фактам мы будем рассматривать R в качестве F-подалгебры алгебры $\overline{P(R)}$, элементы которой порождают $\overline{P(R)}$ как $\overline{\operatorname{CM}(R)}$-пространство, и обозначать внутренние дифференцирования R и их однозначно определённые продолжения до дифференцирований $\overline{P(R)}$ одинаковыми символами.

Мы будем называть внутреннее йорданово дифференцирование D алгебры Мальцева R *сильно йордановым*, если $D^2 \neq 0$ и $\operatorname{ad}_D^4 \operatorname{Lie}(R) = \{0\}$.

Следствие 1.6. *Йорданова алгебра R_D первичной нелиевой алгебры Мальцева R без 2-кручения над кольцом F по её сильно йорданову дифференцированию D является ассоциативной коммутативной алгеброй без делителей нуля, образы в R_D ненулевых идеалов R являются её ненулевыми идеалами.*

Доказательство. Продолжение $D \in \mathrm{Der}\big(\overline{P(R)}\big)$ дифференцирования D наследует его свойства, $D^2 \neq 0$ и $\mathrm{ad}_D^4 \mathrm{Lie}\big(\overline{P(R)}\big) = \{0\}$. Йорданова алгебра R_D является F-подалгеброй йордановой алгебры $\overline{P(R)}_D \cong \overline{\mathrm{CM}(R)}$ (см. замечание 1.5). Ненулевые идеалы алгебры R порождают ненулевые идеалы алгебры $\overline{P(R)}$, равные $\overline{P(R)}$, ввиду её простоты. $\square$

Перечислим теперь используемые нами условия алгебраичности элементов алгебр над идеалом I основного кольца F.

Элемент x алгебры R над кольцом F, имеющий ассоциативные степени, называется *целым* (*в смысле Ширшова*) *над идеалом* I (*степени не выше* $n \geqslant 1$), если ${}_xf(x) = 0$ для некоторого многочлена

$$ {}_xf(t) = t^n + {}_xf_{n-1}t^{n-1} + \ldots + {}_xf_1 t \in F[t], \quad {}_xf_i \in I. $$

Если $I = \{0\}$, такой элемент x называется *нильпотентным* или *ниль-элементом* (*индекса не выше* n). Эти понятия будут применяться далее только к элементам ассоциативных и линейных йордановых алгебр.

Элемент x антикоммутативной алгебры R называется *сильно алгебраическим над идеалом* I (*степени не выше* $n \geqslant 1$), если оператор умножения r_x является целым над I (степени не выше n) элементом её алгебры умножений $M(R)$, и *алгебраическим над* I, если для любого $y \in R$ найдётся

$$ {}_{y,x}f(t) = t^{n_{y,x}} + {}_{y,x}f_{n_{y,x}-1}t^{n_{y,x}-1} + \ldots + {}_{y,x}f_1 t \in F[t], \quad n_{y,x} \geqslant 1, \quad {}_{y,x}f_i \in I, $$

такой что ${}_{y,x}f(r_x)y = 0$. Сильно алгебраические (степени не выше n) и алгебраические над идеалом $I = \{0\}$ элементы называются *энгелевыми* (*n-энгелевыми*) и *слабо энгелевыми* или *ниль-элементами*. Алгебры Мальцева (йордановы алгебры) над кольцом F, все элементы которых являются алгебраическими (целыми) над идеалом I, называются *алгебраическими* (*целыми*) *над* I (*ниль-алгебрами* при $I = \{0\}$). Алгебры Мальцева над кольцом F, состоящие из сильно алгебраических над идеалом I элементов (степени не выше n), называются *алгебрами с алгебраическим над* I *регулярным* (*присоединённым* в случае алгебр Ли) *представлением* (*степени не выше* n) (*энгелевыми* (*n-энгелевыми*) *алгебрами* при $I = \{0\}$).

Используя любое из приведённых здесь условий алгебраичности без указания идеала I кольца F, мы будем предполагать, что речь идёт об $I = F$.

По аналогии с алгебрами Ли (см. [5, замечание 2.1]) справедливо следующее замечание.

Замечание 1.7. Пусть R_D — йорданова алгебра алгебры Мальцева без 6-кручения R над кольцом F по её йорданову дифференцированию D, I — идеал F, x — элемент R, такой что элемент Dx является алгебраическим над I.

Тогда образ $\bar{x} = x + \operatorname{Ker} D^2$ элемента x в алгебре R_D является целым над идеалом I. Следовательно, если алгебра R является алгебраической над идеалом I (ниль-алгеброй при $I = \{0\}$), алгебра R_D является целой над I (ниль-алгеброй).

Применяя следствие 1.6, мы получаем отсюда следствие 1.8.

Следствие 1.8. *Йорданова алгебра R_D первичной нелиевой алгебраической алгебры Мальцева R над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, по её сильно йорданову дифференцированию D является полем, алгебраичным над $\mathbb{F}$.*

Замечание 1.9. Любое целое над идеалом I кольца F дифференцирование D алгебры R над F является сильно алгебраическим над I элементом её алгебры дифференцирований $\operatorname{Der}(R)$.

Доказательство. Для любой ассоциативной коммутативной алгебры B над кольцом F с конечной системой порождающих X следующие условия эквивалентны:

1) все элементы X целые над идеалом I;
2) алгебра B конечна над I, т. е. конечно порождена как F-модуль и нильпотентна по модулю идеала IB, состоящего из конечных сумм элементов hb, $h \in I$, $b \in B$;
3) алгебра B является целой над I (см. [8, лемма 8, с. 131]).

Отсюда следует, что целостность над идеалом I элемента a ассоциативной алгебры A над кольцом F равносильна целостности над I коммутативной подалгебры $\langle l_a, r_a\rangle$ её алгебры умножений $M(A)$, порождённой операторами левого и правого умножения l_a и r_a. Поэтому целому над идеалом I элементу a отвечает целое над I (как элемент $M(A)$) внутреннее дифференцирование $\operatorname{ad}_a = l_a - r_a \in \operatorname{Inder}(A)$. Остаётся применить данный вывод к алгебре $\operatorname{End}_F(R)$ и её элементу D. □

Для любых алгебры Мальцева без 6-кручения R над кольцом F и элементов $x, y \in R$ определим внутреннее дифференцирование $D(x,y)$ и оператор $\Delta(x,y)$:

$$D(x,y) = [r_y, r_x] + r_{xy} = \Delta(x,y) + 2r_{xy},$$

$\Delta(x,y)z = J(z,x,y) = (zx)y + (xy)z + (yz)x$, $z \in J$. Тогда с учётом того, что алгебра R бинарно лиева, для всех $x, y, z \in R$, $D \in \operatorname{Der}(R)$ и $k \geqslant 0$

$$[\Delta(x,y), r_z] = r_{\Delta(x,y)z} + 2\Delta(xy,z),$$

$$[\Delta(x,y), r_{xy}] = \big[[r_y, r_x], r_{xy}\big] = r_{\Delta(x,y)xy} + 2\Delta(xy,xy) = r_{J(xy,x,y)} = 0,$$

$$\operatorname{ad}_D^k D(x,y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D(D^i x, D^{k-i} y),$$

$$(D(x,y) - 2r_{xy})^{k+1} = (-3)^k (D(x,y) - 2r_{xy}) r_{xy}^k$$

и, в частности, $D(x,y)^2 - D(x,y)r_{xy} - 2r_{xy}^2 = 0$ (см. [36, (2.33), (2.34)]). Следовательно, операторы $D(x,y)$ и r_{xy} порождают коммутативную подалгебру $\langle D(x,y), r_{xy}\rangle$ алгебры умножений $M(R)$ алгебры R, причём они порождают её как $\langle r_{xy}, \mathrm{Id}_R\rangle$-модуль и в случае $1/2 \in F$ как $\langle D(x,y), \mathrm{Id}_R\rangle$-модуль, где Id_R — тождественный эндоморфизм R. Опираясь на доказательство замечания 1.9, можно сделать следующее замечание.

Замечание 1.10. Дифференцирование $D(x,y)$, $x, y \in R$, является целым над идеалом I кольца F с $1/2$, если и только если элемент $xy \in R$ сильно алгебраичен над I.

Лемма 1.11. *Если алгебра внутренних дифференцирований* $\mathrm{Inder}(R)$ *первичной алгебры Мальцева без 2-кручения* R *над кольцом* F *содержит ненулевые 3-энгелевы (йордановы) элементы, то* R *обладает сильно йордановыми дифференцированиями.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть ситуацию, когда центральное замыкание $P(R)$ алгебры R и его скалярное расширение $\overline{P(R)}$ над алгебраическим замыканием $\overline{\mathrm{CM}(R)}$ её центроида $\mathrm{CM}(R)$, $\mathrm{char}\,\mathrm{CM}(R) \neq 2, 3$, обладают свойствами из наблюдения перед следствием 1.6 (с учётом [18] и изоморфизма $R \cong \mathrm{Inder}(R)$, если R — алгебра Ли). Стоит также отметить, что $D(x,y) \neq 0$ для любых невырожденной алгебры Мальцева без 2-кручения и её элементов x и y, $xy \neq 0$ (иначе $r_{xy}^2 = 0$ и $xy = 0$). В частности, это верно для алгебр R, $P(R)$ и $\overline{P(R)}$ (см. доказательство теоремы 1.3).

Пусть алгебра $\mathrm{Inder}(R)$ содержит йорданов элемент

$$D \neq 0, \quad \mathrm{ad}_D^3 \mathrm{Inder}(R) = \{0\}.$$

Он однозначно продолжается до элемента

$$D \in \mathrm{Der}\bigl(\overline{P(R)}\bigr), \quad \mathrm{ad}_D^3 \mathrm{Der}\bigl(\overline{P(R)}\bigr) = \{0\}.$$

Поскольку по теореме плотности конечномерная алгебра $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{CM}(R)}}\bigl(\overline{P(R)}\bigr)$ порождается элементами своей лиевой подалгебры $\mathrm{Der}\bigl(\overline{P(R)}\bigr)$,

$$\mathrm{ad}_D^m \mathrm{End}_{\overline{\mathrm{CM}(R)}}\bigl(\overline{P(R)}\bigr) = \{0\}$$

для некоторого $m \geqslant 3$ (см. [7, § II.2]; $m \geqslant 3$ ввиду невырожденности алгебры $\mathrm{Lie}\bigl(\overline{P(R)}\bigr)$ (см. теорему 1.3, [34, теорема 2.4; 35])). Выбрав $\mu \in \overline{\mathrm{CM}(R)}$ и $0 \neq a \in \overline{P(R)}$, $Da = \mu a$, мы получаем, что

$$(\mathrm{ad}_D^m T)a = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} D^i T D^{m-i} a = \bigl(D - \mu\,\mathrm{Id}_{\overline{P(R)}}\bigr)^m T a = 0$$

для всех $T \in \mathrm{End}_{\overline{\mathrm{CM}(R)}}\bigl(\overline{P(R)}\bigr)$, $\bigl(D - \mu\,\mathrm{Id}_{\overline{P(R)}}\bigr)^m = 0$, и

$$\mathrm{ad}_D^3 D(a,b) = D\bigl(a, \bigl(D + \mu\,\mathrm{Id}_{\overline{P(R)}}\bigr)^3 b\bigr) = 0, \quad a\Bigl(\bigl(D + \mu\,\mathrm{Id}_{\overline{P(R)}}\bigr)^3 b\Bigr) = 0 \quad (b \in \overline{P(R)}).$$

Отсюда следует, что $\mu = 0$, $D^m = 0$, $m \leqslant 7$ (если $\mu \neq 0$, оператор $D + \mu\,\mathrm{Id}_{\overline{P(R)}}$ обратим и $a\overline{P(R)} = \{0\}$, $a = 0$?!).

Допустим, что $D^s \neq D^{s+1} = 0$, $3 \leqslant s \leqslant 6$. В таком случае $\overline{\mathrm{CM}(R)}$-пространство $\overline{P(R)}$ можно разложить в прямую сумму подпространств $\overline{P(R)} = \langle D^i v \mid i = 0, \dots, s\rangle \oplus V$, где $D^s v \neq 0$ и $V \subset \operatorname{Ker} D^{6-s}$. Так как алгебра $\overline{P(R)}$ невырожденная и

$$\mathrm{ad}_D^3 D(u,w) = D(D^3u, w) = 0, \quad (D^3u)w = D^3(uw) = 0 \qquad (u \in \overline{P(R)}, \quad w \in \operatorname{Ker} D),$$

$r^2_{D^s v}\overline{P(R)} \subseteq r_{D^s v} \operatorname{Ker} D^3 = \{0\}$, $D^s v = 0$, если $s = 5, 6$?! При $s = 4$

$$\mathrm{ad}_D^3 D(D^3v, v) = 3D(D^4v, D^2v) = 0, \quad (D^4v)(D^2v) = D^2\big((D^4v)v\big) = 0,$$

для любого $b \in \operatorname{Ker} D^2$

$$\mathrm{ad}_D^4 D(v,b) = D(D^4v, b) + 4D(D^3v, Db) = 0,$$
$$\mathrm{ad}_D^3 D(Dv,b) = D(D^4v, b) + 3D(D^3v, Db) = 0,$$
$$D(D^4v, b) = D(D^3v, Db) = 0, \quad (D^4v)b = 0$$

и, как следствие, $r^2_{D^4 v}\overline{P(R)} \subseteq r_{D^4 v} \operatorname{Ker} D^2 = \{0\}$, $D^4 v = 0$?! Если $s = 3$,

$$\mathrm{ad}_D^3 D(Dv, v) = 2D(D^3v, Dv) = 0,$$
$$(D^3v)(Dv) = D\big((D^3v)v\big) = (D^3v)(D^2v) = 0,$$

для всех $c \in \operatorname{Ker} D^3$

$$\mathrm{ad}_D^3 D(Dv, c) = 3D(D^3v, Dc) + 3D(D^2v, D^2c) = 0,$$
$$\mathrm{ad}_D^3 D(v, Dc) = D(D^3v, Dc) + 3D(D^2v, D^2c) = 0,$$
$$D(D^3v, Dc) = D(D^2v, D^2c) = 0, \quad (D^3v)(Dc) = D\big((D^3v)c\big) = (D^2v)(D^2c) = 0$$

и потому $r^2_{D^3 v}\overline{P(R)} \subseteq r_{D^3 v} \operatorname{Ker} D = \{0\}$, $D^3 v = 0$?! Значит, $D^3 = 0$ и $\mathrm{ad}_D^3 \operatorname{Lie}\big(\overline{P(R)}\big) = \{0\}$ (см. также (2)).

На алгебре $\overline{P(R)}$ определена невырожденная симметрическая билинейная форма $(\ ,\ )$, причём $(pq)q = (q,q)p - (p,q)q$ для всех $p, q \in \overline{P(R)}$ (см. [14, (21); 15, (52)]). Если $r_q^3 = 0$, то $r_q^3 p = (q,q)pq = 0$ для любого $p \in \overline{P(R)}$, $(q,q) = 0$ и $r_q^2\overline{P(R)} = \overline{\mathrm{CM}(R)}q$ (верно и обратное: из $(q,q) = 0$ следует $r_q^3 = 0$).

Предположим, что $D^2 = 0$. Тогда $D^2\overline{P(R)}^2 = \big(D\overline{P(R)}\big)^2 = \{0\}$,

$$r_{Dp} r_{Dq} r_{Ds} = r_{Dp} D r_q r_{Ds} = 0 \quad \big(p, q, s \in \overline{P(R)}\big)$$

и $\big(h(Dg)\big)(Dg) = \alpha Dg$, $\alpha = -(h, Dg) \neq 0$ для некоторых $h, g \in R$. Поэтому с учётом того, что $\big[[r_{h(Dg)}, r_{Dg}], r_{Dg}\big] = 0$ и $r_{Dg} r_{h(Dg)} r_{Dg} = (1/2)(r^2_{Dg} r_{h(Dg)} + r_{h(Dg)} r^2_{Dg})$,

$$D(h(Dg), Dg)^2 = D(h(Dg), Dg) r_{(h(Dg))(Dg)} + 2r^2_{(h(Dg))(Dg)} =$$
$$= \alpha[r_{Dg}, r_{h(Dg)}] r_{Dg} + 3\alpha^2 r^2_{Dg} = \alpha(1/2)\big(r^2_{Dg} r_{h(Dg)} - r_{h(Dg)} r^2_{Dg}\big) + 3\alpha^2 r^2_{Dg}.$$

Следовательно,

$$D(h(Dg),Dg)^2 h = -\alpha r_{h(Dg)} r_{Dg}^2 h + 3\alpha^3 Dg = \\ = -\alpha^2 r_{h(Dg)} Dg + 3\alpha^3 Dg = 4\alpha^3 Dg \neq 0,$$

$D(h(Dg),Dg)^2\overline{P(R)} = \overline{\mathrm{CM}(R)}Dg$, $D(h(Dg),Dg)^3 = 0$ и

$$\mathrm{ad}^4_{D(h(Dg),Dg)} \mathrm{Lie}\big(\overline{P(R)}\big) = \{0\}$$

(см. замечание 1.5).

Таким образом, либо дифференцирование $D \in \mathrm{Inder}(R)$, либо дифференцирование $D(h(Dg),Dg) \in \mathrm{Inder}(R)$, если $D^2 = 0$, является сильно йордановым. □

Применяя [12, лемма 2.1.1, с. 40; 30, следствие 2.3], мы сразу получаем следствие 1.12.

Следствие 1.12. *Если алгебра внутренних дифференцирований* $\mathrm{Inder}(R)$ *первичной алгебры Мальцева* R *над алгебраически замкнутым полем* $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$, *содержит ненулевые сильно алгебраические элементы, то* R *обладает сильно йордановыми дифференцированиями.*

Следствие 1.13. *Если первичная алгебра Мальцева* R *над кольцом* F *не имеет* $n!$*-кручения и её алгебра внутренних дифференцирований* $\mathrm{Inder}(R)$ *содержит ненулевые* n*-энгелевы элементы для некоторого* $n \geqslant 3$, *то* R *обладает сильно йордановыми дифференцированиями.*

Поскольку для любого $n > 1$ существует $l(n) > 1$, такой что алгебры Ли над алгебраически замкнутыми полями характектеристики $p > l(n)$, имеющие ненулевые сильно алгебраические элементы степени не выше n, содержат ненулевые энгелевы элементы (см. [5, замечание перед теоремой 3.10]), из леммы 1.11 можно также вывести следствие 1.14

Следствие 1.14. *Для любого* $n > 1$ *первичные алгебры Мальцева над алгебраически замкнутыми полями характеристики* $p > l(n)$, *алгебры внутренних дифференцирований которых содержат ненулевые сильно алгебраические элементы степени не выше* n, *обладают сильно йордановыми дифференцированиями.*

Следствие 1.15. *Если первичная нелиева алгебра Мальцева без* 2*-кручения* R *над кольцом* F *содержит ненулевые ниль-элементы, то* R *обладает сильно йордановыми дифференцированиями.*

Доказательство. Поскольку подалгебры алгебры $\overline{P(R)}$ из доказательства леммы 1.11, порождённые двумя элементами, имеют размерности не выше 3, любой ниль-элемент $x \in \overline{P(R)}$ является 3-энгелевым, $r_x^2\overline{P(R)} = \overline{\mathrm{CM}(R)}x$ (см. [14, (21); 15, (52)]). Если $x \in R$, $r_x^2 y = -(y,x)x \neq 0$ для некоторого $y \in R$, то, применяя рассуждение из окончания доказательства леммы 1.11 для $h = y$ и $Dg = x$, мы получаем, что дифференцирование $D(yx,x) \in \mathrm{Inder}(R)$ является сильно йордановым. □

Для любых алгебраического элемента x антикоммутативной алгебры R над кольцом F и конечного подмножества $Y \subset R$ элементы $r_x^k y$, $y \in Y$, $k \geqslant 0$, порождают конечно порождённый r_x-инвариантный подмодуль M F-модуля R, ограничение на который $r_x|_M$ оператора r_x является целым элементом алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(M)$ (см. [2, замечание 1.5]). Поэтому алгебраические элементы любой первичной нелиевой алгебры Мальцева без 2-кручения R над кольцом F являются сильно алгебраическими над F элементами R и её центрального $P(R)$ (достаточно взять в качестве Y базис $\{y_1, \ldots, y_7\}$, $y_i \in R$, алгебры $P(R)$).

Следствие 1.16. *Если первичная нелиева алгебра Мальцева R над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$, содержит ненулевые алгебраические элементы, то R обладает сильно йордановыми дифференцированиями.*

Доказательство. Можно считать, что алгебра R содержит сильно алгебраический неэнгелев элемент x (см. следствие 1.15). Так как оператор умножения r_x в алгебре $\overline{P(R)}$ из доказательства леммы 1.11 аннулируется некоторым многочленом $0 \neq f(t) \in \mathbb{F}[t]$ и многочленом $t^3 - (x,x)t \in \overline{\mathrm{CM}(R)}[t]$, $(x,x) = \alpha^2$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$, $\overline{\mathrm{CM}(R)}$-пространство $\overline{P(R)}$ является прямой суммой подпространств $V_\beta = \bigl\{y \in \overline{P(R)} \mid yx = \beta y\bigr\}$, $\beta = 0, \pm\alpha$, и любое её r_x-инвариантное $\mathbb{F}$-подпространство V разлагается в прямую сумму подпространств $V = (V \cap V_0) \oplus (V \cap V_\alpha) \oplus (V \cap V_{-\alpha})$ (см. [14, (21); 15, (52)]). Для всех $x_{\pm\alpha}, x'_{\pm\alpha} \in V_{\pm\alpha}$ и $x_0 \in V_0$

$$
\begin{gathered}
x_{\pm\alpha} x_{\mp\alpha} \in V_0, \quad x_{\pm\alpha} x'_{\pm\alpha} \in V_{\mp\alpha}, \quad x_{\pm\alpha} x_0 \in V_{\pm\alpha}, \\
(x'_{\pm\alpha} x_{\pm\alpha}) x_{\pm\alpha} = (x_{\pm\alpha}, x_{\pm\alpha}) x'_{\pm\alpha} - (x'_{\pm\alpha}, x_{\pm\alpha}) x_{\pm\alpha} \in V_0, \\
(x'_{\pm\alpha} x_{\pm\alpha}) x_{\pm\alpha} = (x_{\pm\alpha}, x_{\pm\alpha}) x'_{\pm\alpha} x_{\pm\alpha} = 0, \quad r^3_{x_{\pm\alpha}} = 0
\end{gathered}
$$

(см. [15, п. 1.5, (52)]). Следовательно, алгебра R имеет ненулевые 3-энгелевы элементы (в частности, ими являются ненулевые элементы подпространств $R \cap V_{\pm\alpha}$) и сильно йордановы дифференцирования (см. следствие 1.15). □

2. Алгебры Мальцева с алгебраическим регулярным представлением

Обобщение на алгебры Мальцева теоремы Зельманова из [11] и теоремы 3.11 из [5] мы начнём со следующего варианта предложения 5.1 из [30].

Лемма 2.1. *Первичная нелиева алгебра Мальцева R над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$, конечномерна (и, как следствие, проста) тогда и только тогда, когда R обладает сильно йордановым дифференцированием D, йорданова алгебра R_D по которому является целой.*

Доказательство. Достаточно заметить, что при выполнении любого из этих условий алгебра R равна своему центральному замыканию $P(R)$, её центроид

$\mathrm{CM}(R)$ совпадает с центром $Z\big(M(R)\big)$ алгебры умножений $M(R)$ и изоморфен полю $\mathbb{F}$, $R = P(R) \cong \mathcal{M}(\mathbb{F})$ и $\mathrm{CM}(R) = Z\big(M(R)\big) = \mathbb{F}\,\mathrm{Id}_R$ (см. наблюдения до и после замечания 1.5). Если алгебра R конечномерна, это следует из алгебраичности поля $\mathrm{CM}(R)$ над полем $\mathbb{F}$. При наличии дифференцирования D алгебры R с указанными здесь свойствами йорданова алгебра R_D изоморфна полю $\mathbb{F}$ (см. следствие 1.6). Следовательно, для любых $0 \neq \psi \in Z\big(M(R)\big)$ и $x \in R \backslash \mathrm{Ker}\, D^2$ найдётся $\alpha \in \mathbb{F}$, при котором $\psi x - \alpha x \in \mathrm{Ker}\, D^2$, $(\psi - \alpha\,\mathrm{Id}_R) D^2 x = 0$ и $\psi = \alpha\,\mathrm{Id}_R$. □

Лемма 2.2. *Любая первичная нелиева алгебраическая алгебра Мальцева R над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$, проста и локально конечномерна, её центроид $\mathrm{CM}(R)$ является алгебраическим расширением $\mathbb{F}$.*

Доказательство. Мы можем рассматривать алгебру R в качестве $\mathbb{F}$-подалгебры её скалярного расширения $\bar{R}$ над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{F}}$ поля $\mathbb{F}$, выделить при помощи леммы Цорна максимальный идеал M среди всех идеалов алгебры $\bar{R}$, имеющих нулевое пересечение с R, и отождествить R с её образом в фактор-алгебре $R' = \bar{R}/M$. Алгебра R' является первичной нелиевой алгеброй Мальцева над полем $\bar{\mathbb{F}}$ и порождается как $\bar{\mathbb{F}}$-пространство элементами своей $\mathbb{F}$-подалгебры R (первичность R' обеспечивает выбор M). Так как элементы алгебры R являются сильно алгебраическими над полем $\mathbb{F}$ элементами алгебры R', R' имеет сильно йордановы дифференцирования, элементы её йордановых алгебр по ним являются $\bar{\mathbb{F}}$-линейными комбинациями их целых элементов (образов в них элементов R), и, как следствие, эти йордановы алгебры изоморфны полю $\bar{\mathbb{F}}$ (см. следствие 1.16 и наблюдение перед ним, следствие 1.6, замечание 1.7). Поэтому алгебра R' проста, конечномерна и локально конечномерна над полем $\mathbb{F}$, её центроид $\mathrm{CM}(R')$ изоморфен полю $\bar{\mathbb{F}}$ (см. лемму 2.1 и [5, лемма 3.4]).

Поскольку центр $Z\big(M(R)\big)$ алгебры умножений $M(R)$ алгебры R вкладывается над полем $\mathbb{F}$ в поле $\mathrm{CM}(R')$ ($M(R)$ можно отождествить с $\mathbb{F}$-подалгеброй алгебры $M(R')$), он алгебраичен над $\mathbb{F}$ и является полем. Остаётся заметить, что центроид $\mathrm{CM}(R)$ алгебры R совпадает с полем $Z\big(M(R)\big)$, а R — со своим центральным замыканием $P(R)$ (см. наблюдения после замечания 1.5; алгебраичность $\mathrm{CM}(R)$ над $\mathbb{F}$ можно также вывести с помощью [17, предложение 4.1, с. 49]). При этом $R = P(R)$ является простой алгеброй не только над полем $\mathrm{CM}(R) = Z\big(M(R)\big)$, но и над полем $\mathbb{F}$. □

В случае бесконечного поля $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0, p > 7$, алгебра R' из доказательства леммы 2.2 имеет алгебраическое регулярное представление над $\mathbb{F}$. Действительно, степени r_z^s, $s \geqslant 1$, оператора умножения r_z на любой элемент $z \in R'$, $z = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k$, $\alpha_i \in \bar{\mathbb{F}}$, $y_i \in R$, $k \geqslant 1$, представимы в виде

$$r_z^s = \sum_{\substack{0 \leqslant n_1, \ldots, n_k \leqslant s,\\ n_1 + \ldots + n_k = s}} \alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_k^{n_k} r_{(n_1, \ldots, n_k)}, \quad r_{(n_1, \ldots, n_k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} r_{y_{i_{\sigma(1)}}} \cdots r_{y_{i_{\sigma(s)}}},$$

где $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_s \leqslant k$, $n_j = |\{l \mid i_l = j\}|$, $\mathfrak{S}_s$ — симметрическая группа степени s. Бесконечность поля $\mathbb{F}$ позволяет выразить операторы $\{r_{(n_1,\ldots,n_k)}\}$ через $\mathbb{F}$-линейные комбинации операторов $r^s_{\beta_1 y_1+\ldots+\beta_k y_k}$, $\beta_i \in \mathbb{F}$ (см. [30, лемма 6.1]). Поэтому все степени оператора r_z являются $\bar{\mathbb{F}}$-линейными комбинациями степеней операторов умножения на элементы алгебры R. Последнее верно как для операторов умножения в алгебре R', так и для их продолжений до операторов умножения в её центральном замыкании $P(R')$. Следовательно, поскольку элементы алгебры R являются сильно алгебраическими над полем $\mathbb{F}$ элементами алгебры $P(R')$, степени оператора r_z являются суммами целых над полем $\bar{\mathbb{F}}$ элементов алгебры умножений $M\big(P(R')\big)$ алгебры $P(R')$, следы степеней r_z и его собственные значения входят в $\bar{\mathbb{F}}$, r_z является целым над $\bar{\mathbb{F}}$ и $\mathbb{F}$ (с учётом теоремы Гамильтона—Кэли, формул Ньютона и [5, лемма 3.4]).

Будем говорить, что алгебра Мальцева над полем $\mathbb{F}$ является *PI-алгеброй*, если она удовлетворяет тождеству, которое отвечает элементу свободной алгебры Мальцева бесконечного ранга над $\mathbb{F}$, определяющему нетривиальное лиево тождество (ср. с [5]). Используя лемму 2.2, существование и специальность локально конечного радикала LF на классах алгебраических алгебр Мальцева над кольцами с $1/2$ (см. [3,9,13]; радикал алгебр в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ называется специальным, если $\mathcal{T}$-полупростые алгебры из класса его определения являются подпрямыми произведениями первичных $\mathcal{T}$-полупростых алгебр), мы можем обобщить теорему 1 из [11], теорему 1.1 из [30] (см. также [5, предложение 3.2]) и теорему 3.11 из [5] в следующем виде.

Теорема 2.3. *Любая PI-алгебра Мальцева с алгебраическим регулярным представлением над полем* $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, *локально конечномерна, её ненулевые сильно первичные фактор-алгебры* (*при их наличии*) *просты и имеют ограниченные размерности над их центроидами, которые являются алгебраическими расширениями* $\mathbb{F}$.

Теорема 2.4. *Для каждого* $n \geqslant 1$ *существует* $q(n) \geqslant n$, *такое что любая алгебра Мальцева с алгебраическим регулярным представлением степени не выше* n *над полем* $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} > q(n)$, *локально конечномерна, её ненулевые первичные фактор-алгебры* (*при их наличии*) *имеют центральные замыкания ограниченной размерности над их центроидами Мартиндейла, которые являются алгебраическими расширениями* $\mathbb{F}$.

Напомним, что *радикалом Кострикина* алгебр Мальцева называется отображение, ставящее в соответствие алгебрам Мальцева наименьшие среди их идеалов, фактор-алгебры по которым невырожденны (их *радикалы Кострикина*).

Замечание 2.5. Любая ниль-PI-алгебра Мальцева над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, ненулевые фактор-алгебры которой или (и) их алгебры внутренних дифференцирований содержат ненулевые энгелевы элементы, локально нильпотентна и равна своему радикалу Кострикина.

Доказательство. По [5, следствие 2.11; 20, теорема 3] такая алгебра локально нильпотентна, её полупервичные фактор-алгебры являются алгебрами Ли и совпадают со своими радикалами Кострикина (см. также замечание1.7, следствия 1.13, 1.15, 1.8). Остаётся заметить, что невырожденные алгебры Мальцева полупервичны. □

Радикал в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ называется *идеально наследственным*, если $\mathcal{T}(I) = I \cap \mathcal{T}(R)$ для любых алгебры R из класса его определения и её идеала I. Идеально наследственные специальные радикалы называются *кручениями*.

Лемма 2.6. *Радикал Кострикина K является идеально наследственным на замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе алгебр Мальцева $\mathfrak{M}$ над кольцом F с $1/6$, если и только если он является идеально наследственным на классе алгебр Ли $\mathfrak{M}_{\mathrm{Lie}}$ из $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть R — алгебра из класса $\mathfrak{M}$, I — пересечение всех первичных идеалов R, фактор-алгебры по которым являются алгебрами Ли, $\mathrm{Rad}(R)$ — первичный радикал R (пересечение всех её первичных идеалов и наименьший из идеалов, фактор-алгебры по которым полупервичны (см. [8, предложение 4, с. 192, теорема 6, с. 193]). Тогда ввиду невырожденности первичных нелиевых алгебр Мальцева над кольцом F

$$\mathrm{Rad}(R) = K(R) \cap I, \quad K\big(R/\mathrm{Rad}(R)\big) = K(R)/\mathrm{Rad}(R) \cong (K(R)+I)/I,$$

где $(K(R)+I)/I \subseteq K(R/I)$, $R/I \in \mathfrak{M}_{\mathrm{Lie}}$. Поэтому если радикал Кострикина K является идеально наследственным на классе $\mathfrak{M}_{\mathrm{Lie}}$,

$$K\big(K(R)/\mathrm{Rad}(R)\big) = K\big(K(R)\big)/\mathrm{Rad}(R) = K(R)/\mathrm{Rad}(R), \quad K\big(K(R)\big) = K(R),$$

и для любого идеала J алгебры $K(R)$

$$K\Big(\big(J+\mathrm{Rad}(R)\big)/\mathrm{Rad}(R)\Big) = \big(J+\mathrm{Rad}(R)\big)/\mathrm{Rad}(R) = \big(K(J)+\mathrm{Rad}(R)\big)/\mathrm{Rad}(R),$$

$J = K(J)$ (с учётом $J \cap \mathrm{Rad}(R) \subseteq \mathrm{Rad}(J)$). Следовательно, в данном случае K является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$ и класс K-радикальных алгебр из $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия идеалов (см. [4]). Радикал K является также идеально наследственным на классе $\mathfrak{M}$, поскольку класс невырожденных алгебр Мальцева над кольцом F замкнут относительно взятия идеалов (см. [21, лемма 4]). □

Следуя [33], определим функцию $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n,m) \geqslant 3$ при всех $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, такую что для любой алгебры Ли L над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$,

$$r_x^{f(n,m)} = r_{r_{y_k}\cdots r_{y_1}x}^{f(n,m)} = 0 \quad (x \in B_n(L),\ y_i \in L,\ k = 1,\ldots,m,\ n,m \geqslant 1),$$

где $B_n(L)$ — множество элементов вида $\sum\limits_{i=1}^{n} r_{y_{ik_i}}\cdots r_{y_{i1}}x_i$, $0 \leqslant k_i \leqslant n$, $x_i, y_{ij} \in L$, $r_{x_i}^2 = 0$, $r_{y_{ik_i}}\cdots r_{y_{i_1}}x_i = x_i$ при $k_i = 0$ (см. [33, лемма 3.4]). Положим $q_i = f(i{+}1, 3i{+}5)$ для всех $i \geqslant 0$. Цепочку элементов $\{x_i\}_{i\geqslant 0}$ алгебры Мальцева R, в которой

$$x_{i+1} \in \{r_{x_i}^{q_i} z_i,\ r_{x_i y_i}^{q_i} z_i,\ r_{(x_i y_i) u_i}^{q_i} z_i \mid y_i, z_i, u_i \in R\} \quad (i \geqslant 0),$$

мы будем называть K-*цепью*; элемент $r \in R$, такой что любая K-цепь $\{x_i\}_{i \geqslant 0}$ с $x_0 = x$ стабилизируется нулём на некотором шаге $k \geqslant 0$, $x_i = 0$ при $i \geqslant k$, мы будем называть *строго K-разрешимым*. Отметим, что образы строго K-разрешимых элементов и K-цепей алгебры R при действии любого гомоморфизма являются строго K-разрешимыми элементами и K-цепями образа R при его действии.

Замечание 2.7. Для любых первичной нелиевой алгебры Мальцева без 2-кручения R над кольцом F, элемента $0 \neq x \in R$ и бесконечной последовательности натуральных чисел $\{n_i\}_{i \geqslant 0}$ существует бесконечная цепочка элементов $\{x_i\}_{i \geqslant 0}$, в которой $x_0 = x$ и $0 \neq x_{i+1} \in \{r_{x_i}^{n_i} z_i,\ r_{x_i y_i}^{n_i} z_i \mid y_i, z_i \in R\}$, $i \geqslant 0$.

Доказательство. Возможность построения такой цепочки $\{x_i\}_{i \geqslant 0}$ основывается на следующих двух наблюдениях. Для любого $0 \neq x \in R$ либо $(x,x) \neq 0$, либо $(x,x) = 0$ и найдётся $y \in R$, для которого $(x,y) \neq 0$, $(xy, xy) = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \neq 0$, где $(\ ,\ )$ — невырожденная форма на алгебре $\overline{P(R)}$ из доказательства леммы 1.11 (см. [14, (22), 15, (53)]). Если $0 \neq x, y \in R$, $(x,x) \neq 0$ и y линейно независим с x над полем $\overline{\mathrm{CM}(R)}$ (выбор такого y возможен, так как $\dim_{\overline{\mathrm{CM}(R)}} \overline{P(R)} = 7$), то $r_x^2 y = (x,x)y - (x,y)x \neq 0$, $yx \neq 0$ и $r_x^{2+k} y = (x,x) r_x^k y \neq 0$ при всех $k \geqslant 1$. □

Опираясь на [33, теорема 3.10, следствие 3.9], можно доказать следующую лемму.

Лемма 2.8. *На классах алгебр Мальцева над полями нулевой характеристики радикал Кострикина K является кручением, причём радикал $K(R)$ любой алгебры R из этих классов совпадает с множеством её строго K-разрешимых элементов.*

Доказательство. На классах алгебр Мальцева над полями нулевой характеристики радикал Кострикина K является идеально наследственным (см. лемму 2.6 и [11]). Пусть R — алгебра Мальцева над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$, $K'(R)$ — пересечение всех первичных идеалов R, фактор-алгебры по которым невырожденны, и $K''(R)$ — множество её строго K-разрешимых элементов. В [33] установлено, что $K(R) = K'(R) = K''(R)$, если R — алгебра Ли. Покажем, что это верно также в нелиевом случае. Для каждого элемента $r \in R \setminus K''(R)$ можно выбрать бесконечную K-цепь ненулевых элементов $\{r_i\}_{i \geqslant 0}$ с $r_0 = r$ и максимальный идеал P среди идеалов алгебры R, не содержащих элементов $\{r_i\}_{i \geqslant 0}$ (существование P следует из леммы Цорна). Идеал P является первичным, поскольку в любой строго содержащий его идеал алгебры R входят все элементы $\{r_i\}_{i \geqslant 0}$ начиная с какого-то номера, $r_{i+1} \in (r_i)_R^2$, $i \geqslant 0$, где $(A)_R$ — идеал R, порождённый множеством A. Если $K(R/P) \neq 0$, то R/P — алгебра Ли, $r_p + P \in K(L/P) = K''(L/P)$ и $r_q \in P$ при некоторых $p \geqslant 0$ и $q \geqslant p$?!

Поэтому $R \setminus K''(R) \subseteq R \setminus K'(R)$, $K(R) \subseteq K'(R) \subseteq K''(R)$. Остаётся заметить, что в первичных нелиевых алгебрах Мальцева без 2-кручения нет ненулевых строго K-разрешимых элементов (см. замечание 2.7) и

$$\mathrm{Rad}(R) = \big(K''(R)\big)_R \cap I, \quad \Big(\big(K''(R)\big)_R + I\Big)/I \subseteq K(R/I) = K''(R/I),$$
$$K\Big(\Big(\big(K''(R)\big)_R + I\Big)/I\Big) = \Big(\big(K''(R)\big)_R + I\Big)/I \cong \big(K''(R)\big)_R / \mathrm{Rad}(R),$$
$$K\Big(\big(K''(R)\big)_R\Big) = \big(K''(R)\big)_R \subseteq K(R), \quad K(R) = K'(R) = K''(R),$$

где I — пересечение всех первичных идеалов R, фактор-алгебры по которым являются алгебрами Ли. $\square$

Сходным образом лемма 2.6 позволяет записать теорему 2.14 и следствие 2.15 из [4] (предложение 2.15 из [5]) в виде следующего утверждения.

Предложение 2.9. *При любом $n \geqslant 1$ на классах алгебраических алгебр Мальцева степени не выше n над кольцами с $1/k(n)!$, $k(1) = 1$, $k(2) = 3$, $k(3) = k(4) = 7$ и $k(n) = n + 2$ при $n \geqslant 5$, радикал Кострикина K совпадает с первичным радикалом Rad и является кручением.*

Используя лемму 2.8, специальность слабо разрешимого радикала T, существование и специальность локально конечного и разрешимого радикала LSF на классах PK-алгебраических алгебр Мальцева над кольцами с $1/2$ (см. [2,3,13]) и теорему 3 из [22], можно получить также следующую версию теоремы 2.9 из [5] для алгебр Мальцева.

Предложение 2.10. *Если R — алгебра Мальцева над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$, такая что для некоторого расширения $\mathbb{F}'$ поля $\mathbb{F}$ ненулевые сильно первичные фактор-алгебры её скалярного расширения над полем $\mathbb{F}'$ (при их наличии) содержат ненулевые сильно алгебраические над $\mathbb{F}'$ элементы и являются PI-алгебрами, то она имеет равные радикал Кострикина $K(R)$ и слабо разрешимый радикал $T(R)$,*

$$K(R) = \mathcal{T}_{L\mathfrak{S}}(R) = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{S})}(R) = T(R).$$

Если алгебра R является PK-алгебраической, радикалы $K(R)$ и $T(R)$ равны также её локально конечному и разрешимому и локально разрешимому радикалам $\mathrm{LSF}(R)$ и $\mathrm{LS}(R)$.

Дополнение

В заключение приведём ещё один вариант доказательства леммы 2.2, основанный на известных свойствах йордановых алгебр алгебр Ли.

Замечание 2.11. Элемент x линейной йордановой алгебры J над кольцом F с $1/2$ является целым над идеалом I кольца F, если и только если оператор умножения r_x является целым над I.

Доказательство. Подалгебра $M^J(\langle x\rangle)$ алгебры умножений $M(J)$ алгебры J, которую порождают операторы умножения на элементы подалгебры $\langle x\rangle$, порождённой любым элементом $x \in J$, коммутативна и совпадает с подалгеброй, порождённой операторами умножения r_x и r_{x^2}, $M^J(\langle x\rangle) = \langle r_x, r_{x^2}\rangle$ (см. [8, предложение 2, с. 86]). Кроме того,

$$2r_{x^k}r_{x^l}r_{x^m} + r_{x^{k+l+m}} = r_{x^k}r_{x^{l+m}} + r_{x^l}r_{x^{k+m}} + r_{x^m}r_{x^{k+l}} \quad (k, l, m \geqslant 1),$$
$$r_x^j = \sum_{0\leqslant i\leqslant j/2} g_{ij}r_{x^i}r_{x^{j-i}} \quad (j \geqslant 3)$$

для некоторых $\{g_{ik}\} \subset \mathbb{Z}[1/2]$, не зависящих от выбора x, где $\mathbb{Z}[1/2]$ — подкольцо кольца F, порождённое $1/2$, $r_{x^0} = \mathrm{Id}_J$ (см. [8, (25), (26); 2, введение]). Поэтому если $f(x) = 0$ для некоторого $f(t) = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \ldots + f_1t \in F[t]$, $\deg f = n > 1$, $f_i \in I$ (случай $n = 1$ и $x = 0$ можно исключить), операторы r_{x^k}, $k = 1, \ldots, n-1$, порождают коммутативную подалгебру A алгебры $M(J)$, которая порождается как F-модуль операторами r_{x^j} и $r_{x^i}r_{x^j}$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$, $i + j \neq 0$, и нильпотентна индекса не выше $2n-1$ по модулю своего идеала IA. Следовательно, алгебра A является конечной над идеалом I и целой над I (см. доказательство замечания 1.9). Последнее означает, что целому над идеалом I элементу $x \in J$ отвечает целый над I оператор умножения r_x. Верно и обратное: если $g(r_x) = 0$, $g(t) = t^m + g_{m-1}t^{m-1} + \ldots + g_1t \in F[t]$, $m \geqslant 1$, $g_i \in I$, то $g(r_x)x = h(x) = 0$ для $h(t) = tg(t)$. $\square$

Нам также понадобится ряд сведений о локальных алгебрах ассоциативных алгебр из [25, 26, 29]. Пусть R — ассоциативная алгебра над кольцом F, a — элемент R, $R^{(a)}$ — алгебра, полученная из R заменой операции умножения на операцию $\cdot_a$, $x \cdot_a y = xay$, $x, y \in R$. Тогда $\operatorname{Ker} l_ar_a = \{x \in R \mid axa = 0\}$ — идеал алгебры $R^{(a)}$, фактор-алгебра по которому $R_a = R^{(a)}/\operatorname{Ker} l_ar_a$ называется *локальной алгеброй алгебры R по элементу a*. Алгебра R_a изоморфна алгебре aRa, полученной из F-модуля aRa введением операции умножения $\cdot$, $axa \cdot_a axy = axaya$, $x, y \in R$, при помощи изоморфизма $x + \operatorname{Ker} l_ar_a \longmapsto axa$, $x \in R$. Если $a^2 = 0$, то a — йорданов элемент алгебры Ли $R^{(-)}$, алгебра $R_a^{(-)} = R^{(-)}_{\mathrm{ad}_a}$ изоморфна алгебре $\mathrm{ad}_a^2 R^{(-)} = 2aRa$ с операцией умножения $\cdot$ при помощи изоморфизма $\bar{x} = x + \operatorname{Ker}\mathrm{ad}_a^2 \longmapsto \mathrm{ad}_a^2 x = -2axa$, $x \in R$,

$$\bar{x} \cdot_{\mathrm{ad}\,a} \bar{y} = \overline{[[a, x], y]} \longmapsto$$
$$\longmapsto -2axa \cdot -2aya = [-2axa, ay - ya] = 2(axaya + ayaxa) \quad (x, y \in R),$$

и является йордановой алгеброй (см. замечание 1.1). Кроме того, если $1/2 \in F$, алгебра $\mathrm{ad}_a^2 R^{(-)}$ совпадает с йордановой алгеброй $aRa^{(+)}$ алгебры aRa и, значит, $R_a^{(-)} \cong R_a^{(+)}$, где $A^{(+)}$ — алгебра, полученная из алгебры A над F заменой операции умножения на операцию $\cdot$, $x \cdot y = (1/2)(xy + yx)$, $x, y \in A$ (можно также определить алгебру A^+, заменив $\cdot$ на операцию $\circ$, $x \circ y = xy + yx$, $x, y \in A$).

Известно, что $*$-кососимметрические и $*$-симметрические элементы любой алгебры A с инволюцией $*$ формируют подалгебры

$$\mathrm{Skew}(A,*)=\{x\in A\mid x^*=-x\}$$

алгебры $A^{(-)}$ и

$$\mathrm{Sym}(A,*)=\{x\in A\mid x^*=x\}$$

алгебры A^+ (и $A^{(+)}$, если $A=2A$ не имеет 2-кручения).

Если R — ассоциативная алгебра с инволюцией $*$ над кольцом F с $1/2$, $a\in\mathrm{Skew}(R,*)$, $a^2=0$, то ограничение изоморфизма $\bar{x}\longmapsto -2axa$, $x\in R$, йордановых алгебр $R_a^{(-)}$ и $aRa^{(+)}$ на подалгебру $\mathrm{Skew}(R,*)_a$ алгебры $R_a^{(-)}$ является изоморфизмом $\mathrm{Skew}(R,*)_a$ и подалгебры $\mathrm{Sym}(aRa,*')$ алгебры $aRa^{(+)}$, где инволюция $*'$ действует на алгебре aRa по правилу $(axa)^{*'}=-ax^*a$, $x\in R$. Поэтому в данном случае $\mathrm{Skew}(R,*)_a\cong\mathrm{Sym}(R_a,*')$ (инволюция $*'$ определяет инволюцию на алгебре R_a, $(x+\mathrm{Ker}\,l_ar_a)^{*'}=-x^*+\mathrm{Ker}\,l_ar_a$, $x\in R$).

Йордановой алгеброй симметрической билинейной формы f на векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$ называется прямая сумма $\mathrm{J}(V,f)=\mathbb{F}\cdot 1\oplus V$ пространств $\mathbb{F}=\mathbb{F}\cdot 1$ с базисом 1 и V с операцией умножения

$$(\alpha\cdot 1+v)\cdot(\beta\cdot 1+w)=\bigl(\alpha\beta+f(v,w)\bigr)\cdot 1+(\beta v+\alpha w)\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{F},\ v,w\in V).$$

При этом 1 является единицей алгебры $\mathrm{J}(V,f)$ и для любого $x=\alpha\cdot 1+v$, $\alpha\in\mathbb{F}$, $x\in V$,

$$x^2-(x+x')x+xx'=x^2-2\alpha x+\bigl(\alpha^2-f(v,v)\bigr)\cdot 1=0,\tag{4}$$

где $x'=\alpha\cdot 1-v$.

Выводы [25, 26] и наблюдение перед следствием 1.6 позволяют доказать следующее утверждение.

Замечание 2.12. Если первичная нелиева алгебра Мальцева без 2-кручения R над кольцом F обладает сильно йордановым дифференцированием D, то выполняется одна из следующих возможностей:

1) D — йорданов элемент алгебры $\mathrm{Lie}(R)$ и

$$\mathrm{Lie}\bigl(\overline{P(R)}\bigr)_D\cong \mathrm{J}(D^2\circ X,f)\text{ —}$$

йорданова алгебра невырожденной симметрической билинейной формы f на пространстве $D^2\circ X$ над полем $\overline{\mathrm{CM}(R)}$, $X=\bigl\{G\in\mathrm{Lie}\bigl(\overline{P(R)}\bigr)\mid DGD=0\bigr\}$, $\dim_{\overline{\mathrm{CM}(R)}}D^2\circ X>1$,

$$-f(D^2\circ G,D^2\circ H)D^2=D^2GHD^2\quad(G,H\in X);$$

2) $S=\mathrm{ad}_D^3T\neq 0$ для некоторого $T\in\mathrm{Inder}(R)$ и

$$\mathrm{Lie}\bigl(\overline{P(R)}\bigr)_S\cong\mathrm{Sym}\bigl(M\bigl(\overline{P(R)}\bigr)_S,*'\bigr)\text{ —}$$

йорданова алгебра $*'$-симметрических элементов алгебры $M\bigl(\overline{P(R)}\bigr)_S$, где инволюция $*$ алгебры $M\bigl(\overline{P(R)}\bigr)$ определяется формой Киллинга $(\,,\,)_K$ на алгебре $\overline{P(R)}$, $(x,y)_K=\mathrm{tr}(r_xr_y)$, $x,y\in\overline{P(R)}$, $\dim_{\overline{\mathrm{CM}(R)}}\mathrm{Lie}\bigl(\overline{P(R)}\bigr)_S\in\{1,3\}$.

Доказательство. По умолчанию мы используем здесь обозначения из доказательства леммы 1.11. Поскольку алгебра $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{CM}(R)}}\big(\overline{P(R)}\big)$ порождается элементами своей лиевой подалгебры $\mathrm{Der}\big(\overline{P(R)}\big) = \mathrm{Inder}\big(\overline{P(R)}\big)$, она совпадает с алгеброй умножений $M\big(\overline{P(R)}\big)$ алгебры $\overline{P(R)}$. Простая невырожденная алгебра Ли $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R)}\big)$ совпадает с алгеброй Ли кососимметрических операторов на пространстве $\overline{P(R)}$ относительно формы Киллинга $(\ ,\ )_K$, т. е. $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R)}\big) = \mathrm{Skew}\big(M\big(\overline{P(R)}\big), *\big)$, где

$$(Bx, y)_K = (x, B^*y)_K \quad \big(B \in M\big(\overline{P(R)}\big),\ x, y \in \overline{P(R)}\big)$$

(см. [15, доказательство предложения 5.1]; невырожденность формы $(\ ,\ )_K$ проверяется непосредственно). Йордановы алгебры алгебры $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R)}\big)$ по её йордановым элементам (внутренним йордановым дифференцированиям) являются сильно первичными и, более того, центральными простыми алгебрами над полем $\overline{\mathrm{CM}(R)}$ размерности не выше 20 и не равной 2 (см. теорему 1.4, [32, теорема 2.2; 10, теорема 5] с учётом алгебраической замнутости поля $\overline{\mathrm{CM}(R)}$).

Первое утверждение следует из [26, теорема 4.7] и [25, следствие 5.9] (простота алгебры $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R)}\big)_D$ гарантирует невырожденность формы f).

В случае если $\mathrm{ad}_D^3 \mathrm{Lie}(R) = \mathrm{ad}_D^3 \mathrm{Inder}(R) \neq \{0\}$,

$$S = \mathrm{ad}_D^3 T = 3(DTD^2 - D^2TD) \neq 0$$

для некоторого $T \in \mathrm{Inder}(R)$,

$$S^2 = -9D^2TD^2TD^2 = -(3/2)(\mathrm{ad}_D^4 T)TD^2 = 0$$

и $\mathrm{rk}\, S \leqslant 2$, так как $\mathrm{rk}\, D^2 = 1$, $D^2\overline{P(R)} = \overline{\mathrm{CM}(R)}x$, $0 \neq x \in R$, и, значит, $S\overline{P(R)} \subseteq \overline{\mathrm{CM}(R)}x + \overline{\mathrm{CM}(R)}DTx$ (см. замечание 1.5). Поэтому $\dim_{\overline{\mathrm{CM}(R)}} M\big(\overline{P(R)}\big)_S \leqslant 4$,

$$\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R)}\big)_S \cong \mathrm{Sym}\big(M\big(\overline{P(R)}\big)_S, *'\big),$$

$\dim_{\overline{\mathrm{CM}(R)}} \mathrm{Lie}\big(\overline{P(R)}\big)_S \leqslant 3$. Заметим, что алгебра $M\big(\overline{P(R)}\big)_S$ наследует простоту алгебры $M\big(\overline{P(R)}\big)$ и, как следствие, либо $M\big(\overline{P(R)}\big)_S \cong \overline{\mathrm{CM}(R)}$, либо $M\big(\overline{P(R)}\big) \cong M_2\big(\overline{\mathrm{CM}(R)}\big)$, где $M_2\big(\overline{\mathrm{CM}(R)}\big)$ — алгебра матриц 2×2 над полем $\overline{\mathrm{CM}(R)}$. □

Другое доказательство леммы 2.2. Как и в первом доказательстве леммы 2.2, достаточно установить простоту и конечномерность алгебры R' над полем $\bar{\mathbb{F}}$. Отождествим алгебру $\mathrm{Lie}(R')$ с изоморфной ей $\bar{\mathbb{F}}$-подалгеброй алгебры $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)$, состоящей из продолжений её элементов до элементов $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)$. Так как элементы алгебры R' являются суммами её сильно алгебраических элементов ($\bar{\mathbb{F}}$-линейными комбинациями элементов алгебры с алгебраическим регулярным представлением R), элементы алгебры $\mathrm{Lie}(R')$ выражаются через суммы её сильно алгебраических элементов (см. замечания 1.9, 1.10). Кроме того, алгебра R' имеет сильно йордановы дифференцирования (см. следствие 1.16). Поэтому алгебра $\mathrm{Lie}(R')$ содержит ненулевые йордановы элементы и элементы её йордановых алгебр по ним являются суммами их целых (алгебраических) элементов (см. замечания 2.12, 1.7 и [30, предложение 4.2]).

Йорданова алгебра $\mathrm{Lie}(R')_D$ алгебры $\mathrm{Lie}(R')$ по любому её йорданову элементу D является $\bar{\mathbb{F}}$-подалгеброй йордановой алгебры $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)_D$ алгебры $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)$, элементы которой порождают $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)_D$ как $\overline{\mathrm{CM}(R')}$-пространство. Поскольку $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)_D$ — центральная простая алгебра над полем $\overline{\mathrm{CM}(R')}$, алгебра $\mathrm{Lie}(R')_D$ сильно первична и её центр $Z(\mathrm{Lie}(R')_D)$ является ненулевой $\bar{\mathbb{F}}$-подалгеброй поля $Z\big(\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)_D\big) \cong \overline{\mathrm{CM}(R')}$ (см. [10, теорема 5] и доказательство замечания 2.12). Каждый элемент $z \in Z(\mathrm{Lie}(R')_D)$ является суммой целых элементов алгебры $\mathrm{Lie}(R')_D$, а потому след $\operatorname{tr} r_z = nz$ оператора умножения r_z в алгебре $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)_D$ входит в поле $\bar{\mathbb{F}}$,

$$n = \dim_{\overline{\mathrm{CM}(R')}} \mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)_D \leqslant 20$$

(см. замечание 2.11 с учётом алгебраической замкнутости $\bar{\mathbb{F}}$, $\bar{\mathbb{F}} \subseteq \overline{\mathrm{CM}(R')}$). Значит, если $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, $p > n$, $Z(\mathrm{Lie}(R')_D) \cong \bar{\mathbb{F}}$.

В случае если $D^2 \neq D^3 = 0$, алгебру $\mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)_D$ можно отождествить с алгеброй $\mathrm{J}(D^2 \circ X, f)$ (см. замечание 2.12, [26, теорема 4.7] и [25, следствие 5.9]). Ввиду того что элемент $\alpha \cdot 1 + D^2 \circ G \in \mathrm{J}(D^2 \circ X, f)$, $\alpha \in \overline{\mathrm{CM}(R')}$, $G \in X$, является целым над полем $\bar{\mathbb{F}}$, если и только если $\alpha, f(D^2 \circ G, D^2 \circ G) \in \bar{\mathbb{F}}$, элементы поля $Z\big(\mathrm{J}(D^2 \circ X, f)\big) = \overline{\mathrm{CM}(R')} \cdot 1$ представимые в виде сумм целых над $\bar{\mathbb{F}}$ элементов $\mathrm{J}(D^2 \circ X, f)$ входят в его подполе $\bar{\mathbb{F}} \cdot 1$ и, как следствие, $Z(\mathrm{Lie}(R')_D) = \bar{\mathbb{F}} \cdot 1 \cong \bar{\mathbb{F}}$ (см. (4)).

Применяя замечание 2.12, [10, теорема 5] и [17, с. 49], мы получаем в итоге, что алгебра $\mathrm{Lie}(R')$ содержит йорданов элемент D, йорданова алгебра по которому $\mathrm{Lie}(R')_D$ центральна и проста, $\dim_{\bar{\mathbb{F}}} \mathrm{Lie}(R')_D = \dim_{\overline{\mathrm{CM}(R')}} \mathrm{Lie}\big(\overline{P(R')}\big)$. Центр $Z\big(M(R')\big)$ алгебры $M(R')$ вкладывается в центроид $\mathrm{CM}(\mathrm{Lie}(R')_D) = \bar{\mathbb{F}}\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Lie}(R')_D}$ алгебры $\mathrm{Lie}(R')_D$ ($\psi r_x = r_x \psi = r_{\psi x}$, $x \in R'$, $\psi \in Z\big(M(R')\big)$; $Z\big(M(R')\big)$-модули $M(R')$ и $\mathrm{Lie}(R')$ не имеют кручения, так как $Z\big(M(R')\big) \hookrightarrow \mathrm{CM}(R')$). Поэтому $Z\big(M(R')\big) = \bar{\mathbb{F}}\,\mathrm{Id}'_R = \mathrm{CM}(R')$, $R' = P(R')$ — простая конечномерная алгебра. □

Отметим, что в случае $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ следствие 1.16 в этом рассуждении можно заменить на следствие 1.12, причём конечномерность и простоту алгебры $\mathrm{Lie}(R')$ можно вывести из [30, предложение 5.1] (в форме предложения 3.1 из [5]), а конечномерность алгебры $M(R')$ и равенство $Z\big(M(R')\big) = \bar{\mathbb{F}}\,\mathrm{Id}'_R$ — из теоремы Пуанкаре—Биркгофа—Витта, применённой к базису $\mathrm{Lie}(R')$ из целых элементов $M(R')$. Если степень алгебраичности алгебры R ограничена и характеристика поля $\mathbb{F}$ положительна и достаточно велика, то вместо следствия 1.16 можно использовать следствие 1.14 (см. наблюдение перед следствием 1.16 и замечания 1.10, 1.9). Поэтому теоремы 2.3 и 2.4 могут быть получены на основе их исходных вариантов для алгебр Ли и свойств алгебры лиевых умножений алгебры Мальцева (её стандартной лиевой обёртывающей как тройной лиевой системы (см. [35])).

Литература

[1] Бейдар К. И., Михалёв А. В., Слинько А. М. Критерий первичности невырожденных альтернативных и йордановых алгебр // Тр. ММО. — 1987. — Т. 50. — С. 130—137.

[2] Голубков А. Ю. Локальная конечность алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 6. — С. 25—75.

[3] Голубков А. Ю. Конструкции специальных радикалов алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 1. — С. 57—133.

[4] Голубков А. Ю. Радикал Кострикина и подобные ему радикалы алгебр Ли // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 2. — С. 157—180.

[5] Голубков А. Ю. Алгебраические алгебры Ли ограниченной степени // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 5. — С. 209—242.

[6] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

[7] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[8] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[9] Жевлаков К. А., Шестаков И. П. О локальной конечности в смысле Ширшова // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 41—73.

[10] Зельманов Е. И. Первичные йордановы алгебры. II // Сиб. матем. журн. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 89—104.

[11] Зельманов Е. И. Алгебры Ли с алгебраическим присоединённым представлением // Матем. сб. — 1983. — Т. 121 (163), № 4 (8). — С. 545—561.

[12] Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986.

[13] Кузьмин Е. Н. Алгебраические множества в алгебрах Мальцева // Алгебра и логика. — 1968. — Т. 7, № 2. — С. 42—47.

[14] Кузьмин Е. Н. Алгебры Мальцева и их представления // Алгебра и логика. — 1968. — Т. 7, № 4. — С. 48—59.

[15] Кузьмин Е. Н. Структура и представления конечномерных алгебр Мальцева // Тр. Ин-та мат. СО АН СССР. Исслед. по теор. колец и алгебр. — 1989. — Т. 16. — С. 75—101.

[16] Кузьмин Е. Н., Шестаков И. П. Неассоциативные структуры // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. — 1990. — Т. 57. — С. 179—266.

[17] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

[18] Филиппов В. Т. О полупервичных алгебрах Мальцева характеристики 3 // Алгебра и логика. — 1975. — Т. 14, № 1. — С. 100—111.

[19] Филиппов В. Т. Первичные алгебры Мальцева // Матем. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 669—678.

[20] Филиппов В. Т. Об энгелевых алгебрах Мальцева // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 1. — С. 89—109.

[21] Филиппов В. Т. О ниль-элементах индекса 2 в алгебрах Мальцева. — 1980. — Деп. в ВИНИТИ. № 2499-80.

[22] Филиппов В. Т. Ниль-элементы индекса 2 в алгебрах Мальцева // Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37, № 3. — С. 358—373.

[23] Baxter W. E., Martindale W. S., 3rd. Central closure of semiprime non-associative rings // Commun. Algebra. — 1979. — Vol. 7, no. 11. — P. 1103—1132.

[24] Beidar K. I., Martindale W. B., 3rd, Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[25] Brox J., García E., Gómez Lozano M. Jordan algebras at Jordan elements of semiprime rings with involution // J. Algebra. — 2016. — Vol. 468. — P. 155—181.

[26] Brox J., Fernández López A., Gómez Lozano M. Clifford elements in Lie algebras // J. Lie Theory. — 2017. — Vol. 27, no. 1. — P. 283—296.

[27] Cabrera M., Fernández López A., Golubkov A. Yu., Moreno A. Algebras whose multiplication algebra is PI or GPI // J. Algebra. — 2016. — Vol. 459. — P. 213—237.

[28] Ericson T. S., Martindale W. S., 3rd, Osborn J. M. Prime non-associative algebras // Pacific J. Math. — 1975. — Vol. 60, no. 1. — P. 49—63.

[29] Fernández López A., García E., Gómez Lozano M. The Jordan algebras of a Lie algebra // J. Algebra. — 2007. — Vol. 308. — P. 164—177.

[30] Fernández López A., Golubkov A. Yu. Lie algebras with an algebraic adjoint representation revisited // Manuscripta Math. — 2013. — Vol. 140, no. 3—4. — P. 363—376.

[31] Fernández López A. Jordan Structures in Lie Algebras. — Mathematical Surveys and Monographs, Providence: Amer. Math. Soc., 2019.

[32] García E., Gómez Lozano M. An elemental characterization of strong primeness in Lie algebras // J. Algebra. — 2007. — Vol. 312. — P. 132—141.

[33] García E., Gómez Lozano M. A characterization of the Kostrikin radical of a Lie algebra // J. Algebra. — 2011. — Vol. 346. — P. 266—283.

[34] García E., Gómez Lozano M. Nondegeneracy for Lie triple systems and Kantor pairs // Can. Math. Bull. — 2011. — Vol. 54. — P. 442—455.

[35] Loos O. Über eine Beziehung zwischen Malcev-Algebren und Lie-Tripelsystemen // Pacific J. Math. — 1966. — Vol. 18, no. 3. — P. 553—562.

[36] Sagle A. A. Malcev algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1961. — Vol. 101, no. 3. — P. 426—458.

[37] Wisbauer R. Modules and algebras: Bimodule structure and group actions on algebras. — Harlow: Longman, 1996. — (Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math.; Vol. 81).