Односторонние изотопы и гомотопы некоторых правоальтернативных алгебр

А. А. КРЫЛОВ
Школа № 1535 г. Москвы
e-mail: oncetoblack@list.ru

УДК 512.554

Ключевые слова: изоморфизм, изотоп, односторонние изотопы, простая алгебра.

Аннотация

Доказано, что всякий c-гомотоп сохраняет тождества четырёхмерной алгебры Михеева. Кроме того, описаны все изоморфизмы четырёхмерной алгебры Михеева и её c-изотопа. Доказано, что всякий центральный c-изотоп алгебры Хенцеля изоморфен алгебре Хенцеля. Рассмотрены односторонние изотопные пары.

Abstract

A. A. Krylov, One-sided isotopes and homotopes of right-alternative algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 3, pp. 201—213.

It is proved that every c-homotope preserves identical equations for the four-dimensional Mikheev algebra. Moreover, all isomorphisms for the four-dimensional Mikheev algebra and its c-isotope are described. It is proved that every central c-isotope of the Hentzel algebra is isomorphic to the Hentzel algebra. One-sided isotopic pairs are described.

Введение

В 1942 г. А. А. Алберт [8] определил изотоп $A^{(\varphi,\psi,\xi)}$ алгебры A как тройку (φ,ψ,ξ) обратимых линейных операторов, действующих на линейном пространстве A, и начал изучать изотопы конечномерных алгебр. Рассматривая вполне унитальный случай (исходная алгебра и её изотоп унитальны), он доказал, что при изотопии сохраняются идеалы, в частности, в этом случае изотоп простой алгебры является простой алгеброй. Кроме того, если исходная алгебра ассоциативна, то изотопия является изоморфизмом. В общем случае неунитальных (даже ассоциативных) алгебр изотопия не является изоморфизмом. А. А. Алберт доказал, что каждый изотоп $A^{(\varphi,\psi,\xi)}$ изоморфен главному изотопу $A^{(\rho,\lambda)}$, который определяется парой линейных операторов (ρ,λ). Отметим, что важные результаты, связанные с понятием изотопа, принадлежат Р. Х. Браку [9], А. И. Мальцеву [2], Р. Д. Шаферу [13], К. Маккриммону [12], В. Т. Филиппову [7], С. В. Пчелинцеву [3—6] и др.

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 3, с. 201—213.

Легко понять (см. раздел 2), что каждый главный изотоп $A^* = A^{(\varphi,\psi)}$ является композицией односторонних изотопов.

Р. Д. Шафер [13] и К. Маккриммон [12] изучали изотопы альтернативных унитальных алгебр; в частности, было доказано, что изотоп полупростой альтернативной алгебры изоморфен исходной алгебре и всякий изотоп унитальной альтернативной алгебры изоморфен регулярному изотопу, который можно определить с помощью не двух, а одного линейного оператора.

Вопрос о сведении изотопов к изотопам вида $A^{(\varphi,1)}$ пока остаётся открытым.

Данная работа состоит из трёх разделов. В разделах 1 и 2 изучаются c-изотопы двух $(-1,1)$-алгебр: четырёхмерной алгебры Михеева и алгебры Хенцеля (свободной унитальной 2-порождённой строго $(-1,1)$-алгебры). Отметим, что эти алгебры играют важную роль в теории свободных $(-1,1)$-алгебр. Известны следующие результаты:

а) всякая первичная $(-1,1)$-алгебра либо ассоциативна, либо является строгой;

б) многочлен от двух переменных является тождеством произвольной $(-1,1)$-алгебры тогда и только тогда, когда он обращается в нуль в свободной ассоциативной алгебре и в унитальной алгебре Михеева;

в) всякое полилинейное тождество справедливо во всех $(-1,1)$-алгебрах тогда и только тогда, когда оно выполняется в свободной строго $(-1,1)$-алгебре и в свободной $(-1,1)$-алгебре от двух порождающих.

В разделе 1 доказано, что всякий c-гомотоп сохраняет тождества четырёхмерной алгебры Михеева. Также показано, что c-изотоп четырёхмерной алгебры Михеева изоморфен алгебре Михеева. Более того, описаны все изоморфизмы четырёхмерной алгебры Михеева и её c-изотопа; они составляют двухпараметрическое семейство.

В разделе 2 доказано, что всякий центральный c-изотоп алгебры Хенцеля (элемент c лежит в коммутативном центре) изоморфен алгебре Хенцеля. Как известно [10], c-изотоп алгебры Хенцеля может не быть строго $(-1,1)$-алгеброй.

В разделе 3 данной работы указаны три пары изотопных алгебр следующего вида: $\langle A^{(\varphi,1)}, A^{(1,\varphi)}\rangle$, $\langle A^{(\varphi,1)}, A^{(1,\varphi^{-1})}\rangle$ и $\langle A^{(1,\varphi)}, A^{(1,\varphi^{-1})}\rangle$. В каждой из этих алгебр одна простая, а вторая нет, $A^{(\varphi,\psi)}$ обозначает главный изотоп алгебры и $1 = 1_A$ — тождественное отображение алгебры A на себя. Это показывает, что, скорее всего, нет общих конструкций, связывающих «левые» и «правые» изотопы.

1. Изотопы четырёхмерной алгебры Михеева

1.1. Тождества c-гомотопов алгебры Михеева M_0

Пусть M — алгебра Михеева с базисом e, g, h и ненулевыми произведениями базисных элементов: $e^2 = e$, $ge = g$, $g^2 = h$. Заметим, что

$$(g, g, e) = g^2 e - g(ge) = he - g^2 = -h \neq 0.$$

Унитальной алгеброй Михеева M_0 называется алгебра, полученная внешним присоединением единицы 1 к алгебре M.

Всякий c-гомотоп $M_0^{(c)}$ алгебры Михеева является $(-1,1)$-алгеброй. Справедлив более сильный результат.

Теорема 1. *Гомотопы $M_0^{(c)}$ унитальной алгебры Михеева удовлетворяют всем тождествам этой алгебры.*

Доказательство. Известно [3], что тождества

$$(x,y,y)=0, \tag{1}$$
$$(x,y,z)+(y,z,x)+(z,x,y)=0, \tag{2}$$
$$[(x,y,z),t]=0, \tag{3}$$
$$\big((x,y,z),t,v\big)=0, \tag{4}$$
$$(a,x,[y,z])+(a,y,[z,x])+(a,z,[x,y])=0, \tag{5}$$
$$[x,y][z,t]+([x,y],z,t)=0 \tag{6}$$

являются определяющими для алгебры Михеева M_0.

Известно [3], что если $A\in \operatorname{var}(M_0)$, то

$$D(A)\subseteq Z(A), \quad D(A)\cdot A'=0, \quad (A,A,A'^2)=0, \quad (A,A',A')=0. \tag{7}$$

Всюду ниже в этом доказательстве $A=M_0$ — унитальная алгебра Михеева. Легко проверить справедливость следующих равенств:

$$(x,y,z)_c=(xc,y,c)z+(xc,yc,z), \tag{8}$$
$$[x,y]_c=[x,yc]+x[c,y]+(x,c,y). \tag{9}$$

Заметим, что $A^{(c)}$ — алгебра типа $(-1,1)$. Поскольку ввиду (8) и (9) верно, что $D\big(A^{(c)}\big)\subseteq D(A)$, $\big(A^{(c)}\big)'\subseteq A'$, то на основании (7) алгебра $A^{(c)}$ удовлетворяет тождествам (1), (2). Заметим, что c^{-1} — единица в $A^{(c)}$.

Докажем справедливость тождества (3) в алгебре $A^{(c)}$:

$$f(a,x,y,z):=(a,x,[y,z]_c)_c+(a,y,[z,x]_c)_c+(a,z,[x,y]_c)_c=0.$$

Приведём доказательство, считая, от противного, что $f\neq 0$.

Во-первых, ввиду полилинейности элемента f можно считать элементы a, x, y, z базисными элементами алгебры $A=M_0$, т. е. $\{a,x,y,z\}=\{c^{-1},e,g,h\}$.

Во-вторых, f кососимметричен по x, y, z. В самом деле,

$$f(a,x,y,y)=(a,x,[y,y]_c)_c+(a,y,[y,x]_c)_c+(a,y,[x,y]_c)_c=0.$$

Далее, если среди элементов x, y, z встречается базисный элемент h, то хотя бы один из элементов x, y содержится в M, но тогда $f=0$, так как $h\in \operatorname{Ann} M$. Итак, можно считать, что $x=c^{-1}$, значит, вновь $f=0$.

Докажем теперь справедливость тождества (4) в алгебре $A^{(c)}$. Заметим, что $A'=\Phi g+\Phi h$, следовательно, A' — ассоциативно-коммутативный идеал.

Обозначим через

$$p(x,y,z,t) := [x,y]_c \cdot_c [z,t]_c + ([x,y]_c, z, t)_c$$

левую часть тождества (4) в изотопе $A^{(c)}$. Аналогично предыдущему можно считать, что $\{x,y,z,t\} = \{e,g\}$. Поскольку элемент кососимметричен по наборам (x,y) и (z,t), то можно считать, что $(x,y) = (z,t) = (e,g)$. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что

$$c = 1 + \beta e + \gamma g + \delta h.$$

Тогда имеем

$$[e,g]_c = [e,gc] + e[c,g] + (e,c,g) = [e, g + \beta ge + \gamma g^2] + \beta e[e,g] = \\ = (1+\beta)[e,g] + \beta e[e,g] = -(1+\beta)g.$$

Справедливы равенства

$$g \cdot_c g = g(1 + \beta e + \gamma g + \delta h) \cdot g = (1+\beta)h$$

и

$$(g,e,g)_c = (gc,e,c)g + (gc,ec,g) = (gc,e,\beta e + \gamma g)g + (gc, e(1+\beta e+\gamma g), g) = \\ = \gamma(gc,e,g)g + (gc,(1+\beta)e,g) = \gamma(gc,ge,g) + (gc,(1+\beta)e,g) = \\ = (gc,(1+\beta)e,g) = (g(1+\beta)e,(1+\beta)e,g) = (1+\beta)^2(g,e,g) = (1+\beta)^2 h.$$

Следовательно,

$$p(e,g,e,g) = [e,g]_c \cdot_c [e,g]_c + ([e,g]_c, e, g)_c = \\ = (1+\beta)^2 g \cdot_c g - (1+\beta)(g,e,g)_c = (1+\beta)^3 h - (1+\beta)^3 h = 0.$$

Теорема доказана. □

1.2. Изоморфизм изотопов алгебры Михеева

В этом разделе мы докажем, что алгебра M_0 и её изотоп $M_0^{(c)}$ изоморфны. Более того, будут указаны все изоморфизмы между этими алгебрами.

Лемма 1. *Если A — ассоциативно-коммутативная алгебра с базисом 1, e, где 1 — единица, e — идемпотент, то в A обратимы только элементы вида $\alpha(1+\beta e)$, где $0 \neq \alpha$, $\beta \neq -1 \in \Phi$.*

Доказательство. Допустим, что элемент $1 + \beta e$ обратим. Тогда разрешимо уравнение $(1+\beta e)(1+xe) = 1$ для подходящего скаляра x. Значит, $\beta + x + \beta x = 0$, $(1+\beta)(1+x) = 1$, откуда выводим, что $x = (1+\beta)^{-1} - 1 = -\beta(1+\beta)^{-1}$. □

Лемма 2. *В алгебре Михеева обратимы только элементы вида $\alpha(1 + \beta e + \gamma g + \delta h)$, где $0 \neq \alpha$, $\beta \neq -1 \in \Phi$.*

Доказательство. Если элемент обратим в алгебре M_0, то он обратим в фактор-алгебре M_0/M_0' и, значит, по лемме 1 имеет указанный вид. Докажем теперь, что элемент $a = 1 + \beta e + x$ имеет обратный элемент вида $a' = 1 + \beta' e + x'$, где $\beta' = -\beta(1+\beta)^{-1}$, $x = \gamma g + \delta h$, $x' = \gamma' g + \delta' h$. Равенство $aa' = 1$ равносильно равенству $x(1 + \beta' e) + (1 + \beta e)x' + xx' = 0$ или $x + \beta' xe + x' + \beta ex' + xx' = 0$. Поскольку

$$xx' = (\gamma g + \delta h)(\gamma' g + \delta' h) = \gamma\gamma' h, \quad xe = (\gamma g + \delta h)e = \gamma g, \quad ex' = 0,$$

то

$$x + \beta'\gamma g + x' + \gamma\gamma' h = 0$$

или

$$\gamma g + \delta h + \beta'\gamma g + \gamma' g + \delta' h + \gamma\gamma' h = 0,$$

значит, равенство $aa' = 1$ равносильно системе уравнений $\gamma + \beta'\gamma + \gamma' = 0$ и $\delta + \delta' + \gamma\gamma' = 0$, из которой последовательно находятся неизвестные скаляры γ', δ'. □

Следствие. *Произведение обратимых элементов в M_0 является обратимым элементом в M_0.*

В самом деле, по модулю $\Phi g + \Phi h$ имеем

$$(1 + \beta e + \gamma g + \delta h)(1 + \lambda e + \mu g + \nu h) = 1 + \beta e + \gamma g + \delta h + \lambda e + \lambda\beta e^2 + \\ + \lambda\gamma ge + \mu g + \mu\beta eg + \mu\gamma g^2 + \nu h \equiv 1 + \beta e + \lambda e + \lambda\beta e \equiv 1 + (\beta + \lambda + \lambda\beta)e.$$

Если $\beta + \lambda + \lambda\beta = -1$, то $0 = 1 + \beta + \lambda + \lambda\beta = (1+\beta)(1+\lambda)$, что невозможно.

Итак, по лемме 2 обратимый элемент имеет вид $c = \alpha 1 + \beta e + \gamma g + \delta h$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$. Пусть $\alpha' = \alpha + \beta$. Тогда умножение в изотопе $M_0^{(c)}$ имеет следующий вид:

$\cdot_c$	1	e	g	h
1	$\alpha 1 + \beta e + \gamma g + \delta h$	$\alpha' e + \gamma g$	$\alpha g + \gamma h$	αh
e	$\alpha' e$	$\alpha' e$	0	0
g	$\alpha' g + \gamma h$	$\alpha' g$	$\alpha' h$	0
h	αh	0	0	0

.

Допустим, что $\varphi\colon M_0 \to M_0^{(c)}$ — изоморфизм алгебр. Тогда

$$1^\varphi = c^{-1}. \tag{1°}$$

Учитывая, что $D\big(A^{(c)}\big) = D(A)$ и $\big(A^{(c)}\big) = A'$, получаем $D\big(M_0^{(c)}\big) = D(M_0) = \Phi h$, $\big(M_0^{(c)}\big)' = (M_0)' = \Phi g + \Phi h$, следовательно,

$$h^\varphi \in \Phi h, \quad g^\varphi \in \Phi g + \Phi h, \tag{2°}$$

$$e^\varphi = \alpha'^{-1} e. \tag{3°}$$

Пусть $e^\varphi = x_1+x_2e+x_3g+x_4h$. Поскольку $eg = eh = 0$, то $e^\varphi\cdot_c g = e^\varphi\cdot_c h = 0$, откуда получаем

$$0 = e^\varphi \cdot_c g = x_1 1 \cdot_c g + x_2 e \cdot_c g + x_3 g \cdot_c g + x_4 h \cdot_c g = x_1(\alpha g + \gamma h) + x_3 g,$$
$$0 = e^\varphi \cdot_c h = x_1 1 \cdot_c h + x_2 e \cdot_c h + x_3 g \cdot_c h + x_4 h \cdot_c h = x_1 1 \cdot_c h = x_1 \alpha h,$$

т. е. $\alpha x_1 + x_3 = \gamma x_1 = 0$ и $x_1\alpha = 0$, значит, $x_1 = x_3 = 0$ и $e^\varphi = x_2 e + x_4 h$. Далее, поскольку $e^2 = e$, то

$$x_2 e + x_4 h = (x_2 e + x_4 h) \cdot_c (x_2 e + x_4 h) = x_2 e \cdot_c x_2 e = \alpha' x_2^2 e,$$

откуда следует, что $x_4 = 0$ и $x_2 = \alpha' x_2^2$. Значит, $e^\varphi = x_2 e \neq 0$ и

$$g^\varphi = \lambda g, \quad h^\varphi = \lambda^2 \alpha' h. \tag{4°}$$

Пусть $g^\varphi = \lambda g + \mu h$, $h^\varphi = \nu h$. Так как $ge = g$, $g^2 = h$, то $g^\varphi \cdot_c e^\varphi = g^\varphi$ и $g^\varphi \cdot_c g^\varphi = h^\varphi$, откуда следует, что

$$\lambda g + \mu h = (\lambda g + \mu h) \cdot_c \alpha'^{-1} e = \lambda g \cdot_c \alpha'^{-1} e = \lambda \alpha'^{-1} \alpha' g$$

и $\mu = 0$, $g^\varphi = \lambda g$, $\nu h = \lambda g \cdot_c \lambda g = \lambda^2 \alpha' h$ и $\nu = \lambda^2 \alpha'$.

Итак, если существует изоморфизм $\varphi\colon M_0 \to M_0^{(c)}$, то выполнены равенства

$$1^\varphi = c^{-1}, \quad e^\varphi = \alpha'^{-1} e, \quad g^\varphi = \lambda g, \quad h^\varphi = \lambda^2 \alpha' h,$$

где $\alpha' = \alpha + \beta$, $\alpha, \lambda \neq 0$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Для каждого обратимого элемента*

$$c = \alpha 1 + \beta e + \gamma g + \delta h$$

унитальной алгебры Михеева M_0 существует λ-параметрическое семейство изоморфизмов алгебры Михеева в её c-изотоп $\varphi\colon M_0 \to M_0^{(c)}$, заданных равенствами

$$1^\varphi = c^{-1}, \quad e^\varphi = (\alpha + \beta)^{-1} e, \quad g^\varphi = \lambda g, \quad h^\varphi = \lambda^2 (\alpha + \beta) h,$$

где $\alpha, \alpha + \beta, \lambda \neq 0$. Других изоморфизмов нет.

2. Изотопы алгебры Хенцеля

Всюду ниже H — свободная строго $(-1,1)$-алгебра с единицей 1 от свободных порождающих a, b. Строение этой алгебры было описано И. Р. Хенцелем [10], поэтому H называется *алгеброй Хенцеля*.

2.1. Предварительные леммы

Лемма 3 [10]. *Пусть H — алгебра Хенцеля. Тогда*

a) $D(H) \subseteq Z(H)$, $H' \in K(H)$;

б) *элементы вида*

$$
\begin{aligned}
&u_{ij} = 1\pi_{ij}, \text{ где } i+j \geqslant 0, && \pi_{ij} = R_a^i R_b^j,\\
&v_{ij} = v\pi_{ij}, \text{ где } v = [a,b], && w_{ij} = w\pi_{ij}, \text{ где } w = (a,b,v),\\
&r_{ij} = r\pi_{ij}, \text{ где } r = (a,a,b), && s_{ij} = s\pi_{ij}, \text{ где } s = (b,b,a),
\end{aligned}
$$

образуют аддитивный базис алгебры Хенцеля.

Лемма 4. *Пусть A — строго $(-1,1)$-алгебра, $[x,y]_c$ — коммутатор в c-гомотопе $A^{(c)}$. Тогда верно равенство*

$$3\big[[x,y]_c, y\big]_c = [x,cy][c,y] + x[c,y]^2 + 3(x,c,y)[c,y].$$

2.2. Один контрпример

М. Е. Дедловская [1] доказала, что многообразие, порождённое свободной $(-1,1)$-алгеброй ранга 2, замкнуто относительно взятия гомотопов. Мы докажем, что многообразие $\mathrm{var}(H)$ не является замкнутым относительно изотопов. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть S — фактор-алгебра алгебры H по идеалу I^3, где $I = \mathrm{idl}(a)$. Тогда алгебры S и $S^{(c)}$, где $c = 1+a$, имеют разные идеалы тождеств.*

Доказательство. Поскольку S — строго $(-1,1)$-алгебра, то в ней выполнено тождество 2-энгелевости $\big[[x,y],y\big] = 0$. Допустим, что оно верно в алгебре $S^{(c)}$. Тогда в силу леммы 4 в алгебре H верно тождество

$$[x,cy][c,y] + x[c,y]^2 = 0.$$

При $x = 1$ получаем $[c,y]^2 = 0$, значит, $[a,b]^2 = 0$, что противоречит лемме 3. □

2.3. Изоморфизм центральных изотопов алгебры Хенцеля

Лемма 5. *Пусть H — алгебра Хенцеля, $k = [a,b]$, $k \in K(H)$, $c = 1+k$. Тогда изотоп $H^{(c)}$ также порождается элементами a, b.*

Доказательство. Поскольку $D\big(H^{(c)}\big) = D(H)$ и $D(H)\cdot k = 0$, то $p_{ij}^{(c)} = p^{(c)}\pi_{ij}$. Отметим также, что $K(H) = H'$, значит, элемент k является линейной комбинацией элементов v_{ij}, w_{ij}, r_{ij}, s_{ij}. Пусть

$$k = \sum \alpha_{ij} v_{ij} + d, \quad \text{где} \quad d \in D(H).$$

Если $f \in H$, то обозначим через $f^{(c)}$ многочлен, полученный из f заменой обычного умножения на умножение $\cdot_c$ в изотопе $H^{(c)}$.

Легко проверить, что

$$w^{(c)} = w, \quad w_{ij}^{(c)} = w_{ij},$$

$$r^{(c)} = (a,a,b)_c = (ac,a,c)b + (ac,ac,b) = (ac,ac,b) = \\ = (k,a,b)a + (a,k,b)a + (a,a,b) = r + \sum_{i,j} \beta_{ij} w_{ij},$$

аналогично
$$s^{(c)} = s + \sum_{i,j} \gamma_{ij} w_{ij}.$$

Тем самым всякий элемент из $D(H)$ является многочленом вида $f^{(c)}$.

Кроме того, $2v^{(c)} = 2[ac,b] + 2(a,c,b) = 2v + (k,a,b)$, значит, элемент v также является многочленом вида $f^{(c)}$. Тогда по модулю $D(H)$ имеем $v_{ij}^{(c)} \equiv v_{ij}$, следовательно, всякий элемент из H' является многочленом вида $f^{(c)}$. Наконец, по модулю H' верно сравнение $u_{ij}^{(c)} \equiv u_{ij}$, следовательно, всякий элемент алгебры H является многочленом вида $f^{(c)}$. □

Теорема 3. *Центральные изотопы алгебры Хенцеля изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть $k \in K(H)$, $c = 1 + k$. Тогда в силу леммы 4 алгебра $H^{(c)}$ является гомоморфным образом алгебры H, причём можно считать, что гомоморфизм $\varphi\colon H \to H^{(c)}$, действует тождественно на порождающих a, b. Следовательно, $f\varphi = f^{(c)}$ и отображение φ сюръективно. Если $f^{(c)} = 0$ и $f \neq 0$, то $f + g = 0$ для подходящего элемента g. Для того чтобы получить элемент g, достаточно в $f^{(c)}$ заменить c на $1+k$ и разложить по аддитивному базису. При этом ясно, что наименьшая степень одночлена из g больше самой маленькой степени базисного слова, входящего в запись f, что противоречит допущению $f \neq 0$. Тем самым доказано, что отображение φ инъективно, т. е. φ — изоморфизм. □

3. Односторонние изотопы простых алгебр

3.1. Разложение изотопов в композицию

Если $\varphi, \psi\colon A \to A$ — обратимые линейные операторы, то всюду ниже $A^{(\varphi,\psi)}$ означает главный изотоп алгебры A, т. е. алгебру с умножением $a*b = (a\varphi)(b\psi)$. Главный изотоп будем называть также *двусторонним* изотопом. Изотопы вида $A^{(\varphi,1)}$ и $A^{(1,\psi)}$ мы называем *односторонними* изотопами (левым и правым соответственно).

Заметим, что $A^{(\varphi,\psi)} = \left(A^{(\varphi,1)}\right)^{(1,\psi)}$, где $1 = 1_A$ обозначает тождественное отображение множества A на себя. В самом деле, обозначая $A^* = A^{(\varphi,\psi)}$, $A^\circ = A^{(\varphi,1)}$, $A^\times = (A^\circ)^{(1,\psi)}$, имеем
$$x \times y = x \circ y^\psi = x^\varphi y^\psi = x * y.$$

Итак, каждый главный изотоп является композицией односторонних изотопов.

3.2. Связь между изотопами $A^{(\varphi,1)}$ и $A^{(1,\varphi)}$

Наряду с алгеброй $(A,\cdot)$ рассмотрим её антиизоморфную копию $A^{\triangle}=(A,\triangle)$, где $a \triangle b = b \cdot a$. Справедливо следующее равенство $\left(A^{(\varphi,1)}\right)^{\triangle} = (A^{\triangle})^{(1,\varphi)}$. В самом деле, если $(A,*_1) = \left(A^{(\varphi,1)}\right)^{\triangle}$, $(A,*_2) = (A^{\triangle})^{(1,\varphi)}$, то выполнены необходимые равенства

$$a *_1 b = b * a = b^{\varphi} a, \quad a *_2 b = a \triangle b^{\varphi} = b^{\varphi} a.$$

Отметим также, что умножения в изотопах $A^{(\varphi,1)} = (A,*)$ и $A^{(1,\varphi^{-1})} = (A,\circ)$ связаны между собой:

$$(a\varphi^{-1}) * (b\varphi^{-1}) = a(b\varphi^{-1}) = a \circ b.$$

Отсюда следует, что всякая правая изотопия является композицией левой изотопии и антиизоморфизмов. Остаётся открытым следующий вопрос: верно ли, что антиизоморфные алгебры изотопны?

3.3. Изотопы типа $A^{(\psi,1)}$, $A^{(1,\psi)}$

В качестве контрпримера рассмотрим алгебру

$$A = F\cdot x + F\cdot y, \quad x^2 = x, \quad y^2 = y, \quad yx = 0, \quad xy = x + y.$$

Докажем, что алгебра A является простой. Пусть $0 \neq \alpha x + \beta y \in I \lhd A$. Тогда имеем

$$(\alpha x + \beta y)x = \alpha x, \quad y(\alpha x + \beta y) = \beta y.$$

Следовательно, либо $x \in I$, либо $y \in I$. Тогда $x + y \in I$ и, стало быть, $x, y \in I$, откуда следует, что $I = A$.

Введём матрицы операторов в базисе x, y:

$$M(\varphi) = E, \quad M_{x,y}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим произведения базисных элементов в изотопе $A^{(1,\psi)}=(A,\circ)$:

$$\begin{aligned}
&x \circ x = x \cdot x^{\psi} = x^2 = x,\\
&y \circ y = y \cdot y^{\psi} = y(-x + y) = y^2 = y,\\
&y \circ x = y \cdot x^{\psi} = yx = 0,\\
&x \circ y = x \cdot y^{\psi} = x(-x + y) = -x + x + y = y.
\end{aligned}$$

Заметим, что в алгебре

$$B_1 = F\cdot x + F\cdot y, \quad x^2 = x, \quad y^2 = y, \quad yx = 0, \quad xy = y,$$

пространство Fy является идеалом. Значит, $B_1 = A^{(1,\psi)}$ не является простой алгеброй.

Рассмотрим теперь изотоп $A^* = A^{(\psi,1)}$. Имеем

$$x \circ x = x^{\psi} \cdot x = x^2 = x,$$
$$y \circ y = y^{\psi} \cdot y = (-x+y)y = -x - y + y = x,$$
$$y \circ x = y^{\psi} \cdot x = (-x+y)x = -x,$$
$$x \circ y = x^{\psi} \cdot y = xy = x + y.$$

Тем самым получается алгебра

$$B_2 = F \cdot x + F \cdot y, \quad x^2 = y^2 = x, \quad yx = -x, \quad xy = x + y.$$

Докажем, что алгебра B_2 является простой. Заметим сначала, что $xB_2 = B_2$. Пусть $0 \neq \alpha x + \beta y \in I \triangleleft B_2$. Тогда $(\alpha x + \beta y)x = (\alpha - \beta)x$. Значит, можно считать, что $\alpha = \beta$ и $x + y \in I$. Тогда $(x+y)y = 2x + y$, следовательно, $x, y \in I$ и $I = B_2$.

Таким образом, одна из алгебр $A^{(\psi,1)}$, $A^{(1,\psi)}$ может быть простой, а вторая нет.

3.4. Изотопы типа $A^{(\psi,1)}$, $A^{(1,\psi^{-1})}$

Рассмотрим алгебру вида $A^{(1,\psi^{-1})} = (A, \times)$, где

$$M_{x,y}(\psi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим произведения базисных элементов в изотопе:

$$x \times x = x \cdot x^{\psi^{-1}} = x^2 = x,$$
$$y \times y = y \cdot y^{\psi^{-1}} = y(x+y) = y^2 = y,$$
$$y \times x = y \cdot x^{\psi^{-1}} = yx = 0,$$
$$x \times y = x \cdot y^{\psi^{-1}} = x(x+y) = 2x + y.$$

Мы получили алгебру

$$B_3 = F \cdot x + F \cdot y, \quad x^2 = x, \quad y^2 = y, \quad yx = 0, \quad xy = 2x + y.$$

Эта алгебра является простой, поскольку справедливо $\mathrm{idl}(x) = \mathrm{idl}(y) = B_3$ и $(\alpha x + \beta y)x = \alpha x$.

Рассмотрим алгебру $A^{(\psi^{-1},1)} = (A, \bullet)$,

$$M_{x,y}(\psi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$x \bullet x = x^{\psi^{-1}} \cdot x = x^2 = x,$$
$$y \bullet y = y^{\psi^{-1}} \cdot y = (x+y)y = x + 2y,$$

$$y \bullet x = y^{\psi^{-1}} \cdot x = (x+y)x = x,$$
$$x \bullet y = x^{\psi^{-1}} \cdot y = x(x+y) = 2x+y.$$

Значит, мы получили алгебру

$$B_4 = F \cdot x + F \cdot y, \quad x^2 = yx = x, \quad y^2 = x+2y, \quad xy = 2x+y.$$

Легко проверить, что алгебра B_4 является простой.

3.5. Неизоморфность изотопов $A^{(1,\psi^n)}$

Рассмотрим алгебру $A^{(1,\omega)} = (A, \times)$, где $\omega = \psi^n$, $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$M_{x,y}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим произведения базисных элементов в изотопе $A^{(1,\omega)} = (A, \times)$:

$$x \times x = x \cdot x^{\omega} = x^2 = x,$$
$$y \times y = y \cdot y^{\omega} = y(-nx+y) = y^2 = y,$$
$$y \times x = y \cdot x^{\omega} = yx = 0,$$
$$x \times y = x \cdot y^{\omega} = x(-nx+y) = (1-n)x+y.$$

Мы получили алгебру $B_{(n)} = Fx + Fy$ с таблицей умножения

$$x^2 = x, \quad y^2 = y, \quad yx = 0, \quad xy = (1-n)x+y.$$

Найдём все идемпотенты в алгебре $B_{(n)}$. Пусть $e = \alpha x + \beta y$ один из них. Тогда

$$e^2 = (\alpha x + \beta y)^2 = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha\beta xy =$$
$$= \alpha^2 x + \beta^2 y + \alpha\beta\big((1-n)x + y\big) = \big(\alpha^2 + \alpha\beta(1-n)\big)x + (\beta^2 + \alpha\beta)y.$$

Поскольку $e^2 = e$, имеет место система равенств

$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha\beta(1-n) = \alpha, \\ \beta^2 + \alpha\beta = \beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha\big(\alpha + \beta(1-n)\big) = \alpha, \\ \beta(\alpha+\beta) = \beta. \end{cases}$$

Если $\alpha\beta \neq 0$, то

$$\begin{cases} \alpha + \beta(1-n) = 1, \\ \alpha + \beta = 1. \end{cases}$$

следовательно, $n\beta = 0$, противоречие. Если $\alpha = 0, \beta \neq 0$, то $\beta = 1$ и $e = y$. Если же $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, то $\alpha = 1$ и $e = x$. Следовательно, в алгебре $B_{(n)}$ существуют только два ненулевых идемпотента x и y.

Если $\nu\colon B_{(n)} \to B_{(m)}$ — изоморфизм алгебр, то x^{ν}, y^{ν} — идемпотенты, значит, либо $x^{\nu} = x, y^{\nu} = y$, либо $x^{\nu} = y, y^{\nu} = x$. Поскольку $0 = (yx)^{\nu} = y^{\nu}x^{\nu}$, второй случай невозможен, так как $xy \neq 0$. Следовательно, остаётся первый случай, но тогда

$$(xy)^\nu = (1-n)x + y, \quad x^\nu y^\nu = (1-m)x + y.$$

Поскольку левые части указанных равенств равны, то равны и правые, т. е. $n = m$. Итак, алгебры $B_{(n)}$, $B_{(m)}$ изоморфны тогда и только тогда, когда они совпадают, $n = m$.

3.6. Изотопы типа $A^{(1,\psi)}$, $A^{(1,\psi^{-1})}$

Отметим также, что среди алгебр

$$A,\ B_1 = A^{(1,\psi)},\ B_2 = A^{(\psi,1)},\ B_3 = A^{(1,\psi^{-1})},\ B_4 = A^{(\psi^{-1},1)}$$

только алгебры A и B_1 не являются простыми. В частности, алгебры $B_1 = A^{(1,\psi)}$ и $B_3 = A^{(1,\psi^{-1})}$ не изоморфны.

Приведённые примеры показывает существенное различие понятий изотопия и изоморфизм.

Автор выражает глубокую благодарность С. В. Пчелинцеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Дедловская М. Е. Гомотопы $(-1,1)$-алгебр от двух порождающих // Матем. заметки. — 1996. — Т. 59, № 4. — С. 551—557.

[2] Мальцев А. И. Об одном представлении неассоциативных колец // УМН. — 1952. — Т. 7, № 1. — С. 181—185.

[3] Пчелинцев С. В. О многообразии, порождённом свободной алгеброй $(-1,1)$ с двумя порождающими // Сиб. матем. журн. — 1981. — Т. 22, № 3. — С. 162—178.

[4] Пчелинцев С. В. Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным // Изв. РАН. Сер. матем. — 2004. — Т. 68, № 1. — С. 183—206.

[5] Пчелинцев С. В. Изотопы первичных $(-1,1)$-алгебр и йордановых алгебр // Алгебра и логика. — 2010. — Т. 49, № 3. — С. 388—423.

[6] Пчелинцев С. В. Изотопы альтернативного монстра и алгебры Скосырского // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57, № 4. — С. 850—865.

[7] Филиппов В. Т. О δ-дифференцированиях алгебр Ли // Сиб. матем. журн. — 1998. — Т. 39, № 6. — С. 1409—1422.

[8] Albert A. A. Non-associative algebras // Ann. Math. — 1942. — Vol. 43. — P. 685—707.

[9] Bruck R. H. Some results in the theory of linear non-associative algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1944. — Vol. 56. — P. 141—199.

[10] Hentzel I. R. Nil semi-simple $(-1,1)$-rings // J. Algebra. — 1972. — Vol. 22, no. 3. — P. 442—450.

[11] Hentzel I. R. The characterization of $(-1,1)$-rings // J. Algebra. — 1974. — Vol. 30. — P. 236—258.

[12] McCrimmon K. Homotopes of alternative algebras // Math. Ann. — 1971. — Vol. 191, no. 4. — P. 253—262.

[13] Schafer R. D. Alternative algebras over an arbitrary fields // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 49. — P. 549—555