О хопфовости и кохопфовости полигонов над группами

И. Б. КОЖУХОВ
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

К. А. КОЛЕСНИКОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: ksenya.koless@gmail.com

УДК 512.534.3

Ключевые слова: полигон над полугруппой, хопфов полигон, кохопфов полигон.

Аннотация

Универсальная алгебра называется хопфовой, если любой её сюръективный эндоморфизм является автоморфизмом, и кохопфовой, если любой её инъективный эндоморфизм является автоморфизмом. В работе получены необходимые и достаточные условия хопфовости и кохопфовости унитарного полигона над группой. Доказано, что копроизведение конечного числа полигонов над группой (не обязательно унитарных) хопфово в том и только том случае, если каждый сомножитель хопфов.

Abstract

I. B. Kozhukhov, K. A. Kolesnikova, On Hopfianity and co-Hopfianity of acts over groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 3, pp. 131—139.

A universal algebra is called Hopfian if any of its surjective endomorphisms is an automorphism, and co-Hopfian if injective endomorphisms are automorphisms. In this paper, necessary and sufficient conditions are found for Hopfianity and co-Hopfianity of unitary acts over groups. It is proved that a coproduct of finitely many acts (not necessarily unitary) over a group is Hopfian if and only if every factor is Hopfian.

1. Введение

Универсальная алгебра A называется *хопфовой*, если всякий сюръективный эндоморфизм $\varphi\colon A \to A$ является автоморфизмом, и *кохопфовой*, если всякий инъективный эндоморфизм $\psi\colon A \to A$ является автоморфизмом. Хопфовость и кохопфовость суть условия конечности, так как все конечные алгебры, очевидно, хопфовы и кохопфовы. В. К. Карташов доказал [1, теорема 2], что все конечно порождённые коммутативные полигоны над полугруппой являются хопфовыми. Цель данной работы — получить условия хопфовости и кохопфовости полигона над группой. Для унитарного полигона над группой получены необходимые и достаточные условия хопфовости и кохопфовости.

Напомним, что *полигоном над полугруппой* называется множество X, на котором действует полугруппа S, т. е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$ (см. [4]). Следует отметить, что полигон над полугруппой является алгебраической моделью абстрактного *автомата*. Кроме того, понятие полигона фактически тождественно понятию *унарной алгебры*, т. е. алгебры, у которой все операции унарны (операциями полигона X являются отображения $x \mapsto xs$ для фиксированного $s \in S$). Пусть S — полугруппа с единицей e. Тогда полигон X называется *унитарным*, если $xe = x$ для всех $x \in X$. Как обычно, символом $\sqcup$ мы обозначаем копроизведение. Нетрудно видеть, что в случае полигонов полигоны X_i можно считать подполигонами их копроизведения $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$, т. е. копроизведение – это дизъюнктное объединение.

Пусть G — группа и H — её подгруппа (не обязательно нормальная). Обозначим через G/H множество всех правых смежных классов Hg. Множество G/H является унитарным полигоном над группой G относительно действия $Hg \cdot g' = Hgg'$. Нетрудно проверить, что циклические унитарные полигоны над группой G — это в точности полигоны, изоморфные полигонам вида G/H, где H — подгруппа группы G, а произвольный унитарный полигон над группой G изоморфен полигону вида $\coprod\limits_{i \in I}(G/H_i)$, где $\{H_i \mid i \in I\}$ — семейство подгрупп группы G. Неунитарные полигоны над группой были описаны в [3].

2. Условия хопфовости полигонов над группами

Предложение 1. *Пусть $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$ — полигон над полугруппой S. Если полигон X хопфов, то каждый X_i также хопфов.*

Доказательство. Пусть X_i не хопфов. Тогда существует сюръективный неинъективный эндоморфизм $\varphi_i \colon X_i \to X_i$. Построим отображение $\sigma \colon \coprod\limits_{i \in I} X_i \to \coprod\limits_{i \in I} X_i$, полагая

$$\sigma(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), & \text{если } x \in X_i, \\ x, & \text{если } x \notin X_i. \end{cases}$$

Легко проверить, что σ — сюръективный неинъективный эндоморфизм полигона X. □

Отметим, что обратное к предложению 1 в общем случае неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим полигон $X = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} X_i$, у которого для всяких целых индексов i, j существует изоморфизм $\varphi_{ij}\colon X_i \to X_j$ и у которого все X_i хопфовы. Построим сюръективный эндоморфизм $\varphi\colon X \to X$, который не будет инъективным. Для этого рассмотрим отображение $\sigma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$\sigma(i) = \begin{cases} i+1, & \text{если } i < 0, \\ i, & \text{если } i \geqslant 0. \end{cases}$$

Отображение σ сюръективно, но не инъективно. Теперь определим эндоморфизм φ: для любых $i \in \mathbb{Z}$ и $x \in X_i$ положим $\varphi(x) = \varphi_{i,\sigma(i)}(x)$. Очевидно, у каждого $x \in X_0$ будет два прообраза: $\varphi^{-1}_{-1,0}(x)$ и $\varphi^{-1}_{0,0}(x)$. Таким образом, полигон X не хопфов.

Далее мы докажем, что обратное к предложению 1 будет истинным для конечно порождённого полигона над группой. Для этого потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Во-первых, для унитарных циклических полигонов над группой выясним, при каких условиях существует хотя бы один гомоморфизм одного полигона в другой.

Предложение 2. *Пусть G/H_1 и G/H_2 — полигоны над группой G. Тогда гомоморфизм $\varphi\colon G/H_1 \to G/H_2$ существует (хотя бы один), если и только если найдётся элемент $a \in G$, такой что выполняется условие*

$$H_1 \subseteq a^{-1}H_2 a. \tag{1}$$

Доказательство. Начнём строить гомоморфизм φ. Пусть $\varphi(H_1) = H_2 a$. Тогда в силу того, что φ — гомоморфизм, будет выполняться $\varphi(H_1 g) = H_2 a g$.

Проверим корректность определения гомоморфизма φ, т. е. независимость от выбора представителя смежного класса. А именно, должна выполняться импликация

$$H_1 g = H_1 g' \Longrightarrow H_2 a g = H_2 a g'.$$

Она выполнена тогда и только тогда, когда для любых $g, g' \in G$

$$g g'^{-1} \in H_1 \Longrightarrow ag(ag')^{-1} \in H_2.$$

Раскрытием скобок убеждаемся, что последнее условие и есть условие (1) предложения. $\square$

Во-вторых, для заданного гомоморфизма $\varphi\colon G/H_1 \to G/H_2$ выведем условие его инъективности.

Предложение 3. *Пусть G/H_1, G/H_2 — полигоны над группой G и существует гомоморфизм $\varphi\colon G/H_1 \to G/H_2$, причём $\varphi(H_1) = H_2 a$, для некоторого $a \in G$. Тогда φ инъективен, если и только если выполняется условие*

$$a^{-1}H_2 a \subseteq H_1. \tag{2}$$

Доказательство. Найдём необходимое и достаточное условие неинъективности. Неинъективность означает существование таких $g_1, g_2 \in G$, что $H_1g_1 \neq H_1g_2$, но $H_2ag_1 = H_2ag_2$. Имеем

$$\begin{cases} H_1g_1 \neq H_1g_2, \\ H_2ag_1 = H_2ag_2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a^{-1}h_2a = g_1g_2^{-1} \notin H_1, \\ h_2 = ag_1g_2^{-1}a^{-1} \in H_2 \end{cases} \iff \begin{cases} h_2 \notin aH_1a^{-1}, \\ h_2 \in H_2 \end{cases} \iff a^{-1}H_2a \nsubseteq H_1.$$

Теперь ясно, что условием инъективности будет условие (2). □

Полигон A над полугруппой S называется *простым*, если A не имеет подполигонов, отличных от самого A. Ясно, что для простого полигона A любой гомоморфизм $B \to A$ является сюръективным. Полигоны G/H над группой G, очевидно, простые. Теперь становится очевидным следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть G/H_1, G/H_2 — полигоны над группой G и существует гомоморфизм $\varphi\colon G/H_1 \to G/H_2$. Тогда гомоморфизм φ сюръективен.*

Из предложений 2 и 4 видно, что в предложении 3 условие (2) можно заменить более сильным: $a^{-1}H_2a = H_1$.

Условие хопфовости унитарного циклического полигона непосредственно следует из предложений 2 и 3.

Лемма 1. *Унитарный циклический полигон $X = G/H$ над группой G хопфов тогда и только тогда, когда для любого $a \in G$ включение $H \subseteq a^{-1}Ha$ влечёт равенство $H = a^{-1}Ha$.*

Теперь приведём условие хопфовости конечно порождённого унитарного полигона над группой.

Лемма 2. *Полигон $X = G/H_1 \sqcup \ldots \sqcup G/H_n$ хопфов в том и только том случае, когда для любого $i \in I = \{1, \ldots, n\}$ и любого $a \in G$ включение $H_i \subseteq a^{-1}H_ia$ влечёт равенство $H_i = a^{-1}H_ia$.*

Доказательство. Необходимость. Утверждение следует из предложения 1 и леммы 1.

Достаточность. Пусть все $X_i = G/H_i$ хопфовы, а $X = G/H_1 \sqcup \ldots \sqcup G/H_n$ не хопфов. Тогда существует эндоморфизм $\varphi\colon X \to X$, который сюръективен, но не инъективен.

Нетрудно видеть, что X_i порождается любым своим элементом. Следовательно, если $x \in X_i$, а $\varphi(x) \in X_j$, то $\varphi(X_i) = X_j$. Мы имеем отображение $I \to I$, $i \mapsto j$ (если $\varphi(X_i) = X_j$). Так как φ сюръективен, то это отображение сюръективно. В силу конечности множества I отображение также инъективно, т. е. является подстановкой

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ i_i, & i_2, & \ldots, & i_n \end{pmatrix},$$

такой что $\varphi(X_k) = X_{i_k}$. Эндоморфизм $\varphi^{n!}$ также является сюръективным, но не инъективным, и он порождает тождественную подстановку. Значит, какое-то X_i под действием $\varphi^{n!}$ переходит в себя сюръективно, не инъективно. Тогда X_i не хопфов. Противоречие. $\square$

Заметим, что вместо $n!$ можно взять НОК$(1, 2, \ldots, n)$.

Отметим также, что в бесконечной группе G возможно наличие подгрупп H, таких что имеет место строгое включение $H \subset a^{-1}Ha$ (см. [2, § 11]).

Перейдём к рассмотрению произвольного унитарного полигона X над группой. Ранее было отмечено, что $X \cong \coprod_{i\in I}(G/H_i)$. На множестве индексов I введём отношение $\preccurlyeq$, полагая $i \preccurlyeq j$, если существует $a \in G$, такое что $H_i \subseteq a^{-1}H_j a$. По предложению 1 $i \preccurlyeq j$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\varphi\colon G/H_i \to G/H_j$. Ясно, что $\preccurlyeq$ — отношение квазипорядка.

Следующая теорема даёт необходимое и достаточное условие хопфовости произвольного унитарного полигона над группой.

Теорема 1. *Пусть X — унитарный полигон над группой G, $X = \coprod_{i\in I} X_i$, где $X_i \cong G/H_i$. Квазипорядок $\preccurlyeq$ на I имеет тот же смысл, что и выше. Тогда полигон X хопфов, если и только если выполняются следующие условия*:

1) *каждое G/H_i хопфово*;
2) *множество I не содержит бесконечных последовательностей*

$$\ldots \preccurlyeq i_{-n} \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq i_{-1} \preccurlyeq i_0,$$

где i_k различны.

Доказательство. Необходимость. Пусть полигон X хопфов. Тогда условие 1 выполняется ввиду предложения 1.

Пусть полигон X хопфов и не выполняется условие 2, т. е. в I найдётся последовательность $\ldots \preccurlyeq i_{-n} \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq i_{-1} \preccurlyeq i_0$. Тогда построим эндоморфизм φ, отобразив $G/H_{i_{-k}}$ в $G/H_{i_{-k+1}}$ при $k \in \mathbb{N}$, а все остальные подполигоны X_i отобразим в себя тождественно. Полученный эндоморфизм сюръективен, но не инъективен, так как $\varphi(G/H_{i_0}) = \varphi(G/H_{i_{-1}})$.

Достаточность. Пусть выполняются условия 1), 2) и $\varphi\colon X \to X$ — сюръективный гомоморфизм. Тогда мы имеем отображение $\sigma\colon I \to I$, где $\sigma(i) = j$ при $\varphi(X_i) = X_j$. Так как φ сюръективно, то σ также сюръективно. Поэтому, взяв какое-либо $i_0 \in I$, мы можем найти элементы $i_{-1}, i_{-2}, \ldots \in I$, такие что $\sigma(i_{-1}) = i_0$, $\sigma(i_{-2}) = i_{-1}$ и т. д. Если все i_k $(k = 0, -1, -2, \ldots)$ различны, то в I есть бесконечно убывающая цепь $i_0 \succcurlyeq i_{-1} \succcurlyeq \ldots$, что невозможно ввиду 2). Следовательно, $i_{-m} = i_{-l}$ при некоторых $m \neq l$. Мы можем считать, что $-m < -l$, причём l — наименьшее неотрицательное число, для которого существует такое m. Значит, i_{-l+1} не совпадает ни с одним из элементов $i_{-l}, i_{-l-1}, i_{-l-2}, \ldots$. Так как

$$i_{-l+1} = \sigma(i_{-l}) = \sigma(i_{-m}) = i_{-m+1},$$

то мы получили противоречие. Следовательно, σ инъективно. Итак, $\sigma\colon I \to I$ — биекция, причём ввиду условия 2) орбита каждого элемента $i \in I$ конечна. Следовательно, любой элемент $i \in I$ лежит в цикле $\{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{k-1}(i)\}$, где $\sigma^k(i) = i$. Полагая

$$i_0 = i,\ i_1 = \sigma(i), \ldots,\ i_{k-1} = \sigma^{k-1}(i),$$

мы получаем, что

$$H_{i_0} \preccurlyeq H_{i_1} \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq H_{i_{k-1}} \preccurlyeq H_{i_0}.$$

Применяя к подполигону

$$Y = X_{i_0} \sqcup X_{i_1} \sqcup \ldots \sqcup X_{i_{k-1}}$$

леммы 1 и 2, получаем, что φ биективно отображает Y на Y. Так как объединение множества всех орбит совпадает с I, то $\varphi\colon X \to X$ — изоморфизм. □

Перейдём теперь к условиям хопфовости произвольных (необязательно унитарных) полигонов над группой.

М. Ю. Максимовским было доказано [3, теорема 4], что всякий полигон X над группой G определяется своей унитарной частью $Y = Xe$, где e — единица группы G, оставшейся частью $A = X \setminus Y$ и отображением $\mu\colon A \to Y$ ($\mu(a) = ae$). Результат действия элемента $g \in G$ на элемент $x \in X$ определяется следующим образом:

$$x \cdot g = \begin{cases} xg, & \text{если } x \in Y, \\ \mu(x)g, & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $X = Y \cup A$ — хопфов полигон над группой G и Y, A, μ имеют тот же смысл, что и выше. Тогда полный прообраз каждого элемента $x \in Y$ относительно отображения μ конечен.*

Доказательство. Пусть найдётся элемент $y \in Y$, такой что множество $\mu^{-1}(y)$ бесконечно. Тогда существует $\sigma\colon \mu^{-1}(y) \to \mu^{-1}(y)$ — сюръективное неинъективное отображение. Построим отображение $\varphi\colon X \to X$, полагая

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin \mu^{-1}(y), \\ \sigma(x), & \text{если } x \in \mu^{-1}(y). \end{cases}$$

Очевидно, φ — эндоморфизм полигона X, который сюръективен и не инъективен. Поэтому X не хопфов. □

Далее мы докажем упоминавшееся ранее утверждение о конечно порождённых полигонах над группой. Перед этим сделаем несколько замечаний. Всякий полигон X (над произвольной полугруппой S) можно рассматривать как граф, у которого вершинами являются элементы полигона, а рёбрами — пары (x, xs), где $x \in X$, $s \in S$ и $xs \neq x$. Очевидно, компоненты связности этого графа являются подполигонами и X — копроизведение компонент связности.

Пусть X — полигон над группой G. Положим $Y = XG$, $A = X \setminus Y$, и пусть отображение $\mu\colon A \to Y$ определяется формулой $\mu(a) = ae$ ($a \in A$). Так как Y —

унитарный полигон, то $Y = \coprod_{i\in I} Y_i$, где $Y_i \cong G/H_i$. Пусть $A_i = \mu^{-1}(Y_i)$. Нетрудно проверить, что $X = \coprod_{i\in I}(Y_i \cup A_i)$, причём подполигоны $Y_i \cup A_i$ — это в точности компоненты связности полигона X. Кроме того, нетрудно установить, что если X конечно порождён, то он имеет лишь конечное число компонент связности.

Теорема 3. *Конечно порождённый полигон $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ над группой G хопфов в том и только том случае, если X_i хопфов для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Необходимость. Если X хопфов, то по предложению 1 каждое X_i хопфово.

Достаточность. Представим полигон $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ в виде $X = \coprod_{i\in I}(A_i \cup Y_i)$. Нетрудно заметить, что если какой-либо полигон разложен в копроизведение, то каждый сомножитель этого копроизведения является объединением компонент связности. Поэтому

$$X_1 = \coprod_{i\in I_1}(A_i \cup Y_i), \ldots,\ X_n = \coprod_{i\in I_n}(A_i \cup Y_i),$$

где $I_i \cap I_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $I_1 \cup \ldots \cup I_n = I$. Следовательно,

$$X = \coprod_{k=1}^{n} \coprod_{i\in I_k}(A_i \cup Y_i).$$

Так как X конечно порождён, то $|I| < \infty$.

Пусть всё же X не хопфов. Тогда существует сюръективный неинъективный эндоморфизм $\varphi\colon X \to X$. Положим $\tilde{X}_i = A_i \cup Y_i$. Имеем $X = \coprod_{i\in I}\tilde{X}_i$, причём ввиду предложения 1 каждое $\tilde{X}_i$ хопфово. Пусть $y \in Y_i$ для какого-либо i и $\varphi(y) = x$. Так как $y = ye$, то $xe = \varphi(y)e = \varphi(ye) = \varphi(y) = x$. Следовательно, $x \in Y$. Поэтому $x \in Y_j$ при некотором j. Так как каждый из полигонов Y_i, Y_j циклический и порождается любым своим элементом, то $\varphi(Y_i) = Y_j$. Покажем, что $\varphi(A_i) \subseteq \tilde{X}_j$. Если $a \in A_i$ и $\varphi(a) \in \tilde{X}_k$ при некотором $k \neq j$, то $ae \in Y_i$, в то время как $\varphi(ae) \in Y_k$, и мы получим, что $\varphi(Y_i) \nsubseteq Y_j$, что противоречит ранее доказанному. Таким образом, $\varphi(A_i) \subseteq \tilde{X}_j$, а значит, $\varphi(\tilde{X}_i) \subseteq \tilde{X}_j$. Отсюда видно, что мы имеем отображение $\sigma\colon I \to I$, где

$$\sigma(i) = j \iff \varphi(\tilde{X}_i) \subseteq \tilde{X}_j.$$

Так как φ сюръективно, то σ также сюръективно, а так как множество I конечно, то σ — подстановка. Если $|I| = m$, то $\sigma^{m!} = \varepsilon$, где ε — тождественная подстановка. Следовательно, $\varphi^{m!}(\tilde{X}_i) \subseteq \tilde{X}_i$ при всех i. Очевидно, $\varphi^{m!}$ сюръективно, но не инъективно, поэтому $\varphi^{m!}(\tilde{X}_i) = \tilde{X}_i$ для каждого $i \in I$ и существует такое i, что ограничение $\varphi^{m!}|_{\tilde{X}_i}$ не инъективно. Это означает, что полигон $\tilde{X}_i$ не хопфов. Однако это противоречит ранее доказанному. □

3. Условия кохопфовости полигонов над группами

Теперь вернёмся к унитарным полигонам над группой и докажем утверждения о кохопфовости.

Лемма 3. *Любой циклический унитарный полигон над группой кохопфов.*

Доказательство. Условие кохопфовости выполнено в силу предложения 4. □

Это утверждение несложно обобщить для конечно порождённых унитарных полигонов над группой.

Лемма 4. *Любой конечно порождённый унитарный полигон над группой кохопфов.*

Доказательство. Пусть X — унитарный конечно порождённый полигон над группой G. Тогда $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$, где для $i \in \{1, \ldots, n\}$ подполигоны X_i циклические. Рассмотрим произвольный инъективный гомоморфизм $\varphi\colon X \to X$, который, как было показано в доказательстве леммы 2, порождает биекцию σ на множестве индексов. Поэтому для каждого циклического подполигона X_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) мы имеем $\varphi(X_{\sigma^{-1}(i)}) = X_i$. А по предложению 4 ограничение $\varphi|_{X_{\sigma^{-1}(i)}}$ сюръективно. □

Теперь на множестве индексов I произвольного унитарного полигона $X = \coprod\limits_{i \in I} (G/H_i)$ над группой G введём отношение $\sim$, полагая $i \sim j$, если подгруппы H_i и H_j сопряжены (в этом случае полигоны G/H_i и G/H_j изоморфны друг другу). Очевидно, $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве I.

Теорема 4. *Пусть X — унитарный полигон над группой G, $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$, где $X_i \cong G/H_i$, $\sim$ — определённое выше отношение эквивалентности на множестве I. Тогда полигон X кохопфов, если и только если все классы эквивалентности отношения $\sim$ конечны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X кохопфов, но на множестве I найдётся бесконечный класс K отношения $\sim$. Возьмём какое-либо инъективное несюръективное отображение $\sigma\colon K \to K$. Построим эндоморфизм $\varphi\colon X \to X$, полагая

$$\varphi(H_i g) = \begin{cases} H_\beta g, & \text{если } i \notin K, \\ H_{\sigma(i)} g a, & \text{если } i \in K \text{ и } H_i = a^{-1} H_{\sigma(i)} a. \end{cases}$$

Очевидно, гомоморфизм φ инъективен, но не сюръективен. Это противоречит кохопфовости полигона X.

Достаточность. Пусть X — унитарный полигон и все классы $\sim$-эквивалентности на I конечны. Пусть $\varphi\colon X \to X$ — инъективный эндоморфизм. Рассмотрим отображение $\sigma\colon I \to I$, такое что $\varphi(X_i) = X_{\sigma(i)}$. Инъективный гомоморфизм подполигонов $X_i \to X_j$ существует тогда и только тогда, когда они изоморфны, а это означает, что $i \sim j$. Пусть $I = \bigcup\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ — разбиение множества I на

$\sim$-классы. В силу сделанных выше замечаний $\sigma(I_\alpha) \subseteq I_\alpha$ для каждого α. Так как каждое I_α конечно и σ инъективно, то σ сюръективно. Отсюда следует, что φ сюръективно. $\square$

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ им. М. В. Ломоносова.

Литература

[1] Карташов В. К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр // Дискрет. матем. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 79—84.

[2] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[3] Максимовский М. Ю. О биполигонах и мультиполигонах над полугруппами // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 6. — С. 855—866.

[4] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.