Полигоны над полугруппами

И. Б. КОЖУХОВ
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: aamikhalev@mail.ru

УДК 512.59

Ключевые слова: полугруппа, полигон, автомат, унарная алгебра.

Аннотация

Работа представляет собой обзор результатов, полученных в основном в последние два десятилетия в ряде направлений теории полигонов над полугруппами. Авторы ограничились структурной теорией полигонов. Рассмотрены полигоны над вполне (0-)простыми полугруппами, полигоны с условиями на решётку конгруэнций, диагональные полигоны, биполигоны и мультиполигоны, частичные полигоны. Данная работа является расширенным вариантом доклада, сделанного авторами в октябре 2017 года на конференции Института математики Берлинского технического университета, посвящённой 75-летию профессора Ульриха Кнауэра, дополненным результатами более поздних работ.

Abstract

I. B. Kozhukhov, A. V. Mikhalev, Acts over semigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 3, pp. 141—199.

We present a review of results obtained mainly in the last two decades in a number of areas of the theory of acts over semigroups. The authors limited themselves to the structural theory of acts. The acts over completely (0-)simple semigroups, with conditions on the congruence lattice, diagonal acts, biacts and multiacts, and also partial acts are considered. Our work is an expanded version of the report made by the authors in October 2017 at the conference of Institute of Mathematics of Technical University of Berlin, dedicated to the 75th anniversary of Professor Ulrich Knauer, supplemented by the results of later works.

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 3, с. 141—199.

Светлой памяти нашего друга и прекрасного математика
Виктора Тимофеевича Маркова

Введение

Полигон над полугруппой, т. е. множество, на котором действует полугруппа, — математический объект, имеющий многочисленные интерпретации. Многие из них лежат в теории автоматов и теории представлений полугрупп.

Исторически более ранним, чем действие полугрупп, было рассмотрение действия групп на множествах. Это группы подстановок, лежащие в основе теории Галуа, группы автоморфизмов алгебраических систем [48] и других объектов, имеющих математическую структуру (упорядоченных множеств, графов и т. д.), группы гомеоморфизмов топологических пространств, группы диффеоморфизмов гладких многообразий и т. д. Широко известна Эрлангенская программа Ф. Клейна, классифицирующая различные геометрии по их группам преобразований. Хорошо известно, что теория Галуа позволила решить многие трудные вопросы геометрии и алгебры, такие, как возможность построений циркулем и линейкой, условия разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. В случае групп обычно предполагают, что их действия на множествах являются взаимно-однозначными преобразованиями, а в случае топологических пространств требование ещё жёстче: чтобы обратное преобразование тоже было непрерывным. Однако в случае полугрупп такие требования излишни.

Наряду с представлением группы подстановками широкое развитие получила теория линейных представлений групп, т. е. представление группы линейными операторами на линейном пространстве (из многочисленной литературы по представлениям групп упомянем классические монографии [41] и [46]). Эта теория внесла существенный вклад как в развитие самой теории групп (отметим, например, теорему Фейта—Томпсона о разрешимости группы нечётного порядка), так и в современную физику.

Теория автоматов, т. е. устройств, переходящих из одного состояния в другое в зависимости от поступившего на вход сигнала согласно заранее составленной инструкции, также имеет непосредственную связь с теорией полигонов. Правда, классическая теория автоматов предусматривает, что автомат будет не только изменять состояние, но и выдавать на выходе некоторые символы выходного алфавита, однако существует несложная стандартная процедура избавления от выходного алфавита за счёт расширения множества состояний, причём без ущерба, т. е. с возможностью восстановления исходного автомата. Сведéние автоматов Мили (автоматов с выходом) к автоматам Мура (без выхода) позволило применить к изучению автоматов алгебраические методы. Отправной точкой в создании алгебраической теории автоматов послужили монография С. Эйленберга [65] и статья В. М. Глушкова [13]. Имеется много монографий и статей по этой теории; отметим, например, сборник статей под редакцией М. Арбиба [1] и книгу [49], в ряде книг по алгебре и дискретной математике ей отведено значительное место: [12; 42, гл. 6]. В статьях уже упоминавшегося сборника [1] отмечается, что детальное описание автомата, сведение его к более элементарным даже в случае конечной полугруппы требует привлечения довольно тонких математических результатов, в частности классификации конечных простых групп. Значительно более поздняя статья С. В. Алёшина [2] излагает современную точку зрения на эти вопросы. Отметим также недавно вышедшую монографию этого автора [3], в которой автоматы используются для решения некоторых трудных математических задач.

Точное математическое определение полигона выглядит следующим образом. Пусть S — полугруппа. Множество X называется полигоном над S, если определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$. В большинстве работ по полигонам требуется дополнительно, чтобы полугруппа содержала единицу (такие полугруппы называются моноидами), а полигоны были унитарными, т. е. выполнялось равенство $x \cdot 1 = x$ для всех $x \in X$.

Приведём некоторые примеры полигонов.

1. Сама полугруппа S является полигоном над собой (и правым, и левым, см. раздел 1.4).
2. Множество состояний автомата является полигоном над полугруппой входных слов.
3. Универсальная алгебра A является полигоном над полугруппой $\operatorname{End} A$ её эндоморфизмов.
4. Объект X, наделённый некоторой математической структурой, является полигоном над полугруппой преобразований $X \to X$, сохраняющих эту структуру. Таким образом, топологическое пространство X — это полигон над полугруппой непрерывных преобразований $X \to X$, частично упорядоченное множество — полигон над полугруппой изотонных преобразований, граф — полигон над полугруппой преобразований, сохраняющих смежность вершин, и т. д.
5. Модуль M над кольцом R является полигоном над мультипликативной полугруппой $(R, \cdot)$ этого кольца.
6. Полумодуль над полукольцом также является полигоном над мультипликативной полугруппой этого полукольца.

Основные понятия и известные к 2000 г. результаты теории полигонов над полугруппами изложены в [77].

Всякий полигон является *унарной алгеброй*, т. е. универсальной алгеброй, у которой сигнатура состоит из унарных операций. Операциями полигона X над полугруппой S являются отображения $\varphi_s \colon X \to X$, $x \mapsto xs$ $(s \in S)$. И наоборот, унарную алгебру A нетрудно сделать полигоном над полугруппой некоторых преобразований $A \to A$. В [24] утверждается (и обосновывается), что три теории — полигонов над полугруппами, унарных алгебр и алгебраическая теория автоматов — на самом деле представляют собой единую теорию, правда, формулируют свои понятия они на разных математических языках. Внутри теории полигонов также имеет место разница в терминологии: так, например, в [18] полигоны над полугруппами названы операндами. Некоторую информацию об унарных алгебрах читатель может получить из [17].

Полигон X над полугруппой S определяет представление полугруппы S преобразованиями множества X, а именно, отображение $s \mapsto \varphi_s$ является этим представлением.

Как и в случае групп, наряду с представлениями полугрупп преобразованиями произвольных множеств развивается теория линейных представлений полугрупп: представления конечных полугрупп линейными операторами в конечномерном линейном пространстве [93] и представления топологических полугрупп непрерывными линейными операторами, действующими в банаховом пространстве (см., например, [70]). Хорошо известно, что теория представлений конечных групп — это фактически теория модулей над групповыми кольцами. По тем же соображениям теорию представлений полугрупп можно отождествить с теорией модулей над полугрупповыми кольцами.

Исследования по теории полигонов над полугруппами можно условно отнести к какому-либо из следующих направлений:

1) структурная теория полигонов;
2) гомологическая теория полигонов и полугрупп;
3) полигоны специального вида;
4) представления полугрупп преобразованиями множества и линейные представления полугрупп;
5) полигоны с дополнительной структурой;
6) обобщения полигонов.

Структурная теория подразумевает описание полигонов над теми или иными классами полугрупп или обладающих теми или иными свойствами (скажем, удовлетворяющих какому-либо условию конечности или какому-либо требованию, предъявляемому к решётке конгруэнций). Над некоторыми полугруппами, в частности такими, которые имеют относительно простое строение, все полигоны могут быть описаны. Кроме того, могут быть найдены все конгруэнции и подполигоны таких полигонов, полугруппы эндоморфизмов и т. д. Описание или характеризация всех полигонов над определённым классом полугрупп позволяет ответить на многие вопросы, связанные с этими полигонами. Например, с помощью описания полигонов над вполне (0-)простыми полугруппами была получена характеризация инъективных и проективных полигонов над этими полугруппами.

Теория полигонов над полугруппами развивалась под большим влиянием теории модулей над кольцами. При этом аналогия между понятиями полигона и модуля настолько сильна, что в этих теориях имеется не только большое количество общих определений, но также значительное количество общих утверждений, связывающих аналогичные понятия. Конечно, доказательства этих утверждений часто осуществляются непохожими методами. Отметим две статьи Л. А. Скорнякова [52,53], которые внесли существенный вклад в гомологическую теорию колец и модулей и гомологическую теорию полигонов и полугрупп. Обратное влияние (теории полугрупп и полигонов на теорию колец и модулей), хотя и в меньшей степени, тоже имеет место. Конструкция сплетения, пришедшая из теории групп, послужила хорошим инструментом для исследования полугрупп и полигонов (см. [1, третья статья; 77; 80]). В [58] конструкция сплетения переносится на ассоциативные алгебры для решения некоторых вопросов о вложении в конечно порождённые алгебры.

В структурной теории важной темой являются радикалы и кручения. Эта тема требует отдельного рассмотрения, здесь мы лишь упомянем основные работы: [18, § 11.6], [71], [95], [97].

Гомологической теории полугрупп и полигонов посвящена большая часть монографии [77]. Суть этой теории в исследовании полугруппы по свойствам категории полигонов над ней. Часто эту теорию называют гомологической теорией моноидов, так как в целом ряде её мест требуется наличие в полугруппе единицы, а на полигоны накладывается требование унитарности. Гомологическая теория в нашем обзоре практически не рассматривается, за исключением инъективности и проективности полигонов над вполне простыми и вполне 0-простыми полугруппами, а также гомологических вопросов в диагональных полигонах.

Аналогично теории колец и модулей, в теории полигонов изучаются полигоны с теми или иными условиями конечности: артиновы, нётеровы, конечно порождённые, хопфовы и т. д. При этом, скажем, артиновость можно понимать по-разному: как отсутствие бесконечных убывающих последовательностей подполигонов и как аналогичное условие на конгруэнции. Наряду с артиновостью и нётеровостью — условиями минимальности и максимальности для конгруэнций — рассматриваются и другие условия на решётку конгруэнций, например модулярность и дистрибутивность. Подпрямо неразложимые полигоны дают пример ещё одного условия на решётку конгруэнций.

Из полигонов специального вида нами достаточно подробно будут рассматриваться работы по диагональным полигонам.

Полигоны с дополнительной структурой (с дополнительными неунарными операциями, топологические и упорядоченные полигоны) будут вне нашего рассмотрения — это тема других обзоров. Хотя, скажем, естественный квазипорядок на полигоне (а в ряде случаях он является порядком) вниманием нами не обойдён, так как он служит инструментом исследования строения полигона.

Представления полигонов сами по себе мы также не рассматриваем, но обращаем внимание на те представления, которые возникают в других вопросах.

Что касается обобщения полигонов, то здесь мы не претендуем на полноту охвата темы. Нами рассмотрены биполигоны и мультиполигоны в свете того, как можно их сделать обычными полигонами (над какой-нибудь полугруппой). В частичных полигонах также рассмотрены лишь отдельные вопросы. Наконец, не вошли в обзор логические аспекты теории полигонов.

Рассмотренные в обзоре темы имеют ряд вопросов, на которые ответ неизвестен; ими авторы решили поделиться с читателем и поместили их под названием «проблема».

Необходимые сведения из теории полугрупп можно найти в [18, 42, 72], из теории полигонов — в [77], универсальной алгебры — в [38, 64].

1. Основные понятия, определения и обозначения

1.1. Множества

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображения множеств. Тогда

$\ker f = \{(x, x') \mid f(x) = f(x')\}$ — *ядро* отображения f,
$\operatorname{im} f = f(X) = \{f(x) \mid x \to X\}$ — *образ* отображения f.

Ядро является отношением эквивалентности на множестве X, а образ — подмножество множества Y. Если $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, то

$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ — *образ* множества A,
$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ — *полный прообраз* множества B.

Если X и Y — множества, то

X^Y — множество всех отображений $Y \to X$,
$\operatorname{Eq} X$ — решётка отношений эквивалентности на множестве X,
2^X — множество всех подмножеств множества X,
$|X|$ — мощность множества X.

Пусть на множестве X задано отношение (частичного) порядка $\leqslant$. Тогда для $x \in X$

$x^{\triangle} = \{y \in X \mid y \geqslant x\}$ — *верхний конус* элемента x,
$x^{\triangledown} = \{y \in X \mid y \leqslant x\}$ — *нижний конус* элемента x.

Множество X, на котором задано отношение порядка, называется *частично упорядоченным*. Если отношение порядка *дихотомично*, т. е. для каждых $x, y \in X$ или $x \leqslant y$, или $y \leqslant x$, то X — *линейно упорядоченное множество*, или *цепь*. *Антицепь* — множество X, в котором для каждых $x, y \in X$ из $x \leqslant y$ следует $x = y$. Для двух элементов x, y частично упорядоченного множества X введём обозначения:

$$x \vee y = \sup\{x, y\}, \quad x \wedge y = \inf\{x, y\},$$

для семейства $M = \{u_i \mid i \in I\}$ элементов множества X полагаем

$$\bigvee_{i \in I} u_i = \sup\{u_i \mid i \in I\}, \quad \bigwedge_{i \in I} u_i = \inf\{u_i \mid i \in I\}.$$

Если для любой пары элементов $x, y \in X$ существует $\inf\{x, y\}$, то X — нижняя *полурешётка*; если существует $\sup\{x, y\}$, то X — верхняя *полурешётка*; если существуют $\inf\{x, y\}$ и $\sup\{x, y\}$, то X — *решётка*. Слова «верхняя» и «нижняя» мы будем часто опускать. Решётка (или полурешётка) называется *полной*, если соответствующие условия (существования инфимума или супремума) выполняются не только для пары элементов, но для любого непустого подмножества. В подразделе 1.3 будет установлена связь полурешёток с полугруппами. Известно, что операция inf в решётке $\operatorname{Eq} X$ совпадает с теоретико-множественным пересечением, а sup выражается через операции теоретико-множественного объединения и умножения бинарных отношений формулой

$$\bigvee_{i\in I}\sigma_i = \bigcap_{i_1,\ldots,i_n\in I}\sigma_{i_1}\ldots\sigma_{i_n}.$$

Отношение $\leqslant$, которое рефлексивно и транзитивно, называется *квазипорядком*.

Если ρ — отношение эквивалентности на множестве X, то множество классов этого отношения обозначается X/ρ и называется *фактор-множеством*.

1.2. Универсальные алгебры

Универсальной алгеброй (или просто *алгеброй*) сигнатуры Ω называется множество A с заданной на нём совокупностью операций, т. е. для каждого символа операции $f \in \Omega$ задана операция (будем обозначать её также f) на множестве A. Если A — универсальная алгебра, то $\operatorname{Con} A$ будет обозначать *решётку конгруэнций* алгебры A, а $\operatorname{Sub} A$ — решётку подалгебр. Если M — подмножество множества A, то $\langle M\rangle$ — подалгебра, порождённая множеством M (наименьшая подалгебра, содержащая множество M). *Система образующих* (или *порождающее множество*) алгебры A — такое подмножество $M \subseteq A$, что $\langle M\rangle = A$. Система образующих M называется *неприводимой*, если любое собственное подмножество $M' \subset M$ уже не является системой образующих (т. е. $\langle M'\rangle \neq A$).

Хорошо известно, что решётка $\operatorname{Con} A$ является полной подрешёткой решётки $\operatorname{Eq} A$, т. е. инфимум в решётке $\operatorname{Con} A$ совпадает с теоретико-множественным пересечением, а супремум определяется по формуле (1). Обозначим через Δ_A (или просто Δ) отношение равенства на A, т. е. $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$, а через ∇_A (или просто ∇) — универсальное отношение на A, т. е. $\nabla_A = A \times A$. Очевидно, Δ_A — нуль, а ∇_A — единица решётки $\operatorname{Con} A$. Конгруэнция $\rho \in \operatorname{Con} A$ называется *нетривиальной*, если $\rho \neq \Delta$. Конгруэнция, порождённая парой (a, b) различных элементов алгебры A, называется *главной конгруэнцией* и обозначается $\rho_{a,b}$. Очевидно, всякая нетривиальная конгруэнция является супремумом главных конгруэнций (подобно тому, как любой идеал кольца является суммой главных идеалов, а также любая подгруппа группы порождается циклическими подгруппами).

1.3. Полугруппы

Полугруппа — это множество с одной ассоциативной бинарной операцией.

Полугруппа левых нулей — полугруппа, удовлетворяющая тождеству $xy = x$;

полугруппа правых нулей — полугруппа с тождеством $xy = y$;

полугруппа с нулевым умножением — это полугруппа S, для которой существует элемент $\theta \in S$, такой что $xy = \theta$ при всех $x, y \in S$ (эквивалентное определение: полугруппа, удовлетворяющая тождеству $xy = zt$).

Связка — полугруппа идемпотентов (т. е. полугруппа с тождеством $x^2 = x$).

Прямоугольная связка $S = L \times R$ — прямое произведение полугруппы левых нулей L и полугруппы правых нулей R (эквивалентные определения: 1) полугруппа, удовлетворяющая тождествам $x^2 = x$ и $xyz = xz$; 2) полугруппа с тождеством $xyx = x$; 3) полугруппа, удовлетворяющая квазитождеству $xy = yx \to x = y$).

Прямоугольная группа — полугруппа $S = L \times G \times R$, где L и R — полугруппы левых и правых нулей соответственно, а G — группа.

Если S — полугруппа, то S^1 будет обозначать полугруппу, полученную присоединением к полугруппе S внешним образом единицы, в случае если S не имела единицы ($S^1 = S \cup \{1\}$), и саму полугруппу S, если S имела единицу. Аналогично $S^0 = S$, если в S есть нуль, и $S^0 = S \cup \{0\}$, если S не имела нуля.

Полурешётка, т. е. частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов a и b существует $\inf\{a, b\}$, может быть превращена в полугруппу, если умножение определить так: $a \cdot b = \inf\{a, b\}$. При этом полугруппа будет коммутативной полугруппой идемпотентов. Наоборот, если дана коммутативная полугруппа идемпотентов, то, полагая

$$a \leqslant b \leftrightarrow ab = ba = a,$$

мы получим частично упорядоченное множество, являющееся полурешёткой. Поэтому в алгебре иногда полурешётку определяют просто как коммутативную полугруппу идемпотентов (коммутативную связку).

Если M — подмножество полугруппы S, то через $\langle M \rangle$ мы обозначаем подполугруппу, порождённую множеством M. Для множества $\{a\}$ пишем $\langle a \rangle$ вместо $\langle \{a\} \rangle$. Если $|\langle a \rangle| < \infty$, то элемент a называется элементом *конечного порядка*.

Элемент a полугруппы S называется *регулярным*, если $a \in aSa$. Элемент b полугруппы S называется *инверсным к элементу* a, если $aba = b$ и $bab = b$. Элемент b полугруппы S называется *групповым*, если он лежит в некоторой подгруппе полугруппы S.

Для полугруппы S введём следующие обозначения:

$E(S) = \{a \mid a^2 = a\}$ — множество всех идемпотентов полугруппы S;

$\operatorname{Reg} S = \{a \mid$ найдётся b, такой что $a = aba\}$ — множество всех регулярных элементов;

$\operatorname{Gr} S$ — множество всех групповых элементов.

Полугруппа называется

регулярной, если $\operatorname{Reg} S = S$;

инверсной, если каждый элемент имеет единственный инверсный (эквивалентное определение: полугруппа регулярна и идемпотенты перестановочны друг с другом);

вполне регулярной, если $\operatorname{Gr} S = S$, т. е. если S — объединение групп (ещё одна характеризация: вполне регулярные полугруппы — это полурешётки вполне простых полугрупп);

локально конечной, если каждое конечное подмножество порождает конечную подполугруппу;

периодической, если каждый элемент имеет конечный порядок;

эпигруппой (в другой терминологии — π-регулярной полугруппой), если для каждого $a \in S$ найдётся $n \in \mathbb{N}$, такое что $a^n \in \operatorname{Gr} S$.

На любой полугруппе S отношение $\leqslant$, определённое правилом

$$a \leqslant b \leftrightarrow a \in S^1 b S^1,$$

является квазипорядком (*отношение делимости*). На множестве $E(S)$ идемпотентов следующее отношение является частичным порядком (оно называется *естественным порядком*):

$$a \leqslant b \leftrightarrow ab = ba = a \text{ для } a, b \in E(S). \tag{1}$$

Полугруппа S называется *простой*, если она не имеет идеалов, отличных от S. Полугруппа S с нулём называется 0-*простой*, если она не имеет идеалов, кроме $\{0\}$ и S. *Конгруэнц-простые* полугруппы — полугруппы S, у которых $\operatorname{Con} S = \{\Delta, \nabla\}$. *Вполне простая* полугруппа — это простая полугруппа, имеющая примитивный (т. е. минимальный в смысле естественного порядка) идемпотент. *Вполне* 0-*простая* полугруппа — это полугруппа S с нулём, являющаяся 0-простой полугруппой, имеющая минимальный ненулевой идемпотент и удовлетворяющая условию невырожденности в том смысле, что $S^2 \neq \{0\}$. Вполне 0-простые полугруппы по теореме Сушкевича—Риса [18, теорема 3.5] — это в точности рисовские матричные полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ над группой с нулём $G^0 = G \cup \{0\}$ с сэндвич-матрицей $P = \|p_{\lambda i}\| \in G^0$, причём в каждой строке и в каждом столбце сэндвич-матрицы есть хотя бы один ненулевой элемент, а вполне простые полугруппы — это в точности рисовские матричные полугруппы $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ (без нуля). Вполне простыми полугруппами, в частности, являются группа G, *полугруппа левых нулей* L, *полугруппа правых нулей* R, *прямоугольная связка* $L \times R$, *правая группа* $G \times R$, *левая группа* $L \times G$, *прямоугольная группа* $L \times G \times R$.

Соотношения между различными классами полугрупп изображены на рис. 1.

Правая конгруэнция полугруппы S — это такое отношение эквивалентности ρ на S, что для любых $a, b, c \in S$ $(a, b) \in \rho$ влечёт $(ac, bc) \in \rho$. *Левая конгруэнция* σ определяется двойственным образом: для любых $a, b, c \in S$ $(a, b) \in \sigma$ влечёт $(ca, cb) \in \sigma$.

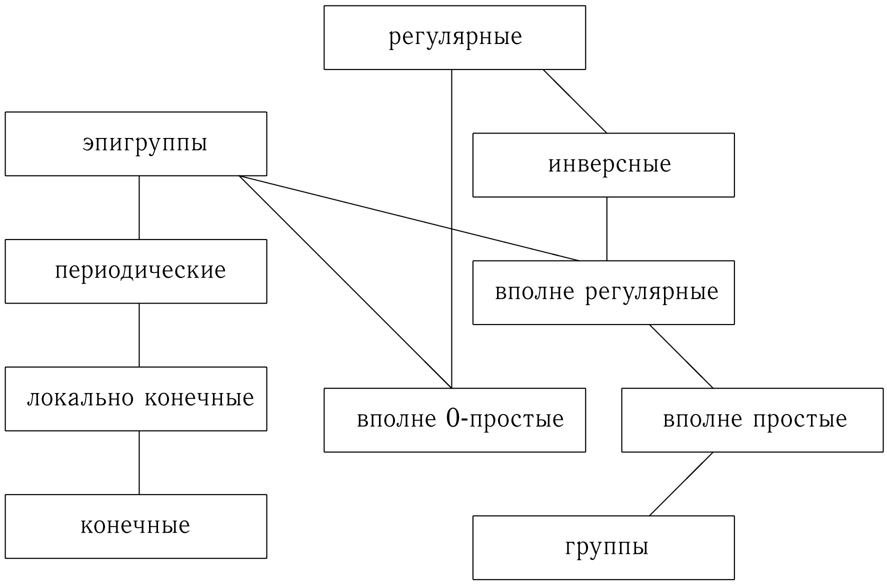

Рис. 1. Соотношения между классами полугрупп

Множество $\mathrm{RCon}\,S$ всех правых конгруэнций и множество $\mathrm{LCon}\,S$ всех левых конгруэнций являются полными подрешётками решётки $\mathrm{Eq}\,S$. Очевидно, $\mathrm{RCon}\,S \cap \mathrm{LCon}\,S = \mathrm{Con}\,S$.

Через $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{J}$ мы будем обозначать отношения Грина на полугруппе (см. [18, § 2.1]).

1.4. Полигоны над полугруппами

Правый полигон X над полугруппой S (или правый S-полигон) — это множество, на котором действует полугруппа S, т. е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, такое что $x(ss') = (xs)s'$ при всех $x \in X$, $s, s' \in S$. *Левый S-полигон* определяется двойственным образом: как множество Y вместе с отображением $S \times Y \to Y$, $(s, y) \mapsto sy$, таким что $(ss')y = s(s'y)$. Чтобы подчеркнуть, что X — правый S-полигон, а Y — левый, пишут $X = X_S$, $Y = {}_SY$. Если множество Z является одновременно левым S-полигоном и правым T-полигоном для некоторых полугрупп S и T и выполняется равенство $(sz)t = s(zt)$, то Z называют (S,T)-*биполигоном* и пишут $Z = {}_SZ_T$. Левый полигон над полугруппой S можно рассматривать как правый полигон над полугруппой S^{op}, полученной из S инвертированием операции умножения: $S^{\mathrm{op}} = (S, *)$, где $s * s' = s's$. Понятие биполигона может быть существенно обобщено: *мультиполигоном* над семейством полугрупп $\{S_i \mid i \in I\}$ будем называть множество X, на котором действуют полугруппы S_i (справа) и выполняются равенства $(xs_i)s_j = (xs_j)s_i$ при $x \in X$, $s_i \in S_i$, $s_j \in S_j$, где $i \neq j$.

Частичный полигон (в сильном смысле) — это частичное отображение $X \times S \to X$, такое что произведения $x(ss')$, $(xs)s'$ либо оба существуют и равны друг другу, либо оба не существуют. В [77] частичный полигон понимается в слабом смысле, т. е. $x(ss') = (xs)s'$, если оба произведения существуют.

В дальнейшем слово «полигон» будет преимущественно означать правый полигон.

Моноидом называется полугруппа с единицей. Полигон X над моноидом S называется *унитарным*, если $xe = x$ для всех $x \in X$, где e — единица моноида S.

Пусть X — полигон над полугруппой S. Если $S^1 \neq S$, то X можно сделать унитарным полигоном над моноидом S^1, положив $x \cdot 1 = x$ при всех $x \in X$.

Пусть X, Y — полигоны над полугруппой S. Отображение $\varphi\colon X \to Y$ называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(xs) = \varphi(x)s$ для всех $x \in X$, $s \in S$. Отношение эквивалентности σ на полигоне X называется *конгруэнцией*, если $(x, y) \in \sigma$ влечёт $(xs, ys) \in \sigma$ для всех $x, y \in X$.

Категория, объектами которой являются полигоны над полугруппой S, а морфизмами — их гомоморфизмы, обозначим Act-S. То же обозначение сохраним для унитарных полигонов над моноидом. Соответствующие категории левых S-полигонов будем обозначать S-Act.

Элемент z полигона $X \in$ Act-S называется *нулём*, если $zs = z$ для всех $s \in S$. Полигон, в отличие от полугруппы, кольца, модуля, может иметь более одного нуля.

Пусть X — полигон над полугруппой S. Непустое подмножество $Y \subseteq X$ называется *подполигоном*, если $YS \subseteq X$. Подполигон Y называется *тривиальным*, если $|Y| = 1$ (в этом случае $Y = \{y\}$ и y — нуль). Нетрудно проверить, что пересечение любой совокупности подполигонов, если оно непусто, является подполигоном. Объединение непустого семейства подполигонов всегда подполигон.

Пусть S — полугруппа, S_1 — её подполугруппа, $\bar{S} = S/\rho$ — фактор-полугруппа (ρ — конгруэнция). Тогда

1) всякий полигон над S можно рассматривать как полигон над S_1,
2) всякий $\bar{S}$-полигон можно рассматривать как S-полигон.

Для подполигона Y полигона X множество $\rho_Y = (Y \times Y) \cup \Delta_X$ является конгруэнцией; эта конгруэнция называется *конгруэнцией Риса*. Если Y тривиален, то $\rho_Y = \Delta_X$. Также $\rho_\varnothing = \Delta_X$.

Обозначим через $\operatorname{Sub} X$ множество всех таких $Y \subseteq X$, что Y — подполигон или $Y = \varnothing$. Множество $\operatorname{Sub} X$ с операциями теоретико-множественных объединения и пересечения, образуют полную решётку, называемую *решёткой подполигонов*. Отображение $Y \mapsto \rho_Y$ не является в общем случае решёточным гомоморфизмом, так как $\rho_Y \vee \rho_{Y'} = \rho_{Y \cup Y'}$ лишь при $Y \cap Y' \neq \varnothing$. Равенство

$\rho_{\bigcap\limits_{i\in I} Y_i} = \bigcap\limits_{i\in I} \rho_{Y_i}$ выполняется для любых $Y_i \in \operatorname{Sub} X$. Отображение $Y \mapsto \rho_Y$ не обязательно является инъективным, так как $\rho_Y = \Delta_X$ при $|Y| \leqslant 1$.

Прямые произведения и *копроизведения* в категории Act-S полигонов над полугруппой S существуют. Прямое произведение $\prod\limits_{i\in I} X_i$ семейства $\{X_i \mid i \in I\}$ полигонов над полугруппой S можно рассматривать как множество кортежей $(x_i)_{i\in I}$ с покомпонентной операцией $(x_i)_{i\in I} \cdot s = (x_i s)_{i\in I}$. Копроизведение $\coprod\limits_{i\in I} X_i$ — это дизъюнктное объединение $X = \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} X_i$, где произведение xs одно и то же, если x рассматривать как элемент из X и как элемент из X_i.

В случае когда полигон X является дизъюнктным объединением своих подполигонов X_i $(i \in I)$, X является копроизведением этих подполигонов.

На любом полигоне X над полугруппой S определяется *естественный квазипорядок*:

$$x \leqslant y \leftrightarrow x \in yS^1. \tag{2}$$

Полигон X называется *связным*, если для любых $x, y \in X$ существуют элементы $u_1, u_2, \ldots, u_{2k}$, такие что $x \leqslant u_1 \geqslant u_2 \leqslant \ldots \geqslant u_{2k} \leqslant y$. Каждому полигону X можно поставить в соответствие граф $\Gamma(X)$, у которого множеством вершин является X, а рёбра имеют вид (x, xs), где $x \in X$, $s \in S$ и $x \neq xs$. При этом связность полигона и связность графа означают одно и то же. Очевидно, каждый полигон является копроизведением своих связных подполигонов (*компонент связности*).

Если X — полигон над полугруппой S, то для каждого $a \in S$ определим отображения $\varphi_a \colon X \to X$, $x \mapsto xa$. Тогда $\varphi_a \in T(X)$, а отображение $\Phi \colon S \to T(X)$ $(a \mapsto \varphi_a)$ является гомоморфизмом полугрупп. Отображение Φ называется *представлением полугруппы S преобразованиями множества X*. Полигон X называется *точным*, если отображение Φ инъективно (*точное представление*).

Положим $\bar{S} = \Phi(S)$. Тогда $\bar{S} \cong S/\ker\Phi$. Полигон X над S и полигон X над $\bar{S}$ имеют одни и те же подполигоны, одни и те же конгруэнции, а значит, и фактор-полигоны. Переход от X_S к $X_{\bar{S}}$ аналогичен переходу от модуля M_R над кольцом R к модулю $M_{\bar{R}}$, где $\bar{R} = R/\operatorname{Ann} M$ (аннулятор $\operatorname{Ann} M$ модуля M является аналогом конгруэнции $\ker\Phi$).

Свободный S-полигон с множеством свободных образующих $U = \{u_i \mid i \in I\}$ изоморфен полигону $U \times S^1$ с операцией $(u, s) \cdot s' = (u, ss')$, где $u \in U$, $s \in S^1$, $s' \in S$. *Свободный унитарный* полигон над моноидом S — это $U \times S$. Очевидно, $(S^1)_S$ — это свободный циклический полигон в категории полигонов над полугруппой S, а S_S — свободный циклический полигон в категории унитарных полигонов над моноидом S.

2. Общие свойства полигонов над полугруппами

2.1. Решётка конгруэнций полигона

Конгруэнции универсальной алгебры — это ядра гомоморфизмов этой алгебры в другие. Знание всех конгруэнций означает знание всех гомоморфных образов алгебры. Факторизация алгебры по её конгруэнции, т. е. переход от алгебры A к фактор-алгебре A/ρ позволяет иногда доказать или опровергнуть то или иное утверждение об алгебре A (так как фактор-алгебру A/ρ можно рассматривать как грубую копию алгебры A). Построение минимального автомата, распознающего заданный язык, заключается в факторизации свободного циклического полигона по синтаксической конгруэнции. В отличие от произвольных универсальных алгебр, где конгруэнции подалгебры могут не продолжаться до конгруэнций алгебры, конгруэнции подполигона всегда продолжаются до конгруэнций полигона и вообще решётка конгруэнций подполигона изоморфно вкладывается в решётку конгруэнций полигона. Так же ведут себя, скажем, модули над кольцами. Утверждения следующей теоремы доказываются непосредственно, при этом утверждение 2) верно для любых универсальных алгебр (см., например, [64, теорема 6.20]).

Теорема 2.1. *Пусть X — полигон над полугруппой S, Y — его подполигон, ρ — конгруэнция на X. Тогда*

1) *отображение $\operatorname{Con} Y \to \operatorname{Con} X$, $\rho \mapsto \rho \cup \Delta_X$ является изоморфным вложением решёток конгруэнций*;
2) *решётка $\operatorname{Con}(A/\rho)$ изоморфна интервалу $[\rho, \nabla_X]$ решётки $\operatorname{Con} X$.*

Главная конгруэнция $\rho_{x,y}$ полигона X, т. е. конгруэнция, порождённая парой (x,y) при $x \neq y$, состоит из таких пар (z,w), для которых либо $z = w$, либо имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} z &= u_1 s_1, \\ v_1 s_1 &= u_2 s_2, \\ &\dots \\ v_{n-1} s_{n-1} &= u_n s_n, \\ v_n s_n &= w, \end{aligned} \tag{3}$$

где $s_i \in S^1$, $\{u_i, v_i\} = \{x, y\}$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

2.2. Полигоны над моноидами: связь произвольных полигонов с унитарными

Пусть S — моноид с единицей e. Если X — полигон над S, то подмножество Xe, как нетрудно видеть, является унитарным S-полигоном. Более того, Xe — наибольший унитарный подполигон полигона X (*унитарная часть* полигона X). Пусть $A = X \setminus Xe$ (неунитарная часть). Ясно, что отображение $x \mapsto xe$ является идемпотентным отображением $X \to X$, образ которого есть

Xe. Следующее утверждение показывает, как можно получить любой S-полигон из унитарного.

Теорема 2.2 [45, теорема 4]. *Пусть S — моноид с единицей e, Y — унитарный S-полигон, A — множество, такое что $Y \cap A = \varnothing$, и $\mu \colon A \to Y$ — произвольное отображение. Положим $X = Y \cup A$ и определим умножение элементов из X на элементы из S следующим образом:*

$$x \cdot s = \begin{cases} xs & \text{при } x \in Y, \\ \mu(x)s & \text{при } x \in A. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда X будет являться S-полигоном (*с унитарной частью Y*). *Кроме того, всякий S-полигон можно получить из унитарного таким способом.*

Аналогичным образом в [45] был описан способ получения всех биполигонов над двумя группами из унитарных полигонов над этими группами.

2.3. Системы образующих полигона

Система образующих (или *порождающее множество*) универсальной алгебры A — это такое подмножество $M \subseteq A$, что $\langle M \rangle = A$ (т. е. подалгебра, порождённая множеством M, совпадает с A). Система образующих называется *неприводимой*, если никакое её собственное подмножество не является системой образующих:

$$M' \subset M \to \langle M' \rangle \neq A.$$

Для полигона X над полугруппой S система образующих — это подмножество $M \subseteq X$, такое что $X = MS^1$. Не всякий полигон имеет неприводимую систему образующих. Например, рассмотрим множество $\mathbb{Z}$ как полигон над свободной циклической полугруппой $S = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$ с действием $i \cdot a^j = i + j$. Тогда у полигона $\mathbb{Z}_S$ любая система образующих приводима.

На произвольном полигоне X над полугруппой S введём отношение эквивалентности $\sim$, полагая

$$x \sim y \leftrightarrow xS^1 = yS^1. \tag{5}$$

Очевидно, отношение $\sim$ совпадает с отношением $\leqslant \cap \leqslant^{-1}$, где $\leqslant$ — естественный квазипорядок (1). Множество $X/\sim$ является частично упорядоченным. Из результатов [16, раздел 2] следует теорема 2.3.

Теорема 2.3. *Полигон X имеет неприводимую систему образующих в том и только том случае, если каждый элемент множества $X/\sim$ меньше или равен какому-либо максимальному элементу. Неприводимая система образующих — это в точности множество представителей максимальных $\sim$-классов полигона X.*

Отсюда выводится [16], что все неприводимые системы образующих полигона над полугруппой, если они существуют, равномощны друг другу.

Отметим, что для алгебр, имеющих операции арности 2 или выше, данное утверждение перестаёт быть верным. Например, в группе $\mathbb{Z}_6$ множества $\{1\}$ и

$\{2,3\}$ являются неприводимыми системами образующих, содержащими разное количество элементов.

2.4. Связь понятий полигона и биполигона

Пусть S и T — полугруппы и X — биполигон над семейством $\{S,T\}$, т. е. X — правый S-и правый T-полигон и $x(ss') = (xs)s'$, $x(tt') = (xt)t'$, $(xs)t = (xt)s$ при $x \in X$, $s, s' \in S$, $t, t' \in T$. Нетрудно видеть, что (S,T)-биполигон X можно рассматривать как $(S \times T)$-полигон, если положить $x \cdot (s,t) = (xs)t$ при $x \in X$, $s \in S$, $t \in T$. Естественно спросить, верно ли обратное, т. е. можно ли на любом правом $(S \times T)$-полигоне X определить умножение на элементы из S и на элементы из T так, чтобы X стал (S,T)-биполигоном и было выполнено условие $x \cdot (s,t) = (xs)t$. Ответ положительный, если S и T имеют единицы (обозначим их 1_S и 1_T): действительно, достаточно положить $x \cdot s = x \cdot (s, 1_T)$, $x \cdot t = x \cdot (1_S, t)$ для $x \in X$, $s \in S$, $t \in T$. Если же хотя бы одна из полугрупп S, T не имеет единичного элемента, то превратить $(S \times T)$-полигон в (S,T)-биполигон не всегда возможно, как показывает следующий пример.

Пример [30]. Пусть $S = \{e, a\}$ — группа с единицей e, $T = \{b_1, b_2\}$ — полугруппа правых нулей (т. е. $b_i b_j = b_j$ при всех i, j). Полугруппа $Y = S \times T$ является правым $(S \times T)$-полигоном относительно обычного умножения в Y. Отношение эквивалентности ρ на Y, классы которого — это $\{(e, b_1)\}$, $\{(e, b_2)\}$, $\{(a, b_1)\}$ и $\{(a, b_2)\}$, является правой конгруэнцией полугруппы Y, а значит, конгруэнцией полигона Y_Y. Положим $X = Y/\rho$. Тогда X — $(S \times T)$-полигон, не являющийся (S,T)-биполигоном.

3. Полигоны над некоторыми классами полугрупп

3.1. Полигоны над группами

Пусть G — группа, H — её подгруппа, не обязательно нормальная, G/H — множество всех правых смежных классов Hg. Если подгруппа H не является нормальной, то мы по ней не можем получить фактор-группу, так как «умножение» смежных классов по формуле $Ha \cdot Hb = Hab$ будет некорректным. Однако множество G/H правых смежных классов будет являться правым G-полигоном относительно умножения $Hg \cdot g' = Hgg'$. Нетрудно видеть, что G/H — унитарный полигон. Так как G — свободный циклический G-полигон, то по теореме об изоморфизме (применительно к полигонам) любой унитарный циклический G-полигон является гомоморфным образом полигона G_G, а значит, изоморфен полигону G/H для некоторой подгруппы H. Итак, G/H — это общий вид унитарного циклического G-полигона. Произвольный унитарный G-полигон — это копроизведение циклических G-полигонов:

$$X = \coprod_{\gamma \in \Gamma} (G/H_\gamma).$$

Произвольные полигоны над группами могут быть получены из унитарных способом, описанным в разделе 2.2.

3.2. Полигоны над вполне (0-)простыми полугруппами

Если полугруппа S имеет нуль 0_S, то естественно рассматривать над ней полигоны с нулём, т. е. такие полигоны X_S, что $x \cdot 0_S = 0_X \cdot s = 0_X$ при $x \in X$, $s \in S$. Здесь 0_S и 0_X обозначают соответственно нуль полугруппы S и нуль полигона X. В дальнейшем индексы S и X у нулей мы будем опускать. Ранее говорилось (см. раздел 1.4), что полигон может иметь более одного нуля. В нашей ситуации (полигонов с нулём над полугруппой с нулём) нуль полигона единствен.

Полигоны над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ были описаны в [60]. Приведём это описание.

Теорема 3.1 [60, теорема 5]. *Пусть X — множество, $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — вполне простая полугруппа, т. е. рисовская матричная полугруппа над группой G с сэндвич-матрицей $P = \|p_{\lambda i}\|_{\lambda\in\Lambda,\ i\in I}$, (H_γ), $\gamma \in \Gamma$, — семейство подгрупп группы G, $Q = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}(G/H_\gamma)$ — унитарный полигон над G. Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ задано отображение $\kappa_\lambda\colon Q \to X$, а для каждого $i \in I$ — отображение $\pi_i\colon X \to Q$, причём $q\kappa_\lambda\pi_i = q \cdot p_{\lambda i}$ при всех $q \in Q$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Для $x \in X$, $(g)_{i\lambda} \in S$ положим*

$$x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda.$$

Тогда X будет являться полигоном над полугруппой S. И наоборот, каждый полигон над вполне простой полугруппой может быть получен таким способом.

Теорема 3.2 [60, теорема 4]. *Пусть X — множество с выделенным элементом 0, $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — вполне 0-простая полугруппа, (H_γ), $\gamma \in \Gamma$, — семейство подгрупп группы G, $Q = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}(G/H_\gamma)$ — унитарный полигон над G, $Q^0 = Q \cup \{0\}$. Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ задано отображение $\kappa_\lambda\colon Q^0 \to X$, а для каждого $i \in I$ — отображение $\pi_i\colon X \to Q^0$, причём $0\kappa_\lambda = 0$, $0\pi_i = 0$, $q\kappa_\lambda\pi_i = q \cdot p_{\lambda i}$ при всех $q \in Q$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Для $x \in X$ положим $x \cdot 0 = 0$ и*

$$x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda.$$

Тогда X будет являться полигоном с нулём над полугруппой S. И наоборот, каждый полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой получается таким способом.

Теорема 3.1 на самом деле следует из теоремы 3.2, потому что, добавив нуль ко вполне простой полугруппе, мы получим вполне 0-простую полугруппу. Другими следствиями этих теорем будут теоремы, описывающие полигоны над полугруппами L, R, $L \times R$, $L \times G$, $G \times R$, $L \times G \times R$ левых, правых нулей и т. д. (см. [60]).

В [45] были описаны биполигоны и мультиполигоны над семейством полугрупп, каждая из которых является полугруппой правых или левых нулей. В [55—57] описывались конгруэнции полигонов (не обязательно унитарных) над группами и над полугруппами правых или левых нулей.

Пусть X — полигон с нулём над полугруппой S с нулём и X_i $(i \in I)$ — его подполигоны, причём $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ и $X_i \cap X_j = \{0\}$ при $i \neq j$. Тогда X будет называться 0-*копроизведением* полигонов X_i, и мы будем писать $X = \coprod\limits_{i \in I}^{0} X_i$. В [18] конструкции копроизведения и 0-копроизведения названы прямым объединением и 0-прямым объединением соответственно. Для полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ и элемента $i \in I$ положим

$$R_i = \{0\} \cup \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G, \lambda \in \Lambda\}.$$

Очевидно, R_i — правый идеал полугруппы S, а значит, подполигон полигона S_S, и мы имеем $S_S = \coprod\limits_{i \in I}^{0} R_i$. В случае вполне простой полугруппы $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ полагаем

$$R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G, \lambda \in \Lambda\}.$$

В этом случае $S_S = \coprod\limits_{i \in I} R_i$.

Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ и $Q = \coprod\limits_{\gamma \in \Gamma} (G/H_\gamma)$, $Q^0 = Q \cup \{0\}$, κ_λ, π_i имеют тот же смысл, что в теореме 3.1. Для $\gamma \in \Gamma$ положим $Q_\gamma = G/H_\gamma$,

$$X^{(\gamma)} = \{q\kappa_\lambda \mid q \in Q_\gamma \cup \{0\},\ \lambda \in \Lambda\}.$$

Нетрудно проверить, что эти множества обладают следующими свойствами:

1) $X^{(\gamma)}$ — подполигоны полигона X;
2) $X^{(\gamma)} = xS$ для любого $x \in X^{(\gamma)} \setminus \{0\}$;
3) $XS = \coprod\limits_{\gamma \in \Gamma}^{0} X^{(\gamma)}$;
4) $X^{(\gamma)} = xR_i$ для любого $x \in X^{(\gamma)} \setminus \{0\}$ и подходящего $i \in I$.

Положим $A = X \setminus XS$. Тогда

$$X = (A \cup AS) \sqcup^0 \coprod_{\delta \in \Delta}^{0} u_\delta S \tag{6}$$

для некоторого $\Delta \subseteq \Gamma$.

Для полигона X над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ полигон XS разлагается в копроизведение простых циклических подполигонов:

$$XS = \coprod_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma S. \tag{7}$$

3.3. Полигоны над полурешётками

Полигоны над полурешётками (коммутативными полугруппами идемпотентов, см. раздел 1.3) обладают рядом свойств, существенно отличающих их от полигонов над произвольными полугруппами. Сформулируем эти свойства в виде теоремы, доказательства можно найти в [44].

Теорема 3.3. *Пусть X — полигон над полурешёткой S. Тогда*

1) *естественный квазипорядок* (3) *на X является порядком*;
2) *для каждого $x \in X$ нижний конус $x^{\triangledown}$ является полурешёткой*;
3) *каждая компонента связности K полигона X является направленным вниз частично упорядоченным множеством, т. е. для любых $x, y \in K$ существует $z \leqslant x, y$.*

Можно поставить вопрос: всякое ли частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям 2) и 3), является полигоном над некоторой полурешёткой? На этот вопрос был получен отрицательный ответ, соответствующий пример был построен в [44].

В связи с этим возникают два вопроса:

1) в каком случае данное частично упорядоченное множество является полигоном над *какой-либо* полурешёткой?
2) в каком случае данное частично упорядоченное множество является полигоном над *заданной* полурешёткой?

Необходимые и достаточные условия на частично упорядоченное множество, чтобы оно было полигоном над некоторой полурешёткой (что даёт ответ на первый вопрос), были найдены в [9]. Ответ на второй вопрос в общем случае неизвестен, получен лишь для конечной цепи (см. далее).

Проблема 3.1. Для данной полурешётки S охарактеризовать частично упорядоченные множества, которые являются полигонами над S.

Для частично упорядоченного множества X обозначим через $\Phi(X)$ множество всех отображений $\alpha\colon X \to X$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) для каждых $x, y \in X$ $x \leqslant y$ влечёт $x\varphi \leqslant y\varphi$ (φ изотонное);
2) для каждого $x \in X$ $x\varphi \leqslant x$ (φ уменьшающее);
3) $\varphi^2 = \varphi$ (φ идемпотентное);
4) для каждых $x, y \in X$ из $x = x\varphi$ и $y \leqslant x$ вытекает $y = y\varphi$.

Тогда $\Phi(X)$ — полурешётка.

Полурешётка $\Phi(X)$ является подполугруппой полугруппы $T(X)$, поэтому X как множество является полигоном над полурешёткой $\Phi(X)$, однако может оказаться, что X как частично упорядоченное множество не является полигоном над $\Phi(X)$ — это будет в случае, если найдутся такие элементы $x, y \in X$, что $x < y$, но $x \notin y\Phi(X)$. Приведём ответ на первый из поставленных выше вопросов.

Теорема 3.4 [9, теорема 4]. *Частично упорядоченное множество X является полигоном над некоторой полурешёткой в том и только том случае, если выполнено условие, что для каждых $x, y \in X$ из того, что $x \leqslant y$, следует, что найдётся $\varphi \in \Phi(X)$, такое что $x = y\varphi$.*

Оказывается, если частично упорядоченное множество X является полигоном над какой-либо полурешёткой S, то оно будет являться полигоном над полурешёткой $\Phi(X)$. При этом некоторый гомоморфный образ полурешётки S изоморфно вкладывается в $\Phi(X)$.

Если частично упорядоченное множество X само является полурешёткой, то отображение $X \to \Phi(X)$, $a \mapsto \varphi_a$, где $x\varphi_a = xa$ при всех $x \in X$, является вложением полурешёток. Кроме того, если X направленно вверх (т. е. для каждых $x, y \in X$ найдётся $z \geqslant x, y$) и удовлетворяет условию максимальности, то это вложение является изоморфизмом [9, теорема 6].

Рассмотрим теперь полигоны над полурешёткой S, являющейся цепью (т. е. $st \in \{s, t\}$ при всех $s, t \in S$). Связное частично упорядоченное множество X назовём *деревом*, если для любого $x \in X$ нижний конус $x^{\triangledown}$ является цепью. В [44] было отмечено, что если X — полигон над цепью, то каждая компонента связности множества X является деревом.

Проблема 3.2. Охарактеризовать частично упорядоченные множества, которые являются полигонами а) над какой-либо цепью, б) над заданной цепью.

Полигоны над конечной цепью были описаны в теореме работы [44].

3.4. Унары

Унар (или *моноунарная алгебра* [74]) — это множество с одной унарной операцией. В более ранней терминологии термин «унарная алгебра» означал унар, в современной этот термин означает алгебру с любой совокупностью унарных операций. Пусть (X, f) — унар с унарной операцией $f\colon X \to X$. Унар может быть рассмотрен как полигон над свободной циклической полугруппой $S = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$, если считать, что $xa = f(x)$ и $xa^i = xa^{i-1} \cdot a$ при $x \in X$, $i \geqslant 2$. Унар может быть рассмотрен также как унитарный полигон над свободным циклическим моноидом $T = \{1, a, a^2, a^3, \ldots\}$, если считать, что $x \cdot 1 = x$.

Пусть X — унар. Элемент $x \in X$ назовём *узлом*, если существуют элементы $y, x \in X$, такие что $ya = za = x$, причём $x \neq y \neq z \neq x$. Элемент x *периодический*, если $xa^i = x$ для некоторых $x \in X$, $i \geqslant 1$. Элементы из $X \setminus XS$ будем называть *начальными*.

Унары специального вида: $(\mathbb{N},\ xa = x + 1)$ (*луч*), $(\mathbb{Z},\ xa = x + 1)$ (*прямая*), $(\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\},\ xa = x + 1 \pmod n)$ (*цикл*).

Нетрудно проверить, что все конгруэнции луча $X = \{0, 1, 2, \ldots,\}$ с операцией $x \cdot a = x + 1$ имеют вид $\rho(k, d)$ или Δ, где

$$\rho(k, d) = \{(x, y) \mid x, y \geqslant k \text{ и } x \equiv y \pmod d\} \cup \Delta_X$$

(здесь $k \geqslant 0$, $d > 0$).

4. Подпрямо неразложимые и однородные полигоны

4.1. Общие свойства подпрямо неразложимых полигонов

Универсальная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если она неразложима в нетривиальное подпрямое произведение других алгебр. Интерес к таким алгебрам объясняется известной теоремой Биркгофа (см. [38, теорема 7.3]), утверждающей, что всякая универсальная алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр.

Конгруэнцию ρ алгебры A назовём *нетривиальной*, если $\rho \neq \Delta_A$.

Из определения следует, что любая алгебра A из одного или двух элементов является подпрямо неразложимой. А для алгебр A, таких что $|A| > 1$, эквивалентны следующие условия:

1) A подпрямо неразложима;
2) пересечение нетривиальных конгруэнций — нетривиальная конгруэнция;
3) существует наименьшая нетривиальная конгруэнция.

Наименьшую нетривиальную конгруэнцию алгебры A обозначим через $\rho_0(A)$ (или просто ρ_0) и назовём *монолитом*.

Полигон X над полугруппой S назовём *простым*, если он не имеет подполигонов, отличных от X. Очевидно, полигон X является простым в том и только том случае, если $xS^1 = X$ для всех $x \in X$. Полигон X с единственным нулём θ назовём 0-*простым*, если у него нет подполигонов, отличных от $\{\theta\}$ и X. Ясно, что полигон X с нулём будет 0-простым в том и только том случае, если $xS^1 = X$ для всех $x \neq \theta$.

Подполигон Y полигона X назовём *нетривиальным*, если $|Y| > 1$. Наименьший нетривиальный подполигон полигона X, если он существует, называется *ядром*.

Очевидно, наличие наименьшей нетривиальной конгруэнции равносильно наличию наименьшей нетривиальной *главной* конгруэнции, поэтому с учётом равенств (4) мы получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть X — полигон над полугруппой S и $|X| > 1$. Тогда X является подпрямо неразложимым в том и только том случае, если существуют такие элементы $z, w \in X$, что для любых элементов $x \neq y$ из X имеет место цепочка равенств*

$$\begin{aligned} z &= u_1 s_1, \\ v_1 s_1 &= u_2 s_2, \\ &\dots \\ v_{n-1} s_{n-1} &= u_n s_n, \\ v_n s_n &= w, \end{aligned}$$

где $s_i \in S^1$, $\{u_i, v_i\} = \{x, y\}$ при $i = 1, 2, \dots, n$. При этом $\rho_0(X) = \rho_{z,w}$.

Теорема 4.1 даёт необходимые и достаточные условия подпрямой неразложимости полигона. Однако применение этой теоремы довольно затруднительно.

Найдём ещё ряд общих свойств подпрямо неразложимых полигонов (над произвольными полугруппами). Некоторые из них были выявлены в [51].

Теорема 4.2. *Пусть X — полигон над полугруппой S и $|X| > 1$. Тогда*

1) *если X подпрямо неразложим, то всякий подполигон Y полигона X также подпрямо неразложим*;
2) *если X — полигон без нулей, то X^0 подпрямо неразложим в том и только том случае, если X подпрямо неразложим*;
3) *если X подпрямо неразложим, то X имеет ядро*;
4) *если X подпрямо неразложим, то X имеет не более двух компонент связности, причём если компонент связности две, то хотя бы одна из них состоит из одного элемента;*
5) *подпрямо неразложимый полигон имеет не более двух нулей.*

В [51] были охарактеризованы подпрямо неразложимые полигоны, имеющие ровно два нуля.

Теорема 4.3 [51, предложение 2]. *Пусть X — полигон над полугруппой S и X имеет ровно два нуля θ_1, θ_2. Тогда X подпрямо неразложим в том и только том случае, если для любых элементов $a \neq b$ полигона X найдётся такое $s \in S$, что $\{as, bs\} = \{\theta_1, \theta_2\}$.*

Следующая теорема позволяет свести вопрос о подпрямой неразложимости полигона X к вопросу о подпрямой неразложимости его подполигона Y.

Теорема 4.4. *Пусть X — полигон над полугруппой S, Y — его подполигон и $|Y| \geqslant 2$. Тогда X подпрямо неразложим в том и только том случае, если Y подпрямо неразложим и для любых элементов $x \neq x'$ из X выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) *найдётся $s \in S^1$, такое что $xs \neq x's$ и $xs, x's \in Y$*;
2) *$x, x' \notin Y$ и найдётся $s \in S^1$, такое что $xs \neq x's$ и $\{xs, x's\} \cap Y \neq \varnothing$*;
3) *$x \in Y$, $x' \notin Y$ и найдутся $s, t \in S^1$, такие что $xs \neq xt$, $x's = x't$*;
4) *$x \notin Y$, $x' \in Y$ и найдутся $s, t \in S^1$, такие что $xs = xt$, $x's \neq x't$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X подпрямо неразложим. Тогда по теореме 4.2 Y подпрямо неразложим. Пусть $\rho_0(X)$ — наименьшая конгруэнция на X (монолит), а $\rho_Y = (Y \times Y) \cup \Delta_X$ — рисовская конгруэнция, соответствующая подполигону Y. Так как X подпрямо неразложим и $|Y| \geqslant 2$, то $\rho_0(X) \cap \rho_Y \neq \Delta_X$. Тогда существуют такие элементы $y_1, y_2 \in Y$, что $y_1 \neq y_2$ и $(y_1, y_2) \in \rho_0(X) \cap \rho_Y$. Отсюда следует, что $\rho_0(X) = \rho_{y_1,y_2}$. Рассмотрим цепочки равенств вида

$$\begin{aligned} z &= u_1 s_1, \\ v_1 s_1 &= u_2 s_2, \\ &\ldots \\ v_{n-1} s_{n-1} &= u_n s_n, \\ v_n s_n &= w, \end{aligned} \tag{8}$$

где $z, w \in Y$, $z \neq w$, $\{u_i, v_i\} = \{x, x'\}$, $s_i \in S^1$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Такие цепочки существуют, так как $\rho_{x,x'} \supseteq \rho_{y_1,y_2}$. Без ограничения общности можно считать, что цепочка (8) наиболее короткая из возможных.

Если $u_n x_n = w$, то цепочку (8) можно сократить на одно звено, что противоречит минимальности цепочки.

Если $u_n x_n \in Y$, но $u_n x_n \neq w$, то мы получаем $(u_n, w_n) \cdot s_n = (u_n s_n, w)$, т. е. $\{x, x'\} \cdot s_n = \{u_n s_n, w\}$, поэтому выполняется 1).

Пусть теперь $u_n x_n \notin Y$. Разберём четыре случая.

1-й случай: $x, x' \in Y$. Тогда выполняется 1) при $s = 1$.

2-й случай: $x, x' \notin Y$. Тогда $\{x, x'\} \cdot s_n = \{x s_n, w\}$, и выполняется 2).

3-й случай: $x \in Y$, $x' \notin Y$. Так как $u_n s_n \notin Y$, то $u_n = x'$ и $v_{n-1} = x'$. Мы имеем

$$\begin{aligned} v s_{n-2} = x s_{n-1}&, \\ x' s_{n-1} = x' s_n&, \\ x s_n = w&. \end{aligned}$$

Заметим, что $x s_{n-1} \neq w$, так как в противном случае цепочку (8) можно сократить на два звена. Следовательно, $s_{n-1} \neq s_n$. Мы имеем, что $x s_{n-1} \neq x s_n$, $x' s_{n-1} = x' s_n$, а значит, выполнено 3).

4-й случай: $x \notin Y$, $x' \in Y$. Этот случай разбирается аналогично предыдущему.

Достаточность. По условию Y подпрямо неразложим. Поэтому существует $\rho_o(Y)$ — наименьшая нетривиальная конгруэнция на Y. Очевидно, $\rho_o(Y) = \rho_{y_1,y_2}$ — главная конгруэнция. Докажем, что $\rho = \rho_0(Y) \cup \Delta_X$ — наименьшая нетривиальная конгруэнция на X. Для этого достаточно доказать, что $\rho_{x,x'} \supseteq \rho$ при $x \neq x'$.

Если выполнено 1), то так как $xs, x's \in Y$, то

$$\rho_{x,x'} \supseteq \rho_{xs,x's} \supseteq \rho_{y_1,y_2} \cup \Delta_X \supseteq \rho.$$

Если $x \in Y$, $x' \notin Y$ и не выполнено 1), то выполняется 3). Так как $(xs, x's), (xt, x't) \in \rho_{x,x'}$ и $x's = x't$, то $(xs, xt) \in \rho_{x,x'}$. Так как $xs \neq xt$, то $\rho_{xs,xt} \supseteq \rho_{y_1,y_2}$, поэтому $\rho_{y_1,y_2} \subseteq \rho_{x,x'}$, а значит, $\rho \subseteq \rho_{x,x'}$.

Если $x \notin Y$, $x' \in Y$, то $\rho \subseteq \rho_{x,x'}$ аналогично предыдущему случаю.

Пусть теперь $x, x' \notin Y$ и не выполнено 1). Тогда выполнено 2), и мы можем считать, что $xs \in Y$. Так как 1) не выполнено, то $x's \notin Y$. Поэтому для элементов xs, $x's$ выполнено 3). По ранее доказанному $\rho_{xs,x's} \supseteq \rho$. Отсюда следует, что $\rho_{x,x'} \supseteq \rho$. $\square$

Смысл этой теоремы состоит в том, что вопрос о подпрямой неразложимости полигона может быть сведён к вопросу о подпрямой неразложимости подполигона. Если Y подпрямо неразложим, то установить, будет ли X подпрямо неразложим, можно, строя не цепочки длины n, как в теореме 4.1, а цепочки длины, не превосходящей 3. Например, если $x \in Y$, $x' \notin Y$, то цепочка

$$\begin{aligned} xs &= xs, \\ x's &= x't, \\ xt &= xt \end{aligned}$$

показывает, что $\rho_{x,x'} \supseteq \rho_{xs,xt}$, и при этом $xs \neq xt$, $xs, xt \in Y$.

В [35] в качестве полигона Y было взято ядро K полигона X, а сама теорема разбита на ряд теорем в зависимости от того, сколько нулей имеет полигон X (один, два или ни одного).

4.2. Обобщения подпрямо неразложимых полигонов

Универсальную алгебру A назовём *конечно подпрямо неразложимой*, если пересечение двух (а значит, и любого конечного числа) нетривиальных конгруэнций является нетривиальной конгруэнцией. Ясно, что всякая подпрямо неразложимая алгебра является конечно подпрямо неразложимой. Обратное неверно: в качестве примера можно взять свободный циклический унар $X = \{0, 1, 2, \ldots, \}$, где $x \cdot a = x + 1$. В нём пересечение конечного числа нетривиальных конгруэнций нетривиально, а пересечение всех нетривиальных равно Δ, т. е. тривиально.

Подполигон Y полигона X называется *большим* (в другой терминологии — *существенным*), если для каждого $\rho \in \operatorname{Con} X$ из $\rho|_Y = \Delta_Y$ следует $\rho = \Delta_X$ (здесь $\rho|_Y = \rho \cap (Y \times Y)$). Это условие эквивалентно следующему: для любого гомоморфизма $\varphi\colon X \to C$ если $\varphi|_Y$ — мономорфизм, то φ — мономорфизм.

Полигон X называется *однородным*, если любой его нетривиальный подполигон является большим.

Из определений следует, что:

1) любой конечно подпрямо неразложимый полигон является однородным;
2) любой простой полигон и любой 0-простой полигон с нулём являются однородными.

Если G — группа, в которой есть две нетривиальные подгруппы с тривиальным пересечением (например, циклическая группа порядка 6), то полигон G_G однородный (так как он простой), но не является конечно подпрямо неразложимым. Таким образом, все три рассматриваемых здесь класса различны:

$$\{\text{подпрямо неразложимые}\} \subset \\ \subset \{\text{конечно подпрямо неразложимые}\} \subset \{\text{однородные}\}.$$

Конечно подпрямо неразложимые и однородные полигоны изучались в [90]. Понятие однородного полигона возникло благодаря понятию однородного модуля над кольцом. Модуль называется однородным, если любой его ненулевой подмодуль является большим, т. е. имеет ненулевое пересечение с любым ненулевым подмодулем. Однородные полигоны также обладают этим свойством: пересечение нетривиальных подполигонов является нетривиальным подполигоном. Но, в отличие от модулей, это свойство лишь необходимо для однородности. Сформулируем теорему, аналогичную теореме 4.2, для конечно подпрямо неразложимых и однородных полигонов. Доказательства можно найти в [90] или провести непосредственно.

Теорема 4.5. *Пусть X — полигон и Y — его подполигон. Тогда*

1) *если X — конечно подпрямо неразложимый* (*однородный*) *полигон, то Y также конечно подпрямо неразложимый* (*соответственно однородный*);
2) *если Y — большой подполигон полигона X, являющийся подпрямо неразложимым* (*конечно подпрямо неразложимым, однородным*), *то X также подпрямо неразложимый* (*соответственно конечно подпрямо неразложимый, однородный*);
3) *пусть X — полигон без нулей*; *тогда X конечно подпрямо неразложимый (однородный) в том и только том случае, если X^0 конечно подпрямо неразложимый* (*соответственно однородный*);
4) *пересечение двух нетривиальных подполигонов однородного* (*а значит, и конечно подпрямо неразложимого*) *полигона — нетривиальный подполигон*;
5) *однородный* (*а значит, и конечно подпрямо неразложимый*) *полигон имеет не более двух компонент связности, причём если компонент связности две, то хотя бы одна из них состоит из одного элемента.*

Из этой теоремы следует, что всякий однородный полигон содержит не более двух нулей, причём для полигона, имеющего ровно два нуля, однородность и подпрямая неразложимость эквивалентны [90].

4.3. Подпрямо неразложимые и однородные полигоны над некоторыми классами полугрупп

Подпрямо неразложимые коммутативные полигоны были охарактеризованы в [67]. Полугруппу X назовём *подпрямо неразложимой справа*, если либо $|S| = 1$, либо S имеет наименьшую нетривиальную правую конгруэнцию (другими словами, если полигон S_S подпрямо неразложим). Такие полугруппы были исследованы в [88].

В [83] авторы характеризуют подпрямо неразложимые полигоны над полугруппой с нулевым умножением, а также над строгими цепями полугрупп левых нулей (строгая цепь полугрупп — это строгая полурешётка полугрупп в случае, если полурешётка является цепью). Кроме того, вычислено количество неизоморфных подпрямо неразложимых полигонов над n-элементной полугруппой правых нулей и над n-элементной полугруппой с нулевым умножением.

Подпрямо неразложимые унары описаны в [94]. А именно, унар подпрямо неразложим в том и только том случае, если он изоморфен одному из следующих унаров:

1) $X = \{1, 2. \ldots, n\}$, $xa = \min\{x + 1, n\}$;
2) $X = \mathbb{N}$, $xa = \max\{x - 1, 0\}$;

3) $X = \mathbb{Z}_{p^n}$, где p — простое число;
4) $X = \mathbb{Z}_{p^n} \sqcup \{0\}$, где p — простое число.

Несложным упражнением является описание конечно подпрямо неразложимых и однородных унаров.

Подпрямо неразложимые полигоны над группами были охарактеризованы в [34, теорема 6]. С помощью аналогичных рассуждений можно получить характеризацию конечно подпрямо неразложимых и однородных полигонов над группами.

Для подгруппы H группы G введём два условия:

$$\text{существует наименьшая подгруппа } H' \supset H \qquad (\alpha)$$

и

$$H_1 \cap H_2 \neq H \text{ при } H_1, H_2 \neq H. \qquad (\beta)$$

Так как при $|X| \leqslant 2$ полигон X является подпрямо неразложимым (а значит, конечно подпрямо неразложимым и однородным), мы можем при рассмотрении таких полигонов ограничиться полигонами с не менее чем тремя элементами.

Теорема 4.6. *Пусть X — полигон над группой G и $|X| \geqslant 3$. Тогда X является однородным в том и только том случае, если $X \cong G/H$ или $X \cong (G/H) \sqcup \{0\}$ для некоторой подгруппы H. При этом X подпрямо неразложим в том и только том случае, если выполнено* (α) [34, теорема 6]; *X конечно подпрямо неразложим, если и только если выполнено* (β).

В [90] исследовались однородные справа полугруппы, т. е. такие полугруппы S, что полигон S_S однороден. Отмечено, что всякий идемпотент такой полугруппы является левой единицей или левым нулём — это обобщает соответствующий результат из [88]. Полигон X назовём *нётеровым*, если он удовлетворяет условию максимальности (т. е. условию обрыва возрастающих цепей) для конгруэнций. Полугруппа S *нётерова справа*, если полигон S_S нётеров. Нётеровым полугруппам посвящена обстоятельная статья [81]. Нётеровы полигоны обладают свойствами, аналогичными свойствам нётеровых модулей над кольцом. В частности, всякий сюръективный эндоморфизм нётерова полигона является автоморфизмом [90, предложение 3.6], у однородного нётерова полигона всякий ненильпотентный эндоморфизм является автоморфизмом [90, предложение 3.7]. Другие результаты: однородная справа нётерова справа полугруппа без левых нулей сократима слева [90, следствие 3.11]; если S — однородный справа регулярный моноид, то S либо группа, либо группа с присоединённым нулём, либо группа с присоединёнными двумя левыми нулями [90, теорема 3.17].

Полугруппа S называется *реверсивной слева*, если $aS \cap bS \neq \varnothing$ при любых $a, b \in S$. Над моноидом S существует однородный полигон с двумя нулями и хотя бы одним ненулевым элементом в том и только том случае, если S не является реверсивным слева [90, предложение 3.19].

В [20] было доказано, что если X — подпрямо неразложимый полигон над полугруппой S и $|S| = n$, то $|X| \leqslant 2^{n+1}$. Оказывается, это верно также для однородных полигонов, причём для однородных унитарных полигонов над моноидами оценка лучше: $|X| \leqslant 2^n$ [90, следствие 3.21].

Пусть X — полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. По формуле (7) $XS = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma S$. По теореме 4.5 5), если X однородный, то $|\Gamma| \leqslant 2$.

Перейдём теперь к полигонам над прямоугольной связкой $S = L \times R$, где L — полугруппа левых нулей, а R — полугруппа правых нулей. В этом случае $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, где $G = \{e\}$ — тривиальная группа, а значит, $p_{\lambda i} = e$ при всех $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$. Всякий S-полигон X определяется некоторым множеством Q и семействами отображений $\pi_i \colon X \to Q$ $(i \in I)$, $\kappa_\lambda \colon Q \to X$ $(\lambda \in \Lambda)$, такими что $\kappa_\lambda \pi_i = 1_Q$ при всех i, λ, а умножение элементов из X на элементы из S осуществляется по правилу $x \cdot (i, \lambda) = x\pi_i\kappa_\lambda$. Удобно считать, что множества I и Λ наделены операциями умножения, превращающими их в полугруппу левых и правых нулей соответственно, т. е. $I = L$, $\Lambda = R$. В [35] были получены необходимые и достаточные условия подпрямой неразложимости полигонов над прямоугольной связкой $S = L \times R = I \times \Lambda$. В частности, при $|Q| = 1$ полигон X оказался подпрямо неразложим тогда и только тогда, когда $|X| \leqslant 2$.

Более прозрачные условия подпрямой неразложимости, а также конечной подпрямой неразложимости и однородности полигонов над прямоугольными связками получены в [91].

Теорема 4.7 [91, теорема 2.11]. *Пусть X — полигон над прямоугольной связкой $S = I \times \Lambda$ и $|X| > 1$. Тогда X подпрямо неразложим в том и только том случае, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) *$X = \{x, y\}$, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $X \cdot (I \times \Lambda_1) = \{x\}$, $X \cdot (I \times \Lambda_2) = \{y\}$ (X без нулей);*
2) *X с единственным нулём θ, ядро $\operatorname{Ker} A = \{x, y\}$, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $X \cdot (I \times \Lambda_1) \subseteq \subseteq \{x, \theta\}$, $X \cdot (I \times \Lambda_2) \subseteq \{y, \theta\}$ и для любых различных элементов u, v, таких что $\{u, v\} \neq \{x, y\}$, существует такое $s \in S$, что $us \neq vs$;*
3) *X с двумя нулями θ_1, θ_2, причём для любых $u \neq v$ существует такое $s \in S^1$, что $\{us, vs\} = \{\theta_1, \theta_2\}$.*

В [91] доказано, что если $|I| < \infty$, то $|X| \leqslant 2^{|I|} + 1$. Там же вычислено количество попарно не изоморфных подпрямо неразложимых полигонов над конечной прямоугольной связкой.

Условия однородности полигона над прямоугольной связкой выглядят похожим образом.

Теорема 4.8 [91, теорема 3.4]. *Пусть X — полигон над прямоугольной связкой $S = I \times \Lambda$. Тогда*

1) *полигон без нулей однородный тогда и только тогда, когда он простой;*
2) *полигон X с одним нулём θ однородный в том и только том случае, если либо $|X| \leqslant 2$, либо существует ядро K, для любого $x \neq \theta$ $xS = K$ или $xS = K \cup \{\theta\}$ и для любых $x \neq y$, таких что $\{x, y\} \not\subseteq K$, найдётся $s \in S$, для которого $xs \neq ys$;*

3) *полигон с двумя нулями* θ_1, θ_2 *однороден тогда и только тогда, когда для любых* $u \neq v$ *существует такое* $s \in S^1$, *что* $\{us, vs\} = \{\theta_1, \theta_2\}$.

Подпрямо неразложимые полигоны над прямоугольными группами $S = L \times G \times R$ (где G — группа, L и R — полугруппы левых и правых нулей соответственно) были описаны в [26]. Мы будем использовать обозначения раздела 3.1 и считать прямоугольную группу $L \times G \times R$ рисовской матричной полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, где $p_{\lambda i} = e$ при всех i, λ. Напомним также, что по утверждению 1) теоремы 4.2 и утверждению 5) теоремы 4.5 для подпрямо неразложимого полигона над этой полугруппой либо $Q = G/H$, либо $Q = (G/H) \sqcup 0$.

Теорема 4.9 [26, теоремы 2, 3]. *Пусть* X *— полигон над прямоугольной группой* S *и* $A = XS$.

А. *Пусть* $Q = G/H$. *Полигон* X *подпрямо неразложим в том и только том случае, если выполнено хотя бы одно из следующих условий.*

1. *Существуют элементы* $a, a' \in A$, *такие что* $a \neq a'$ *и выполнены следующие условия*:
   1) $a = q_0\kappa_\lambda$, $a' = q_0\kappa_\mu$ *при некоторых* $q_0 \in Q$, $\lambda, \mu \in \Lambda$;
   2) $q_0\kappa_\nu \in \{a, a'\}$ *при всех* $\nu \in \Lambda$;
   3) $q\kappa_\xi = q\kappa_\eta \notin \{a, a'\}$ *при* $q \neq q_0$, $\xi, \eta \in \Lambda$;
   4) *для любых* $x \neq y$ *из* X $x\pi_i \neq y\pi_i$ *при некотором* i.
2. *Существует наименьшая подгруппа* $H' \supset H$ *и выполняются следующие условия*:
   5) $q\kappa_\lambda = q\kappa_m u$ *при всех* $q \in Q$, $\lambda, \mu \in \Lambda$;
   6) *для* $a \in A$ *произведение* $a \cdot (g)_{i\lambda}$ *не зависит от* i *и* λ;
   7) *для любых* $x \neq y$ *из* X $x\pi_i \neq y\pi_i$ *при некотором* i.

Б. *Пусть* $Q = Q_1 \sqcup 0$, $A = XS = A_1 \sqcup \{u\}$. *Тогда* X *подпрямо неразложим в том и только том случае, если выполнены условия* 1) *и* 2), *в которых* Q *и* A *заменены соответственно на* Q_1 *и* A_1.

5. Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами

Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный класс универсальных алгебр, т. е. класс, который вместе с каждой алгеброй содержит все изоморфные ей. Говорят, что алгебра A *аппроксимируется* алгебрами класса $\mathcal{K}$, если для любых элементов $a \neq b$ из A существуют алгебра $K \in \mathcal{K}$ и гомоморфизм $\varphi\colon A \to K$, различающий элементы a и b (т. е. $\varphi(a) \neq \varphi(b)$). Очевидно, алгебра A аппроксимируется алгебрами из $\mathcal{K}$ в том и только том случае, если A изоморфна подпрямому произведению алгебр из $\mathcal{K}$.

Алгебра A называется *финитно аппроксимируемой* (в другой терминологии — *резидуально конечной*), если она аппроксимируется конечными алгебрами. Назовём алгебру A *ограниченно финитно аппроксимируемой*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что A аппроксимируется алгебрами из n или меньшего числа элементов.

Интересными вопросами теории полугрупп и полигонов являются следующие:

($*$) над какими полугруппами S все S-полигоны финитно аппроксимируемы;

($**$) над какими полугруппами S все S-полигоны ограниченно финитно аппроксимируемы?

Полугруппы, для которых ответ на вопрос ($*$) положителен, определяют класс полугрупп, который мы также будем обозначать через ($*$). Обозначим через ($**_n$) класс полугрупп, для которых все полигоны аппроксимируются полигонами из n или меньшего числа элементов.

Нетрудно видеть, что классы ($*$), ($**_n$) можно определить также условиями

($*'$) все подпрямо неразложимые S-полигоны конечны;

($**'_n$) все подпрямо неразложимые S-полигоны состоят из не более чем n элементов.

Класс ($**'_2$) состоит в точности из полурешёток, как показывает следующая теорема.

Теорема 5.1 [78]. *Все нетривиальные S-полигоны аппроксимируются двухэлементными в том и только том случае, когда S — полурешётка.*

Необходимое условие принадлежности полугруппы S классу ($**_n$) даёт следующая теорема (утверждение которой несколько слабее, чем теорема 5.1).

Теорема 5.2 [34, теорема 1]. *Если $|X| \leqslant n$ для любого подпрямо неразложимого S-полигона X, то полугруппа S удовлетворяет тождеству $a^m = a^{2m}$, где $m = \text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$.*

Изучение полугрупп классов ($*$), ($**$) было предпринято в [19, 20]. Как уже упоминалось в разделе 4.3, в [20] было доказано, что над конечной полугруппой S любой подпрямо неразложимый S-полигон содержит не более $2^{|S|+1}$ элементов. Таким образом, все конечные полугруппы принадлежат классу ($**$), а значит, и классу ($*$). Бесконечная циклическая полугруппа представляет пример полугруппы, принадлежащей классу ($*$), но не ($**$).

Полугруппа S с нулём называется *нильполугруппой*, если для любого $a \in S$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $a^n = 0$. Полугруппа S называется *нильпотентной*, если $S^n = 0$ при некотором n.

Теорема 5.3 [19, теорема 1, предложение 3]. *Для нильполугруппы S эквивалентны следующие условия:*

1) *S конечна;*
2) *S принадлежит классу ($*$);*
3) *S принадлежит классу ($**_n$) при некотором n.*

Если $S \in (**_n)$, то $|S| \leqslant 3$ при $n = 3$ и $|S| \leqslant \big((n-2)^n - 1\big)/(n-3)$ при $n \geqslant 4$.

В [19, следствие 2] было доказано, что любая полугруппа правых нулей принадлежит классу $(**_3)$. В [19] исследовались условия принадлежности классу $(**_n)$ коммутативной полугруппы.

В [34] исследования условий $(*')$, $(**')$ были продолжены, результаты этой работы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5.4 [34, леммы 3, 4, теоремы 7, 9, следствие 10].

1. *Если полугруппа удовлетворяет условию $(*')$, то любая её правая конгруэнция является пересечением правых конгруэнций конечного индекса.*
2. *Если полугруппа удовлетворяет условию $(*')$, то все её гомоморфные образы финитно аппроксимируемы (в другой терминологии — резидуально конечны).*
3. *Группа удовлетворяет условию $(*')$ в том и только том случае, если каждая её подгруппа является пересечением подгрупп конечного индекса.*
4. *Полугруппа S с условием $(**')$ равномерно локально конечна, т. е. существует функция $f(k)$, такая что k-порождённые подполугруппы имеют не более $f(k)$ элементов; более того, равномерная локальная конечность полугруппы S имеет место уже в случае, когда полигон S_S аппроксимируется конечными ограниченных в совокупности порядков.*

В случае коммутативной полугруппы, как нетрудно проверить, равномерная локальная конечность равносильна выполнению тождества $a^{m+r} = a^m$ для некоторых $m, r > 0$ (это условие можно назвать *равномерной периодичностью*).

В связи с теоремой 5.4 возникает вопрос, не является ли для коммутативной полугруппы условие 4 достаточным. Ответ отрицательный, так как, например, бесконечная полугруппа с нулевым умножением является равномерно периодической, но не удовлетворяет не только условию $(**)$, но даже условию $(*)$ (по [19, лемма 1] над ней существует бесконечный подпрямо неразложимый полигон).

Как отмечалось выше, в [51] было доказано, что подпрямо неразложимый полигон над произвольной полугруппой имеет не более двух нулей. Нетрудно показать, что над коммутативной полугруппой подпрямо неразложимый полигон с двумя нулями состоит в точности из этих двух нулей. В работе [21] доказано, что над равномерно периодической коммутативной полугруппой порядки подпрямо неразложимых полигонов без нуля ограничены в совокупности.

Если же S — абелева группа, то вопрос о том, в каких случаях выполняется условие $(*')$ или $(**')$, решается до конца. В [36] доказано, что условие $(**')$ равносильно ограниченности группы (т. е. $a^m = 1$ для некоторого натурального m и всех $a \in S$). При этом порядки подпрямо неразложимых S-полигонов, аппроксимирующих произвольный S-полигон, равны p^α или $p^\beta + 1$, где p — простое число и $p^\alpha, p^\beta + 1 \leqslant n$. Необходимые и достаточные условия для $(*')$ выглядят сложнее. Отметим лишь, что группа S, удовлетворяющая условию $(*)$, имеет конечный ранг.

6. Инъективные и проективные полигоны

Здесь мы рассмотрим только инъективность и проективность полигонов над вполне простыми и вполне 0-простыми полугруппами.

Универсальная алгебра X называется *инъективной*, если для любого инъективного гомоморфизма алгебр $\alpha\colon A \to B$ и гомоморфизма $\varphi\colon A \to X$ существует гомоморфизм $\psi\colon B \to X$, такой что $\varphi = \alpha\psi$ (здесь умножение отображений осуществляется слева направо). Алгебра X называется *проективной*, если для любого сюръективного гомоморфизма $\beta\colon A \to B$ и гомоморфизма $\varphi\colon X \to B$ существует гомоморфизм $\psi\colon X \to A$, такой что $\varphi = \psi\beta$. *Инъективная оболочка* $E(X)$ полигона X — это наименьший инъективный полигон, содержащий полигон X в качестве большого подполигона. *Проективное накрытие* полигона X — это полигон P, имеющий сюръективный гомоморфизм $\gamma\colon P \to X$ и обладающий тем свойством, что $P_1\gamma \neq X$ для любого собственного подполигона $P_1 \subset P$.

Как и в случае модулей над кольцами, инъективная оболочка существует у всякого полигона, а проективное накрытие — не у всякого. Построение инъективной оболочки произвольного полигона над полугруппой осуществлено в [62]. Моноиды, над которыми любой полигон имеет проективное накрытие, изучались в [73] и были названы *совершенными*. Подробнее о проективности, инъективности, плоскостности полигонов над моноидами и гомологической классификации моноидов см. в [77, гл. III—V].

Описание инъективных полигонов над полугруппами левых нулей и построение инъективных оболочек произвольных полигонов над этими полугруппами было осуществлено в [82]. В [33] над полугруппами левых нулей были описаны проективные полигоны и были построены проективные накрытия. Кроме того, в [33] были решены вопросы об условиях инъективности и проективности полигонов над полугруппами правых нулей. Наконец, эти результаты были существенно обобщены в [25, 27], где вопросы об инъективности, проективности, инъективных оболочках и проективных накрытиях были исчерпывающим образом решены для полигонов над вполне простыми полугруппами и полигонов с нулём над вполне 0-простыми полугруппами. Ниже мы приведём соответствующие теоремы, но для этого надо ввести некоторые обозначения.

Для полигона X над вполне простой полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ пусть полигон Q и отображения $\pi_i\colon X \to Q$ те же, что в теореме 3.1, а если X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, полигон Q^0 и отображения $\pi_i\colon X \to Q^0$ те же, что в теореме 3.2. Для элемента $x \in X$ определим отображение $\omega_x\colon I \to Q$ (или $\omega_x\colon I \to Q$) формулой $i\omega_x = x\pi_i$.

Теорема 6.1 [27, теорема 6]. *Полигон X над вполне простой полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ является инъективным в том и только том случае, если выполняются следующие условия*:

1) *X содержит нуль*;
2) *для любого отображения $\omega\colon I \to Q$ существует элемент $x \in X$, такой что $\omega = \omega_x$.*

Построение инъективной оболочки $E(X)$ полигона X будет состоять в добавлении к Q нуля, если в Q нет нуля, и добавлении к полигону X новых элементов — по одному для каждого $\omega \neq \omega_x$.

Теорема 6.2 [25, теорема 2]. *Полигон X с нулём над вполне 0-простой полугруппой $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ является инъективным в том и только том случае, если для любого отображения $\omega\colon I \to Q^0$ существует элемент $x \in X$, такой что $\omega = \omega_x$.*

Построение инъективной оболочки полигона осуществляется аналогично тому, как это делалось для полигона над вполне простой полугруппой.

Перейдём теперь к проективным полигонам и проективным накрытиям полигонов.

Теорема 6.3 [27, теорема 13]. *Пусть X — полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Положим $A = X \setminus XS$, $Z = XS \setminus AS$. Полигон X проективен в том и только том случае, если выполняются следующие условия:*

1) *для любых $a, b \in A$ и $s, t \in S$ имеет место импликация*

$$as = bt \to \big((a = b) \wedge (s = t)\big);$$

2) *для любого $z \in Z$, любых $i \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $g, h \in G$ имеет место импликация*

$$z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \to \big((g = h) \wedge (\lambda = \mu)\big).$$

Для $i \in I$ положим $R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G,\ \lambda \in \Lambda\}$. Очевидно, R_i — подполигон полигона S_S. Более того, R_i — копрямой сомножитель полигона S_S: действительно, $S_S = \coprod_{i \in I} R_i$. При этом R_i изоморфны друг другу как S-полигоны. Кроме того, R_i как полугруппа является правой группой, а именно, она изоморфна прямому произведению $G \times \Lambda$, если на Λ взята правонулевая операция (т. е. $\lambda \cdot \mu = \mu$ для всех $\lambda, \mu \in \Lambda$). Таким образом, R_i изоморфны друг другу и как полугруппы. Полигон S^1 — это свободный циклический полигон. Теорему 6.3 можно переформулировать следующим образом: полигон над вполне простой полугруппой проективен в том и только том случае, если он изоморфен копроизведению полигонов, изоморфных S^1 или R_i. Как видно из теоремы 6.3, у проективного полигона $A \cup AS$ — это копроизведение полигонов вида S^1, а $Z = XS \setminus AS$ — копроизведение полигонов, изоморфных R_i. Теперь ясно, что каждый полигон X над вполне простой полугруппой имеет проективное накрытие $P(X)$: для того чтобы его построить, достаточно заметить, что $A \cup AS$ — это гомоморфный образ свободного полигона $F(A)$ с множеством свободных образующих A, а $Z = \coprod_{\gamma \in \Gamma} z_\gamma R_i$, поэтому каждое $z_\gamma R_i$ — гомоморфный образ полигона R_i.

Теорема 6.4 [25, теорема 4]. *Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Положим $A = X \setminus XS$, $Z = (XS \setminus AS) \cup \{0\}$. Полигон X проективен в том и только том случае, если выполняются следующие условия:*

1) *для любых $a, b \in A$ и $s, t \in S$ имеет место импликация*
$$as = bt \to \big((s = t = 0) \vee (a = b) \wedge (s = t)\big);$$
2) *для любого $z \in Z \setminus \{0\}$, любых $i \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $g, h \in G$ имеет место импликация*
$$z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \neq 0 \to \big((g = h) \wedge (\lambda = \mu)\big).$$

Здесь также подполигон $A \cup AS$ проективного полигона X — это свободный S-полигон с множеством свободных образующих A (в категории полигонов с нулём над S). Таким образом, проективность полигона X равносильна тому, что X — 0-копрямое произведение свободного полигона и полигонов R_i. Сами R_i изоморфны друг другу как правые S-полигоны, а как полугруппы R_i и R_j изоморфны тогда и только тогда, когда в i-м и j-м столбцах сэндвич-матрицы P нули стоят на одних и тех же позициях. Любой полигон X над вполне 0-простой полугруппой имеет проективное накрытие, которое может быть построено на основе представления (6) полигона X.

7. Полигоны с тождествами в решётке конгруэнций

Универсальная алгебра A называется *дистрибутивной* (*модулярной*), если решётка конгруэнций $\operatorname{Con} A$ дистрибутивна (соответственно модулярна). Дистрибутивные решётки определяются тождеством
$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z),$$
а модулярные — квазитождеством
$$x \leqslant z \to (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$
или (что эквивалентно) тождеством
$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \wedge (x \vee z) \vee z)$$
(см. [14, гл. II, гл. IV, теорема 1]). Здесь $x \wedge y = \inf\{x, y\}$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$ — решёточные операции. Ещё одна интересная характеризация дистрибутивных и модулярных решёток, часто использующаяся в исследованиях дистрибутивных и модулярных алгебр, такова (см. [14, гл. II, теоремы 1, 2]): решётка модулярна тогда и только тогда, когда она не содержит пентагон в качестве подрешётки; решётка дистрибутивна в том и только том случае, если она не содержит в качестве подрешёток пентагоны и диаманты (рис. 2).

Универсальная алгебра A называется *цепной*, если решётка $\operatorname{Con} A$ — цепь. Цепи не образуют многообразия решёток, но обладают некоторыми свойствами многообразия; например, они замкнуты относительно взятия подрешёток и гомоморфных образов.

Имеется много работ, посвящённых дистрибутивным и цепным группам, полугруппам, кольцам, модулям. Решётка конгруэнций любой группы (т. е. решётка её нормальных подгрупп) всегда модулярна. То же верно для решётки

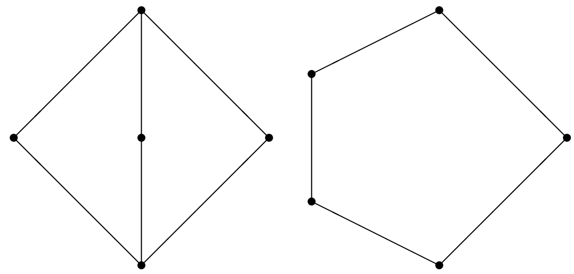

Рис. 2. *а* — диамант, *б* — пентагон

идеалов кольца и решётки подмодулей модуля, однако дистрибутивными они являются лишь в редких случаях. Что касается полигонов над полугруппами, то здесь даже модулярность решётки конгруэнций — редкое явление.

Будем называть полигоны, имеющие дистрибутивную, или модулярную, или линейно упорядоченную решётку конгруэнций соответственно дистрибутивными, или модулярными, или цепными полигонами.

Отметим, что ввиду теоремы 2.1 класс дистрибутивных полигонов замкнут относительно взятия подполигонов и фактор-полигонов. По той же причине этим свойством обладают классы модулярных и цепных полигонов. Хорошо известно, что решётка $\mathrm{Eq}\,X$ всех отношений эквивалентности на множестве X дистрибутивна лишь при $|X| \leqslant 2$ и модулярна при $|X| \leqslant 3$. Отсюда и из предыдущих замечаний нетрудно вывести следующее утверждение, отмеченное в некоторых работах, например в [50].

Теорема 7.1. *Если решётка конгруэнций полигона X над полугруппой S модулярна, то*

1) *полигон X не может иметь четырёх попарно не пересекающихся подполигонов*;
2) *полигон X имеет не более трёх компонент связности*;
3) $|X \setminus XS| \leqslant 2$.

Если решётка $\mathrm{Con}\,X$ дистрибутивна, то

4) *X не может иметь трёх попарно не пересекающихся подполигонов*;
5) *X имеет не более двух компонент связности*;
6) $|X \setminus XS| \leqslant 1$.

Так как решётка $\mathrm{Con}\,X$ является подрешёткой решётки $\mathrm{Eq}\,X$, то всякий полигон X при $|X| \leqslant 2$ дистрибутивен, а при $|X| \leqslant 3$ модулярен.

В [50] исследовались условия модулярности/дистрибутивности решётки конгруэнций полигона над произвольной полугруппой. В этой работе вопрос о дистрибутивности или модулярности полигона в некотором смысле был сведён к вопросу о дистрибутивности или модулярности его компонент связности.

Пусть X — полигон над полугруппой S и A, B — его подполигоны, причём $X = A \sqcup B$. Следуя [50], назовём конгруэнцию $\rho \in \operatorname{Con} X$ *сквозной конгруэнцией*, если существуют элементы $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, такие что $(a, b), (a', b') \in \rho$, $(a, a'), (b, b') \notin \rho$. Необходимые и достаточные условия модулярности решётки конгруэнций несвязного полигона даёт следующая теорема.

Теорема 7.2 [50, теоремы 3.1, 3.2]. *Решётка конгруэнций* $\operatorname{Con} X$ *полигона* X *модулярна* (*дистрибутивна*) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *в полигоне* X *нет четырёх* (*соответственно трёх*) *попарно не пересекающихся подполигонов*;
2) *решётки конгруэнций компонент связности полигона* X *модулярны* (*соответственно дистрибутивны*);
3) *в решётке* $\operatorname{Con} X$ *нет сквозных конгруэнций.*

На основе этих результатов в [57] были описаны модулярные, дистрибутивные и цепные полигоны над полугруппой левых/правых нулей. Элементов в этих полигонах оказалось не более 9, полугруппа S, если она действует эффективно, содержит не более 27 элементов, а решётка конгруэнций — не более 160 элементов.

Результаты [57] были обобщены в [29] на случай прямоугольных связок. Пусть X — полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$. Положим $Y = XS$. Согласно формуле (6) $Y = \bigsqcup\limits_{i \in I} Y_i$, причём $yS = Y_i$ для любого $y \in Y_i$. Нетрудно доказать, что для любого $y \in Y_i$ произведение $y \cdot (l, r)$ принадлежит Y_i и не зависит от l. Обозначим этот элемент через y_{ir}. Кроме того, $a \cdot (l, r) = y_{i(a),r}$ при $a \in X \setminus XS$. Пусть $i, j \in I$ и $i \neq j$. Обозначим через $\Gamma_{i,j}$ двудольный граф с множеством вершин $Y_i \cup Y_j$ и множеством рёбер $\{(y_{ir}, y_{jr}) \mid r \in R\}$.

Теорема 7.3 [29]. *Пусть* X — *полигон над прямоугольной связкой* $S = L \times R$ *и* $A = X \setminus XS$. *При* $|X| \leqslant 3$ *решётка* $\operatorname{Con} X$ *модулярна. Пусть* $|X| > 3$. *Тогда решётка* $\operatorname{Con} X$ *является модулярной в том и только том случае, если выполнены следующие условия*:

1) $|I| \leqslant 3$, $|Y_i| \leqslant 3$ *при всех* $i \in I$;
2) *графы* Γ_{ij} *связны при* $i \neq j$;
3) $|A| \leqslant 2$;
4) *при* $A = \{a\}$ *если* $aS \subseteq Y_i$ *при некотором* i, *то* $|Y_i| \leqslant 2$;
5) *при* $A = \{a, b\}$
   а) $aS \cap bS \neq \varnothing$;
   б) *если* $aS \subseteq Y_i$, $bS \nsubseteq Y_i$ *или* $bS \subseteq Y_i$, $aS \nsubseteq Y_i$ *при некотором* i, *то* $|Y_i| \leqslant 2$;
   в) *если* $aS, bS \subseteq Y_i$ *при некотором* i, *то* $|Y_i| = 1$.

Из этой теоремы видно, что в случае прямоугольной связки наибольшее число элементов полигона с модулярной решёткой конгруэнций равно 11. В работе показано, что решётка конгруэнций модулярного полигона в этом случае имеет самое большее 300 элементов.

Обобщением понятия дистрибутивной или модулярной алгебры является алгебра, у которой решётка конгруэнций удовлетворяет некоторому *нетривиальному решёточному тождеству* (нетривиальным мы называем тождество, выполняющееся не во всех решётках). Тождествам в решётках (другими словами, многообразиям решёток) посвящена монография [75], тождества в решётках конгруэнций рассматривались в диссертации Дж. Нейшна [84], подробное освещение этих вопросов имеется в обстоятельной статье [76].

Отметим несколько хорошо известных фактов о решётках, нужных для исследования полигонов с тождествами в решётке конгруэнций. Многообразие дистрибутивных решёток — это наименьшее нетривиальное решёточное многообразие (атом). Всякая решётка вкладывается в решётку вида $\mathrm{Eq}\, M$, причём конечные решётки вкладываются в решётки $\mathrm{Eq}\, M$ с конечным множеством M [87]. Многообразие всех решёток порождается конечными решётками (см. [75]). Значит, решётка $\mathrm{Eq}\, M$, где M — бесконечное множество, не может удовлетворять никакому нетривиальному решёточному тождеству. С другой стороны, всякое многообразие, порождённое конечной универсальной алгеброй, локально конечно [38, следствие 3.14], а многообразие всех решёток не является локально конечным (свободная решётка с тремя свободными образующими бесконечна), поэтому никакая конечная решётка не порождает многообразие всех решёток, а значит, в каждой конечной решётке выполняется какое-либо нетривиальное тождество. В частности, если полигон X над полугруппой является конечным, то в решётке $\mathrm{Con}\, X$ выполняется нетривиальное тождество. Для полигонов над конечными полугруппами, как показывает следующая теорема, верно и обратное.

Теорема 7.4 [28]. *Пусть X — полигон над конечной полугруппой. Решётка $\mathrm{Con}\, X$ удовлетворяет нетривиальному тождеству в том и только том случае, когда X конечен.*

Аналогичное утверждение справедливо и для полигонов над некоторыми бесконечными полугруппами.

Теорема 7.5 [28]. *Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, причём $|G|, |I| < \infty$. Решётка $\mathrm{Con}\, X$ удовлетворяет нетривиальному тождеству тогда и только тогда, когда $|X| < \infty$.*

Условие $|G| < \infty$ не может быть отброшено, так как существуют бесконечные группы, у которых решётка подгрупп удовлетворяет нетривиальному тождеству (например, решётка подгрупп группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ является цепью, а значит, дистрибутивна). Кроме того, условие $|I| < \infty$ также не может быть отброшено, как показывают построенные в [28] примеры конгруэнц-простых полигонов над полугруппами $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ с конечной группой G и бесконечными множествами I, Λ.

8. Диагональные полигоны

8.1. Основные понятия

Диагональные полигоны получили своё развитие, по-видимому, в связи со следующим вопросом: существует ли бесконечная полугруппа S и два её элемента a, b, такие что система уравнений $ax = c$, $bx = d$ имеет решение в S^1 для любых $c, d \in S$? Этот вопрос был задан для моноидов [85, задача E 3311], но наличие единицы не играет здесь принципиального значения. Довольно быстро был получен положительный ответ на этот вопрос [86], а затем разными авторами было построено много примеров таких полугрупп.

Правым диагональным полигоном $(S \times S)_S$ над полугруппой S называется множество $(S \times S)$ со следующим действием на него полугруппы S: $(a, b) \cdot s = (as, bs)$. *Левый диагональный полигон* ${}_S(S \times S)$ определяется двойственным образом, а именно действие полугруппы S таково: $s \cdot (a, b) = (sa, sb)$. *Диагональный биполигон* — это множество $S \times S$ с обоими действиями $(a, b) \cdot s = (as, bs)$ и $s \cdot (a, b) = (sa, sb)$.

Более общими объектами являются *n-арные диагональные* (*правые, левые, би-*) *полигоны*, определяемые как множества $\underbrace{S \times \ldots \times S}_{n}$ с действиями

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot s = (a_1 s, \ldots, a_n s)$$

и

$$s \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (sa_1, \ldots, sa_n).$$

Разумеется, правый диагональный полигон $(S \times S)_S \cong S_S \times S_S$ — прямое произведение двух экземпляров (а правый n-арный диагональный полигон $(S^n)_S$ — произведение n экземпляров) полигона S_S. Аналогичное замечание можно сделать для диагональных левых полигонов и биполигонов. Можно рассматривать диагональные полигоны бесконечной арности S^I, где I — бесконечное множество.

8.2. Диагональные ранги полугрупп

С диагональными полигонами связываются понятия диагональных рангов полугрупп. *Правым диагональным рангом* $\operatorname{rdr} S$ полугруппы S назовём минимальную мощность системы образующих полигона $(S \times S)_S$:

$$\operatorname{rdr} S = \min\{|A| \colon A \subseteq S \times S \text{ и } AS^1 = S \times S\}.$$

Аналогичным образом определяются *левый диагональный ранг* $\operatorname{ldr} S$, *бидиагональный ранг* $\operatorname{bdr} S$, и *n-арные* (*би*)*диагональные ранги*:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ldr} S = \min\{|A|\colon A \subseteq S \times S \text{ и } S^1A = S \times S\},\\
&\operatorname{bdr} S = \min\{|A|\colon A \subseteq S \times S \text{ и } S^1AS^1 = S \times S\},\\
&\operatorname{rdr}_n S = \min\{|A|\colon A \subseteq S^n \text{ и } A \cup AS = S^n\},\\
&\operatorname{ldr}_n S = \min\{|A|\colon A \subseteq S^n \text{ и } A \cup SA = S^n\},\\
&\operatorname{bdr}_n S = \min\{|A|\colon A \subseteq S^n \text{ и } A \cup AS \cup SA \cup SAS = S^n\}.
\end{aligned}$$

Пусть dr обозначает rdr, ldr или bdr. Очевидно, $\operatorname{dr}_n S \leqslant \operatorname{dr}_m S$ при $n \leqslant m$, где $\operatorname{dr} \in \{\operatorname{rdr}, \operatorname{ldr}, \operatorname{bdr}\}$. Отсюда следует, что если $\operatorname{dr}_m S < \infty$, то $\operatorname{dr}_n S < \infty$ при $n \leqslant m$. Для рангов rdr и ldr можно доказать и обратное [68, лемма 7.9]: если $\operatorname{dr} S < \infty$, то $\operatorname{dr}_n S < \infty$ при $n \geqslant 3$ в случае, когда $\operatorname{dr} \in \{\operatorname{rdr}, \operatorname{ldr}\}$ (несложно доказывается, что $\operatorname{dr}_n S \leqslant (\operatorname{dr} S)^n$). Для бидиагональных полигонов это не так. Более того, имеет место следующее утверждение.

Теорема 8.1 [7, теорема 2]. *Для любой полугруппы S существует надполугруппа $T \supseteq S$, такая что диагональный биполигон ${}_T(T \times T)_T$ циклический, а тернарный диагональный биполигон ${}_T(T \times T \times T)_T$ не является конечно порождённым.*

8.3. Постановки задач

Центральным вопросом в теории диагональных полигонов является вопрос о том, при каких условиях правый (левый, би-) диагональный полигон является конечно порождённым? Является циклическим? Разумеется, над конечной полугруппой S все диагональные (би)полигоны являются конечно порождёнными. Простой подсчёт количества элементов показывает, что цикличность правого диагонального полигона (т. е. равенство $(a, b)S^1 = S \times S$ для некоторых $a, b \in S$) возможно лишь при $|S| = 1$. Более тонкие рассуждения показывают, что диагональный биполигон ${}_S(S \times S)_S$ конечной полугруппы S является циклическим лишь в случае, когда $|S| = 1$ [68, теорема 5.2].

Для бесконечных полугрупп цикличность диагональных полигонов может иметь место и в нетривиальном случае. Так, в [89, предложение 2.1] доказано, что моноид всех частично рекурсивных функций одного переменного с операцией суперпозиции имеет циклические диагональный правый и диагональный левый полигоны (а значит, и диагональный биполигон). Развивая эту тему, П. Галлагер и Н. Рушкуц доказали следующую теорему.

Теорема 8.2 [69, следствие 2.3, теорема 3.2, следствия 2.2, 2.3, теоремы 2.1, 3.1]. *Если X — бесконечное множество, то полугруппы $T(X)$, $P(X)$ и $B(X)$ имеют циклические диагональный левый, правый полигоны* (*а значит, и диагональный биполигон*).

Утверждение, касающееся полугруппы $B(X)$ бинарных отношений на множестве X, может быть обобщено следующим образом. Полугруппу $B(X)$ можно рассматривать как полугруппу матриц размера $|I| \times |I|$ из 0 и 1 с умножением

$$(\|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\|)_{kl} = \bigvee_t (a_{kt} \wedge b_{tl}).$$

Если вместо $\{0,1\}$ взять полную решётку L, удовлетворяющую тождеству бесконечной дистрибутивности

$$\left(\bigvee_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma\right) \wedge y = \bigvee_{\gamma\in\Gamma} (x_\gamma \wedge y),$$

то мы получим полугруппу $B_L(X)$. В [59, теорема 4.1] доказано, что $\operatorname{rdr} B_L(X) = \operatorname{ldr} B_L(X) = 1$ для бесконечного множества X. Пусть S — бесконечный моноид, у которого множество $\{x \in S \mid Sx = S\}$ обратимых слева элементов конечно. Тогда $\operatorname{bdr} S = \infty$, а значит, $\operatorname{rdr} S = \operatorname{ldr} S = \infty$ [59, теорема 4.2]. Отсюда выводится, что $\operatorname{bdr} RB(X) = \infty$, если X — бесконечное множество, а $RB(X)$ — полугруппа рефлексивных бинарных отношений на множестве X [59, следствие 4.3].

В [68] было проведено систематическое исследование диагональных полигонов различных полугрупп с целью найти необходимые или достаточные условия конечной порождённости/цикличности диагонального (би)полигона над этой полугруппой. Кроме того, в [68] было установлено много фактов общего характера, касающиеся цикличности и конечной порождённости диагональных (би)полигонов. Некоторые из них просты и могут быть доказаны без каких-либо усилий: например, тот факт, что

$$\operatorname{rdr} S^0 < \infty \leftrightarrow \operatorname{rdr} S < \infty$$

[68, лемма 2.5] и аналогичные утверждения для ldr и bdr, некоторые менее очевидны.

Теорема 8.3 [68, теорема 3.2]. *Пусть S — бесконечная полугруппа, у которой $\operatorname{bdr} S < \infty$. Тогда S — главный идеал (т. е. $S = S^1aS^1$ при некотором $a \in S$) и соответствующий $\mathcal{J}$-класс $J(a)$ имеет ту же мощность, что и S.*

8.4. Классы полугрупп конечного ранга

Отметим, что условие на полугруппу S «иметь конечный ранг $\operatorname{rdr} S$ (или $\operatorname{ldr} S$, или $\operatorname{bdr} S$)" является *условием конечности*, так как все конечные полугруппы этому условию удовлетворяют.

Пусть $\mathcal{K}_{\mathrm{r}}$ ($\mathcal{K}_{\mathrm{l}}$, $\mathcal{K}_{\mathrm{b}}$) — класс полугрупп S, у которых $\operatorname{rdr} S < \infty$ ($\operatorname{ldr} S < \infty$, $\operatorname{bdr} S < \infty$). Очевидно, каждый из этих классов замкнут относительно взятия гомоморфных образов. Приведём простой пример, показывающий, что ни один из этих классов не замкнут относительно взятия идеалов.

Пример. Пусть X — бесконечное множество, $S = T(X)$ — полугруппа преобразований и $I = \{\alpha \in T(X)\colon |X\alpha| < \infty\}$. Тогда I — идеал полугруппы S, причём $S \in \mathcal{K}_{\mathrm{r}} \cap \mathcal{K}_{\mathrm{l}} \cap \mathcal{K}_{\mathrm{b}}$, но $I \notin \mathcal{K}_{\mathrm{r}} \cup \mathcal{K}_{\mathrm{l}} \cup \mathcal{K}_{\mathrm{b}}$.

Приведём доказательство утверждения в этом примере. Тот факт, что S принадлежит каждому из классов $\mathcal{K}_{\mathrm{r}}$, $\mathcal{K}_{\mathrm{l}}$, $\mathcal{K}_{\mathrm{b}}$, составляет содержание теоремы 8.2. Так как $\mathcal{K}_{\mathrm{r}} \cup \mathcal{K}_{\mathrm{l}} \subseteq \mathcal{K}_{\mathrm{b}}$, то для доказательства второго утверждения достаточно доказать, что $I \notin \mathcal{K}_{\mathrm{b}}$. Предположим, что $I \in \mathcal{K}_{\mathrm{b}}$. Тогда $I \times I = I^1(\alpha_1, \beta_1)I^1 \cup \ldots \cup I^1(\alpha_n, \beta_n)I^1$ при некоторых $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n \in I$. Пусть

$$m = \max\{|X\alpha_1|, |X\beta_1|, \ldots, |X\alpha_n|, |X\beta_n|\}.$$

Возьмём какое-либо $\gamma \in I$, у которого $|X\gamma| = m+1$. Тогда $(\gamma, \gamma) = (\varphi\alpha_i\psi, \varphi\beta_i\psi)$ при некоторых $i \leqslant n$ и $\varphi, \psi \in I$. Отсюда следует, что $\gamma = \varphi\alpha_i\psi$ и $m+1 = |X\gamma| = |X\varphi\alpha_i\psi| \leqslant |X\alpha_i| \leqslant m$ — противоречие.

Классы $\mathcal{K}_{\mathrm{r}}, \mathcal{K}_{\mathrm{l}}, \mathcal{K}_{\mathrm{b}}$ не замкнуты относительно взятия конечных прямых произведений, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть A — бесконечная полугруппа, $L = \{l_1, l_2\}$ и $R = \{r_1, r_2\}$ — полугруппы левых и правых нулей соответственно. Тогда полугруппа $S = L \times A \times R$ имеет бесконечный бидиагональный ранг, а значит, также $\operatorname{rdr} S$ и $\operatorname{ldr} S$ бесконечны. Если в качестве A взять какую-либо бесконечную полугруппу с конечными правым и левым диагональными рангами (например, $A = T(X)$, где X — бесконечное множество), то получится полугруппа, имеющая бесконечные диагональные ранги, разлагающаяся в прямое произведение полугрупп конечных диагональных рангов. Осталось проверить, что $\operatorname{bdr} S = \infty$. Рассмотрим множество

$$M = \bigl\{\bigl((l_1, a, r_1), (l_2, a, r_2)\bigr) a \in A\bigr\}.$$

Очевидно, $M \subseteq S \times S$. Так как

$$(x, y, z) \cdot \bigl((l_1, a, r_1), (l_2, a, r_2)\bigr) = \bigl((x, ya, r_1), (x, ya, r_2)\bigr),$$

то $S \cdot (S \times S) \cap M = \varnothing$. Аналогично доказывается, что

$$(S \times S) \cdot S \cap M = S \cdot (S \times S) \cdot S \cap M = \varnothing.$$

Следовательно, множество M содержится в любом порождающем множестве биполигона ${}_S(S \times S)_S$, а значит, $\operatorname{bdr} S = \infty$.

Вместе с тем для полугрупп с единицей (моноидов) несложно доказать, что $\operatorname{rdr}(S \times T) \leqslant \operatorname{rdr} S \cdot \operatorname{rdr} T$, а значит, прямое произведение конечного числа моноидов конечного правого диагонального ранга имеет конечный правый диагональный ранг. Аналогичное утверждение верно для левого диагонального и бидиагонального ранга. Наличие единицы можно заменить более слабым условием: наличием правой единицы. Теорема 2.6 работы [59] утверждает, что равенство $\operatorname{rdr}(S \times T) = \operatorname{rdr} S \cdot \operatorname{rdr} T$ заведомо выполняется, если каждая из полугрупп S, T удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

1) является бесконечной полугруппой конечного правого диагонального ранга,
2) является конечной полугруппой с правой единицей.

В [59] формулировка этой теоремы несколько другая: вместо наличия правой единицы требуется наличие обратимого слева элемента (элемент a полугруппы A называется обратимым слева, если $Aa = A$), однако для конечных полугрупп наличие правой единицы и наличие обратимого слева элемента — эквивалентные условия.

8.5. Порождающие пары

Для полугрупп S, имеющих циклический диагональный правый или левый полигон интересен вопрос о том, какие из пар $(a, b) \in S \times S$ являются образующими элементами диагонального полигона. Этот вопрос решён в [59] для полугрупп $T(X)$, $P(X)$, $B(X)$, где X — бесконечное множество. Приведём результат для полугруппы $T(X)$.

Теорема 8.4 [59, теоремы 3.1, 3.4]. *Пусть X — бесконечное множество, $S = T(X)$ — полугруппа преобразований и $\alpha, \beta \in T(X)$. Тогда*

1) *пара (α, β) порождает диагональный полигон $(S \times S)_S$ в том и только том случае, если α, β — инъективные отображения и $X\alpha \cap X\beta = \varnothing$;*
2) *пара (α, β) порождает диагональный полигон ${}_S(S \times S)$ в том и только том случае, если α, β — сюръективные отображения и $x\alpha^{-1} \cap y\beta^{-1} \neq \varnothing$ при любых $x, y \in X$.*

Определённая двойственность между случаями 1) и 2) имеет место, так как соответствующие условия можно переписать следующим образом:

1) $\ker\alpha = \ker\beta = \triangle$, $\operatorname{im}\alpha \cap \operatorname{im}\beta = \varnothing$;
2) $\operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta = X$, $\ker\alpha \cdot \ker\beta = \ker\beta \cdot \ker\alpha = \nabla$.

В [69] был поставлен вопрос: существует ли ассоциативное кольцо R, у которого мультипликативная полугруппа имеет правый или левый диагональный ранг, равный 1? Положительный ответ на этот вопрос был получен в [59], а именно кольцо эндоморфизмов бесконечномерного линейного пространства над телом может служить примером такого кольца. Прослеживается явная аналогия между ситуациями, первая из которых имеет дело с полугруппой всех преобразований $X \to X$ бесконечного множества X, а вторая — с полугруппой (даже кольцом) всех линейных преобразований $V \to V$ бесконечномерного линейного пространства X. В обоих случаях полугруппа имеет правый и левый диагональные ранги 1. Формулировки теорем для $T(X)$ и $\operatorname{End} V$ также близки.

Теорема 8.5 [59, теоремы 3.6, 3.7]. *Пусть V — бесконечномерное линейное пространство над телом и $R = \operatorname{End} V$ — кольцо эндоморфизмов этого пространства. Будем рассматривать R как полугруппу с умножением, определённым правилом $v(r_1 r_2) = (vr_1)r_2$, где $v \in V$, а $r_1, r_2 \in R$. Тогда $\operatorname{rdr} R = \operatorname{ldr} R = 1$, причём для любых $\alpha, \beta \in R$ мы имеем*

1) *пара (α, β) порождает диагональный полигон $(R \times R)_R$ в том и только том случае, если $\ker\alpha = \ker\beta = 0$ и $\operatorname{im}\alpha \cap \operatorname{im}\beta = 0$;*

2) *пара* (α, β) *порождает диагональный полигон* ${}_R(R \times R)$ *в том и только том случае, если* $\operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta = V$ *и* $\ker\alpha + \ker\beta = V$.

В связи с описанием образующих элементов некоторых диагональных полигонов возникает вопрос: существует ли полугруппа S, такая что любая пара (a, b) различных элементов $a, b \in S$ является образующим элементом диагонального (би)полигона? Ответ отрицательный для правого и левого полигонов, но положительный для диагонального биполигона.

Теорема 8.6 [10, теоремы 1, 2].

1. *Не существует полугруппы* S, *у которой любая пара* (a, b), *где* $a, b \in S$ *и* $a \neq b$, *порождает полигон* ${}_S(S \times S)$.
2. *Аналогичное утверждение для полигона* $(S \times S)_S$.
3. *Любая полугруппа* S *изоморфно вкладывается в такую полугруппу* T, *что для любой пары* $(a, b) \in T \times T$, *где* $a \neq b$, *имеет место равенство* $T \cdot (a, b) \cdot T = T \times T$.

8.6. Полугруппы изотонных и непрерывных преобразований

Если множество X наделено некоторой математической структурой (например, топологией или отношением частичного порядка или квазипорядка), то естественно рассматривать преобразования $\alpha\colon X \to X$, сохраняющие эту структуру. Так возникают *полугруппа непрерывных преобразований* $C(X)$ и *полугруппа изотонных преобразований* $O(X)$ (отображение $\alpha\colon X \to Y$, где X, Y — частично упорядоченные множества, называется *изотонным*, если для каждых $u, v \in X$ из $u \leqslant v$ следует $u\alpha \leqslant v\alpha$). Эти полугруппы являются подполугруппами полугруппы $T(X)$ всех преобразований. Для частичных преобразований $\alpha \in P(X)$ изотонность (или, более общо, сохранение бинарного отношения σ), может быть определена разными не эквивалентными друг другу способами (см. [37]). Мы выберем следующее определение: частичное преобразование $\alpha \in P(X)$ называется изотонным (или сохраняющим отношение $\leqslant$), если для каждых $u, v \in \operatorname{dom}\alpha$ из $u \leqslant v$ следует $u\alpha \leqslant v\alpha$.

Условия цикличности правых диагональных полигонов над полугруппами изотонных преобразований даются следующей теоремой.

Теорема 8.7 [4, теоремы 3, 4]. *Пусть* X *— частично упорядоченное множество. Тогда*

1) *диагональный полигон* $(O(X) \times O(X))_{O(X)}$ *циклический в том и только том случае, если существуют такие подмножества* $X_1, X_2 \subseteq X$, *что* $X_1 \cong X_2 \cong X$ *и любая пара изотонных отображений* $\alpha\colon X_1 \to X$ *и* $\beta\colon X_2 \to X$ *продолжается до изотонного отображения* $\gamma\colon X \to X$;
2) *диагональный полигон* $\big(PO(X) \times PO(X)\big)_{PO(X)}$ *циклический в том и только том случае, если существуют такие подмножества* $X_1, X_2 \subseteq X$, *что* $X_1 \cong X_2 \cong X$ *и* $x \nleqslant y$ *при* $x \in X_1$, $y \in X_2$ *и* $x \in X_2$, $y \in X_1$.

Заметим, что из условия 1) следует 2), поэтому из $\operatorname{rdr} O(X) = 1$ следует $\operatorname{rdr} PO(X) = 1$. Кроме того, из условия 2) следует, что $X_1 \cap X_2 = \varnothing$.

Условия цикличности левых диагональных полигонов над полугруппами $O(X)$ и $PO(X)$ авторам неизвестны, неизвестны также условия конечной порождённости левого и правого диагональных полигонов над этими полугруппами.

Проблема 8.1. Найти необходимые и достаточные условия цикличности левых диагональных полигонов над полугруппами $O(X)$ и $PO(X)$, где X — частично упорядоченное множество, а также необходимые и достаточные условия конечной порождённости левого и правого диагональных полигонов над этими полугруппами. Тот же вопрос для диагональных биполигонов.

Отдельные результаты, относящиеся к этой проблеме, всё же имеются. Например, условие 2) не может выполняться ни для какой нетривиальной цепи, поэтому для нетривиальной цепи Γ мы имеем $\operatorname{rdr} O(\Gamma), \operatorname{rdr} PO(\Gamma) \neq 1$. Из [4, теорема 2] следует, что $\operatorname{ldr} O(\Gamma), \operatorname{ldr} PO(\Gamma) \neq 1$ для бесконечной цепи Γ.

Из этой теоремы следует, что цикличность полигона $\big(O(X) \times O(X)\big)_{O(X)}$ влечёт цикличность полигона $\big(PO(X) \times PO(X)\big)_{PO(X)}$:

$$\operatorname{rdr} O(X) = 1 \to \operatorname{rdr} PO(X) = 1.$$

Два интересных частных случая частично упорядоченного множества X были рассмотрены в [5]: первый — когда $X \cong X \sqcup X$, второй — когда $X \cong X \times X$. Для формулировки утверждения введём некоторые обозначения. Если $X = X_1 \times X_2$, то пусть $\pi_1 \colon X \to X_1$ и $\pi_2 \colon X \to X_2$ — проекции: $(x_1, x_2)\pi_1 = x_1$, $(x_1, x_2)\pi_2 = x_2$. Полигон $X = X_1 \sqcup X_2$ будем рассматривать как множество пар

$$X_1 \sqcup X_2 = \{(x_1, -), (-, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}.$$

Тогда $\kappa_1 \colon X_1 \to X$ и $\kappa_2 \colon X_2 \to X$ — естественные вложения: $x_1\kappa_1 = (x_1, -)$, $x_2\kappa_2 = (-, x_2)$.

Теорема 8.8 [5]. *Пусть X — частично упорядоченное множество. Тогда*

1) *если $X \cong X \times X$ и $\varphi \colon X \times X \to X$ — изоморфизм, то $\operatorname{rdr} O(X) = 1$, причём $(\varphi^{-1}\pi_1, \varphi^{-1}\pi_2)$ — порождающая пара полигона $(O(X) \times O(X))_{O(X)}$;*
2) *если $X \cong X \sqcup X$ и $\varphi \colon X \sqcup X \to X$ — изоморфизм, то $\operatorname{ldr} O(X) = 1$, причём $(\varphi^{-1}\kappa_1, \varphi^{-1}\kappa_2)$ — порождающая пара полигона ${}_{O(X)}\big(O(X) \times O(X)\big)$;*
3) *утверждения 1), 2) верны также для полигонов над полугруппой $PO(X)$.*

Заметим, что если X — бесконечная антицепь, то $X \cong X \times X \cong X \sqcup X$, поэтому теорему 8.8 можно рассматривать как обобщение уже упоминавшихся теорем о том, что

$$\operatorname{rdr} T(X) = \operatorname{ldr} T(X) = \operatorname{rdr} P(X) = \operatorname{ldr} P(X) = 1.$$

Для цепи $\mathbb{N}$ (с обычным порядком) доказано следующее.

Теорема 8.9 [6, теорема 1]. *Диагональный биполигон* ${}_{O(\mathbb{N})}\big(O(\mathbb{N})\times O(\mathbb{N})\big)_{O(\mathbb{N})}$ *не имеет счётной системы образующих.*

Пусть X — топологическое пространство и $C(X)$ — полугруппа непрерывных отображений $X \to X$. Эта полугруппа является обобщением полугруппы $O(X)$ изотонных преобразований, так как на частично упорядоченном множестве X можно определить топологию

$$\mathcal{T} = \{U_A \mid A \subseteq X\},$$

где

$$U_A = \{x \in X \mid \text{найдётся } y \in A, \text{ такой что } x \leqslant y\},$$

и будет выполнено равенство $(C(X), \mathcal{T}) = (O(X), \leqslant)$.

Если X — компакт и полигон $(O(X)\times O(X))_{O(X)}$ циклический, то, взяв образующий (α, β) этого полигона, мы получим, что α, β — непрерывные инъективные отображения, а значит, $X\alpha$ и $X\beta$ — компакты, гомеоморфные компакту X. Не всякий компакт содержит два непересекающихся компактных подмножества, гомеоморфных самому компакту. Например, этим свойством не обладает компакт $X = \{0, 1, 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots\}$, рассматриваемый как подпространство числовой прямой. Для отрезка числовой прямой верно следующее утверждение.

Теорема 8.10 [59, теорема 2.1]. *Если* $X = [a, b]$ *— отрезок числовой прямой с обычной топологией, то* $\operatorname{rdr} C(X) = 1$, $\operatorname{ldr} C(X) = 2^{\aleph_0}$.

Проблема 8.2. Охарактеризовать компакты X, для которых $\operatorname{rdr} C(X) = 1$. Для каких компактов $\operatorname{ldr} C(X) < \infty$?

8.7. Полугруппы с тождеством

В [68] была доказана импликация

$$\operatorname{bdr} S < \infty \to |S| < \infty.$$

для коммутативных, а также для идемпотентных полугрупп S (см. [68, теоремы 6.1, 6.4]). Отсюда следует, что коммутативная или идемпотентная полугруппа, имеющая конечный диагональный (правый или левый) ранг, конечна. Существенным обобщением этого утверждения является следующее.

Теорема 8.11 [59, теорема 4.8]. *Полугруппа конечного* (*правого или левого*) *диагонального ранга, удовлетворяющая какому-либо нетривиальному полугрупповому тождеству, конечна.*

Проблема 8.3. Будет ли конечной полугруппа S, удовлетворяющая нетривиальному полугрупповому тождеству и условию $\operatorname{bdr} S = 1$? Будет ли конечной мультипликативная полугруппа S ассоциативного кольца R, если $\operatorname{rdr} S < \infty$, а R удовлетворяет полиномиальному тождеству?

8.8. Обобщения групп и конечных полугрупп

На рис. 1 изображена схема включений друг в друга разных классов полугрупп, обобщающих группы и конечные полугруппы. Для полугрупп этих классов рассмотрим диагональные полигоны и некоторые условия их конечной порождённости и цикличности. Если G — группа (конечная или бесконечная) и e — её единица, то множество $\{(e, g) \mid g \in G\}$, как нетрудно проверить, является неприводимым порождающим множеством правого диагонального полигона $(G \times G)_G$, а также левого диагонального полигона ${}_G(G \times G)$, а так как неприводимые порождающие множества любого полигона имеют одинаковую мощность (см. раздел 2.3), то $\operatorname{rdr} G = \operatorname{ldr} G = |G|$. В [69, теорема 5.1] доказано, что бидиагональный ранг $\operatorname{bdr} G$ группы G равен количеству классов сопряжённых элементов этой группы. Поэтому $\operatorname{bdr} G < \infty$ в том и только том случае, если группа G содержит лишь конечное число классов сопряжённых, а $\operatorname{bdr} G = 1$ тогда и только тогда, когда $|G| = 1$.

В [68, теорема 7.4] доказывается, что инверсная полугруппа конечного правого (или левого) ранга конечна. Это утверждение не распространяется на регулярные полугруппы, так как, например, полугруппа $T(X)$ имеет левый и правый диагональные ранги 1, хотя является регулярной для любого множества X, конечного или бесконечного.

В табл. 1 представлены результаты о существовании (да) или несуществовании (нет) полугруппы с заданными свойствами, принадлежащей заданному классу.

В [59, теорема 4.9] доказывается, что для бесконечной эпигруппы S $\operatorname{bdr} S > 1$, а значит, это неравенство выполняется также для бесконечных периодических и бесконечных локально конечных полугрупп.

Замечательный пример С. В. Иванова (см. [47, теорема 41.2]) представляет собой бесконечную группу, все неединичные элементы которой имеют порядок p, где p — достаточно большое простое число, имеющую лишь конечное число сопряжённых классов. Понятно, что в этой группе выполняется тождество $x^p = 1$ и она имеет конечный бидиагональный ранг. Она даёт ответ «Да» во многих клетках последнего столбца таблицы: для вполне простых, вполне регулярных, инверсных, регулярных полугрупп и эпигрупп это получается автоматически (на основе схемы включений), для вполне 0-простых достаточно к группе из примера Иванова присоединить 0, а для периодических это происходит, так как в примере Иванова группа периодическая. Пример Иванова, однако, не позволяет дать утвердительный ответ на вопрос о существовании бесконечной локально конечной полугруппы S с $\operatorname{bdr} S < \infty$, так как группа из примера Иванова не является локально конечной. Отрицательный ответ на этот вопрос был получен в [79, теорема 1]. Для доказательства упомянутой теоремы предварительно было доказано, что не существует бесконечной локально конечной группы с конечным числом классов сопряжённых. Доказательство использовало классификацию конечных простых групп [96].

Таблица 1. Сводка результатов

Полугруппа S	$\lvert S\rvert > 1$ $\operatorname{rdr} S = 1$	$\lvert S\rvert = \infty$ $\operatorname{rdr} S < \infty$	$\lvert S\rvert > 1$ $\operatorname{bdr} S = 1$	$\lvert S\rvert = \infty$ $\operatorname{bdr} S < \infty$
Коммутативная	Нет	Нет	Нет	Нет
Идемпотентная	Нет	Нет	Нет	Нет
С тождеством	Нет	Нет	???	Да
Инверсная	Нет	Нет	Да	Да
Вполне регулярная	Нет	Нет	Нет	Нет
Вполне простая	Нет	Нет	Нет	Да
Вполне 0-простая	Нет	Нет	Нет	Да
Группа	Нет	Нет	Нет	Да
Сократимая	Нет	Нет	Нет	Да
Сократимая справа	Нет	Нет	Да	Да
Сократимая слева	Нет	Нет	Да	Да
Эпигруппа	Нет	Нет	Нет	Да
Периодическая	Нет	Нет	Нет	Да
Локально конечная	Нет	Нет	Нет	Нет
Инвариантная справа	Нет	Нет	Да	Да
Инвариантная слева	Нет	Нет	Да	Да

8.9. Сократимые и инвариантные полугруппы

Полугруппа S называется *сократимой слева* (*сократимой справа*), если для каждых $a, b, c \in S$ $ca = cb$ влечёт $a = b$ (соответственно для каждых $a, b, c \in S$ $ac = bc$ влечёт $a = b$). Полугруппа S *сократима*, если она сократима слева и справа. В [68, теоремы 7.1, 7.3] было доказано, что для любой полугруппы S если S сократима справа и $\operatorname{rdr} S < \infty$, то $|S| < \infty$, и если S сократима слева и $\operatorname{rdr} S < \infty$, то $|S| < \infty$. Кроме того, в лемме 5 той же работы было доказано, что если S сократима и $\operatorname{bdr} S < \infty$, то $|S| < \infty$. П. Галлагером в [68] был поставлен вопрос: можно ли в этой импликации ослабить требование сократимости до односторонней сократимости? Оказалось, что нет: в [7, теорема 1] был построен пример бесконечной сократимой справа полугруппы S, у которой $\operatorname{bdr} S = 1$.

Обобщением коммутативных полугрупп являются инвариантные (слева или справа) полугруппы. Полугруппа S называется *инвариантной слева*, если любой её левый идеал является двусторонним. Это равносильно тому, что для каждых $a, x \in S$ найдётся $y \in S^1$, такой что $ax = ya$. Двойственным образом определяются *инвариантные справа* полугруппы: для каждых $a, x \in S$ найдётся $y \in S^1$, такой что $xa = ay$. Как уже говорилось, бесконечная коммутативная полугруппа имеет бесконечный диагональный ранг. Обобщением этого результата является следующая теорема.

Теорема 8.12 [8, теоремы 1, 3]. *Если S — бесконечная инвариантная слева или справа полугруппа, то* $\mathrm{rdr}\, S = \mathrm{ldr}\, S = \infty$.

Так как простая слева/справа полугруппа является инвариантной слева/справа, то для простой слева или справа полугруппы также справедлива импликация $\mathrm{rdr}\, S < \infty \to |S| < \infty$.

Для бидиагональных рангов ситуация прямо противоположная. Предложение 1 из [8] состоит в построении примера бесконечной простой справа (а значит, инвариантной справа) сократимой справа полугруппы S, такой что $\mathrm{bdr}\, S = 1$. Кроме того, для бесконечной инвариантной слева полугруппы S, удовлетворяющей условию $\mathrm{bdr}\, S < \infty$, доказано разложение полугруппы S в дизъюнктное объединение $S = A \cup N$, где A — бесконечная простая слева подполугруппа, а N — идеал или пустое множество, причём в случае когда $\mathrm{bdr}\, S \leqslant 2$, $N = \varnothing$, а значит, S — простая справа полугруппа.

8.10. Плоскостные свойства диагональных полигонов

Полигон X над моноидом S называется *плоским*, если для любого мономорфизма $\alpha\colon A \to B$ левых S-полигонов A, B гомоморфизм $1 \otimes \alpha\colon X \otimes A \to X \otimes B$ также является мономорфизмом. Полигон X (*главно*) *слабо плоский*, если это условие выполнено при $A = {}_S I$, где I — (главный) левый идеал, $B = {}_S S$.

В [63] исследуются связи между этими понятиями для диагональных полигонов и вопрос о том, когда диагональный полигон является свободным, проективным, ((главно) слабо) плоским и т. д.

Теорема 8.13 [63, предложение 5]. *Пусть S — моноид. Диагональный полигон $(S \times S)_S$ является слабо плоским в том и только том случае, если он главно слабо плоский и для любых $a, b \in S$ существует $c \in S$, для которого $Sa \cap Sb \subseteq (Sa \cap Sb)c$.*

Теорема 8.14 [63, теорема 6]. *Пусть S — полугруппа всех инъективных отображений $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых $|\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}\alpha| = |\mathbb{N}|$ с умножением слева направо. Тогда полигон $(S^1 \times S^1)_{S^1}$ главно слабо плоский, но не слабо плоский.*

Полугруппа S этой теоремы известна под названием полугруппы Бэра—Леви [18, § 8.1].

Теорема 8.15 [63, предложения 7, 10, 25, 26].

1. *Если $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ или $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ (S — вполне простая или вполне 0-простая полугруппа), то полигон $(S^1 \times S^1)_{S^1}$ плоский.*
2. *Если S — инверсный моноид, то полигон $(S \times S)_S$ плоский.*

3. *Если S — вполне простая или вполне 0-простая полугруппа, то полигон $(S \times S)_{S^1}$ плоский.*

В [66] получены условия того, что для данного моноида S полигон $(S \times S)_S$ будет главно слабо плоским.

8.11. Диагональные ранги конечных полугрупп

Диагональный ранг конечной полугруппы является её интересной числовой характеристикой. Очевидно, что если S — полугруппа и $|S| = n$, то $n \leqslant \operatorname{rdr} S \leqslant n^2$. Пусть $M(S)$ — неприводимая система образующих правого диагонального полигона $(S \times S)_S$. По теореме Карташова (см. подраздел 2.3) все неприводимые системы образующих полигона равномощны, поэтому вычислить (правый, левый, би-) диагональный ранг полугруппы можно, например, выписав какую-либо неприводимую систему образующих соответствующего диагонального полигона. Это нетрудно сделать для полугрупп простого строения. В частности, имеет место следующее утверждение.

Предложение 8.1. *Пусть S — полугруппа и $|S| = n < \infty$. Тогда*

$$\operatorname{rdr} S = \begin{cases} n, & \text{если } S \text{ — группа}, \\ n^2, & \text{если } S \text{ — полугруппа левых нулей}, \\ n^2 - n, & \text{если } S \text{ — полугруппа правых нулей}, \\ n^2 - 1, & \text{если } S \text{ — полугруппа с нулевым умножением}. \end{cases}$$

Обратные импликации имеют более сложный вид. В случае минимального ранга для полугруппы S порядка n $\operatorname{rdr} S = n$ в том и только том случае, если S либо группа, либо двухэлементная полугруппа правых нулей, либо $S = \{e, a, b\}$, где $ex = x$ при всех x и $Sa = Sb = \{b\}$ [11, теорема 4].

Максимальный ранг $\operatorname{rdr} S = n^2$, как нетрудно доказать, имеют полугруппы левых нулей и только они. Полугруппы предмаксимального ранга описывает следующая теорема.

Теорема 8.16. *Пусть S — конечная полугруппа и $|S| = n \geqslant 2$. Тогда $\operatorname{rdr} S = n^2 - 1$ в том и только том случае, если S имеет нуль, $S = S_1 \cup S_2$ и*

$$xy = \begin{cases} x & \text{при } x \in S,\ y \in S_1, \\ 0 & \text{при } x \in S,\ y \in S_2. \end{cases} \tag{9}$$

При этом множество S_1 может быть пустым.

Доказательство. Достаточность очевидна, докажем необходимость. Пусть $M(S)$ — какая-либо неприводимая система образующих полигона $(S \times S)_S$. По условию $|M(S)| = (S \times S) \setminus \{(a, b)\}$ при некоторых $a, b \in S$. Докажем, что $a = b$. Пусть $a \neq b$. Так как $(a, b) \notin M(S)$, то $(a, b) = (c, d) \cdot s$ и $(d, c) \notin (a, b)S^1$ для некоторых c, d, поэтому $(b, a) \notin M(S)$, а значит, $|(S \times S) \setminus M(S)| \geqslant 2$, что противоречит условию. Таким образом, $a = b$ и $M(S) = (S \times S) \setminus \{(a, a)\}$. Докажем, что a — правый нуль. Пусть это не так. Тогда $sa \neq a$ при некотором s. Взяв любое $c \neq a$, будем иметь $(a, c) \cdot s = (as, cs) \neq (a, c)$, поэтому $(as, cs) \notin M(S)$, а значит, $(as, cs) = (a, a)$, что невозможно. Итак, a — правый нуль. Докажем, что a — нуль. Пусть это не так. Тогда $sa \neq a$ при некотором s. Ясно, что $s \neq a$. Так как $(s, s) \cdot a = (sa, sa) \neq (a, a)$, то $sa = s$. Взяв любое $x \in S$, получим $sx = sax = sa \neq a$. Докажем, что $xy \in \{x, a\}$ для любых $x, y \in S$. Пусть $xy \neq a$. Тогда $x \neq a$, откуда получаем, что $(x, a)y = (xy, a) \neq (a, a)$, а значит, $xy = x$. Если $xy = x$ для всех $x, y \in S$, то S — полугруппа левых нулей, а значит, $\operatorname{rdr} S = n^2$, что противоречит условию. Таким образом, $xy \neq x$ при некоторых x, y. Возьмём любые x, y, для которых $xy \neq x$. Тогда $xy = a$. Имеем $(x, s)y = (xy, sy) = (a, s) \neq (x, s)$, откуда следует, что $(a, s) \notin M(S)$, поэтому $s = a$, что неверно. Итак, a — нуль полугруппы S. Будем обозначать его символом 0. Пусть $xy = 0$ для каких-либо $x, y \neq 0$. Возьмём любое $t \in S$. Так как $(x, t)y = (0, ty) \neq (x, t)$, то $(0, ty) \in M(S)$, а значит, $ty = 0$. Ввиду произвольности элемента t получаем $Sy = 0$. Положим $S_2 = \{y \mid Sy = 0\}$, $S_1 = S \setminus S_2$. Теперь ясно, что (9) будет выполнено. $\square$

В [11] были вычислены диагональные ранги (правый и левый) конечных простых и 0-простых полугрупп. Ввиду теоремы Сушкевича—Риса [18, теорема 3.3] и с учётом следствия 2.56 и замечания перед леммой 3.1 в [18] эти полугруппы изоморфны рисовским матричным полугруппам $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Оказалось, что ранг полугруппы $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ не зависит от того, какими элементами заполнена сэндвич-матрица P, а только от размеров этой матрицы и порядка группы G, а ранг полугруппы $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ зависит ещё и от расположения нулевых элементов в сэндвич-матрице P.

Теорема 8.17 [11, теорема 2]. *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — конечная вполне простая полугруппа, $|I| = k$, $|\Lambda| = l$, $|G| = t$. Тогда*

$$\operatorname{rdr} S = \begin{cases} k^2 t & \text{при } l = 1, \\ k^2 t^2 l(l-1) & \text{при } l > 1. \end{cases}$$

Теорема 8.18 [11, теорема 3]. *Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — конечная вполне 0-простая полугруппа, $|I| = k$, $|\Lambda| = l$, $|G| = t$. Тогда при $l \geqslant 2$*

$$\operatorname{rdr} S = \begin{cases} k^2 t^2 (l^2 - l) + 2k, & \text{если в матрице } P \text{ нет нулей}, \\ k^2 t^2 (l^2 - l) + k^2 t, & \text{если в каждом столбце матрицы } P \\ & \text{не более одного ненулевого элемента}, \\ k^2 t^2 (l^2 - l) & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Если $l = 1$, то $\operatorname{rdr} S = k^2 t + 2k$.

Бидиагональные ранги вполне (0-)простых полугрупп были вычислены в [61].

9. Дополнительные разделы теории полигонов

9.1. Полигоны, над которыми все эквивалентности являются конгруэнциями

Операция $f(x_1,\ldots,x_n)$ на алгебре A назовём *константой*, если $|f(A,\ldots,A)|=1$, и *проекцией*, если существует такое i, что $f(a_1,\ldots,a_n)=a_i$ для всех $a_1,\ldots,a_n\in A$. Алгебры A, у которых $\operatorname{Con} A=\operatorname{Eq} A$, могут быть легко описаны, как показывает следующая теорема.

Теорема 9.1 [31, теорема 3.3]. *Пусть A — универсальная алгебра с сигнатурой Σ. Все отношения эквивалентности на алгебре A являются её конгруэнциями в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $|A|\leqslant 2$;
2) *каждая операция $f\in\Sigma$ является константой или проекцией.*

Применительно к полигонам мы получаем следующее утверждение.

Следствие. *Пусть X — полигон над полугруппой S. Тогда равенство $\operatorname{Con} X=\operatorname{Eq} X$ имеет место в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $|X|\leqslant 2$;
2) *для каждого $s\in S$ либо $xs=x$ для всех $x\in X$, либо $|Xs|=1$.*

9.2. Хопфовость и кохопфовость в полигонах над группами

Универсальная алгебра A называется *хопфовой*, если всякий сюръективный эндоморфизм $\varphi\colon A\to A$ является автоморфизмом. Алгебра A *кохопфова*, если любой инъективный эндоморфизм $\varphi\colon A\to A$ является автоморфизмом. Ясно, что хопфовость и кохопфовость являются условиями конечности. Хопфовость интенсивно изучалась в группах: см. [40, § Д3, Д4, Д15]. В. К. Карташов доказал [16, теорема 2], что все конечно порождённые коммутативные полигоны над полугруппой являются хопфовыми. Далее мы увидим, что аналогичное утверждение верно для унитарных полигонов над группами.

Заметим, что если копроизведение $\coprod\limits_{i\in I} X_i$ полигонов X_i хопфово, то каждый X_i также хопфов. Обратное утверждение неверно: примером может служить копроизведение бесконечного числа изоморфных друг другу полигонов.

Проблема 9.1. Верно ли, что копроизведение двух хопфовых полигонов является хопфовым?

Из дальнейшего будет видно, что проблема решается положительно для унитарных полигонов над группами.

Следующее утверждение отражает свойства гомоморфизмов унитарных циклических полигонов над группой. Доказательства не представляют сложности.

Предложение 9.1 [23]. *Пусть H_1, H_2 — подгруппы группы G. Тогда*

1) *гомоморфизм $\varphi\colon G/H_1 \to G/H_2$, если он существует, имеет вид $\varphi(H_1g) = H_2ag$ при некотором $a \in G$ и всех $g \in G$; существование гомоморфизма равносильно включению $H_1 \subseteq a^{-1}H_2a$;*
2) *гомоморфизм $\varphi\colon G/H_1 \to G/H_2$, если существует, всегда сюръективен; гомоморфизм $\varphi\colon H_1g \mapsto H_2ag$ инъективен в том и только том случае, если $H_1 \subseteq a^{-1}H_2a$.*

Предложение 9.2 [23]. *Унитарный циклический полигон G/H хопфов в том и только том случае, если для каждого $a \in G$ $H \subseteq a^{-1}Ha$ влечёт $H = a^{-1}Ha$.*

Как отмечено в подразделе 3.1, произвольный унитарный полигон X над группой G изоморфен копроизведению $\coprod\limits_{i\in I} X_i$, где $X_i \cong G/H_i$. Пусть $\mathcal{H} = \{H_i \mid i \in I\}$ — семейство подгрупп группы G, определяющее полигон X. Положим $H_i \preccurlyeq H_j$, если существует $a \in G$, такое что $H_i \subseteq a^{-1}H_ja$. Ясно, что $\preccurlyeq$ — отношение квазипорядка. Необходимое и достаточное условие хопфовости унитарного полигона даёт следующая теорема.

Теорема 9.2 [23]. *Пусть X — унитарный полигон над группой G, $X = \coprod\limits_{i\in I} X_i$, где $X_i \cong G/H_i$. Тогда полигон X хопфов, если и только если выполняются следующие условия:*

1) *каждое G/H_i хопфово;*
2) *множество $\mathcal{H}$ не содержит последовательностей*

$$\ldots \preccurlyeq H_{i_{-n}} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq H_{i_{-1}} \preccurlyeq H_{i_0}.$$

Если X — произвольный полигон над группой G (не обязательно унитарный), то он имеет унитарную часть $Y = XG \cong \coprod\limits_{i\in I} (G/H_i)$ и определяется по Y отображением $\mu\colon X \setminus Y \to YG$ (см. подраздел 2.2). В [23] отмечено, что если полигон X хопфов, то $|\mu^{-1}(x)| < \infty$ для каждого элемента $x \in Y$.

Произвольный (не обязательно унитарный) полигон X над группой может быть представлен в виде $X = \coprod\limits_{i\in I} W_i$, где $W_iS \cong G/H_i$ (W_i — компоненты связности). Необходимым условием конечной порождённости этого полигона является выполнение неравенства $|I| < \infty$.

Предложение 9.3 [23]. *Конечно порождённый полигон $X = \coprod\limits_{i\in I} W_i$ над группой G хопфов в том и только том случае, если каждая W_i хопфова.*

Пусть $X = \coprod\limits_{i\in I} (G/H_i)$ — унитарный полигон над группой, и пусть квазипорядок $\preccurlyeq$ имеет тот же смысл, что выше. Определим на множестве $\mathcal{H}$ отношение эквивалентности $\sim$, полагая

$$H_i \sim H_j \leftrightarrow (H_i \preccurlyeq H_j \ \&\ H_j \preccurlyeq H_i).$$

Теорема 9.3 [23]. *Унитарный полигон* $X = \coprod_{i \in I} (G/H_i)$ *над группой* G *кохопфов в том и только том случае, если все классы* $\sim$*-эквивалентности множества* $\mathcal{H}$ *конечны.*

Проблема 9.2. Охарактеризовать хопфовы и кохопфовы полигоны над группой, не обязательно унитарные.

9.3. Канторовы и коканторовы полигоны над группами

Хорошо известная теорема Кантора—Бернштейна—Шрёдера [15, гл. 2, теорема 5] утверждает, что для любых множеств A и B если существуют инъективные отображения $A \to B$ и $B \to A$, то существует взаимно-однозначное отображение $A \to B$. Естественно спросить, будет ли это утверждение верным для универсальных алгебр, если вместо произвольных отображений рассматривать гомоморфизмы, т. е. верно ли, что если алгебры A и B изоморфно вкладываются друг в друга, то они изоморфны? В общем случае ответ отрицательный: скажем, свободные группы рангов 2 и 3 изоморфно вкладываются друг в друга, но не изоморфны. Однако существуют классы алгебр, для которых ответ на поставленный вопрос положительный: например, конечно порождённые абелевы группы и линейные пространства над телом.

Назовём алгебру A *канторовой*, если для любой алгебры B той же сигнатуры наличие изоморфных вложений $A \to B$ и $B \to A$ влечёт изоморфизм алгебр A и B. Нетрудно видеть, что алгебра A канторова в том и только том случае, если для любых подалгебр A_1, A_2, таких что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$, изоморфизм $A_1 \cong A$ влечёт изоморфизм $A_2 \cong A$.

Двойственным образом определяются *коканторовы* алгебры, т. е. такие алгебры, что для любой алгебры B той же сигнатуры наличие сюръективных гомоморфизмов $A \to B$ и $B \to A$ влечёт изоморфизм алгебр A и B.

Очевидно, канторовость и коканторовость алгебр являются условиями конечности. В случае полигона над группой мы имеем следующую теорему.

Теорема 9.4 [54]. *Всякий унитарный полигон над группой является канторовым.*

Нетрудно построить неунитарный полигон над группой, не являющийся канторовым.

Что касается коканторовости, то этим свойством обладают даже не все унитарные циклические полигоны G/H.

Проблема 9.3. Найти условия канторовости неунитарного полигона над группой, а также условия коканторовости произвольного полигона над группой.

В [32] получены необходимые и достаточные условия канторовости полигона над полурешёткой, если все компоненты связности полигона конечны.

9.4. Моноиды с условием на связные полигоны

Напомним, что реверсивная слева полугруппа — это такая полугруппа S, у которой $aS \cap bS \neq \varnothing$ для любых $a, b \in S$.

Пусть S — моноид, I — множество, I^S — множество всех отображений $f\colon S \to I$. *Косвободным* S-полигоном называется множество I^S со следующим умножением на элементы из S: $(fs)(t) = f(st)$ $(f \in I^S,\ s, t \in S)$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 9.5 [92, предложения 2.1, 2.3, 2.4]. *Для любого моноида S следующие условия эквивалентны*:

1) *S реверсивен слева*;
2) *для любого связного S-полигона X выполняется условие, что для каждых $x, y \in X$ справедливо $xS \cap yS \neq \varnothing$*;
3) *всякий связный S-полигон имеет не более одного нуля*;
4) *всякий подполигон связного S-полигона связен*;
5) *все нетривиальные косвободные S-полигоны несвязны.*

Теорема 9.6 [92, теорема 3.2]. *Для любого моноида S эквивалентны следующие условия*:

1) *конечные произведения связных S-полигонов связны*;
2) *конечные произведения циклических S-полигонов связны*;
3) *S^n связен для каждого $n \in \mathbb{N}$*;
4) *S^n связен для некоторого $n \neq 1$.*

Теорема 9.7 [92, теорема 3.9]. *Для любого моноида S эквивалентны следующие условия*:

1) *произведения любых связных S-полигонов связны*;
2) *S имеет правый нуль.*

10. Частичные полигоны

В теории частичных алгебр особую важность имеет вопрос о том, может ли частичная операция на множестве A быть продолжена до полной так, чтобы сохранялись те или иные свойства. Различают *внутреннее* и *внешнее* продолжения. При первом множество A сохраняется, при втором может расшириться (см. [43]). Примером внешнего продолжения может служить присоединение единицы или нуля. В этом разделе, однако, мы будем рассматривать только внутренние продолжения. Кроме того, мы будем требовать выполнения тождеств.

Пусть $\Sigma = \{f_i \mid i \in I\}$ — сигнатура (совокупность символов операций). Множество A называется *частичной алгеброй* сигнатуры Σ, если каждому символу $f \in \Sigma$ поставлена в соответствие частичная операция на A той же арности, что f (её мы также будем обозначать символом f). Пусть $u(x_1, \ldots, x_n)$,

$v(x_1, \ldots, x_n)$ — термы сигнатуры Σ. Будем говорить, что на частичной алгебре A выполнено тождество $u = v$, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ элементы $u(a_1, \ldots, a_n)$, $v(a_1, \ldots, a_n)$ либо оба не существуют, либо существуют и равны друг другу.

Будем брать продолжения в частичных алгебрах частичных операций до полных, в которых выполнены соответствующие тождества. Таким образом возникают частичные полугруппы — в них выполнено тождество ассоциативности $(ab)c = a(bc)$, частичные полигоны — они определяются тождеством $x(st) = (xs)t$.

Гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ частичных алгебр одной сигнатуры Σ — это такое отображение, что $\varphi\big(f(a_1, \ldots, a_n)\big) = f\big(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)\big)$ для всех $f \in \Sigma$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, где равенство понимается, как и раньше: левая и правая части либо обе не существуют, либо равны друг другу. Инъективные и проективные частичные алгебры определяются обычным образом. Инъективность и продолжаемость операций неожиданно оказались связанными друг с другом: так, в [39, теорема 22] было доказано, что если частичная алгебра A инъективна, то частичные операции на A продолжаются до полных с сохранением всех тождеств, выполнявшихся в A. В частности, это верно для частичных инъективных полигонов.

Кроме того, в [39] были найдены условия продолжаемости операций в частичных полигонах над полурешётками. Напомним, что на всякой полурешётке S имеется естественный частичный порядок $\leqslant$, определяемый соотношением

$$a \leqslant b \leftrightarrow a \in bS.$$

Нетрудно показать, что на частичном полигоне X над полурешёткой S отношение $\leqslant$, определяемое условием

$$x \leqslant y \leftrightarrow x \in yS^1,$$

является отношением частичного порядка. Простое достаточное условие на полигон, обеспечивающее продолжаемость его частичных операций до полных, даёт следующая теорема.

Теорема 10.1 [39, теорема 11]. *Пусть X — частичный полигон над полурешёткой S. Если в X есть хотя бы один минимальный элемент (т. е. такой элемент x_0, что $x_0S \subseteq \{x_0\}$), то частичные операции на X продолжаются до полных.*

Отсюда следует, что операции продолжаются также в следующих случаях:

1) если X удовлетворяет условию минимальности (т. е. обрыва убывающих цепей элементов),
2) если X конечный.

Допуская вольность речи, будем говорить о продолжаемости частичного полигона до полного, имея в виду продолжаемость частичных операций до полных. Нетрудно показать, что если полурешётка S удовлетворяет условию минимальности, то любой частичный полигон над S также удовлетворяет условию минимальности. Поэтому над полурешёткой с условием минимальности любой частичный полигон продолжается до полного.

Проблема 10.1. Найти необходимые и достаточные условия на полурешётку S, чтобы для *любого* полигона над S частичная операция на X продолжалась до полной.

Необходимое условие на полурешётку S даёт следующая теорема.

Теорема 10.2 [39, теорема 18]. *Пусть S — полурешётка. Если любой частичный S-полигон продолжается до полного, то S не имеет строго убывающих ограниченных снизу последовательностей элементов.*

Данное условие не является достаточным, так как, скажем, полурешётка $S = \{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$, где $s_0 > s_1 > s_2 > \ldots$, обладает свойством, что любой частичный полигон над ней продолжается до полного. Докажем это. Пусть X — S-полигон. Если в нём есть минимальный элемент, то X продолжается до полного по теореме 10.1. Далее будем считать, что X не имеет минимальных элементов. Тогда X уже является полным, как показывают следующие рассуждения. Возьмём любой элемент $x \in X$. Так как x не минимальный, то существует бесконечная последовательность $x > xs_{i_1} > xs_{i_1}s_{i_2} > \ldots$. Нетрудно проверить, что $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ и $x > xs_{i_1} > xs_{i_2} > \ldots$. Возьмём любое $i \geqslant 0$. Очевидно, $i \leqslant i_k$ при некотором k. Мы имеем, что $s_i s_{i_k} = s_{i_k}$. Так как произведение xs_{i_k} существует, то существует произведение $x(s_i s_{i_k})$, а значит, и произведение xs_i.

Отметим ещё один результат о продолжаемости полигонов, но уже не над полурешётками, а над другими классами полугрупп.

Теорема 10.3 [22]. *Если полугруппа S представима в виде объединения своих правых идеалов, являющихся простыми справа полугруппами, то любой частичный S-полигон продолжается до полного.*

Следствие. *Любой частичный полигон над вполне простой полугруппой* (*а значит, и любой частичный полигон над группой*) *продолжается до полного.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-11-50098.

Литература

[1] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп / Под ред. М. Арбиба. — М.: Статистика, 1975.

[2] Алёшин С. В. Автоматы в алгебре // Фундамент. и прикл. матем. — 2002. — Т. 15, вып. 3. — С. 23—32.

[3] Алёшин С. В. Алгебраические системы автоматов. — М.: МАКС Пресс, 2016.

[4] Апраксина Т. В. Диагональные полигоны над полугруппами преобразований // Чебышёвский сб. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 10—16.

[5] Апраксина Т. В. Цикличность и конечнопорождённость полигонов над полугруппами преобразований // Матем. вестн. педвузов и унив. Волго-Вятского региона. — 2012. — Вып. 14. — С. 51—57.

[6] Апраксина Т. В. О системах образующих диагональных полигонов над полугруппами изотонных и непрерывных преобразований // Прикл. дискретн. матем. — 2014. — Т. 26, № 4. — С. 5—12.

[7] Апраксина Т. В., Барков И. В., Кожухов И. Б. Два примера диагональных биполигонов // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 3. — С. 3—9.

[8] Апраксина Т. В., Кожухов И. Б. Замечания о диагональных полигонах инвариантных полугрупп // Вестн. МГОУ. Сер. Физика—Математика. — 2015. — № 1. — С. 22—31.

[9] Апраксина Т. В, Максимовский М. Ю. Полигоны и частичные полигоны над полурешётками // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 3—7.

[10] Барков И. В., Кожухов И. Б. О порождающих множествах диагональных полигонов // Электрон. информ. сист. — 2015. — № 3 (6). — С. 101—104.

[11] Барков И. В., Шакиров Р. Р. Конечные полугруппы минимального ранга // Матем. вестн. педвузов и унив. Волго-Вятского региона. — 2014. — Вып. 16. — С. 54—62.

[12] Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука, 1997.

[13] Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов // УМН. — 1961. — Т. 16, № 5 (101). — С. 3—62.

[14] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[15] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М.: Наука, 1987.

[16] Карташов В. К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр // Дискретн. матем. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 79—84.

[17] Карташов В. К. О некоторых результатах и нерешённых задачах теории унарных алгебр // Чебышёвский сб. — 2011. — Т. 12, № 2. — С. 18—26.

[18] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1972.

[19] Кожухов И. Б. Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 135—1344.

[20] Кожухов И. Б. Условия конечности для подпрямо неразложимых полигонов и модулей // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 2. — С. 763—767.

[21] Кожухов И. Б. Коммутативные полугруппы с ограничениями на подпрямо неразложимые полигоны // Информатика и кибернетика. — В печати.

[22] Кожухов И. Б., Кожухова Ю. И. О продолжениях частичных полигонов // Матер. 16-й Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». — Н. Новгород, 2011. — С. 207—209.

[23] Кожухов И. Б., Колесникова К. А. О хопфовости и кохопфовости полигонов над группами // Фундамент. и прикл. матем. — 2020. — Т. 23, вып. 3. — С. 131—139.

[24] Кожухов И. Б., Михалёв А. В. Полигоны над полугруппами, унарные алгебры и автоматы // Информатика и кибернетика. — 2019. — № 2 (16). — С. 96—100.

[25] Кожухов И. Б., Петриков А. О. Инъективные и проективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой // Чебышёвский сб. — 2016. — Т. 17, № 4. — С. 65—78.

[26] Кожухов И. Б., Петриков А. О. Подпрямо неразложимые полигоны над прямоугольными группами // Электрон. информ. сист. — 2017. — № 2. — С. 101—109.

[27] Кожухов И. Б., Петриков А. О. Проективные и инъективные полигоны над вполне простыми полугруппами // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 1. — С. 123—133.

[28] Кожухов И. Б., Пряничников А. М. Полигоны с тождествами в решётке конгруэнций. — В печати.

[29] Кожухов И. Б., Пряничников А. М., Симакова А. Р. Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой // Изв. РАН. Сер. матем. — 2020. — Т. 84, № 2. — С. 90—125.

[30] Кожухов И. Б., Ревякин А. М. Пример полигона, не являющегося биполигоном // Матер. 15-го Міжвуз. наук.-практ. сем. «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (12—13 квітня 2013 р.). — Кіровоград: ДЛАУ, 2013. — С. 55—58.

[31] Кожухов И. Б., Решетников А. В. Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 3. — С. 161—192.

[32] Кожухов И. Б., Сотов А. С. Об условиях канторовости полигонов над полурешёткой. — В печати.

[33] Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. Инъективность и проективность полигонов над сингулярными полугруппами // Электрон. информ. сист. — 2014. — № 2 (2). — С. 45—56.

[34] Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами // Матем. заметки СВФУ. — 2014. — Т. 21, № 3 (83). — С. 60—67.

[35] Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. Характеризация подпрямо неразложимых полигонов // Прикл. дискрет. матем. — 2015. — № 1 (27). — С. 5—16.

[36] Кожухов И. Б., Царёв А. В. Абелевы группы с финитно аппроксимируемыми полигонами // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 5. — С. 81—89.

[37] Кожухов И. Б., Ярошевич В. А. Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 129—135.

[38] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[39] Коробов М. С., Петриков А. О. Продолжение частичных операций в универсальных алгебрах // Матер. 5-й Междунар. научно-техн. конф. «Соврем. инф. технологии в образовании и научн. исслед.». — Донецк, 2018. — С. 79—83.

[40] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[41] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.

[42] Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. — М.: Мир, 1985.

[43] Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Частичные алгебраические действия. — СПб.: Образование, 1991.

[44] Максимовский М. Ю. О полигонах над полурешётками // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 151—156.

[45] Максимовский М. Ю. О биполигонах и мультиполигонах над полугруппами // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 6. — С. 855—866.

[46] Наймарк М. А. Теория представлений групп. — М.: Наука, 1976.

[47] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.

[48] Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. — М.: Наука, 1966.

[49] Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. — М.: Высш. школа, 1994.

[50] Птахов Д. О., Степанова А. А. Решётки конгруэнций полигонов // Дальневост. матем. журн. — 2013. — Т. 13, № 1. — С. 107—115.

[51] Ройз Е. Н. О подпрямо неразложимых монарах // Упорядоченные множества и решётки. Вып. 2. — Саратов, 1974. — С. 80—84.

[52] Скорняков Л. А. Гомологическая классификация колец // Матем. весник (Серб. АН). — 1967. — Т. 19, № 4. — С. 415—434.

[53] Скорняков Л. А. О гомологической классификации моноидов // Сиб. матем. журн. — 1969. — Т. 10, № 5. — С. 1139—1143.

[54] Сотов А. С. Теорема Кантора—Бернштейна для полигонов над группами // Матер. VI Междунар. научно-техн. конф. «Соврем. инф. технологии в образовании и научн. исслед.». — Донецк, 2019. — С. 120—123.

[55] Халиуллина А. Р. Конгруэнции полигонов над группами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 4, ч. 2. — С. 133—137.

[56] Халиуллина А. Р. Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей // Чебышёвский сб. — 2013. — Т. 13, № 3. — С. 142—146.

[57] Халиуллина А. Р. Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей // Дальневост. матем. журн. — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 102—120.

[58] Alahmadi A., Alsulami H., Jain S. K., Zelmanov E. Matrix wreath products of algebras and embedding theorems. — 2017. — `arXiv:1703.08734v2` [math.RA].

[59] Apraksina T. V., Barkov I. V., Kozhukhov I. B. Diagonal ranks of semigroups // Semigroup Forum. — 2015. — Vol. 90, no. 2. — P. 386—400.

[60] Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B. Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernetica. — 2000. — Vol. 14, no. 4. — P. 523—531.

[61] Barkov I. V. Bidiagonal ranks of completely (0-)simple semigroups // J. Sib. Fed. Univ. Mathematics. Physics. — 2016. — Vol. 9, no. 2. — P. 144—148.

[62] Berthiaume P. The injective envelope of S-sets // Canad. Math. Bull. — 1967. — Vol. 10. — P. 261—273.

[63] Bulman-Fleming S., Gilmour A. Flatness properties of diagonal acts over monoids // Semigroup Forum. — 2009. — Vol. 79, no. 2. — P. 298—314.

[64] Burris S., Sankappanavar H. P. A Course in Universal Algebra. — Berlin: Springer, 1981. — (Grad. Texts Math.; Vol. 78).

[65] Eilenberg S. Automata, Languages, and Machines. — New York: Academic Press, 1974; 1976.

[66] Ershad M., Sedaghatjoo M. On a conjecture of Bulman-Fleming and Gilmour // Semigroup Forum. — 2011. — Vol. 82, no. 3. — P. 542—546.

[67] Ésik Z., Imreh B. Subdirectly irreducible commutative automata // Acta Cybernetica. — 1981. — Vol. 5, no. 3. — P. 251—260.

[68] Gallagher P. On the finite and non-finite generation of diagonal acts // Commun. Algebra. — 2006. — Vol. 34. — P. 3123—3137.

[69] Gallagher P., Ruškuc N. Finite generation of diagonal acts of some infinite semigroups of transformations and relations // Bull. Austral. Math. Soc. — 2005. — Vol. 72. — P. 139—146.

[70] Goldstein J. A. Semigroups of Linear Operators and Applications. — Dover, 2017.

[71] Haddadi M., Sheykholislami S. M. N. On radical and torsion theory in the category of S-acts. — 2018. — arXiv:1806.07075v1.

[72] Howie J. M. Fundamentals of Semigroup Theory. — Clarendon Press, 1995.

[73] Isbell J. R. Perfect monoids // Semigroup Forum. — 1971. — Vol. 2. — P. 95—118.

[74] Jakubíková-Studenovská D., Pócs J. Monounary algebras // Math. Slovac. — 2009. — Vol. 61, no. 1. — P. 107—125.

[75] Jipsen P., Rose H. Varieties of Lattices. — Berlin: Springer, 1992. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1553).

[76] Kearnes K. A., Kiss E. W. The shape of congruence lattices // Mem. Amer. Math. Soc. — 2013. — Vol. 222, no. 1046.

[77] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[78] Kozhukhov I. B. One characteristical property of semilattices // Commun. Algebra. — 1997. — Vol. 25, no. 8. — P. 2569—2577.

[79] Kozhukhov I. B., Olshanski A. Yu. Diagonal bi-acts over semigroups with finiteness conditions // Semigroup Forum. — 2015. — Vol. 92, no. 2. — P. 538—542.

[80] Meldrum J. D. P. Wreath Products of Groups and Semigroups. — Wiley, 1995.

[81] Miller C., Ruškuc N. Right Noetherian semigroups // Int. J. Algebra Comput. — 2020. — Vol. 30, no. 1. — P. 13—48.

[82] Moghaddasi Gh. On injective and subdirectly irreducible S-acts over left zero semigroups // Turk. J. Math. — 2012. — Vol. 36. — P. 359—365.

[83] Moghaddasi Gh., Mahmoudi M. Subdirectly irreducible acts over some semigroups // Bull. Iran. Math. Soc. — 2017. — Vol. 43, no. 6. — P. 1913—1924.

[84] Nation J. B. Varieties of algebras whose congruence lattices satisfy lattice identities: Thesis. — Pasadena: California Inst. Techn., 1973.

[85] Problems and solutions // Amer. Math. Mon. — 1989. — Vol. 96, no. 2. — P. 155.

[86] Problems and solutions // Amer. Math. Mon. — 1990. — Vol. 97, no. 7. — P. 617—618.

[87] Pudlák P., Tůma J. Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice // Algebra Universalis. — 1980. — Vol. 10, no. 1. — P. 74—95.

[88] Rankin S. A., Reis C. M., Thierrin G. Right subdirectly irreducible semigroups // Pacific J. Math. — 1979. — Vol. 85, no. 2. — P. 403—412.

[89] Robertson E. F., Ruškuc N., Thomson M. R. On diagonal acts on monoids // Bull. Austral. Math. Soc. — 2001. — Vol. 63, no. 1. — P. 167—175.

[90] Roueentan M., Sedaghatjoo M. On uniform acts over semigroups // Semigroup Forum. — 2018. — Vol. 97, no. 2. — P. 229—243.

[91] Roueentan M., Sedaghatjoo M. The structure of subdirectly irreducible and uniform acts over rectangular bands // Semigroup Forum. — 2020. — Vol. 101, no. 1. — P. 192—201.

[92] Sedaghatjoo M., Khaksari A. Monoids over which products of indecomposable acts are indecomposable. — 2016. — `arXiv:1607.00806v1`

[93] Steinberg B. Representation Theory of Finite Monoids. — Springer, 2016.

[94] Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Arch. Math. — 1970. — Vol. 21. — P. 256—264.

[95] Wiegandt R. Radical and torsion theory for acts // Semigroup Forum. — 2006. — Vol. 72. — P. 312—328.

[96] Wilson R. A. The Finite Simple Groups. — London: Springer, 2009.

[97] Zhang R. Z., Shum K. P. Hereditary torsion classes of S-systems // Semigroup Forum. — 1996. — Vol. 52. — P. 253—270.