Контралгебры Кэли—Диксона: дважды альтернативные делители нуля и графы отношений

А. Э. ГУТЕРМАН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский физико-технический институт (государственный университет),
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: guterman@list.ru

С. А. ЖИЛИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: s.a.zhilina@gmail.com

УДК 512.554

Ключевые слова: алгебры Кэли—Диксона, контралгебры, контроктонионы, дважды альтернативные элементы, графы отношений.

Аннотация

Настоящая работа посвящена изучению дважды альтернативных делителей нуля в контралгебрах Кэли—Диксона. Сначала мы описываем их аннуляторы и ортогонализаторы, а также устанавливаем соотношение между централизаторами и ортогонализаторами таких элементов. Затем мы доказываем существование аналога вещественной жордановой нормальной формы для контроктонионов. Наконец, мы рассматриваем графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля для алгебр контркомплексных чисел, контркватернионов и контроктонионов, а также описываем их компоненты связности, диаметры и клики.

Abstract

A. E. Guterman, S. A. Zhilina, Cayley–Dickson split-algebras: Doubly alternative zero divisors and relation graphs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 3, pp. 95—129.

Our paper is devoted to the investigations of doubly alternative zero divisors of the real Cayley—Dickson split-algebras. We describe their annihilators and orthogonalizers and also establish the relationship between centralizers and orthogonalizers for such elements. Then we obtain an analogue of the real Jordan normal form in the case of the split-octonions. Finally, we describe commutativity, orthogonality, and zero divisor graphs of the split-complex numbers, the split-quaternions, and the split-octonions in terms of their diameters and cliques.

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 3, с. 95—129.

Посвящается памяти Виктора Тимофеевича Маркова

1. Введение

Делители нуля алгебр Кэли—Диксона представляют особенный интерес, однако их распознавание и описание аннуляторов оказывается довольно трудной задачей. Некоторые попытки классифицировать делители нуля алгебр главной последовательности предприняли Дж. Морено в [20—22] и Д. К. Бисс, Д. Даггер и Д. К. Исаксен в [12]. Однако и сейчас решение этой проблемы далеко от завершения. В частности, работа [12] содержит описание только тех делителей нуля, аннуляторы которых имеют наибольшую возможную размерность. Отметим, что Морено был первым, кто начал изучать в алгебрах главной последовательности дважды альтернативные делители нуля, т. е. такие элементы, обе компоненты которых являются альтернативными. Затем их аннуляторы были описаны в [12, предложение 11.1]. Тем не менее до сих пор не найден простой критерий того, что дважды альтернативный элемент является делителем нуля, за исключением теоремы 2.9 в [20].

Важным подходом к визуализации различных алгебраических отношений, таких как ортогональность, коммутативность и т. д., является построение графа рассматриваемого отношения. Изучение графов, порождённых отношениями на алгебраических системах, берёт своё начало в теории групп (см. [7]). На кольцах и алгебрах эти исследования восходят к работе И. Бека [10] (1988 г.), где был впервые определён граф делителей нуля коммутативного кольца. Позднее Д. Ф. Андерсон и П. С. Ливингстон [6] усовершенствовали это определение. Что касается графов делителей нуля некоммутативных колец, впервые их ввёл С. П. Редмонд [23]. С. Акбари, М. Гандехари, М. Хадиан и А. Мохаммадиан [4] дали определение графа коммутативности некоммутативного кольца, а Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман и О. В. Маркова [1] положили начало изучению графов ортогональности.

Графы отношений матричных колец представляют особый интерес, в частности, графы делителей нуля изучались в [13], графы коммутативности — в [3, 5, 15], а графы ортогональности – в [1, 9, 18].

В данной работе мы рассматриваем дважды альтернативные делители нуля в вещественных контралгебрах Кэли—Диксона. Наша основная цель — получение критерия того, что дважды альтернативный элемент является делителем нуля, а также описание его левого и правого аннуляторов и ортогонализатора. В ходе доказательства мы также классифицируем альтернативные элементы в контралгебрах. Кроме того, мы обобщаем соотношение между централизатором и ортогонализатором произвольного дважды альтернативного делителя нуля, полученное в [2, предложение 8.15] для алгебры контрседенионов, на случай произвольной контралгебры. Затем мы применяем полученные результаты к графам отношений вещественных контралгебр малых размерностей и изучаем их комбинаторные характеристики, в частности диаметр и описание клик.

Работа построена следующим образом: раздел 2 содержит основные определения и обозначения. Раздел 3 посвящён вещественным алгебрам Кэли—Диксона. В частности, мы подробно описываем процедуру Кэли—Диксона в подразделе 3.1 и напоминаем некоторые свойства вещественных алгебр Кэли—Диксона в подразделе 3.2. После этого в подразделе 3.3 мы определяем алгебры контркомплексных чисел, контркватернионов и контроктонионов. В разделе 4 мы изучаем дважды альтернативные делители нуля в произвольных контралгебрах. В разделе 5 мы применяем эти результаты для описания графов отношений вещественных контралгебр малых размерностей. Подраздел 5.1 содержит элементарные сведения о графах отношений алгебры контркомплексных чисел. В подразделе 5.2, посвящённом графам отношений алгебры контркватернионов, мы приводим свои доказательства некоторых известных результатов, чтобы продемонстрировать аналогию между контркватернионами и контроктонионами. В следствии 5.23 подраздела 5.3 мы получаем аналог вещественной жордановой нормальной формы для контроктонионов, что позволяет описать их графы ортогональности и делителей нуля.

2. Основные определения

Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ — алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$ над полем $\mathbb{F}$, возможно некоммутативная или неассоциативная. Тогда для $a, b \in \mathcal{A}$ говорят, что

- a и b *коммутируют*, если $ab = ba$,
- a и b *антикоммутируют*, если $ab + ba = 0$,
- a и b *ортогональны*, если $ab = ba = 0$,
- a — *левый делитель нуля*, если $a \neq 0$ и существует такое ненулевое $b \in \mathcal{A}$, что $ab = 0$,
- a — *правый делитель нуля*, если $a \neq 0$ и существует такое ненулевое $b \in \mathcal{A}$, что $ba = 0$,
- a — *двусторонний делитель нуля*, если a как левый, так и правый делитель нуля,
- a — *делитель нуля*, если a либо левый, либо правый делитель нуля.

Определение 2.1.

- *Центром* алгебры $\mathcal{A}$ называется множество

$$C_{\mathcal{A}} = \{a \in \mathcal{A} \mid ab = ba \text{ для всех } b \in \mathcal{A}\}.$$

- $Z_{\mathrm{L}}(\mathcal{A})$ — множество левых делителей нуля в $\mathcal{A}$.
- $Z_{\mathrm{R}}(\mathcal{A})$ — множество правых делителей нуля в $\mathcal{A}$.
- $Z(\mathcal{A})$ — множество делителей нуля в $\mathcal{A}$.
- $Z_{\mathrm{LR}}(\mathcal{A})$ — множество двусторонних делителей нуля в $\mathcal{A}$.

Определение 2.2. Пусть a — произвольный элемент алгебры $\mathcal{A}$.

- *Централизатором* a называется
$$C_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba\} \text{ —}$$
множество элементов $\mathcal{A}$, коммутирующих с a.
- *Антицентрализатором* a называется
$$\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab + ba = 0\} \text{ —}$$
множество элементов $\mathcal{A}$, антикоммутирующих с a.
- *Левым аннулятором* a называется множество
$$\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ba = 0\}.$$
- Аналогично *правым аннулятором* a называется
$$\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = 0\}.$$
- *Ортогонализатором* a называется
$$O_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba = 0\} \text{ —}$$
множество элементов $\mathcal{A}$, ортогональных к a.

Замечание 2.3. Нетрудно убедиться, что для каждого $a \in \mathcal{A}$ множества $C_{\mathcal{A}}$, $C_{\mathcal{A}}(a)$, $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}}(a)$, $\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{A}}(a)$, $\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{A}}(a)$, $O_{\mathcal{A}}(a)$ являются линейными пространствами над $\mathbb{F}$.

Введём теперь некоторые графы отношений, изучению которых посвящена данная работа.

Определение 2.4. Для алгебры $\mathcal{A}$ определим следующие структуры.

— *Граф коммутативности* $\Gamma_C(\mathcal{A})$: вершины — элементы множества $\mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}$, различные вершины a и b соединены ребром, если $ab = ba$.

— *Граф ортогональности* $\Gamma_O(\mathcal{A})$: вершины — элементы множества $Z_{\mathrm{LR}}(\mathcal{A})$, различные вершины a и b соединены ребром, если $ab = ba = 0$.

— *Ориентированный граф делителей нуля* $\Gamma_Z(\mathcal{A})$: вершины — элементы множества $Z(\mathcal{A})$, различные вершины a и b соединены направленным ребром от a к b, если $ab = 0$.

Напомним основные сведения из теории графов, которые нам потребуются.

Определение 2.5. Пусть Γ — ориентированный или неориентированный граф.

— Γ называется *связным*, если для любой упорядоченной пары вершин (x, y) существует путь от x к y.

— *Расстояние* $d(x, y) = d_\Gamma(x, y)$ между двумя вершинами x и y в графе Γ — это число рёбер в кратчайшем пути от x к y. Если такого пути не существует, то $d(x, y) = \infty$.

— *Диаметр* $d(\Gamma)$ графа Γ определяется как $\sup\limits_{x,y \in \Gamma} d(x, y)$.

Для неориентированного графа Γ определены также следующие понятия.

— *Компонентой связности* Γ называется максимальный связный подграф Γ.
— *Клика* Q в графе Γ — это такое подмножество вершин Γ, что любые две различные вершины в Q соединены ребром.
— Клика Q называется *максимальной*, если Q максимальна по включению.

3. Основные сведения о вещественных алгебрах Кэли—Диксона

3.1. Построение алгебр Кэли—Диксона

Определение 3.1 [19, с. 139, определение 1.5.1]. Пусть $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ — алгебра над полем $\mathbb{F}$. Операцией *сопряжения* $a \mapsto \bar{a}$ на $\mathcal{A}$ называется такой эндоморфизм $\mathcal{A}$ как линейного пространства, что для любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено $\bar{\bar{a}} = a$ и $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$.

Определение 3.2. Пусть $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ — алгебра над полем $\mathbb{F}$ с единицей $1_{\mathcal{A}}$ и операцией сопряжения $a \mapsto \bar{a}$. Это сопряжение называется *регулярным*, если для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ выполнено $a + \bar{a} = t(a)1_{\mathcal{A}}$ и $a\bar{a} = \bar{a}a = n(a)1_{\mathcal{A}}$, где $t(a), n(a) \in \mathbb{F}$. Здесь $t(a)$ называется *следом* a, $n(a)$ называется *нормой* a.

Далее будем считать, что на $\mathbb{F}$-алгебре $\mathcal{A}$ задана регулярная операция сопряжения $a \mapsto \bar{a}$. Ниже представлены основные утверждения, которые понадобятся нам позднее. Для полноты изложения мы также приводим доказательства для некоторых из них.

Предложение 3.3. *Пусть $a \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда $n(a - \lambda 1_{\mathcal{A}}) = \lambda^2 - t(a)\lambda + n(a)$.*

Доказательство. Для любого $b \in \mathcal{A}$ имеем $\bar{b} = \overline{b1_{\mathcal{A}}} = \overline{1_{\mathcal{A}}} \cdot \bar{b}$, поэтому $\overline{1_{\mathcal{A}}} = 1_{\mathcal{A}}$. Значит,

$$(a - \lambda 1_{\mathcal{A}})\overline{(a - \lambda 1_{\mathcal{A}})} = (a - \lambda 1_{\mathcal{A}})(\bar{a} - \lambda 1_{\mathcal{A}}) = \\ = a\bar{a} - \lambda(a + \bar{a}) + \lambda^2 1_{\mathcal{A}} = \big(\lambda^2 - t(a)\lambda + n(a)\big)1_{\mathcal{A}}. \quad \square$$

Определение 3.4. *Характеристическим многочленом* элемента $a \in \mathcal{A}$ называется

$$p_a(\lambda) = n(a - \lambda 1_{\mathcal{A}}) = \lambda^2 - t(a)\lambda + n(a).$$

Его дискриминант равен $\operatorname{dis}(a) = \big(t(a)\big)^2 - 4n(a)$.

Предложение 3.5 [24, с. 438]. *Для любого $a \in \mathcal{A}$ выполнено $p_a(a) = 0$.*

В этом подразделе, опираясь в основном на работы [19, 24], мы напоминаем классический способ построения неассоциативных алгебр методом удвоения, так называемую процедуру Кэли—Диксона.

Определение 3.6 [24]. *Алгебра* $\mathcal{A}\{\gamma\}$, полученная из $\mathcal{A}$ с помощью процедуры Кэли—Диксона с параметром $\gamma \in \mathbb{F}$, $\gamma \neq 0$, определяется как множество упорядоченных пар элементов из $\mathcal{A}$ с операциями

$$\begin{aligned}&\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b),\\&(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d),\\&(a,b)(c,d) = (ac+\gamma\bar{d}b, da+b\bar{c})\end{aligned}$$

и сопряжением

$$\overline{(a,b)} = (\bar{a}, -b), \quad a,b,c,d \in \mathcal{A}, \quad \alpha \in \mathbb{F}.$$

Предложение 3.7 [24].

— *$\mathcal{A}\{\gamma\}$ является алгеброй над полем $\mathbb{F}$ с единицей $1_{\mathcal{A}\{\gamma\}} = (1_{\mathcal{A}}, 0)$ и регулярной операцией сопряжения.*
— *Если $\mathcal{A}$ — алгебра размерности n с базисом $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$, то $\mathcal{A}\{\gamma\}$ — алгебра размерности $2n$ с базисом $\{(e_i,0),(0,e_i)\}_{i=1,\ldots,n}$.*

Таким образом, если начать с одномерной алгебры и последовательно применять к ней процедуру Кэли—Диксона, то на n-м шаге получится 2^n-мерная алгебра.

Предложение 3.8 [19, с. 161, упражнение 2.5.1]. *Пусть $\gamma' = \alpha^2\gamma$ для некоторого $\alpha \neq 0$. Тогда алгебры $\mathcal{A}\{\gamma\}$ и $\mathcal{A}\{\gamma'\}$ изоморфны.*

Отметим, что обратная импликация в предложении 3.8 неверна (см. пример 5.17).

Лемма 3.9 [24, с. 435]. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}$, $(a,b) \in \mathcal{A}\{\gamma\}$. Тогда*

$$\begin{aligned}&t\big((a,b)\big) = t(a),\\&n\big((a,b)\big) = n(a) - \gamma n(b).\end{aligned}$$

Далее будем считать, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}1_{\mathcal{A}}$ отождествляется с $\mathbb{R}$. Для произвольного элемента $\mathcal{A}$ введём следующие понятия, являющиеся аналогами соответствующих понятий для комплексных чисел.

Определение 3.10. *Действительной частью* элемента $a \in \mathcal{A}$ называется

$$\mathfrak{Re}(a) = \frac{a+\bar{a}}{2},$$

мнимой частью —

$$\mathfrak{Im}(a) = \frac{a-\bar{a}}{2},$$

нормой — $n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$. Говорят, что a — *чисто мнимый* элемент, если $\mathfrak{Re}(a) = 0$.

Заметим, что $\mathfrak{Re}(a), n(a) \in \mathbb{R}1_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}$, поскольку операция сопряжения на $\mathcal{A}$ регулярна. Очевидно, что введённое понятие нормы согласовано с определением 3.2.

Замечание 3.11. Норма a часто определяется как $\sqrt{a\bar{a}}$, в отличие от $n(a) = a\bar{a}$, используемого в данной работе. Однако большая часть результатов может быть легко перенесена на случай изменённой таким образом нормы.

Лемма 3.12. *Для любого $a \in \mathcal{A}$ выполнено* $\operatorname{dis}(a) = -4n\big(\mathfrak{Im}(a)\big)$.

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{dis}(a) = \big(t(a)\big)^2 - 4n(a) = (a+\bar{a})^2 - 2a\bar{a} - 2\bar{a}a = \\ = (a-\bar{a})^2 = -(a-\bar{a})\overline{(a-\bar{a})} = -4n\big(\mathfrak{Im}(a)\big). \quad \square$$

Определение 3.13. Для каждого целого $n \geqslant 0$ и ненулевых вещественных чисел $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ вещественная алгебра Кэли—Диксона $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ определяется индуктивно:

1) $\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}$, $e_0^{(0)} = 1$ — её базисный элемент;
2) если построена $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$, то

$$\mathcal{A}_{n+1}\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\} = (\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\})\{\gamma_n\},$$

причём $e_0^{(n+1)}, \ldots, e_{2^{n+1}-1}^{(n+1)}$ — её базисные элементы, где

$$e_m^{(n+1)} = \begin{cases} \big(e_m^{(n)}, 0\big), & 0 \leqslant m \leqslant 2^n - 1, \\ \big(0, e_{m-2^n}^{(n)}\big), & 2^n \leqslant m \leqslant 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

Лемма 3.14. *Для каждого $n \geqslant 0$ структура $\mathcal{A}_n$ из определения* 3.13 *является алгеброй над $\mathbb{R}$ размерности 2^n с единицей $e_0^{(n)}$ и регулярной операцией сопряжения.*

Доказательство. Утверждение следует из предложения 3.7 при помощью индукции по n. $\square$

Мы будем использовать обозначения $1 = e_0^{(n)}$ и $r = re_0^{(n)}$ для $r \in \mathbb{R}$.

3.2. Свойства вещественных алгебр Кэли—Диксона

Далее подразумеваем, что $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра над полем $\mathbb{F}$, а $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ — произвольная вещественная алгебра Кэли—Диксона. Как следует из предложения 3.8, алгебра $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ изоморфна алгебре $\mathcal{A}_n\{\operatorname{sgn}(\gamma_0), \ldots, \operatorname{sgn}(\gamma_{n-1})\}$, поэтому достаточно рассматривать только значения $\gamma_k \in \{\pm 1\}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Обозначение 3.15. Для каждого $m = 0, \ldots, 2^n - 1$ обозначим

$$\delta_m^{(n)} = \prod_{l=0}^{n-1} (-\gamma_l)^{c_{m,l}},$$

где показатели $c_{m,l} \in \{0,1\}$ однозначно определены условием

$$m = \sum_{l=0}^{n-1} c_{m,l} 2^l$$

(см. [2, предложение 3.18]).

Лемма 3.16. *Пусть* $a = a_0 + a_1 e_1^{(n)} + \dots + a_{2^n-1} e_{2^n-1}^{(n)} \in \mathcal{A}_n$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
&\bar{a} = a_0 - a_1 e_1^{(n)} - \dots - a_{2^n-1} e_{2^n-1}^{(n)},\\
&\mathfrak{Re}(a) = a_0,\\
&\mathfrak{Im}(a) = a_1 e_1^{(n)} + \dots + a_{2^n-1} e_{2^n-1}^{(n)},\\
&n(a) = \sum_{m=0}^{2^n-1} \delta_m^{(n)} a_m^2,
\end{aligned}$$

где сопряжение рассматривается в смысле определения 3.6, *а норма, действительная и мнимая части — в смысле определения* 3.10.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3.9 и непосредственных вычислений. □

Обозначение 3.17. Для

$$a = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)},\ b = \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)} \in \mathcal{A}_n$$

определим

$$\langle a, b\rangle = \sum_{m=0}^{2^n-1} \delta_m^{(n)} a_m b_m.$$

Предложение 3.18. $\langle a, b\rangle$ — *вещественнозначная симметрическая билинейная форма, соответствующая квадратичной форме* $n(a)$, *т. е.*

$$\begin{aligned}
&\langle a, a\rangle = n(a),\\
&\langle a_1 + a_2, b\rangle = \langle a_1, b\rangle + \langle a_2, b\rangle,\\
&\langle \alpha a, b\rangle = \alpha\langle a, b\rangle,\\
&\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle,\\
&\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

для всех $a, a_1, a_2, b \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Первое равенство следует из леммы 3.16, остальные свойства проверяются непосредственными вычислениями. □

Предложение 3.19. *Пусть* $a, b \in \mathcal{A}_n$. *Тогда* $2\langle a, b\rangle = a\bar{b} + b\bar{a} = \bar{a}b + \bar{b}a$.

Доказательство. Согласно предложению 3.18

$$2\langle a,b\rangle = \langle a+b,a+b\rangle - \langle a,a\rangle - \langle b,b\rangle = (a+b)\overline{(a+b)} - a\bar{a} - b\bar{b} = a\bar{b} + b\bar{a}.$$

Аналогично

$$2\langle a,b\rangle = \langle a+b,a+b\rangle - \langle a,a\rangle - \langle b,b\rangle = \overline{(a+b)}(a+b) - \bar{a}a - \bar{b}b = \bar{a}b + \bar{b}a. \quad \square$$

Следствие 3.20. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$. Тогда $\langle a,b\rangle = \mathfrak{Re}(a\bar{b}) = \mathfrak{Re}(\bar{b}a)$.*

Доказательство. Действительно, из предложения 3.19 следует, что

$$2\mathfrak{Re}(a\bar{b}) = a\bar{b} + \overline{a\bar{b}} = a\bar{b} + b\bar{a} = 2\langle a,b\rangle.$$

Аналогично

$$2\mathfrak{Re}(\bar{b}a) = \bar{b}a + \overline{\bar{b}a} = \bar{b}a + \bar{a}b = 2\langle a,b\rangle. \quad \square$$

В следующей лемме описан антицентрализатор произвольного ненулевого элемента $\mathcal{A}_n$.

Лемма 3.21 [2, лемма 5.8]. *Пусть $a \in \mathcal{A}_n$, $a \neq 0$.*

1. *Если $\mathfrak{Re}(a) \neq 0$, $n(a) \neq 0$, то $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \{0\}$.*
2. *Если $\mathfrak{Re}(a) \neq 0$, $n(a) = 0$, то $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{R}\bar{a}$.*
3. *Если $\mathfrak{Re}(a) = 0$, то $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \{b \in \mathcal{A}_n \mid \mathfrak{Re}(b) = 0$ и $\langle a,b\rangle = 0\}$.*

Перейдём к некоторым определениям, связанным с понятием ассоциативности.

Определение 3.22. Ассоциатором элементов $a, b, c \in \mathcal{A}$ называется элемент $[a,b,c] = (ab)c - a(bc)$.

Предложение 3.23 [19, с. 141]. *Ассоциатор линеен по каждому своему аргументу.*

Определение 3.24 [19, определение 2.1.1].

- Алгебра $\mathcal{A}$ называется *гибкой*, если для любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $(ab)a = a(ba)$.
- Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется *альтернативным*, если для любого $b \in \mathcal{A}$ выполнено $a(ab) = a^2b$ и $(ba)a = ba^2$.
- Алгебра $\mathcal{A}$ называется *альтернативной*, если все её элементы альтернативны.

Предложение 3.25 [19, упражнение 2.1.1].

- *Если $\mathcal{A}$ — гибкая алгебра, то для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$ выполнено $[a,b,c] = -[c,b,a]$.*
- *Если $\mathcal{A}$ альтернативна, то ассоциатор на $\mathcal{A}$ кососимметричен, т. е. меняет знак при транспозиции аргументов.*

Лемма 3.26 [24, с. 436, с. 438, теорема 1].

- *$\mathcal{A}_n$ коммутативна, если и только если $n \leqslant 1$.*
- *$\mathcal{A}_n$ ассоциативна, если и только если $n \leqslant 2$.*

— *$\mathcal{A}_n$ альтернативна, если и только если $n \leqslant 3$.*
— *$\mathcal{A}_n$ гибкая для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Напомним некоторые сведения об автоморфизмах алгебр.

Определение 3.27. Отображение $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется автоморфизмом $\mathcal{A}$, если ϕ биективно и для всех $a, b \in \mathcal{A}$ и $\gamma \in \mathbb{F}$ выполнено $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, $\phi(\gamma a) = \gamma\phi(a)$. Обозначим множество всех автоморфизмов $\mathcal{A}$ как $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$.

Лемма 3.28. *Пусть $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$. Тогда ϕ сохраняет пары коммутирующих элементов, пары ортогональных элементов и пары делителей нуля.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения автоморфизма алгебры. □

Обозначение 3.29. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A}_n$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_m) = \mathbb{R}a_1 + \cdots + \mathbb{R}a_n,\\
&\mathrm{Lin}^*(a_1, \ldots, a_m) = \mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_m) \setminus \{0\},\\
&\mathrm{Lin}^*_I(a_1, \ldots, a_m) = \mathrm{Lin}(1, a_1, \ldots, a_m) \setminus \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3.3. Примеры вещественных алгебр Кэли—Диксона

Определение 3.30.

— Говорят, что алгебра $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ является алгеброй *главной последовательности Кэли—Диксона*, если $\gamma_k = -1$ для любого $k = 0, \ldots, n-1$. Мы будем обозначать такую алгебру $\mathcal{M}_n$ (от слова «main»).
— Алгебра $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ называется *контралгеброй*, если $\gamma_k = -1$ для любого $k = 0, \ldots, n-2$ и $\gamma_{n-1} = 1$. Мы будем обозначать её $\mathcal{H}_n$ (от слова «hyperbolic»), поскольку $\mathcal{H}_n$ обладает гиперболической нормой.

Предложение 3.31.

— *Пусть*
$$a = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)},\ \ b = \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)} \in \mathcal{M}_n.$$
Тогда
$$\langle a, b\rangle = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m b_m \,—$$
стандартное евклидово скалярное произведение. В частности,
$$n(a) = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m^2,$$
поэтому $n(a) = 0$, если и только если $a = 0$.

— *Пусть*

$$a = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)}, \ b = \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)} \in \mathcal{H}_n.$$

Тогда

$$\langle a, b\rangle = \sum_{m=0}^{2^{n-1}-1} a_m b_m - \sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1} a_m b_m.$$

Доказательство. Выражение для скалярного произведения в алгебрах главной последовательности может быть получено из определения $\langle a, b\rangle$ подстановкой значения

$$\delta_m^{(n)} = \prod_{l=0}^{n-1} (-\gamma_l)^{c_{m,l}} = 1$$

для всех $m = 0, \ldots, 2^n - 1$.

В случае контралгебр имеем $\delta_m^{(n)} = 1$ для всех $m = 0, \ldots, 2^{n-1}-1$ и $\delta_m^{(n)} = -1$ для всех $m = 2^{n-1}, \ldots, 2^n - 1$. $\square$

Пример 3.32.

— Алгебры комплексных чисел ($\mathbb{C}$), кватернионов ($\mathbb{H}$), октонионов ($\mathbb{O}$) и седенионов ($\mathbb{S}$) являются алгебрами главной последовательности при $n = 1, 2, 3, 4$ соответственно. Читатель может обратиться к [8] для знакомства с определениями $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ и к [14] — с определением $\mathbb{S}$.

— Примерами контралгебр малых размерностей являются алгебры контркомплексных чисел ($\hat{\mathbb{C}}$), контркватернионов ($\hat{\mathbb{H}}$) и контроктонионов ($\hat{\mathbb{O}}$), определённые в [11].

Ниже приведены точные определения и основные свойства упомянутых выше алгебр.

Определение 3.33 [11, с. 3, 5, 6].

— Алгебра контркомплексных чисел $\hat{\mathbb{C}}$ — это алгебра элементов вида $a + b\ell$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $\ell^2 = 1$, с сопряжением $\overline{a + b\ell} = a - b\ell$.

— Алгебра контркватернионов $\hat{\mathbb{H}}$ — четырёхмерная алгебра над $\mathbb{R}$ с базисом 1, i, ℓ, ℓi. Сопряжение на $\hat{\mathbb{H}}$ задаётся формулой

$$\overline{a_0 + a_1 i + a_2 \ell + a_3 \ell i} = a_0 - a_1 i - a_2 \ell - a_3 \ell i,$$

а умножение задаётся таблицей 1.

— Алгебра контроктонионов $\hat{\mathbb{O}}$ — восьмимерная алгебра над $\mathbb{R}$ с базисом 1, i, j, k, ℓ, ℓi, ℓj, ℓk. Сопряжение на $\hat{\mathbb{O}}$ задаётся формулой

$$\overline{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4 \ell + a_5 \ell i + a_6 \ell j + a_7 \ell k} = \\ = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k - a_4 \ell - a_5 \ell i - a_6 \ell j - a_7 \ell k,$$

а умножение задаётся таблицей 2.

Таблица 1. Таблица умножения базисных контркватернионов

$\times$	1	i	ℓ	ℓi
1	1	i	ℓ	ℓi
i	i	-1	$-\ell i$	ℓ
ℓ	ℓ	ℓi	1	i
ℓi	ℓi	$-\ell$	$-i$	1

Таблица 2. Таблица умножения базисных контроктонионов

$\times$	1	i	j	k	ℓ	ℓi	ℓj	ℓk
1	1	i	j	k	ℓ	ℓi	ℓj	ℓk
i	i	-1	k	$-j$	$-\ell i$	ℓ	$-\ell k$	ℓj
j	j	$-k$	-1	i	$-\ell j$	ℓk	ℓ	$-\ell i$
k	k	j	$-i$	-1	$-\ell k$	$-\ell j$	ℓi	ℓ
ℓ	ℓ	ℓi	ℓj	ℓk	1	i	j	k
ℓi	ℓi	$-\ell$	$-\ell k$	ℓj	$-i$	1	k	$-j$
ℓj	ℓj	ℓk	$-\ell$	$-\ell i$	$-j$	$-k$	1	i
ℓk	ℓk	$-\ell j$	ℓi	$-\ell$	$-k$	j	$-i$	1

Предложение 3.34 [11, с. 2]. *Имеют место следующие изоморфизмы*: $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathcal{H}_1$; $\hat{\mathbb{H}} \cong \mathcal{H}_2$; $\hat{\mathbb{O}} \cong \mathcal{H}_3$.

Доказательство. Согласно [20, с. 1] имеются изоморфизмы $\mathbb{R} \cong \mathcal{M}_0$, $\mathbb{C} \cong \mathcal{M}_1$ и $\mathbb{H} \cong \mathcal{M}_2$. Тогда требуемые изоморфизмы могут быть заданы на базисных элементах следующим образом:

$$\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{R}\{1\}\colon 1 \mapsto (1,0),\ \ell \mapsto (0,1);$$

$$\hat{\mathbb{H}} \cong \mathbb{C}\{1\}\colon 1 \mapsto (1,0),\ i \mapsto (i,0),\ \ell \mapsto (0,1),\ \ell i \mapsto -(0,i);$$

$$\hat{\mathbb{O}} \cong \mathbb{H}\{1\}\colon 1 \mapsto (1,0),\ i \mapsto (i,0),\ j \mapsto (j,0),\ k \mapsto (k,0),$$
$$\ell \mapsto (0,1),\ \ell i \mapsto -(0,i),\ \ell j \mapsto -(0,j),\ \ell k \mapsto -(0,k). \qquad \square$$

Следствие 3.35.

— $\hat{\mathbb{C}}$ *коммутативна и ассоциативна.*

— $\hat{\mathbb{H}}$ *некоммутативна, но ассоциативна.*

— $\hat{\mathbb{O}}$ *некоммутативна, неассоциативна, но альтернативна.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из леммы 3.26 и предложения 3.34. $\square$

Предложение 3.36. *Пусть* $a = a_0 + a_1 i + a_2\ell + a_3\ell i \in \hat{\mathbb{H}}$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Re}(a) = a_0,\\
&\mathfrak{Im}(a) = a_1 i + a_2\ell + a_3\ell i,\\
&n(a) = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Это частный случай леммы 3.16 для $n = 2$, $\gamma_0 = -1$, $\gamma_1 = 1$, поскольку из предложения 3.34 следует, что $\hat{\mathbb{H}} \cong \mathcal{H}_2$. $\square$

Лемма 3.37 [19, с. 66]. *Алгебра* $\hat{\mathbb{H}}$ *изоморфна* $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, *алгебре вещественных матриц размера* 2×2. *Требуемый изоморфизм* $\sigma_{\hat{\mathbb{H}}}\colon \hat{\mathbb{H}} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ *задаётся следующим образом*:

$$1 \mapsto I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \ell i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем перенести понятия сопряжённого элемента, вещественной части и нормы на элементы алгебры $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Предложение 3.38 [19, с. 157]. *Для любой матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

имеем

$$\bar{A} = \mathrm{tr}(A)I - A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$
$$2\mathfrak{Re}(A) = \mathrm{tr}(A) = a + d, \quad n(A) = \det(A) = ad - bc.$$

Далее мы будем отождествлять элементы $\hat{\mathbb{H}}$ и их образы при изоморфизме $\sigma_{\hat{\mathbb{H}}}$.

Предложение 3.39. *Пусть*

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4\ell + a_5\ell i + a_6\ell j + a_7\ell k \in \hat{\mathbb{O}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Re}(a) = a_0,\\
&\mathfrak{Im}(a) = a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4\ell + a_5\ell i + a_6\ell j + a_7\ell k,\\
&n(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 - a_7^2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Это частный случай леммы 3.16 для $n = 3$, $\gamma_0 = -1$, $\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = 1$, так как из предложения 3.34 следует, что $\hat{\mathbb{O}} \cong \mathcal{H}_3$. $\square$

Обозначение 3.40. Пусть $a \in \mathbb{H}$, $\mathfrak{Re}(a) = 0$, $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$. Тогда можно отождествить a и вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^t \in \mathbb{R}^3$.

Лемма 3.41 [19, с. 158]. *Алгебра контроктонионов* $\hat{\mathbb{O}}$ *изоморфна векторно-матричной алгебре Цорна, состоящей из всех матриц размера* 2×2 *следующего вида*:

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3,$$

в то время как сложение и умножение задаются формулами

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & \mathbf{v} + \mathbf{v}' \\ \mathbf{w} + \mathbf{w}' & b + b' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' & a\,\mathbf{v}' + b'\mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{w}' \\ a'\mathbf{w} + b\mathbf{w}' - \mathbf{v} \times \mathbf{v}' & bb' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{w} \end{pmatrix},$$

где $\cdot$ *и* $\times$ *обозначают скалярное и векторное произведение элементов из* $\mathbb{R}^3$ *соответственно. Единицей этой алгебры является матрица*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуемый изоморфизм $\sigma_{\hat{\mathbb{O}}}$ *задаётся следующим образом*:

$$(a + c) + \ell(b + d) \mapsto \begin{pmatrix} a + b & \mathbf{c} + \mathbf{d} \\ -\mathbf{c} + \mathbf{d} & a - b \end{pmatrix},$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{H}$ *и* $\mathfrak{Re}(c) = \mathfrak{Re}(d) = 0$.

Предложение 3.42 [19, с. 158]. *Мы можем перенести понятия сопряжённого элемента, вещественной части и нормы на элементы векторно-матричной алгебры Цорна. Тогда для любой матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix}$$

выполняется

$$\bar{A} = \operatorname{tr}(A)I - A = \begin{pmatrix} b & -\mathbf{v} \\ -\mathbf{w} & a \end{pmatrix},$$

$$2\mathfrak{Re}(A) = \operatorname{tr}(A) = a + b, \quad n(A) = \det(A) = ab - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Далее мы будем отождествлять элементы $\hat{\mathbb{O}}$ и их образы при изоморфизме $\sigma_{\hat{\mathbb{O}}}$.

4. Дважды альтернативные делители нуля в произвольных контралгебрах

Лемма 4.1 [24, лемма 2]. *Для любых* $x, y, z \in \mathcal{A}_n$ *имеет место равенство* $\mathfrak{Re}([x, y, z]) = 0$.

В [20] следующая лемма сформулирована только для алгебр главной последовательности, однако доказательство можно перенести и на случай произвольной алгебры Кэли—Диксона.

Лемма 4.2 [20, лемма 1.3]. *Пусть $x, y, z \in \mathcal{A}_n$. Тогда $\langle x, yz\rangle = \langle x\bar{z}, y\rangle = \langle \bar{y}x, z\rangle$.*

Доказательство. Используя следствие 3.20 и лемму 4.1, получаем

$$\langle x, yz\rangle = \mathfrak{Re}\big(x(\overline{yz})\big) = \mathfrak{Re}\big(x(\bar{z}\bar{y})\big) = \mathfrak{Re}\big((x\bar{z})\bar{y}\big) = \langle x\bar{z}, y\rangle.$$

Аналогично

$$\langle \bar{y}x, z\rangle = \mathfrak{Re}\big((\bar{y}x)\bar{z}\big) = \mathfrak{Re}\big(\bar{y}(x\bar{z})\big) = \langle x\bar{z}, y\rangle. \qquad \square$$

Обозначение 4.3. Пусть $a \in \mathcal{A}_n$. Тогда отображения $L_a, R_a\colon \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ задаются равенствами

$$L_a(x) = ax,$$
$$R_a(x) = xa$$

для всех $x \in \mathcal{A}_n$.

Предложение 4.4 [19, с. 55]. *Для любого $a \in \mathcal{A}_n$ отображения L_a и R_a являются линейными операторами в 2^n-мерном линейном пространстве $\mathcal{A}_n$.*

Следующая лемма показывает, что в случае вещественных алгебр Кэли—Диксона все делители нуля оказываются двусторонними делителями нуля.

Лемма 4.5. *Пусть $a \in \mathcal{A}_n$. Тогда $\dim(\operatorname{Ker} L_a) = \dim(\operatorname{Ker} R_a)$.*

Доказательство. Пусть $b \in \operatorname{Ker} L_a$, т. е. $ab = 0$. Тогда согласно лемме 4.2 для всех $x \in \mathcal{A}_n$ выполняется равенство

$$\langle \bar{b}, xa\rangle = \langle \bar{b}\bar{a}, x\rangle = \langle \overline{ab}, x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0,$$

т. е. $\bar{b} \perp \operatorname{Im} R_a$. Значит, $\overline{\operatorname{Ker} L_a} \perp \operatorname{Im} R_a$ и $\dim(\overline{\operatorname{Ker} L_a}) + \dim(\operatorname{Im} R_a) \leqslant \dim(\mathcal{A}_n)$. Следовательно,

$$\dim(\operatorname{Ker} R_a) = \dim(\mathcal{A}_n) - \dim(\operatorname{Im} R_a) \geqslant \dim(\overline{\operatorname{Ker} L_a}) = \dim(\operatorname{Ker} L_a).$$

Аналогично $\dim(\operatorname{Ker} L_a) \geqslant \dim(\operatorname{Ker} R_a)$, откуда получаем $\dim(\operatorname{Ker} L_a) = \dim(\operatorname{Ker} R_a)$. $\square$

Следствие 4.6. $Z(\mathcal{A}_n) = Z_{\mathrm{LR}}(\mathcal{A}_n)$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{A}_n$, $a \neq 0$. Тогда согласно лемме 4.5 $\operatorname{Ker} L_a \neq \{0\}$, если и только если $\operatorname{Ker} R_a \neq \{0\}$. Эквивалентно $a \in Z_{\mathrm{L}}(\mathcal{A}_n)$, если и только если $a \in Z_{\mathrm{R}}(\mathcal{A}_n)$. Значит, $Z_{\mathrm{L}}(\mathcal{A}_n) = Z_{\mathrm{R}}(\mathcal{A}_n)$, т. е. $Z(\mathcal{A}_n) = Z_{\mathrm{LR}}(\mathcal{A}_n)$. $\square$

Лемма 4.7. *Пусть $a, b, c \in \mathcal{M}_n$ удовлетворяют условиям $\mathfrak{Re}(a) = \mathfrak{Re}(b) = 0$, $[a, b, b] = 0$ и $b = [a, c, b]$. Тогда $b = 0$.*

Доказательство. Мы используем здесь соображения из [20, с. 21].

Рассмотрим отображение $S\colon \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, задаваемое формулой $S(x) = [a,x,b]$ для всех $x \in \mathcal{M}_n$. Тогда $S = R_b L_a - L_a R_b$. По [20, предложение 1.7] L_a и R_b кососимметричны относительно евклидова скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$, поэтому S также кососимметрично. Тогда $S\bigl(S(x)\bigr) = 0$, если и только если $S(x) = 0$. Поскольку $b = S(c)$ и $0 = [a,b,b] = S(b) = S\bigl(S(c)\bigr)$, получаем $b = S(c) = 0$. □

Доказательство следующей леммы аналогично приведённому в [21, с. 15].

Лемма 4.8. *Пусть* $a, b \in \mathcal{A}_n$, $[a,a,b] = 0$. *Тогда* $n(ab) = n(ba) = n(a)n(b)$.

Доказательство. Заметим, что

$$[\bar{a},a,b] = [2\mathfrak{Re}(a) - a, a, b] = -[a,a,b] = 0,$$

откуда следует, что $\bar{a}(ab) = (\bar{a}a)b$. По предложению 3.18 $n(ab) = \langle ab, ab\rangle$. Применив лемму 4.2 для $x = ab$, $y = a$ и $z = b$, получаем

$$\langle ab, ab\rangle = \langle \bar{a}(ab), b\rangle = \langle (\bar{a}a)b, b\rangle = \langle n(a)b, b\rangle = n(a)\langle b,b\rangle = n(a)n(b).$$

Теперь применим лемму 4.2 для $x = ba$, $y = b$ и $z = a$ и получим

$$n(ba) = \langle ba, ba\rangle = \langle (ba)\bar{a}, b\rangle.$$

Поскольку гибкость даёт $[b,a,\bar{a}] = -[b,a,a] = [a,a,b] = 0$, имеет место равенство

$$\langle (ba)\bar{a}, b\rangle = \langle b(a\bar{a}), b\rangle = \langle n(a)b, b\rangle = n(a)\langle b,b\rangle = n(a)n(b).$$

Таким образом, $n(ba) = n(a)n(b)$. □

Далее мы будем рассматривать такие делители нуля $(a,b) \in \mathcal{A}_n$, у которых обе компоненты a и b являются альтернативными элементами в $\mathcal{A}_{n-1}$.

Определение 4.9. Множество *дважды альтернативных элементов* $\mathcal{A}_n$ определяется как

$$\mathrm{DA}(\mathcal{A}_n) = \\ = \bigl\{(a,b) \in \mathcal{A}_n \mid \text{оба элемента } a \text{ и } b \text{ являются альтернативными в } \mathcal{A}_{n-1}\bigr\}.$$

Ясно, что это определение имеет смысл только при $n \geqslant 1$. Следующее предложение содержит условие, при котором все элементы $\mathcal{A}_n$ являются дважды альтернативными. В частности, из него следует, что дважды альтернативными являются все элементы алгебр контркомплексных чисел, контркватернионов и контроктонионов.

Предложение 4.10. *Пусть* $n \geqslant 1$. *Тогда* $\mathrm{DA}(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$, *если и только если* $n \leqslant 4$.

Доказательство. По лемме 3.26 алгебра $\mathcal{A}_n$ является альтернативной, если и только если $n \leqslant 3$, откуда немедленно следует требуемое утверждение. □

Заметим, что дважды альтернативные элементы могут не быть альтернативными (см. лемму 4.16).

Лемма 4.11. *Пусть* $(a,b) \in \mathrm{DA}(\mathcal{H}_n) \setminus \{0\}$. *Тогда* $(a,b) \in Z(\mathcal{H}_n)$, *если и только если* $n\big((a,b)\big) = n(a) - n(b) = 0$.

Доказательство. Пусть $n\big((a,b)\big) = 0$. Тогда

$$(a,b)\overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}(a,b) = n\big((a,b)\big) = 0,$$

откуда следует, что $(a,b) \in Z(\mathcal{H}_n)$.

Чтобы доказать обратную импликацию, воспользуемся соображениями, аналогичными изложенным в [20, с. 25]. По следствию 4.6 можно считать, что $(a,b) \in Z_{\mathrm{L}}(\mathcal{H}_n)$. Тогда существуют такие $c,d \in \mathcal{M}_{n-1}$, что $(c,d) \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\}$ и $(a,b)(c,d) = 0$. Поскольку $(a,b)(c,d) = (ac+\bar{d}b, da+b\bar{c})$, имеют место равенства $ac+\bar{d}b = 0$ и $da+b\bar{c} = 0$. Если $c = 0$, то из $\bar{d}b = da = 0$ следует $d = 0$, так как $n(b)\bar{d} = \bar{d}(b\bar{b}) = (\bar{d}b)\bar{b} = 0$, $n(a)d = d(a\bar{a}) = (da)\bar{a} = 0$ и $(a,b) \neq 0$. Значит, $c \neq 0$. Элементы a и b альтернативны, поэтому $[a,a,c] = 0$, $[a,a,d] = 0$, $[b,b,\bar{c}] = 0$ и $[b,b,\bar{d}] = 0$. Таким образом, мы можем воспользоваться леммой 4.8 и получить, что

$$\begin{aligned}
&n(a)n(c) = n(ac) = n(-\bar{d}b) = n(\bar{d}b) = n(\bar{d})n(b) = n(b)n(d),\\
&n(a)n(d) = n(da) = n(-b\bar{c}) = n(b\bar{c}) = n(b)n(\bar{c}) = n(b)n(c),\\
&\big(n(a)\big)^2 n(c) = n(a)\big(n(a)n(c)\big) = n(a)\big(n(b)n(d)\big) =\\
&\quad = n(b)\big(n(a)n(d)\big) = n(b)\big(n(b)n(c)\big) = \big(n(b)\big)^2 n(c).
\end{aligned}$$

Условие $c \neq 0$ означает, что $n(c) \neq 0$, поэтому из равенства $\big(n(a)\big)^2 n(c) = \big(n(b)\big)^2 n(c)$ следует, что $\big(n(a)\big)^2 = \big(n(b)\big)^2$. Кроме того, $n(a) \geqslant 0$ и $n(b) \geqslant 0$, откуда следует, что $n(a) = n(b)$ и, следовательно, $n\big((a,b)\big) = n(a) - n(b) = 0$. □

Следствие 4.12. *Если* $1 \leqslant n \leqslant 4$, *то*

$$Z(\mathcal{H}_n) = \{x \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\} \mid n(x) = 0\}.$$

Доказательство. Согласно предложению 4.10 имеет место равенство $\mathrm{DA}(\mathcal{H}_n) = \mathcal{H}_n$, поэтому мы можем воспользоваться леммой 4.11. □

Теперь мы покажем, что множество элементов нулевой нормы, вообще говоря, строго меньше множества делителей нуля.

Предложение 4.13. *При* $n \geqslant 5$ *множество* $Z(\mathcal{H}_n)$ *содержит элементы ненулевой нормы.*

Доказательство. Если $n \geqslant 5$, то найдутся такие $c,d \in Z(\mathcal{M}_{n-1})$, что $cd = dc = 0$ (см. [20, следствие 1.6]). Тогда $(c,0)(d,0) = (d,0)(c,0) = 0$, однако $n\big((c,0)\big) = n(c) \neq 0$ и $n\big((d,0)\big) = n(d) \neq 0$. □

Лемма 4.14 [24, лемма 4]. *Для любого* $m = 1,\ldots,2^n-1$ *элемент* $e_m^{(n)} \in \mathcal{A}_n$ *является альтернативным.*

Лемма 4.15. *Пусть* $a, b \in \mathcal{A}_n$, $\mathfrak{Re}(a) = 0$. *Тогда* $a(ab) = (ba)a$.

Доказательство. Поскольку из $\mathfrak{Re}(a) = 0$ следует $a^2 \in \mathbb{R}$, то по гибкости получаем

$$0 = [a, a, b] + [b, a, a] = a^2 b - a(ab) + (ba)a - ba^2 = (ba)a - a(ab). \qquad \square$$

Следующая вспомогательная лемма 4.16 аналогична теореме 3.3 в [21] для $\mathcal{M}_n$, за исключением пункта 3).

Лемма 4.16. *Пусть* $n \geqslant 4$, $a, b \in \mathcal{M}_{n-1}$, $\mathfrak{Re}(a) = \mathfrak{Re}(b) = 0$. *Рассмотрим следующие утверждения*:

1) $(a, b) \in \mathcal{H}_n$ *альтернативен*;
2) a *и* b *альтернативны и линейно зависимы*;
3) $a = \pm b$.

Тогда условие 1) *эквивалентно выполнению одного из условий* 2) *или* 3).

Доказательство. Рассмотрим условие альтернативности для элемента (a, b). Для произвольного $(c, d) \in \mathcal{H}_n$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}(a,b)\big((a,b)(c,d)\big) &= (a,b)(ac+\bar{d}b, da+b\bar{c}) = \\ &= \big(a(ac+\bar{d}b) + \overline{(da+b\bar{c})}b, (da+b\bar{c})a + b\overline{(ac+\bar{d}b)}\big) = \\ &= (a(ac) - (cb)b - [a,\bar{d},b], (da)a - b(bd) + [b,\bar{c},a]) = (A, B).\end{aligned}$$

Мы также имеем $[a, \bar{d}, b] = -[a, d, b]$ и по гибкости $[b, \bar{c}, a] = -[b, c, a] = [a, c, b]$. Кроме того, из леммы 4.15 следует, что $(cb)b = b(bc)$ и $(da)a = a(ad)$. Значит, $A = a(ac) - b(bc) + [a, d, b]$ и $B = a(ad) - b(bd) + [a, c, b]$.

Теперь рассмотрим

$$(a,b)^2(c,d) = -n\big((a,b)\big)(c,d) = -\big(n(a) - n(b)\big)(c,d) = (a^2 - b^2)(c,d).$$

Заметим, что B получается из A заменой c на d и наоборот. Таким образом, (a, b) альтернативен, если и только если для любых $c, d \in \mathcal{M}_{n-1}$ выполняется равенство

$$a(ac) - b(bc) + [a, d, b] = (a^2 - b^2)c. \tag{1}$$

Независимо подставляя $c = 0$ и $d = 0$, получаем, что это условие эквивалентно системе

$$\begin{cases} a(ac) - b(bc) = (a^2 - b^2)c, \\ [a, d, b] = 0 \end{cases}$$

для всех $c, d \in \mathcal{M}_{n-1}$.

По [21, теорема 2.3] и гибкости получаем, что $[a, d, b] = 0$ для всех $d \in \mathcal{M}_{n-1}$, если и только если a и b линейно зависимы.

Пусть теперь a и b линейно зависимы. Без ограничения общности можно считать, что $b = \beta a$ для некоторого $\beta \in \mathbb{R}$, поэтому (a, b) альтернативен, если и только если $(1 - \beta^2)a(ac) = (1 - \beta^2)a^2 c$ для всех $c \in \mathcal{M}_{n-1}$. Это условие выполняется, если и только если либо $\beta = \pm 1$, либо a альтернативен. $\square$

Пример 4.17 ниже показывает, что в лемме 4.11 мы не можем заменить $\mathcal{H}_n$ произвольной алгеброй $\mathcal{A}_n$ с условием $\gamma_{n-1}=1$.

Пример 4.17. Пусть $n \geqslant 4$, $\mathcal{A}_n = \mathcal{H}_{n-1}\{1\}$. Рассмотрим

$$a = \big(e_1^{(n-2)}, 0\big),\ b = \big(e_1^{(n-2)}, e_1^{(n-2)}\big),\ c = \big(e_2^{(n-2)}, -e_2^{(n-2)}\big) \in \mathcal{H}_{n-1}.$$

Тогда $(a+b,a)$ и $(c,-c)$ дважды альтернативны и ортогональны в $\mathcal{A}_n$, поэтому $(a+b,a)\in Z(\mathcal{A}_n)$, однако $n\big((a+b,a)\big)\neq 0$.

Действительно, применяя лемму 4.16 к результату леммы 4.14, получаем, что $(a+b,a)$ и $(c,-c)$ дважды альтернативны. Кроме того, согласно пункту 3) леммы 3.21 a и c антикоммутируют. Нетрудно также проверить, что b и c ортогональны. Тогда

$$(a+b,a)(c,-c) = \big((a+b)c - \bar{c}a, -c(a+b) + a\bar{c}\big) = \big(ac+ca, -(ac+ca)\big) = 0,$$
$$(c,-c)(a+b,a) = \big(c(a+b) - \bar{a}c, ac - c\overline{(a+b)}\big) = (ac+ca, ac+ca) = 0,$$

поэтому $(a+b,a)$ и $(c,-c)$ ортогональны. Наконец,

$$n\big((a+b,a)\big) = n(a+b) - n(a) = 2,$$

поскольку

$$n(a+b) = n\Big(\big(2e_1^{(n-2)}, e_1^{(n-2)}\big)\Big) = n\big(2e_1^{(n-2)}\big) - n\big(e_1^{(n-2)}\big) = 4-1 = 3$$

Предложение 11.1 в [12], доказанное для алгебр главной последовательности, может быть перенесено на случай контралгебр (см. леммы 4.18 и 4.21).

Лемма 4.18. *Пусть* $(a,b)\in \mathrm{DA}(\mathcal{H}_n)\cap Z(\mathcal{H}_n)$. *Тогда*

$$\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big) = \left\{\left(c, -\frac{(bc)a}{n(a)}\right)\ \middle|\ [a,c,b]=0\right\},$$
$$\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big) = \left\{\left(c, -\frac{(b\bar{c})\bar{a}}{n(a)}\right)\ \middle|\ [a,c,b]=0\right\}.$$

Доказательство. Сперва рассмотрим $\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$. Пусть $(c,d)\in\mathcal{H}_n$ таков, что $(c,d)(a,b) = (ca+\bar{b}d, bc+d\bar{a}) = 0$. Тогда $bc+d\bar{a}=0$, поэтому $n(a)d = d(\bar{a}a) = (d\bar{a})a = -(bc)a$. Кроме того, $ca+\bar{b}d=0$, и по лемме 4.11 $n(a)=n(b)$, откуда следует, что

$$b(ca) = -b(\bar{b}d) = -(b\bar{b})d = -n(b)d = -n(a)d = (bc)a.$$

Таким образом, $[b,c,a]=0$ или, из гибкости, $[a,c,b]=0$. Рассуждая в обратную сторону, получаем, что для любого $c\in\mathcal{M}_{n-1}$ с условием $[a,c,b]=0$ выполняется

$$\left(c, -\frac{(bc)a}{n(a)}\right) \in \mathrm{l.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big).$$

Значит, обратная импликация также верна.

Теперь перейдём к $\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$. Пусть $(c,d)\in\mathcal{H}_n$ удовлетворяет условию $(a,b)(c,d)=(ac+\bar{d}b, da+b\bar{c})=0$. Тогда $da+b\bar{c}=0$, поэтому

$$n(a)d=d(a\bar{a})=(da)\bar{a}=-(b\bar{c})\bar{a}.$$

Поскольку $ac+\bar{d}b=0$ и $n(a)=n(b)$, получаем

$$(ac)\bar{b}=-(\bar{d}b)\bar{b}=-\bar{d}(b\bar{b})=-n(b)\bar{d}=\overline{-n(a)d}=\overline{(b\bar{c})\bar{a}}=a(c\bar{b}).$$

Значит, $[a,c,\bar{b}]=0$ или, эквивалентно, $[a,c,b]=0$. Ясно, что обратная импликация в данном случае также верна, т. е. для любого $c\in\mathcal{M}_{n-1}$ с условием $[a,c,b]=0$ выполняется

$$\left(c,-\frac{(b\bar{c})\bar{a}}{n(a)}\right)\in\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big). \qquad \square$$

Предложение 4.19. *Пусть* $x\in Z(\mathcal{A}_n)$, $\mathfrak{Re}(x)\neq 0$, $O_{\mathcal{A}_n}(x)\neq\{0\}$. *Тогда* $n(x)=0$, $O_{\mathcal{A}_n}(x)=\mathrm{Lin}(\bar{x})$, *а компонента связности* $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$, *содержащая* x, *— полный двудольный граф с долями* $\mathrm{Lin}^*(x)$ *и* $\mathrm{Lin}^*(\bar{x})$.

Доказательство. $O_{\mathcal{A}_n}(x)\subset\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x)$, поэтому $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x)\neq\{0\}$. Тогда по лемме 3.21 выполнено $n(x)=0$ и $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x)=\mathrm{Lin}(\bar{x})$, значит, $O_{\mathcal{A}_n}(x)=\mathrm{Lin}(\bar{x})$. Аналогично $O_{\mathcal{A}_n}(\bar{x})=\mathrm{Lin}(x)$, откуда немедленно следует требуемое утверждение. $\square$

Как следует из предложения 4.19, естественно дать следующее определение.

Определение 4.20. $Z_{\mathfrak{Im}}(\mathcal{A}_n)=\{x\in Z(\mathcal{A}_n)\mid\mathfrak{Re}(x)=0\}$ — это множество всех делителей нуля с нулевой вещественной частью. $\Gamma_O^{\mathfrak{Im}}(\mathcal{A}_n)$ — это подграф $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$ на множестве вершин $Z_{\mathfrak{Im}}(\mathcal{A}_n)$.

Лемма 4.21. *Пусть* $(a,b)\in\mathrm{DA}(\mathcal{H}_n)\cap Z_{\mathfrak{Im}}(\mathcal{H}_n)$. *Тогда*

$$O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)=\left\{\left(c,-\frac{(bc)a}{n(a)}\right)\,\middle|\,\mathfrak{Re}(c)=0,\ [a,c,b]=0\right\}.$$

Доказательство. $O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)\subset\mathrm{Anc}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$, поэтому из леммы 3.21 следует, что для любого $(c,d)\in O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)\subset\mathrm{Anc}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$ выполнено $\mathfrak{Re}(c)=0$. Теперь воспользуемся представлением $\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$ и $\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$ из леммы 4.18. Для любого $(c,d)\in O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)\subset\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$ верно, что $[a,c,b]=0$ и

$$d=-\frac{(bc)a}{n(a)}.$$

Обратно, для любого $c\in\mathcal{M}_{n-1}$ с условиями $\mathfrak{Re}(c)=0$ и $[a,c,b]=0$ выполнено

$$\left(c,-\frac{(bc)a}{n(a)}\right)\in\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)\cap\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)=O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big).$$

Таким образом, имеет место равенство

$$O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)=\left\{\left(c,-\frac{(bc)a}{n(a)}\right)\,\middle|\,\mathfrak{Re}(c)=0,\ [a,c,b]=0\right\}. \qquad \square$$

Лемма 4.22 [2, лемма 8.11]. *Пусть* $x \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$, $\mathfrak{Re}(x) = 0$. *Тогда*

1) *если* $n(x) = 0$ *и* $n \leqslant 3$, *то* $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$;
2) *если* $n(x) \neq 0$, *то* $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$.

Следующая теорема обобщает предложение 8.15 из [2] на случай дважды альтернативных делителей нуля в произвольных контралгебрах. Как показывает предложение 8.19 в [2], накладываемые в ней ограничения являются существенными.

Теорема 4.23. *Пусть* $(a,b) \in \mathrm{DA}(\mathcal{H}_n) \cap Z_{\mathfrak{Im}}(\mathcal{H}_n)$. *Тогда*

$$C_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big).$$

Доказательство. Предположим, что существует

$$(c,d) \in C_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big) \setminus \Big(\mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)\Big).$$

Без ограничения общности можно считать, что $n(a) = n(b) = 1$ и $\mathfrak{Re}(c) = 0$. Тогда

$$\overline{(a,b)(c,d)} = \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)} = (c,d)(a,b) = (a,b)(c,d),$$

т. е. $(a,b)(c,d) = r \in \mathbb{R}$. Поскольку $(c,d) \notin O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$, то $r \neq 0$. Предположим без ограничения общности, что $r = 1$. Тогда

$$(1,0) = (a,b)(c,d) = (ac + \bar{d}b, da + b\bar{c}) = (ac + \bar{d}b, da - bc).$$

Из условия $da = bc$ следует, что $d = d(a\bar{a}) = (da)\bar{a} = (bc)\bar{a}$, значит, $\bar{d} = a(\bar{c}\bar{b}) = - a(c\bar{b})$. Умножим равенство $1 = ac + \bar{d}b$ справа на $\bar{b}$ и подставим выражение для $\bar{d}$:

$$\bar{b} = (ac)\bar{b} + (\bar{d}b)\bar{b} = (ac)\bar{b} + \bar{d}(b\bar{b}) = (ac)\bar{b} + \bar{d} = (ac)\bar{b} - a(c\bar{b}) = [a,c,\bar{b}].$$

Из леммы 4.1 следует, что $\mathfrak{Re}(\bar{b}) = \mathfrak{Re}([a,c,\bar{b}]) = 0$, откуда получаем, что $\bar{b} = -b$ и $b = [a,c,b]$. Применяя лемму 4.7, получаем $b = 0$, противоречие. □

Следствие 4.24. *Пусть* $(a,b) \in \mathrm{DA}(\mathcal{H}_n) \cap Z_{\mathfrak{Im}}(\mathcal{H}_n)$. *Тогда* $x \in O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$, *если и только если* $\mathfrak{Re}(x) = 0$ *и* $x \in C_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$.

Доказательство. Заметим, что $O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big) \subset \mathrm{Anc}_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$, поэтому по лемме 3.21 для всех $x \in O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$ выполнено $\mathfrak{Re}(x) = 0$. Из теоремы 4.23 получаем, что $C_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$, откуда следует, что $\mathfrak{Im}\Big(C_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)\Big) = O_{\mathcal{H}_n}\big((a,b)\big)$. □

Лемма 4.25 [24, с. 438].

1. *Если* $n \leqslant 1$, *то* $C_{\mathcal{A}_n} = \mathcal{A}_n$, *поэтому множество вершин* $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$ *пустое.*
2. *Если* $n \geqslant 2$, *то* $C_{\mathcal{A}_n} = \mathbb{R}$, *поэтому множество вершин* $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$ *совпадает с* $\mathcal{A}_n \setminus \mathbb{R}$.

Предложение 4.26. *Любой путь между любыми двумя вершинами в* $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$ *можно изменить так, чтобы все промежуточные элементы были чисто мнимыми.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из того, что $\mathbb{R} \subseteq \subseteq C_{\mathcal{A}_n}$. □

Предложение 4.27. *Пусть* $2 \leqslant n \leqslant 4$, $x \in \mathcal{H}_n \setminus \mathbb{R}$, $n\big(\mathfrak{Im}(x)\big) \neq 0$. *Тогда* $C_{\mathcal{H}_n}(x) = \mathrm{Lin}(1, x)$, *а компонента связности* $\Gamma_C(\mathcal{H}_n)$, *содержащая* x, *— полный граф на множестве вершин* $\mathrm{Lin}_I^*(x)$.

Доказательство. По следствию 4.12 имеем, что $\mathfrak{Im}(x) \notin Z(\mathcal{H}_n)$, поэтому $O_{\mathcal{H}_n}\big(\mathfrak{Im}(x)\big) = \{0\}$. Тогда из леммы 4.22 следует, что

$$C_{\mathcal{H}_n}(x) = C_{\mathcal{H}_n}\big(\mathfrak{Im}(x)\big) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\mathfrak{Im}(x) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x.$$

Дальнейшее доказательство очевидно. □

Обозначение 4.28. Пусть Γ — произвольный неориентированный граф. Обозначим множество всех компонент связности Γ через $\mathcal{C}(\Gamma)$, а множество максимальных клик в Γ — через $\mathcal{Q}(\Gamma)$.

Обозначение 4.29. Пусть S — некоторое подмножество $\mathfrak{Im}(\mathcal{H}_n)$. Тогда

$$\mathbb{R} + S = \{x \in \mathcal{H}_n \mid \mathfrak{Im}(x) \in S\}.$$

Теорема 4.30. *Пусть* $2 \leqslant n \leqslant 4$. *Обозначим подграф* $\Gamma_C(\mathcal{H}_n)$ *на множестве вершин* $\mathbb{R} + Z_{\mathfrak{Im}}(\mathcal{H}_n) = \{x \in \mathcal{H}_n \setminus \mathbb{R} \mid n\big(\mathfrak{Im}(x)\big) = 0\}$ *через* Γ_C. *Для краткости обозначим также* $\Gamma_O = \Gamma_O^{\mathfrak{Im}}(\mathcal{H}_n)$. *Тогда* Γ_C *и* Γ_O *связаны следующим образом.*

1. *Рассмотрим такое отображение* $\phi_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C}(\Gamma_O) \to \mathcal{C}(\Gamma_C)$, *что* $\phi_{\mathcal{C}}(C) = \mathbb{R} + C$ *для всех* $C \in \mathcal{C}(\Gamma_O)$. *Тогда* $\phi_{\mathcal{C}}$ *— биекция, сохраняющая диаметры.*
2. *Аналогично зададим отображение* $\phi_{\mathcal{Q}}\colon \mathcal{Q}(\Gamma_O) \to \mathcal{Q}(\Gamma_C)$ *формулой* $\phi_{\mathcal{Q}}(Q) = \mathbb{R} + Q$ *для всех* $Q \in \mathcal{Q}(\Gamma_O)$. *Тогда* $\phi_{\mathcal{Q}}$ *— биекция.*

Доказательство. Сперва мы покажем, что $\phi_{\mathcal{C}}$ — биекция, сохраняющая диаметры. Нетрудно убедиться, что диаметр любой компоненты связности Γ_C может быть достигнут на паре элементов с различными мнимыми частями. Пусть теперь $x, y \in \big(\mathbb{R} + Z_{\mathfrak{Im}}(\mathcal{H}_n)\big)$, $\mathfrak{Im}(x) \neq \mathfrak{Im}(y)$. Тогда $d_{\Gamma_C}(x, y) = = d_{\Gamma_C}\big(\mathfrak{Im}(x), \mathfrak{Im}(y)\big)$. Из ортогональности следует коммутативность, поэтому любой путь между $\mathfrak{Im}(x)$ и $\mathfrak{Im}(y)$ в Γ_O является также путём в Γ_C, откуда следует, что $d_{\Gamma_C}\big(\mathfrak{Im}(x), \mathfrak{Im}(y)\big) \leqslant d_{\Gamma_O}\big(\mathfrak{Im}(x), \mathfrak{Im}(y)\big)$. Кроме того, из предложения 4.26 следует, что любой путь между $\mathfrak{Im}(x)$ и $\mathfrak{Im}(y)$ в Γ_C можно изменить так, чтобы вещественная часть всех промежуточных элементов была равна нулю, и по следствию 4.24 этот новый путь является также путём в Γ_O. Таким образом, $d_{\Gamma_O}\big(\mathfrak{Im}(x), \mathfrak{Im}(y)\big) \leqslant d_{\Gamma_C}\big(\mathfrak{Im}(x), \mathfrak{Im}(y)\big)$. Значит,

$$d_{\Gamma_C}(x, y) = d_{\Gamma_C}\big(\mathfrak{Im}(x), \mathfrak{Im}(y)\big) = d_{\Gamma_O}\big(\mathfrak{Im}(x), \mathfrak{Im}(y)\big).$$

Согласно следствию 4.12 любой элемент $Z_{\mathfrak{Im}}(\mathcal{H}_n)$ имеет нулевую норму и, следовательно, ортогонален сам себе. Пусть теперь $x, y \in \big(\mathbb{R} + Z_{\mathfrak{Im}}(\mathcal{H}_n)\big)$. По следствию 4.24 x и y коммутируют, если и только если $\mathfrak{Im}(x)$ и $\mathfrak{Im}(y)$ ортогональны. Таким образом, x и y соединены ребром в Γ_C, если и только если либо $\mathfrak{Im}(x) = \mathfrak{Im}(y)$, либо $\mathfrak{Im}(x)$ и $\mathfrak{Im}(y)$ соединены ребром в Γ_O. Из этого можно сделать вывод, что $\phi_{\mathcal{Q}}$ — биекция. □

5. Графы отношений

5.1. Контркомплексные числа

5.1.1. Ортогональность

Предложение 5.1. $\Gamma_O(\hat{\mathbb{C}})$ — *полный двудольный граф с долями* $\mathrm{Lin}^*(1+\ell)$ *и* $\mathrm{Lin}^*(1-\ell)$.

Доказательство. По следствию 4.12

$$Z(\hat{\mathbb{C}}) = \{a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \mid n(a) = 0\} = \mathrm{Lin}^*(1+\ell) \cup \mathrm{Lin}^*(1-\ell).$$

Осталось воспользоваться предложением 4.19. □

5.1.2. Делители нуля

Предложение 5.2. *Граф* $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{C}})$ *может быть получен из* $\Gamma_O(\hat{\mathbb{C}})$ *заменой каждого неориентированного ребра на пару ориентированных рёбер.*

Доказательство. Алгебра $\hat{\mathbb{C}}$ коммутативна, поэтому условия $ab = 0$ и $ba = 0$ эквивалентны. □

5.2. Контркватернионы

5.2.1. Вещественная жорданова нормальная форма

Замечание 5.3. Пусть $A \in \hat{\mathbb{H}}$. Тогда характеристический многочлен $p_A(\lambda)$ из определения 3.4 совпадает со стандартным характеристическим многочленом A как матрицы и его дискриминант равен $\mathrm{dis}(A) = \big(\mathrm{tr}(A)\big)^2 - 4\det(A)$.

Лемма 5.4. *Пусть* $A \in \hat{\mathbb{H}} \setminus \mathbb{R}I$. *Тогда существует такое* $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{H}})$, *что*

1) *если* $\mathrm{dis}(A) > 0$, *т. е.* $\mathrm{dis}(A) = d^2$ *для некоторого* $d \neq 0$, *то*

$$\phi(A) = \frac{\mathrm{tr}(A) + d\ell}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(A) + d & 0 \\ 0 & \mathrm{tr}(A) - d \end{pmatrix};$$

2) *если* $\mathrm{dis}(A) < 0$, *т. е.* $\mathrm{dis}(A) = -d^2$ *для некоторого* $d \neq 0$, *то*

$$\phi(A) = \frac{\mathrm{tr}(A) + di}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(A) & d \\ -d & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix};$$

3) *если* $\mathrm{dis}(A) = 0$, *то*

$$\phi(A) = \frac{\mathrm{tr}(A) + i + \ell i}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(A) & 2 \\ 0 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть J_A — вещественная жорданова нормальная форма матрицы A.

Если $\operatorname{dis}(A) > 0$, т. е. $\operatorname{dis}(A) = d^2$ для некоторого $d \neq 0$, то корнями $p_A(\lambda)$ являются $(\operatorname{tr}(A) \pm d)/2$, поэтому

$$J_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) + d & 0 \\ 0 & \operatorname{tr}(A) - d \end{pmatrix}.$$

Если $\operatorname{dis}(A) < 0$, т. е. $\operatorname{dis}(A) = -d^2$ для некоторого $d \neq 0$, то корнями $p_A(\lambda)$ являются $(\operatorname{tr}(A) \pm di)/2$, поэтому

$$J_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) & d \\ -d & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

Если $\operatorname{dis}(A) = 0$, то $p_A(\lambda)$ имеет корень $\operatorname{tr}(A)/2$ кратности 2, поэтому

$$J_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) & 2 \\ 0 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix},$$

так как $A \notin \mathbb{R}I$.

Существует такая обратимая матрица $C \in \hat{\mathbb{H}}$, что $A = C^{-1}J_AC$. Зададим $\phi\colon \hat{\mathbb{H}} \to \hat{\mathbb{H}}$ формулой $\phi(B) = CBC^{-1}$ для всех $B \in \hat{\mathbb{H}}$. Тогда $\phi \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{H}})$ и $\phi(A) = J_A$. □

5.2.2. Ортогональность

Стоит заметить, что теорема 5.6 является частным случаем леммы 4.1 в [1], однако, на наш взгляд, формулировка теоремы 5.6 является более удобной.

Лемма 5.5. *Пусть $A \in Z(\hat{\mathbb{H}})$. Тогда $O_{\hat{\mathbb{H}}}(A) = \operatorname{Lin}(\bar{A})$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Если $\mathfrak{Re}(A) \neq 0$, то мы можем воспользоваться предложением 4.19.

Если $\mathfrak{Re}(A) = 0$, то из леммы 4.21 следует, что $\dim\bigl(O_{\hat{\mathbb{H}}}(A)\bigr) = 1$. Поскольку $\operatorname{Lin}(\bar{A}) \subset O_{\hat{\mathbb{H}}}(A)$, получаем, что $O_{\hat{\mathbb{H}}}(A) = \operatorname{Lin}(\bar{A}) = \operatorname{Lin}(A)$. □

Теорема 5.6. *Компоненты связности $\Gamma_O(\hat{\mathbb{H}})$ имеют следующий вид:*

1) *полный двудольный граф с долями $\operatorname{Lin}^*(A)$ и $\operatorname{Lin}^*(\bar{A})$, где $\det(A) = 0$, $\operatorname{tr}(A) \neq 0$;*
2) *полный граф на множестве вершин $\operatorname{Lin}^*(A)$, где $\det(A) = 0$, $\operatorname{tr}(A) = 0$.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из леммы 5.5. □

5.2.3. Делители нуля

Отметим, что теорема 5.9 является частным случаем леммы 4.2 в [13]. Тем не менее мы приводим собственное доказательство этого утверждения, чтобы провести аналогию между $\hat{\mathbb{H}}$ и $\hat{\mathbb{O}}$ (см. теорему 5.9 и теорему 5.32 соответственно). Кроме того, в [13, предложение 3.2] показано, что для любого коммутативного кольца R и любого $n \geqslant 2$ в $\Gamma\bigl(\mathrm{M}_n(R)\bigr)$ существует ориентированный цикл длины 3. Однако в том случае, когда $R = \mathbb{R}$ и $n = 2$, имеет место и более строгое утверждение (см. лемму 5.11).

Обозначение 5.7. Обозначим

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 5.8. *Пусть $A \in Z(\hat{\mathbb{H}})$. Тогда существует такое $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{H}})$, что*

1) *если* $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, *то* $\phi(A) = \mathrm{tr}(A)E_{11}$;
2) *если* $\mathrm{tr}(A) = 0$, *то* $\phi(A) = E_{12}$.

Доказательство. По следствию 4.12 $A \in Z(\hat{\mathbb{H}})$ означает $\det(A) = 0$, поэтому $\mathrm{dis}(A) = \bigl(\mathrm{tr}(A)\bigr)^2 - 4\det(A) = \bigl(\mathrm{tr}(A)\bigr)^2$. Остаётся применить лемму 5.4. □

Теорема 5.9. *Диаметр $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})$ равен 2.*

Доказательство. Сперва мы покажем, что $d\bigl(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})\bigr) \leqslant 2$. Как следует из лемм 3.28 и 5.4, достаточно доказать следующее. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc = 0.$$

Тогда

1) $d(E_{11}, A) \leqslant 2$:
   — если $a \neq 0$ или $c \neq 0$, то
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$
   — если $a = 0$ и $c = 0$, то либо $b \neq 0$, либо $d \neq 0$, поэтому
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & -b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$
2) $d(E_{12}, A) \leqslant 2$:
   — если $a \neq 0$ или $c \neq 0$, то
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} c & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$
   — если $a = 0$ и $c = 0$, то либо $b \neq 0$, либо $d \neq 0$, поэтому
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $d\bigl(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})\bigr) \geqslant 2$, поскольку найдётся пара не связанных ребром вершин (например, $E_{11} \not\to E_{12}$). Значит, $d\bigl(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})\bigr) = 2$. □

Предложение 5.10.

1. $\mathrm{l.Ann}_{\hat{\mathbb{H}}}(E_{11}) = \mathrm{Lin}(E_{12}, E_{22})$, $\mathrm{r.Ann}_{\hat{\mathbb{H}}}(E_{11}) = \mathrm{Lin}(E_{21}, E_{22})$.
2. $\mathrm{l.Ann}_{\hat{\mathbb{H}}}(E_{12}) = \mathrm{Lin}(E_{12}, E_{22})$, $\mathrm{r.Ann}_{\hat{\mathbb{H}}}(E_{12}) = \mathrm{Lin}(E_{11}, E_{12})$.

Доказательство. Все равенства проверяются при помощи непосредственных вычислений. □

Лемма 5.11. *Пусть $A, B \in Z(\hat{\mathbb{H}})$ линейно независимы, $AB = 0$. Тогда существует такое $C \in Z(\hat{\mathbb{H}})$, что A, B, C линейно независимы и образуют цикл длины 3 в $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})$, т. е. $BC = CA = 0$.*

Доказательство. Как следует из леммы 5.8, достаточно рассмотреть $A \in \{E_{11}, E_{12}\}$. Возможны два случая:

1) $A = E_{11}$. Тогда $B = \alpha E_{21} + \beta E_{22}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, поэтому $C = \beta E_{12} - \alpha E_{22}$;
2) $A = E_{12}$. Тогда $B = \alpha E_{11} + \beta E_{12}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Поскольку A и B линейно независимы, имеем $\alpha \neq 0$, поэтому $C = \beta E_{12} - \alpha E_{22}$. □

5.3. Контроктонионы

5.3.1. Вещественная жорданова нормальная форма

Теорема 5.12 (теорема Артина [25, теорема 3.1]). *Пусть $\mathcal{A}$ — альтернативная алгебра. Тогда подалгебра, порождённая любыми двумя элементами $\mathcal{A}$, ассоциативна.*

Лемма 5.13. *Пусть $n \leqslant 3$, $a, b \in \mathcal{A}_n$. Тогда множество $\mathrm{Lin}(1, a, b, ab)$ замкнуто относительно операций умножения и сопряжения.*

Доказательство. По предложению 3.5 $a^2 = 2\mathfrak{Re}(a)a - n(a) \in \mathrm{Lin}(1, a, b, ab)$ и $b^2 = 2\mathfrak{Re}(b)b - n(b) \in \mathrm{Lin}(1, a, b, ab)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} ba = (2\mathfrak{Re}(b) - \bar{b})a = 2\mathfrak{Re}(b)a - \bar{b}a = 2\mathfrak{Re}(b)a - 2\langle a, b\rangle + \bar{a}b = \\ = 2\mathfrak{Re}(b)a - 2\langle a, b\rangle + (2\mathfrak{Re}(a) - a)b = \\ = 2\mathfrak{Re}(b)a + 2\mathfrak{Re}(a)b - 2\langle a, b\rangle - ab \in \mathrm{Lin}(1, a, b, ab). \end{aligned}$$

Согласно лемме 3.26 алгебра $\mathcal{A}_n$ альтернативна, поэтому, как следует из теоремы 5.12, порождённая элементами a и b подалгебра является ассоциативной. Значит, любое слово, составленное из a и b, лежит в $\mathrm{Lin}(1, a, b, ab)$.

Для любого $x \in \mathcal{A}_n$ выполняется равенство $\bar{x} = 2\mathfrak{Re}(x) - x$, поэтому множество $\mathrm{Lin}(1, a, b, ab)$ замкнуто также относительно операции сопряжения. □

Определение 5.14. Пусть на $\mathcal{A}$ задана регулярная операция сопряжения. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *композиционной*, если для любых $a, b \in \mathcal{A}$ имеет место равенство $n(ab) = n(a)n(b)$.

Лемма 5.15 [8, с. 9]. *Пусть $\mathcal{A}$ — альтернативная алгебра с регулярной операцией сопряжения. Тогда $\mathcal{A}$ — композиционная алгебра.*

Теорема 5.16 (теорема необходимости Джекобсона [19, теорема 2.6.1]). *Пусть $\mathcal{A}$ — такая собственная конечномерная подалгебра композиционной алгебры $\mathcal{B}$ над полем $\mathbb{F}$, что норма $n(\cdot)$ невырожденна на $\mathcal{A}$. Пусть также $x \in \mathcal{A}^{\perp}$ удовлетворяет неравенству $n(x) = -\gamma \neq 0$ (такое x всегда существует). Рассмотрим отображение $\sigma\colon \mathcal{A} + \mathcal{A}x \to \mathcal{A}\{\gamma\}$, заданное формулой $\sigma(a + bx) = (a, b)$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Тогда σ изоморфно и изометрично.*

Пример 5.17. Обратная импликация в предложении 3.8 неверна, поскольку $\hat{\mathbb{C}}\{1\} \cong \hat{\mathbb{C}}\{-1\}$.

Мы будем отождествлять $\hat{\mathbb{C}}$ и подалгебру $\mathrm{Lin}(1, \ell) \subset \hat{\mathbb{H}}$. Сначала воспользуемся теоремой 5.16 для $\mathcal{A} = \hat{\mathbb{C}}$ и $x = i$, получим

$$\hat{\mathbb{H}} \supseteq \hat{\mathbb{C}} + \hat{\mathbb{C}} \cdot i \cong \hat{\mathbb{C}}\{-1\}.$$

Аналогично для $x = \ell i$ будет выполнено

$$\hat{\mathbb{H}} \supseteq \hat{\mathbb{C}} + \hat{\mathbb{C}} \cdot (\ell i) \cong \hat{\mathbb{C}}\{1\}.$$

Из соображений размерности получаем, что $\hat{\mathbb{C}}\{-1\} \cong \hat{\mathbb{H}} \cong \hat{\mathbb{C}}\{1\}$.

Лемма 5.18. *Пусть $\tilde{\imath}, \tilde{\jmath}, \tilde{\ell} \in \hat{\mathbb{O}}$ таковы, что*

1) $\mathfrak{Re}(\tilde{\imath}) = \mathfrak{Re}(\tilde{\jmath}) = \mathfrak{Re}(\tilde{\ell}) = 0$;
2) $n(\tilde{\imath}) = n(\tilde{\jmath}) = 1$, $n(\tilde{\ell}) = -1$;
3) $\langle \tilde{\imath}, \tilde{\jmath} \rangle = \langle \tilde{\ell}, \tilde{\imath} \rangle = \langle \tilde{\ell}, \tilde{\jmath} \rangle = \langle \tilde{\ell}, \tilde{\imath}\tilde{\jmath} \rangle = 0$.

Тогда существует такое $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, что $\phi(\tilde{\imath}) = i$, $\phi(\tilde{\jmath}) = j$, $\phi(\tilde{\ell}) = \ell$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}$ подалгебру $\hat{\mathbb{O}}$, порождённую $\tilde{\imath}$ и $\tilde{\jmath}$. По лемме 5.13 $\mathcal{A} = \mathrm{Lin}(1, \tilde{\imath}, \tilde{\jmath}, \tilde{\imath}\tilde{\jmath})$. Из теоремы 5.12 следует, что $\mathcal{A}$ ассоциативна. Согласно лемме 3.21 $\tilde{\imath}$ и $\tilde{\jmath}$ антикоммутируют, поэтому, как нетрудно проверить, существует такой изоморфизм $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{H}$, что $\psi(1) = 1$, $\psi(\tilde{\imath}) = i$, $\psi(\tilde{\jmath}) = j$, $\psi(\tilde{\imath}\tilde{\jmath}) = k$.

Теперь воспользуемся теоремой 5.16 для $\mathcal{A}$ и $x = \tilde{\ell}$, получим

$$\hat{\mathbb{O}} \supseteq \mathcal{A} + \mathcal{A}\tilde{\ell} \cong \mathcal{A}\{1\} \cong \mathbb{H}\{1\} = \hat{\mathbb{O}},$$

и поэтому $\mathcal{A} + \mathcal{A}\tilde{\ell} = \hat{\mathbb{O}}$. Зададим отображение $\phi\colon \hat{\mathbb{O}} \to \hat{\mathbb{O}}$ формулой $\phi(a + b\tilde{\ell}) = \psi(a) + \psi(b)\ell$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Тогда ϕ — требуемый автоморфизм. □

Лемма 5.19. *Пусть $\tilde{\ell}, \widetilde{\ell i}, \widetilde{\ell j} \in \hat{\mathbb{O}}$ таковы, что*

1) $\mathfrak{Re}(\tilde{\ell}) = \mathfrak{Re}(\widetilde{\ell i}) = \mathfrak{Re}(\widetilde{\ell j}) = 0$;
2) $n(\tilde{\ell}) = n(\widetilde{\ell i}) = n(\widetilde{\ell j}) = -1$;
3) $\langle \tilde{\ell}, \widetilde{\ell i} \rangle = \langle \widetilde{\ell j}, \tilde{\ell} \rangle = \langle \widetilde{\ell j}, \widetilde{\ell i} \rangle = \langle \widetilde{\ell j}, \tilde{\ell} \cdot \widetilde{\ell i} \rangle = 0$.

Тогда существует такое $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, что $\phi(\tilde{\ell}) = \ell$, $\phi(\widetilde{\ell i}) = \ell i$, $\phi(\widetilde{\ell j}) = \ell j$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра $\hat{\mathbb{O}}$, порождённая элементами $\tilde{\ell}$ и $\widetilde{\ell i}$. По лемме 5.13 $\mathcal{A} = \mathrm{Lin}(1, \tilde{\ell}, \widetilde{\ell i}, \tilde{\ell} \cdot \widetilde{\ell i})$. Как следует из теоремы 5.12, алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативна. Согласно лемме 3.21 $\tilde{\ell}$ и $\widetilde{\ell i}$ антикоммутируют, поэтому, как нетрудно проверить, существует такой изоморфизм $\psi\colon \mathcal{A} \to \hat{\mathbb{H}}$, что $\psi(1) = 1$, $\psi(\tilde{\ell} \cdot \widetilde{\ell i}) = i$, $\psi(\tilde{\ell}) = \ell$, $\psi(\widetilde{\ell i}) = \ell i$. Мы будем отождествлять $\hat{\mathbb{H}}$ и подалгебру $\mathrm{Lin}(1, i, \ell, \ell i) \subset \hat{\mathbb{O}}$.

Сперва применим теорему 5.16 для $\hat{\mathbb{H}}$ и $x = \ell j$. Тогда

$$\hat{\mathbb{O}} \supseteq \hat{\mathbb{H}} + \hat{\mathbb{H}} \cdot (\ell j) \cong \hat{\mathbb{H}}\{1\},$$

и из соображений размерности следует, что $\hat{\mathbb{O}} = \hat{\mathbb{H}} + \hat{\mathbb{H}} \cdot (\ell j)$. Затем применим теорему 5.16 для $\mathcal{A}$ и $x = \widetilde{\ell j}$, получим

$$\hat{\mathbb{O}} \supseteq \mathcal{A} + \mathcal{A} \cdot (\widetilde{\ell j}) \cong \mathcal{A}\{1\} \cong \hat{\mathbb{H}}\{1\} \cong \hat{\mathbb{H}} + \hat{\mathbb{H}} \cdot (\ell j) = \hat{\mathbb{O}},$$

откуда следует, что $\mathcal{A} + \mathcal{A} \cdot (\widetilde{\ell j}) = \hat{\mathbb{O}}$. Зададим отображение $\phi\colon \hat{\mathbb{O}} \to \hat{\mathbb{O}}$ формулой $\phi\big(a + b \cdot (\widetilde{\ell j})\big) = \psi(a) + \psi(b) \cdot (\ell j)$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Тогда ϕ — требуемый автоморфизм. □

Лемма 5.20. *Пусть* $a \in \hat{\mathbb{O}} \setminus \{0\}$, $\mathfrak{Re}(a) = 0$. *Тогда существует такое* $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, *что*

1) *если* $n(a) > 0$, *то* $\phi(a) = \sqrt{n(a)}\, i$;
2) *если* $n(a) < 0$, *то* $\phi(a) = \sqrt{-n(a)}\, \ell$;
3) *если* $n(a) = 0$, *то* $\phi(a) = (i + \ell i)/2$.

Доказательство. Обозначим $A_1 = \mathrm{Lin}(i, j, k)$, $A_2 = \mathrm{Lin}(\ell, \ell i, \ell j, \ell k)$. Тогда для любых $a_1 \in A_1 \setminus \{0\}$ и $a_2 \in A_2 \setminus \{0\}$ будет выполнено $n(a_1) > 0$ и $n(a_2) < 0$.

Если $n(a) > 0$, то найдётся такое $b \in A_1$, что $b \in \mathrm{Lin}(a)^{\perp}$ и $n(b) = 1$. Затем мы можем выбрать такое $c \in A_2$, что $c \in \mathrm{Lin}(a, b, ab)^{\perp}$ и $n(c) = -1$. По лемме 5.18 существует такое $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, что

$$\phi\left(\frac{a}{\sqrt{n(a)}}\right) = i, \quad \phi(b) = j, \quad \phi(c) = \ell.$$

Тогда

$$\phi(a) = \sqrt{n(a)}\, i.$$

Если $n(a) < 0$, то найдётся такое $b \in A_2$, что $b \in \mathrm{Lin}(a)^{\perp}$ и $n(b) = -1$. Затем мы можем выбрать такое $c \in A_2$, что $c \in \mathrm{Lin}(a, b, ab)^{\perp}$ и $n(c) = -1$. Согласно лемме 5.19 существует такое $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, что

$$\phi\left(\frac{a}{\sqrt{-n(a)}}\right) = \ell, \quad \phi(b) = \ell i, \quad \phi(c) = \ell j.$$

Тогда

$$\phi(a) = \sqrt{-n(a)}\, \ell.$$

Если $n(a) = 0$, то $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $n(a_1) + n(a_2) = n(a) = 0$. Поскольку $a \neq 0$, то $n(a_1) = -n(a_2) = \frac{c^2}{4}$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Ясно, что $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$. Теперь мы выберем такое $b \in A_1$, что $b \in \mathrm{Lin}(a_1, a_1 a_2)^{\perp}$ и $n(b) = 1$.

Тогда условие $\langle b, a_2\rangle = 0$ выполнено автоматически. Кроме того, применяя лемму 4.2 для $x = a_2$, $y = a_1$, $z = b$, получаем $\langle a_2, a_1 b\rangle = \langle \bar a_1 a_2, b\rangle = -\langle a_1 a_2, b\rangle = 0$. По лемме 5.18 существует такое $\phi_1 \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, что

$$\phi_1\left(\frac{a_1}{c/2}\right) = i, \quad \phi_1(b) = j, \quad \phi_1\left(\frac{a_2}{c/2}\right) = \ell.$$

Тогда

$$\phi_1(a) = \phi_1(a_1) + \phi_1(a_2) = \frac{ci + c\ell}{2}.$$

Заметим, что

$$ci + c\ell = \left(\frac{1+c^2}{2c} i - \frac{1-c^2}{2c}\ell\right) + \left(\frac{1+c^2}{2c}\ell - \frac{1-c^2}{2c} i\right),$$

$$n\left(\frac{1+c^2}{2c} i - \frac{1-c^2}{2c}\ell\right) = \left(\frac{1+c^2}{2c}\right)^2 - \left(\frac{1-c^2}{2c}\right)^2 = 1,$$

$$n\left(\frac{1+c^2}{2c}\ell - \frac{1-c^2}{2c} i\right) = \left(\frac{1-c^2}{2c}\right)^2 - \left(\frac{1+c^2}{2c}\right)^2 = -1,$$

$$\left\langle \frac{1+c^2}{2c} i - \frac{1-c^2}{2c}\ell, \frac{1+c^2}{2c}\ell - \frac{1-c^2}{2c} i\right\rangle = \frac{1+c^2}{2c}\,\frac{1-c^2}{2c} - \frac{1-c^2}{2c}\,\frac{1+c^2}{2c} = 0.$$

По лемме 5.18 найдётся такое $\phi_2 \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, что

$$\phi_2\left(\frac{1+c^2}{2c} i - \frac{1-c^2}{2c}\ell\right) = i, \quad \phi_2\left(\frac{1+c^2}{2c}\ell - \frac{1-c^2}{2c} i\right) = \ell, \quad \phi_2(j) = j.$$

Тогда

$$\phi_2\left(\frac{ci + c\ell}{2}\right) = \frac{i+\ell}{2}.$$

Согласно лемме 5.19 существует такое $\phi_3 \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, что

$$\phi_3(-\ell i) = \ell, \quad \phi_3(\ell) = \ell i, \quad \phi_3(\ell j) = \ell j.$$

Тогда

$$\phi_3(i) = \phi_3\big((-\ell i)\cdot \ell\big) = \phi_3(-\ell i)\cdot\phi_3(\ell) = \ell\cdot(\ell i) = i,$$

откуда получаем, что

$$\phi_3\left(\frac{i+\ell}{2}\right) = \frac{i+\ell i}{2}.$$

Таким образом, $\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$ — требуемый автоморфизм. □

Лемма 5.21 [16, с. 274]. *Пусть $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}_n)$. Тогда для любого $a \in \mathcal{A}_n$ выполнены равенства $\mathfrak{Re}\big(\phi(a)\big) = \phi\big(\mathfrak{Re}(a)\big) = \mathfrak{Re}(a)$ и $\mathfrak{Im}\big(\phi(a)\big) = \phi\big(\mathfrak{Im}(a)\big)$, поэтому $\overline{\phi(a)} = \phi(\bar a)$ и $n\big(\phi(a)\big) = n(a)$.*

Обозначение 5.22. Обозначим

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^t, \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^t, \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^t \in \mathbb{R}^3.$$

Следствие ниже полностью аналогично лемме 5.4.

Следствие 5.23. *Пусть* $A \in \hat{\mathbb{O}} \setminus \mathbb{R}I$, $\operatorname{dis}(A) = \big(\operatorname{tr}(A)\big)^2 - 4\det(A)$ *введено в определении 3.4. Тогда существует такое* $\phi \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, *что*

1) *если* $\operatorname{dis}(A) > 0$, *т. е.* $\operatorname{dis}(A) = d^2$ *для некоторого* $d \neq 0$, *то*

$$\phi(A) = \frac{\operatorname{tr}(A) + d\ell}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) + d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \operatorname{tr}(A) - d \end{pmatrix};$$

2) *если* $\operatorname{dis}(A) < 0$, *т. е.* $\operatorname{dis}(A) = -d^2$ *для некоторого* $d \neq 0$, *то*

$$\phi(A) = \frac{\operatorname{tr}(A) + di}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) & d\mathbf{e}_1 \\ -d\mathbf{e}_1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix};$$

3) *если* $\operatorname{dis}(A) = 0$, *то*

$$\phi(A) = \frac{\operatorname{tr}(A) + i + \ell i}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) & 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.12 $\operatorname{dis}(A) = -4n\big(\mathfrak{Im}(A)\big)$, поэтому доказательство сразу следует из лемм 5.20 и 5.21. □

5.3.2. Ортогональность

Обозначение 5.24. Обозначим

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \in \hat{\mathbb{O}}.$$

Лемма 5.25. *Пусть* $A \in Z(\hat{\mathbb{O}})$. *Тогда существует такое* $\phi \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, *что*

1) *если* $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, *то* $\phi(A) = \operatorname{tr}(A)E_{11}$;
2) *если* $\operatorname{tr}(A) = 0$, *то* $\phi(A) = E_{12}$.

Доказательство. По следствию 4.12 $A \in Z(\hat{\mathbb{O}})$ означает $\det(A) = 0$, поэтому

$$\operatorname{dis}(A) = \big(\operatorname{tr}(A)\big)^2 - 4\det(A) = \big(\operatorname{tr}(A)\big)^2.$$

Остаётся применить следствие 5.23. □

Лемма 5.26. *Пусть* $A \in Z_{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$. *Тогда* $\dim\big(O_{\hat{\mathbb{O}}}(A)\big) = 3$.

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 4.21. □

Лемма 5.27. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \in \hat{\mathbb{O}}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Тогда

$$O_{\hat{\mathbb{O}}}(A) = \mathbb{R}A \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mu\mathbf{v} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{R},\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что имеет место включение справа налево. Поскольку $A \in Z_{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$, из леммы 5.26 следует, что $\dim\big(O_{\hat{\mathbb{O}}}(A)\big) = 3$. Это доказывает требуемое равенство. $\square$

Лемма 5.28. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix} \in \hat{\mathbb{O}}, \quad \mathbf{w} \neq \mathbf{0}.$$

Тогда

$$O_{\hat{\mathbb{O}}}(A) = \mathbb{R}A \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \lambda\mathbf{w} & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0 \right\}.$$

Доказательство. Легко убедиться, что включение справа налево действительно выполняется. Поскольку $A \in Z_{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$, из леммы 5.26 следует, что $\dim\big(O_{\hat{\mathbb{O}}}(A)\big) = 3$. Значит, на самом деле имеет место равенство. $\square$

Лемма 5.29 [17, с. 200]. *Для любых* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ *выполнено равенство* $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$.

Теорема 5.30. *Граф* $\Gamma_O^{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$ *связен, и его диаметр равен* 3.

Доказательство. Как следует из лемм 3.28 и 5.25, достаточно доказать следующий факт. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \in Z_{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}}).$$

Тогда $d(E_{12}, A) \leqslant 3$.

Поскольку $\operatorname{tr}(A) = a + b = 0$, то $b = -a$. Значит, $\det(A) = -a^2 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$, поэтому $a = 0$, если и только если $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$.

Если $\mathbf{w} \perp \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$, то $a = 0$ и существует такое $\tilde{\mathbf{w}} \neq \mathbf{0}$, что $\tilde{\mathbf{w}} \perp \mathbf{e}_1$, $\tilde{\mathbf{w}} \perp \mathbf{v}$ и $\tilde{\mathbf{w}} \parallel \mathbf{w}$, т. е. $\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$. Значит, по лемме 5.28 найдётся путь длины 2 между E_{12} и A, а именно,

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{w}} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\mathbf{w} \not\perp \mathbf{e}_1$ или $\mathbf{w} \not\perp \mathbf{v}$, то существует такое $\tilde{\mathbf{w}} \neq \mathbf{0}$, что $\tilde{\mathbf{w}} \perp \mathbf{e}_1$, $\tilde{\mathbf{w}} \perp \mathbf{v}$ и $\tilde{\mathbf{w}} \nparallel \mathbf{w}$, т. е. $\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}} \neq \mathbf{0}$. Построим путь длины 3 между E_{12} и A:

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{w}} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}} \\ -a\tilde{\mathbf{w}} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & -a \end{pmatrix}.$$

Действительно, по лемме 5.28 $E_{12}, C \in O_{\hat{\mathbb{O}}}(B)$. Кроме того, согласно лемме 5.29

$$(\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}}) \times \mathbf{v} = -\big(\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}})\big) = -\big(\mathbf{w}(\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{w}}) - \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\big) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\tilde{\mathbf{w}} = -a^2\tilde{\mathbf{w}},$$

поэтому

$$CA = \begin{pmatrix} 0 \cdot a + (\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{w} & \mathbf{0} - a(\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}}) + (-a\tilde{\mathbf{w}}) \times \mathbf{w} \\ -a^2\tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{0} - (\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}}) \times \mathbf{v} & 0 \cdot (-a) + (-a\tilde{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда $AC = \bar{A}\bar{C} = \overline{CA} = 0$, т. е. A и C ортогональны.

Из лемм 5.27 и 5.28 нетрудно получить, что для любых $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ с условием $\mathbf{w} \not\angle \mathbf{v}$ не существует пути длины $\leqslant 2$ между

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, диаметр $\Gamma_O^{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$ равен в точности 3. □

Теорема 5.31. *Максимальные клики в* $\Gamma_O^{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$ *имеют вид* $\mathrm{Lin}^*(A, B)$*, где* A *и* B *ортогональны и линейно независимы.*

Доказательство. Пусть Q — максимальная клика в $\Gamma_O^{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$, $A \in Q$. По лемме 5.26 имеет место равенство $\dim\bigl(O_{\hat{\mathbb{O}}}(A)\bigr) = 3$. Значит, включение $Q \subset \mathrm{Lin}^*(A)$ не выполняется и существует такое $B \in Q$, что A и B линейно независимы. Ясно, что $A \in O_{\hat{\mathbb{S}}}(A)$ и $B \in O_{\hat{\mathbb{S}}}(B)$, поэтому $\mathrm{Lin}^*(A, B) \subset Q$.

Пусть $A, B, C \in Z_{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$ линейно независимы. Тогда A, B, C не образуют цикл длины 3 в $\Gamma_O^{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$. Предположим противное. Тогда для любого $D \in \mathrm{Lin}^*(A, B, C)$ выполнено $\mathrm{Lin}(A, B, C) \subset O_{\hat{\mathbb{O}}}(D)$ и $\dim\bigl(\mathrm{Lin}(A, B, C)\bigr) = \dim\bigl(O_{\hat{\mathbb{O}}}(D)\bigr) = 3$, откуда следует, что $O_{\hat{\mathbb{O}}}(D) = \mathrm{Lin}(A, B, C)$. Значит, подграф $\Gamma_O^{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$ на множестве вершин $\mathrm{Lin}^*(A, B, C)$ является компонентой связности. Но по теореме 5.30 $\Gamma_O^{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}})$ связен. Однако из соображений размерности нетрудно получить, что включение $Z_{\mathfrak{Im}}(\hat{\mathbb{O}}) \subset \mathrm{Lin}(A, B, C)$ не выполняется, противоречие.

Таким образом, $Q = \mathrm{Lin}^*(A, B)$. □

5.3.3. Делители нуля

Теорема 5.32. *Диаметр* $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})$ *равен* 2.

Доказательство. Сначала покажем, что $d\bigl(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})\bigr) \leqslant 2$. Согласно леммам 3.28 и 5.25 достаточно доказать следующие утверждения.

1. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix},$$
$\det(A) = ab - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Тогда $d(E_{11}, A) \leqslant 2$.

— Если $a \neq 0$ или $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, то

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & -a \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix},$$

$$E_{11}B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + \mathbf{0} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \times \mathbf{w} \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{0} \times \mathbf{0} & 0 \cdot (-a) + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} \end{pmatrix} = 0,$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot a + \mathbf{0} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{w} \times \mathbf{w} \\ a\mathbf{w} - a\mathbf{w} - \mathbf{0} \times \mathbf{v} & (-a) \cdot b + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \end{pmatrix} = 0.$$

— Если $a = 0$ и $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, то либо $b \neq 0$, либо $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{e_v} \in \mathbb{R}^3$ таков, что $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\mathbf{e_v}$ и $|\mathbf{e_v}| = 1$. Рассмотрим следующий путь:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ b\mathbf{e_v} & -|\mathbf{v}| \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & b \end{pmatrix},$$

$$E_{11}B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + \mathbf{0} \cdot (b\mathbf{e_v}) & \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \times (b\mathbf{e_v}) \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{0} \times \mathbf{0} & 0 \cdot (-|\mathbf{v}|) + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} \end{pmatrix} = 0,$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} & \mathbf{0} + \mathbf{0} + (b\mathbf{e_v}) \times \mathbf{0} \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} - (b\mathbf{e_v}) \times \mathbf{v} & (-|\mathbf{v}|) \cdot b + \mathbf{v} \cdot (b\mathbf{e_v}) \end{pmatrix} = 0.$$

Аналогично $d(A, E_{11}) \leqslant 2$.

— Если $a \neq 0$ или $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & -a \end{pmatrix} \longrightarrow E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}.$$

— Если $a = 0$ и $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, то либо $b \neq 0$, либо $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{e_w} \in \mathbb{R}^3$ таков, что $\mathbf{w} = |\mathbf{w}|\mathbf{e_w}$ и $|\mathbf{e_w}| = 1$. Тогда путь от A к E_{11} имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & b\mathbf{e_w} \\ \mathbf{0} & -|\mathbf{w}| \end{pmatrix} \longrightarrow E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix},$$

$\det(A) = 0$ и $\mathrm{tr}(A) = 0$, т. е. $b = -a$ и $ab - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Тогда $d(E_{12}, A) \leqslant 2$.

— Если $a = 0$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v} = 0$ и $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w} = 0$, то E_{12} и A соединены ребром:

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w} & \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \times \mathbf{w} \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{e}_1 \times \mathbf{v} & 0 \cdot 0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} \end{pmatrix} = 0.$$

— В противном случае существует следующий путь длины 2 от E_{12} к A:

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w} & a\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{v} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix},$$

$$E_{12}B = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) & \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{e}_1 \times (a\mathbf{e}_1) & 0 \cdot 0 + (a\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{0} \end{pmatrix} = 0,$$

$$BA = \begin{pmatrix} (-\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w}) \cdot a + (a\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{w} & (-\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} + b(a\mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \\ a(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) + \mathbf{0} - (a\mathbf{e}_1) \times \mathbf{v} & 0 \cdot b + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) \end{pmatrix} = 0,$$

так как по лемме 5.29 выполняется равенство

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) = -\big(\mathbf{e}_1(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_1)\big) = \mathbf{v}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1(ab).$$

Кроме того, $d\big(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})\big) \geqslant 2$, поскольку найдётся пара не связанных ребром вершин (например, $E_{11} \not\leftrightarrow E_{12}$). Таким образом, $d\big(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})\big) = 2$. $\square$

Литература

[1] Бахадлы Б. Р., Гутерман А. Э., Маркова О. В. Графы, определённые ортогональностью // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2014. — Т. 428. — С. 49—80.

[2] Гутерман А. Э., Жилина С. А. Графы отношений вещественных алгебр Кэли—Диксона // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2018. — Т. 472. — С. 44—75.

[3] Akbari S., Bidkhori H., Mohammadian A. Commuting graphs of matrix algebras // Commun. Algebra. — 2008. — Vol. 36, no. 11. — P. 4020—4031.

[4] Akbari S., Ghandehari M., Hadian M., Mohammadian A. On commuting graphs of semisimple rings // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 390, no. 1. — P. 345—355.

[5] Akbari S., Mohammadian A., Radjavi H., Raja P. On the diameters of commuting graphs // Linear Algebra Appl. — 2006. — Vol. 418, no. 1. — P. 161—176.

[6] Anderson D. F., Livingston P. S. The zero-divisor graph of a commutative ring // J. Algebra. — 1999. — Vol. 217, no. 2. — P. 434—447.

[7] Babai L., Seress Á. On the diameter of permutation groups // European J. Combin. — 1992. — Vol. 13. no. 4. — P. 231—243.

[8] Baez J. C. The octonions // Bull. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 39, no. 2. — P. 145—205.

[9] Bakhadly B. R. Orthogonality graph of the algebra of upper triangular matrices // Oper. Matrices. — 2017. — Vol. 11, no. 2. — P. 455—463.

[10] Beck I. Coloring of commutative rings // J. Algebra. — 1988. — Vol. 116. no. 1. — P. 208—226.

[11] Bentz L., Tray D. Subalgebras of the split octonions // Adv. Appl. Clifford Algebras. — 2018. — Vol. 28, no. 2. — P. 40.

[12] Biss D. K., Dugger D., Isaksen D. C. Large annihilators in Cayley—Dickson algebras // Commun. Algebra. — 2008. — Vol. 36, no. 2. — P. 632—664.

[13] Božić I., Petrović Z. Zero-divisor graphs of matrices over commutative rings // Commun. Algebra. — 2009. — Vol. 37, no. 4. — P. 1186—1192.

[14] Cawagas R. E. On the structure and zero divisors of the Cayley—Dickson sedenion algebra // Discus. Math., Gen. Algebra Appl. — 2004. — Vol. 24. — P. 251—265.

[15] Dolinar G., Guterman A. E., Kuzma B., Oblak P. Commuting graphs and extremal centralizers // Ars Math. Contemp. — 2014. — Vol. 7, no. 2. — P. 453—459.

[16] Eakin P., Sathaye A. On automorphisms and derivations of Cayley—Dickson algebras // J. Algebra. — 1990. — Vol. 129, no. 2. — P. 263—278.

[17] Greub W. Linear Algebra. — New York: Springer, 1975.

[18] Guterman A. E., Markova O. V. Orthogonality graphs of matrices over skew fields // J. Math. Sci. — 2018. — Vol. 232, no. 6. — P. 797—804.

[19] McCrimmon K. A Taste of Jordan Algebras. — New York: Springer, 2004.

[20] Moreno G. The zero divisors of the Cayley—Dickson algebras over the real numbers // Bol. Soc. Mat. Mex. — 1998. — Vol. 4, no. 1. — P. 13—28.

[21] Moreno G. Alternative elements in the Cayley—Dickson algebras // Topics in Mathematical Physics, General Relativity and Cosmology in Honor of Jerzy Plebański. — Hackensack: World Sci. Publ., 2006. — P. 333—346.

[22] Moreno G. Constructing zero divisors in the higher dimensional Cayley—Dickson algebras. — 2005. — `arXiv:math/0512517[math.RA]`.

[23] Redmond S. P. The zero-divisor graph of a noncommutative ring // Int. J. Commut. Rings. — 2002. — Vol. 1, no. 4. — P. 203—211.

[24] Schafer R. D. On the algebras formed by the Cayley—Dickson process // Amer. J. Math. — 1954. — Vol. 76, no. 2. — P. 435—446.

[25] Schafer R. D. An Introduction to Nonassociative Algebras. — New York: Academic Press, 1966.