Асимптотический подход к описанию центра относительно свободной лиево нильпотентной алгебры

А. В. ГРИШИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

УДК 512.552.4

Ключевые слова: тождество лиевой нильпотентности, центр алгебры, многочлен Холла, порядок роста, мера включения, асимптотическая близость.

Аннотация

В работе рассматриваются асимптотические характеристики размерностных функций, связанных с относительно свободными алгебрами. Вводится понятие меры включения T-пространства в относительно свободную алгебру. Эта мера вычислена для центра относительно свободной лиево нильпотентной алгебры индекса 5, а также для T-пространства этой алгебры, порождённого длинным коммутатором $[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Обе меры совпадают и равны $1/2$, что даёт возможность получить асимптотическое описание центра. Предложен также теоретико-вероятностный взгляд на меру включения.

Abstract

A. V. Grishin, The asymptotic approach to the description of the center of a relatively free Lie-nilpotent algebra, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 3, pp. 83—94.

In this work, we consider asymptotic properties of dimensional functions related to relatively free algebras. A notion of the T-space inclusion measure into a relatively free algebra is introduced. We calculate this measure for the center of the relatively free Lie-nilpotent algebra of index 5 and for the T-space of this algebra generated by the long commutator $[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Both of these measures coincide being equal to $1/2$. This fact allows us to obtain an asymptotic description of the center. Also, a probability-theoretical view of the inclusion measure is proposed.

Введение

Хорошо известно, что построение базиса полилинейной части относительно свободной алгебры или её важнейших T-пространств — это весьма трудная (а зачастую почти безнадёжная) задача, решение которой позволяет описывать

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 3, с. 83—94.

тождества этой алгебры. Вместо этого обычно даются асимптотические оценки размерностей соответствующих пространств, что также несёт существенную информацию о комбинаторике этой алгебры (см. [1, 2, 18]). Мы предлагаем рассмотреть эту ситуацию с точки зрения так называемой *меры включения*. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [6, 8].

Начнём с некоторых определений и обозначений.

Пусть $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_i \oplus \ldots$ — бесконечная прямая сумма конечномерных векторных пространств, причём $\dim V_{i+1} > \dim V_i > 0$, $i = 1, \ldots, n, \ldots$. Любое однородное подпространство в V, имеющее вид $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_i \ldots$, где $0 \neq U_i \subset V_i$, назовём *градуированным*. Пусть $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_i \oplus \ldots$ — другое градуированное подпространство и $W_i \subset U_i$. Назовём *мерой включения* W *в* U предел (если он существует)

$$\mu(W, U) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim W_n}{\dim U_n}.$$

Мерой включения фактор-пространства U/W в пространство V назовём разность $\mu(U, V) - \mu(W, V)$. Ясно, что мера включения фактор-пространства может быть равна нулю, даже если это фактор-пространство бесконечномерно.

Пусть $V = M(F)$ — *полилинейная часть* относительно свободной счётно порождённой ассоциативной алгебры $F = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ некоторого многообразия над бесконечным полем k характеристики, отличной от 2, 3, т. е.

$$V = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n,$$

где F_n — подпространство в F полилинейных многочленов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Для любого T-пространства U обозначим через $M(U)$ его полилинейную часть, т. е.

$$M(U) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} U_n,$$

где $U_n = U \cap F_n$. Обозначим через $\mu(U, V)$ число $\mu\bigl(M(U), M(V)\bigr)$. Нас будет интересовать мера включения центра в алгебру $F^{(l)}$ при $l = 3, 4, 5$, где $F^{(l)}$ — относительно свободная алгебра, заданная тождеством $[x_1, \ldots, x_l] = 0$.

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две натуральнозначные функции натурального аргумента. Скажем, что $f(n)$ *мажорирует* $g(n)$, если для некоторого положительного числа A имеет место неравенство $f(n) > Ag(n)$ для всех n (обозначение: $f(n) \succ g(n)$). Аналогично вводится $f(n) \prec g(n)$. Скажем, что функции $f(n)$ и $g(n)$ имеют *один порядок роста* (обозначение: $f(n) \asymp g(n)$), если $f(n) \prec g(n)$ и $f(n) \succ g(n)$.

Если $c_n = \dim F_n$, а $d_n = \dim P_n$, где P_n — подпространство в F_n, порождённое всеми собственными многочленами, то представляет интерес вычисление или хотя бы оценивание c_n и d_n как функций от n. В [5, 7] сделаны оценки для $F = F^{(5)}$ и $F^{(7)}$, а также высказана общая гипотеза. А именно, для $F^{(5)}$ имеют место соотношения $c_n \asymp n^2 2^n$, $d_n \asymp n^2$, а для $F^{(7)}$ соответственно $c_n \asymp n^4 2^n$,

$d_n \asymp n^4$. Общая гипотеза: *для алгебры* $F^{(2m+3)}$ *имеют место соотношения* $c_n \asymp n^{2m}2^n$, $d_n \asymp n^{2m}$.

Напомним конструкцию *расширенной алгебры Грассмана* $E^{(m)}$, предложенную в [9, 11]. Пусть E — ассоциативная алгебра с единицей над полем k, заданная множеством порождающих e_m ($m \in \mathbb{N}$), θ_{ij} ($i, j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant j$) и определяющими соотношениями

$$e_i \circ e_j = \theta_{ij}, \quad [\theta_{ij}, e_m] = 0.$$

Известно, что подалгебра в E, порождённая 1 и θ_{ij} ($i, j \in \mathbb{N}$), является алгеброй многочленов $k[\ldots, \theta_{ij}, \ldots]$ от коммутирующих переменных, а E является свободным модулем над алгеброй $k[\ldots, \theta_{ij}, \ldots]$ с базисом из *стандартных слов*

$$e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_n}, \quad \text{где } 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_n.$$

Пусть Θ — идеал алгебры E, порождённый элементами вида θ_{ij}. Положим $E^{(m)} = E/\Theta^m$. В [11] доказано, что в алгебре $E^{(m)}$ выполнено тождество $\mathrm{LN}(2m+1)$ лиевой нильпотентности степени $2m+1$.

Пусть $E^{(2)}$ — расширенная алгебра Грассмана кратности 2. *Каноническим образом* многочлена f из алгебры $F^{(5)}$ назовём его образ при специализации $x_i \mapsto e_i$. Будем обозначать его $\rho(f)$. Ясно, что $\rho(\lambda f + \mu g) = \lambda\rho(f) + \mu\rho(g)$.

Рассмотрим многочлены $h(x, y, z) = \big[[x, y]^2, z\big]$ и $h'(x, y) = \big[[x, y]^2, y\big]$, называемые *многочленами Холла*. В [9] доказано, что h является ненулевым центральным многочленом алгебры $F^{(5)}$, а $h' = 0$ — нетривиальное тождество алгебры $E^{(2)}$. Более того, в [10] показано, что T-идеал, порождённый $\mathrm{LN}(5)$ и h', описывает всю систему тождеств алгебры $E^{(2)}$.

Весьма полезным в рассматриваемых нами вопросах является понятие *асимптотически близких относительно свободных алгебр*. Пусть F — относительно свободная алгебра и I — такой T-идеал в ней, что $(\dim I_n)/c_n$ — бесконечно малая. Тогда алгебру $\tilde{F} = F/I$ будем называть асимптотически близкой к алгебре F. Если $\tilde{c}_n$ — коразмерности в алгебре $\tilde{F}$ и $d_n = \dim I_n$, то $c_n = \tilde{c}_n + d_n$ и $\tilde{c}_n = c_n(1 - d_n/c_n)$, т. е. $c_n/\tilde{c}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Если алгебры F и $\tilde{F}$ асимптотически близки, то у них, очевидно, одинаковые асимптотические характеристики коразмерностей, T-пространство U в F и его образ $\tilde{U}$ в $\tilde{F}$ имеют одинаковую меру включения и т. д. Иногда, когда это более удобно, мы будем доказывать некий асимптотический факт не для F, а для $\tilde{F}$. Если U — T-пространство и x — элемент алгебры F, то через $\tilde{U}$ и $\tilde{x}$ будем обозначать их образы в $\tilde{F}$.

Более конкретно. У нас $F = F^{(5)}$ — относительно свободная лиево нильпотентная алгебра индекса 5, $\tilde{F}^{(5)} = F/I$, где $I = (h')^T$ — T-идеал тождеств алгебры $E^{(2)}$. То, что $F^{(5)}$ и $\tilde{F}^{(5)}$ асимптотически близки, следует из [14, 15].

Описание центра относительно свободной алгебры или хотя бы частичное его нахождение — это всегда весьма интересная и нетривиальная задача. Для алгебры F общих матриц она рассматривалась в [12, 13, 16, 17]. Для алгебры $F = F^{(l)}$ при $3 \leqslant l \leqslant 6$ центр изучался в [3,4,9,10]. В [3,4] дано полное описание центра $Z(F)$ при $l = 3$ и $l = 4$ с помощью $[F, F]$ и $[F, F]^2$, где $[F, F] = \{[x_1, x_2]\}^T$. В [9, 10] начато исследование центра алгебры $F^{(l)}$ при $l \geqslant 5$.

Можно показать, что Т-идеал $([x_1, x_2, x_3])^T$ лежит в центре алгебры $F^{(4)}$.

Для алгебры $F^{(5)}$ в [10] доказано, что центр находится между Т-пространством $\{[x_1, x_2, x_3, x_4]\}^T$ и Т-идеалом $([x_1, x_2, x_3, x_4])^T$. Вне Т-пространства $\{[x_1, x_2, x_3, x_4]\}^T$ находятся некоторые интересные центральные многочлены, такие, например, как многочлен Холла $[[x_1, x_2]^2, x_3]$ и некоторые следствия из него. Есть ли что-то ещё? Вопрос пока открыт.

В следующих двух разделах мера включения рассматривается для ряда важнейших Т-пространств, в первую очередь для центров алгебр $F^{(l)}$. Это даёт их некоторую асимптотическую характеристику.

1. Теория вероятностей на относительно свободных алгебрах

Мера включения $\mu(U, V)$ обладает всеми стандартными свойствами вероятностной меры. Открытым, правда, остаётся вопрос о её существовании. Всякое ли Т-пространство имеет меру включения (вероятность), пока не известно. Во всех рассмотренных случаях это так. Вообще приходится говорить только об *измеримых* Т-пространствах U, т. е. о тех пространствах, для которых вероятность $P(U)$ существует. Зафиксируем V, т. е. алгебру F, и обозначим через $P(U)$ меру включения $\mu(U, V)$, называемую ниже *вероятностью* Т-пространства U.

Остановимся более подробно на действиях с Т-пространствами. На структуре измеримых Т-пространств алгебры F операции сложения, пересечения и факторизации вводятся очевидным образом. На фактор-Т-пространства эти действия переносятся следующим образом. Пусть $W \setminus U$ обозначает не теоретико-множественную разность, а фактор-Т-пространство W/U. Если $B \subset A$ и $B \subset C$, то

$$(A \setminus B) + (C \setminus B) \overset{\text{def}}{=} (A + C) \setminus B,$$

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus B) \overset{\text{def}}{=} (A \cap C) \setminus B.$$

Скажем, что $(C \setminus B) \subset A \setminus B$, если $C \subset A$. Пусть $(C \setminus B) \subset A \setminus B$. Тогда

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus B) \overset{\text{def}}{=} A \setminus C.$$

Имеют место следующие легкопроверяемые свойства.

Для любого Т-пространства U выполнено соотношение $0 \leqslant P(U) \leqslant 1$. Если $U \subset W$, то $P(U) \leqslant P(W)$ и $P(W \setminus U) = P(W) - P(U)$; $P(U + W) = P(U) + P(W) - P(U \cap W)$; если $P(U) = 0$, то $P(U + W) = P(W)$; если $P(U \cap W) = 0$ (*несовместные* Т-пространства), то $P(U + W) = P(U) + P(W)$ и сумма $U + V$ называется *вероятностно прямой суммой* и обозначается $U \dot{+} W$ (гораздо более общее понятие, чем обычная прямая сумма).

Назовём *условной вероятностью* число $P(U|_W) = P(U \cap W)/P(W)$. Назовём Т-пространства *независимыми*, если $P(U|_W) = P(U)$, $P(W|_U) = P(W)$. Прямо из определения следует, что если U и W независимы, то $P(U \cap W) = P(U)P(W)$.

Приведём теперь некоторые факты, аналогичные известным из обычной элементарной теории вероятностей.

I. Пусть $P(A) = 1$. Тогда для любого Т-пространства U алгебры F имеет место равенство $P(U) = P(U \cap A)$.

В самом деле, пусть A' — такое подпространство в V_n, что $A_n \oplus A'_n = V_n$, причём U'_n — такое подпространство в V_n, что $U'_n \subset A'_n$ и $U'_n \oplus U_n \cap A_n = U_n$. Тогда

$$\dim U_n = \dim U_n \cap A_n + \dim U'_n.$$

Следовательно,

$$\frac{\dim U_n}{\dim V_n} = \frac{\dim U_n \cap A_n}{\dim V_n} + \frac{\dim U'_n}{\dim V_n}.$$

Так как $\dim A_n/\dim V_n + \dim A'_n/\dim V_n = 1$, то, переходя к пределу, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \dim A'_n/\dim V_n = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \dim U'_n/\dim V_n = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim U_n}{\dim V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim U_n \cap A_n}{\dim V_n}.$$

II. Если Т-пространства U и W несовместны, то для любого Т-пространства A несовместны также Т-пространства $A \cap U$ и $A \cap W$. Это прямо следует из включения

$$A \cap U \cap W \subset U \cap W$$

и монотонности меры включения.

III. Пусть $H = H_1 + \ldots + H_m$ — сумма Т-пространств H_i, причём

$$P\big(H_i \cap (H_1 + \ldots + H_{i-1} + H_{i+1} + \ldots + H_m)\big) = 0.$$

Такую сумму будем называть *вероятностно прямой* и обозначать

$$H = H_1 \dotplus \ldots \dotplus H_m.$$

Легко видеть, что $P(H) = P(H_1) + \ldots + P(H_m)$. Если H — вероятностно прямая сумма H_i и $P(H) = 1$, то систему Т-пространств $\{H_i\}$ будем называть *полной группой несовместных Т-пространств* (гипотез). Если через H_0 обозначить сумму всех пространств $H_i \cap (H_1 + \ldots + H_{i-1} + H_{i+1} + \ldots + H_m)$, то, очевидно, $P(H_0) = 0$ и H/H_0 — обычная прямая сумма образов Т-пространств H_i. Ввиду факта I имеет место равенство $P(A \cap H) = P(A)$.

Скажем, что Т-пространство A является *H-однородным*, если

$$A \cap H = A \cap H_1 + \ldots + A \cap H_m,$$

т. е. всякий элемент a из $A \cap H$ можно представить в виде $a = a_1 + \ldots + a_m$, где $a_i \in A \cap H_i$.

Пусть теперь $\{H_i\}$ — полная группа несовместных Т-пространств и A — H-однородное Т-пространство. Тогда

$$P(A) = P(A \cap H) = P(A \cap H_1) + \ldots + P(A \cap H_m).$$

Если не требовать H-однородности, то

$$A \cap H \supset A \cap H_1 + \ldots + A \cap H_m$$

и

$$P(A) = P(A \cap H) \geqslant P(A \cap H_1) + \ldots + P(A \cap H_m).$$

IV. В предположении, что $\{H_i\}$ — полная группа несовместных Т-пространств и A — H-однородное Т-пространство, имеем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(H_i) P(A|_{H_i}).$$

Если не требовать H-однородности, то

$$P(A) \geqslant \sum_{i=1}^{m} P(H_i) P(A|_{H_i}).$$

Доказанное соотношение принято называть *формулой полной вероятности*.

V. Следующий факт (*формула Байеса*) также является традиционным. Пусть A и H_i такие же, как и в предыдущем пункте. Согласно уже известным свойствам

$$P(A \cap H_i) = P(A) P(H_i|_A) = P(H_i) P(A|_{H_i}).$$

Отсюда следует, что

$$P(H_i|_A) = \frac{P(H_i) P(A|_{H_i})}{P(A)}.$$

С помощью формулы полной вероятности получаем

$$P(H_i|_A) = \frac{P(H_i) P(A|_{H_i})}{\sum\limits_{j=1}^{m} P(H_j) P(A|_{H_j})}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Без предположения об H-однородности Т-пространства A имеем

$$P(H_i|_A) \leqslant \frac{P(H_i) P(A|_{H_i})}{\sum\limits_{j=1}^{m} P(H_j) P(A|_{H_j})}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Итак, с любой относительно свободной алгеброй можно связать структуру, состоящую из её Т-пространств и фактор-Т-пространств, на которых естественным образом вводятся бинарные операции $+$, $\cap$, $\setminus$ и вероятностная мера P, получающаяся из меры включения. На основании этого строится теория, аналогичная традиционной.

Ниже приводится серия результатов, в которых вероятность Т-пространств вычислена. В качестве приложения даётся асимптотическое описание центра алгебры $F^{(l)}$.

Если $F = F^{(3)}$, то $P([F,F]^m) = P\big(Z(F)\big) = 1/2$. Если $F = F^{(4)}$ и k — поле нулевой характеристики, то $P([F,F]^m) = P\big(Z(F)\big) = 1/2$. Т-идеал $([x_1,x_2,x_3])^T$ лежит в центре алгебры $F^{(4)}$ и $P\big(([x_1,x_2,x_3])^T\big) = 0$.

Если k — поле нулевой характеристики и $F = F^{(5)}$, то

$$P(\{[x_1,x_2,x_3,x_4]\}^T) = P\big(Z(F)\big) = \frac{1}{2}; P\big(([x_1,x_2,x_3,x_4])^T\big) = 1.$$

Нулевая характеристика в случае $l \geqslant 4$ нужна в доказательстве, так как для оценки размерностей используются диаграммы Юнга. Возможно, что данный факт имеет место и при более широких предположениях.

Приведённые результаты показывают, что мера включения фактор-пространства $Z(F^{(5)})/\{[x_1,x_2,x_3,x_4]\}^T$ в пространство $M(F^{(5)})$ равна нулю, т. е. в асимптотическом смысле основная часть центра алгебры $F^{(5)}$ — это Т-пространство $\{[x_1,x_2,x_3,x_4]\}^T$. На основании полученных результатов можно высказать следующую гипотезу.

Для любого нечётного $l = 2m+1$ если $F = F^{(l)}$ и k — поле нулевой характеристики, то

$$\mu\Big(M\big(Z(F)\big), M(F)\Big) = \mu\Big(M\big(\{[x_1,\ldots,x_{2m}]\}^T\big), M(F)\Big) = \frac{1}{2},$$

т. е. мера включения фактор-пространства $M\big(Z(F)\big)/M(\{[x_1,\ldots,x_{2m}]\}^T)$ в пространство $M(F)$ равна нулю и в асимптотическом смысле центр алгебры $F^{(l)}$ описывается как Т-пространство $\{[x_1,\ldots,x_{2m}]\}^T$.

Полученные результаты для $l = 3, 4$ доказаны в [8], а для $l = 5$ — в следующем разделе.

2. Мера включения центра в алгебру $F^{(5)}$

Цель этого раздела — доказательство основного результата об алгебре $F^{(5)}$, сформулированного в предыдущем разделе.

Пусть $C = ([x_1,x_2,x_3,x_4])^T$ — Т-идеал алгебры $F^{(5)}$, порождённый длинным коммутатором $[x_1,x_2,x_3,x_4]$, $D = \{[x_1,x_2,x_3,x_4]\}^T$ — Т-пространство, порождённое тем же коммутатором, и $Z\big(F^{(5)}\big)$ — центр алгебры $F^{(5)}$.

Согласно [10] имеют место включения $D \subset Z(F^{(5)}) \subset C$.

Пусть

$$M(F^{(5)}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n -$$

полилинейная часть алгебры $F^{(5)}$, где F_n — подпространство алгебры $F^{(5)}$, состоящее из нуля и полилинейных многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть

$$C_n = C \cap F_n, \qquad M(C) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} C_n;$$

$$D_n = D \cap F_n, \qquad M(D) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} D_n;$$

$$Z_n = Z\big(F^{(5)}\big) \cap F_n, \quad M\Big(Z\big(F^{(5)}\big)\Big) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z_n.$$

Пространство C_n порождено (см. [5]) многочленами вида

1) $[y_1, y_2, y_3, z_1]cu$,
2) $[y_1, y_2, y_3][z_1, z_2]cu$,
3) $([y_1, y_2][y_3, y_4] + [y_1, y_3][y_2, y_4])[z_1, z_2]cu$,

где $y_i, z_j \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, c — произведение коротких коммутаторов от x_i или $c = 1$, u — некоторый *упорядоченный одночлен*, т. е. $u = x_{i_1} \ldots x_{i_s}$, причём $i_1 < \ldots < i_s$, если $s > 1$. *Носителем* одночлена u назовём множество $\operatorname{supp}(u) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$.

Пусть u — упорядоченный одночлен и $P(u)$ — линейное подпространство в $F^{(5)}$, порождённое всеми собственными многочленами f, для которых fu лежит в C_n, и $B(u)$ — базис подпространства $P(u)$.

Предложение 2.1. *Объединение всех множеств $B(u)u$ является базисом пространства C_n.*

Доказательство. То, что это объединение порождает всё пространство C_n, очевидно. Докажем линейную независимость.

Пусть некоторая нетривиальная линейная комбинация элементов этого множества равна нулю и fu — такой ненулевой элемент этой линейной комбинации, в котором собраны все слагаемые с данным упорядоченным одночленом u. Выберем одночлен u так, чтобы $\operatorname{supp}(u)$ не был подмножеством другого $\operatorname{supp}(v)$ из рассматриваемой линейной комбинации. Положив все переменные из $\operatorname{supp}(u)$ равными единице, получаем $f = 0$. Полученное противоречие и доказывает предложение. □

Следствие 2.1. *C_n — прямая сумма пространств $P(u)u$.*

Предложение 2.2. *Пусть $\tilde{c} = [\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n]$ — короткий коммутатор и $\tilde{f}$ — собственный полилинейный многочлен из $\tilde{C}_{n-2}$. Если $\tilde{f} \neq 0$, то и $\tilde{f}\tilde{c} \neq 0$.*

Доказательство. Утверждение прямо следует из [10], так как идеал тождеств алгебры $E^{(2)}$ порождается многочленом h' и, следовательно, ненулевые элементы из $\tilde{F}^{(5)}$ не могут аннулироваться коммутатором. Достаточно рассмотреть канонический образ коммутатора в $E^{(2)}$. □

Пусть U_n — подпространство в C_n, порождённое многочленами 1)—3), у которых $x_n \in \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, а U_n^0 — подпространство в C_n, порождённое многочленами, у которых $c = 1$, $W_n = U_n + U_n^0$.

Ясно, что $\dim U_n^0 \prec f(n)$, где $f(n)$ — некоторый многочлен от n, так как рассматриваемая размерность выражается через число сочетаний.

Оценим теперь $\dim U_n$.

Лемма 2.1. $\dim U_n \prec n2^n$.

Доказательство. Пусть P_n — подпространство в C_n, порождённое многочленами 1)—3) с $u = 1$ (т. е. собственными многочленами), причём на одной из позиций y_i стоит x_n. Согласно [5] имеет место соотношение $\dim P_n \prec n$. Следовательно, размерность пространства собственных сомножителей в элементах 1)—3), порождающих U_n, стоящих перед упорядоченными одночленами u (общее количество таких одночленов ограничивается числом 2^n), мажорируется функцией n. Таким образом, $\dim U_n \prec n2^n$. □

Следующая лемма позволяет во всех дальнейших рассмотрениях, связанных с мерой включения, вместо V_n рассматривать C_n, что бывает более удобно. С подобной ситуацией мы уже сталкивались, когда рассматривали асимптотически близкие многообразия.

Лемма 2.2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim C_n}{\dim V_n} = 1.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\frac{\dim C_n}{\dim V_n} = \frac{\dim C_n}{\dim C_n + \dim F_n^{(4)}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\dim F_n^{(4)}}{\dim C_n}}.$$

Из [5] следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim F_n^{(4)}}{\dim C_n} = 0,$$

что и доказывает лемму. □

Следствие 2.2. $P(C) = 1$.

Лемма 2.3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim W_n}{\dim C_n} = 0.$$

Доказательство. Уже доказано, что $\dim W_n \prec n2^n + f(n)$. С другой стороны, согласно [5] имеет место соотношение $\dim C_n \succ n^2 2^n$. Следовательно,

$$\frac{\dim W_n}{\dim C_n} \prec \frac{1}{n} + \frac{f(n)}{n^2 2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

и лемма доказана. □

Лемма 2.4. $\tilde{D}_n \cap \tilde{C}_{n-1}\tilde{x}_n = \tilde{Z}_n \cap \tilde{C}_{n-1}\tilde{x}_n = 0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}\tilde{x}_n \in \tilde{Z}_n$, где $\tilde{f} \in \tilde{C}_{n-1}$. Тогда $\tilde{f}$ является линейной комбинацией многочленов типа (1)—(3) и

$$[\tilde{f}\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}] = [\tilde{f}, \tilde{x}_{n+1}]\tilde{x}_n + \tilde{f}[\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}] = 0.$$

Согласно предложению 2.1 выполнены равенства

$$[\tilde{f}, \tilde{x}_{n+1}]\tilde{x}_n = \tilde{f}[\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}] = 0.$$

В силу предложения 2.2 коммутатор $[\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}]$ не может аннулировать ненулевой элемент из $\tilde{C}_{n-1}$, что и доказывает лемму. □

Лемма 2.5. $W_n + D_n + C_{n-1}x_n = W_n + Z_n + C_{n-1}x_n = C_n$.

Доказательство. Всякий элемент из C_n, имеющий вид (1)—(3) и не лежащий в W_n, можно представить в виде fu, где $f \in D$, а одночлен u содержит x_n, либо $f \in D_n$ (при этом $u = 1$). В первом случае fu по модулю D_n с помощью элемента типа $f[u_1, u_2]$ можно представить в виде fvx_n. Таким образом, в любом случае всякий элемент из C_n лежит в $W_n + D_n + C_{n-1}x_n$. Так как $D_n \subset Z_n$, в этом рассуждении можно заменить D_n на Z_n и получить тот же результат. Лемма доказана. □

Лемма 2.6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim C_{n-1}x_n}{\dim C_n} = \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Как следует из [14, 15], имеет место равенство $\dim C_n = f(n)2^n + g(n)$, где $f(n)$ обладает тем свойством, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n-1)}{f(n)} = 1,$$

а

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)2^n} = 0.$$

Отсюда, поскольку x_n не является делителем нуля, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim C_{n-1}x_n}{\dim C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n-1)2^{n-1}}{f(n)2^n} = \frac{1}{2},$$

и лемма доказана. □

Теорема 2.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim D_n}{\dim C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim Z_n}{\dim C_n} = \frac{1}{2},$$

т. е. $P(D) = P\big(Z(F^{(5)})\big) = 1/2$.

Доказательство. Будем доказывать теорему для асимптотически близкой алгебры $\tilde{F}^{(5)}$. Проведём все рассуждения для $\tilde{D}_n$ (для $\tilde{Z}_n$ совершенно аналогично). Пусть $\tilde{W}_n'$ — подпространство в $\tilde{W}_n$, дополняющее $\tilde{D}_n \oplus \tilde{C}_{n-1}\tilde{x}_n$ в $\tilde{C}_n$ до прямой суммы. Согласно лемме 2.5

$$\dim \tilde{C}_n = \dim(\tilde{W}_n' \oplus \tilde{D}_n \oplus \tilde{C}_{n-1}\tilde{x}_n) = \dim \tilde{W}_n' + \dim \tilde{D}_n + \dim \tilde{C}_{n-1}\tilde{x}_n.$$

Следовательно,
$$1 = \frac{\dim \tilde{W}'_n}{\dim \tilde{C}_n} + \frac{\dim \tilde{D}_n}{\dim \tilde{C}_n} + \frac{\dim \tilde{C}_{n-1}\tilde{x}_n}{\dim \tilde{C}_n}.$$
Учитывая леммы 2.3 и 2.6 и переходя к пределу, имеем
$$1 = 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{\dim \tilde{D}_n}{\dim \tilde{C}_n} + \frac{1}{2},$$
что и доказывает теорему. □

Доказанная теорема показывает, что вычисление меры включения — это, как правило, весьма нетривиальная и трудоёмкая задача. Отметим, что здесь гораздо больше открытых вопросов и гипотез, чем полученных результатов.

В заключение автор приносит свою благодарность С. В. Пчелинцеву за полезные обсуждения и идею ввести меру включения именно так, как это сделано в работе. Первоначально эта мера вводилась более громоздко.

Литература

[1] Гришин А. В. Асимптотические свойства свободных конечно-порождённых алгебр некоторых многообразий // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 6. — С. 608—625.

[2] Гришин А. В. Показатель роста многообразия алгебр и его приложения // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 5. — С. 536—557.

[3] Гришин А. В. О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана // УМН. — 2010. — Т. 65, № 4. — С. 191—192.

[4] Гришин А. В. О центре относительно свободной лиевски нильпотентной алгебры индекса 4 // Матем. заметки. — 2012. — Т. 91, № 1. — С. 147—148.

[5] Гришин А. В. Об аддитивной структуре и асимптотике коразмерностей c_n алгебры $F^{(5)}$ // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 1. — С. 93—104.

[6] Гришин А. В. О мере включения градуированных подпространств // Междунар. конф. «Мальцевские чтения». Тезисы докладов (электронная версия). — Новосибирск, 2017. — С. 111.

[7] Гришин А. В. Об асимптотике коразмерностей c_n в алгебре $F^{(7)}$ // Матем. заметки. — 2018. — Т. 104, № 1. — С. 25—32.

[8] Гришин А. В. О мере включения в относительно свободных алгебрах с тождеством лиевой нильпотентности степени 3 и 4 // Матем. сб. — 2019. — Т. 210, № 2. — С. 75—86.

[9] Гришин А. В., Пчелинцев С. В. О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 11. — С. 113—130.

[10] Гришин А. В., Пчелинцев С. В. Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6 // Матем. сб. — 2016. — Т. 207, № 12. — С. 54—72.

[11] Гришин А. В., Цыбуля Л. М., Шокола А. А. О T-пространствах и соотношениях в относительно свободных лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 3. — С. 135—148.

[12] Марков В. Т. О размерности некоммутативных аффинных алгебр // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — Т. 37, № 2. — С. 284—288.

[13] Охитин С. В. Центральные полиномы алгебры матриц второго порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Математика, механика. — 1988. — № 4. — С. 61—63.

[14] Пчелинцев С. В. Тождества модельной алгебры кратности 2 // Сиб. матем. журн. — 2018. — Т. 59, № 6. — С. 1389—1411.

[15] Пчелинцев С. В. Аддитивный базис относительно свободной ассоциативной алгебры с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и его применения // Сиб. матем. журн. — 2020. — Т. 61, № 1. — С. 175—193.

[16] Размыслов Ю. П. Об одной проблеме Капланского // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — Т. 37, № 3. — С. 483—501.

[17] Formanek E. Central polynomials for matrix rings // J. Algebra. — 1972. — Vol. 23. — P. 129—133.

[18] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Codimensions of algebras and growth functions // Adv. Math. — 2008. — Vol. 217. — P. 1027—1052.