

Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями

А. В. МИХАЛЁВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

Е. Е. ШИРШОВА

*Московский педагогический
государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com*

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченное кольцо, первичный идеал алгебры, первичный радикал.

Аннотация

Рассматриваются частично псевдоупорядоченные ($\mathcal{K}$ -упорядоченные) алгебры. Исследуются свойства идеалов и порядковых гомоморфизмов частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями. Изучается вариация понятия первичного радикала алгебры в подклассе направленных псевдоупорядоченных алгебр ($\mathcal{AO}$ -упорядоченных алгебр) над направленными полями. Получено поэлементное описание $\mathcal{AO}$ -первичного радикала $\mathcal{AO}$ -упорядоченных алгебр над направленными полями.

Abstract

A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova, Prime radicals of directed pseudo-ordered algebras over directed fields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 3, pp. 215–230.

Characteristics of partially pseudo-ordered ($\mathcal{K}$ -ordered) algebras are considered. Properties of ideals and order homomorphisms in partially pseudo-ordered algebras are described. A variation of the concept of the prime radical for an algebra in a subclass of directed pseudo-ordered algebras ($\mathcal{AO}$ -ordered algebras) over directed fields is investigated. A description of elements of $\mathcal{AO}$ -prime radicals for $\mathcal{AO}$ -ordered algebras over directed fields is obtained.

1. Введение

Пусть $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ — произвольное кольцо (возможно, неассоциативное). Говорят, что R — *частично упорядоченное кольцо*, если $\langle R, +, \leq \rangle$ является частично упорядоченной группой, удовлетворяющей условию

*Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 3, с. 215–230.
© 2020 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

из $a \leq b$ и $0 < c$ следуют неравенства $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$ для всех $a, b, c \in R$. (1)

Частично упорядоченная группа G называется *направленной*, если для любых элементов a и b из G существует элемент $u \in G$, для которого верны неравенства $a, b \leq u$.

Определение 1. Пусть F — частично упорядоченное поле. Если группа $\langle F, +, \leq \rangle$ является направленной (решёточно упорядоченной, линейно упорядоченной), то F называют направленным (решёточно упорядоченным, линейно упорядоченным) полем.

Замечание. Будем считать до конца статьи, что F — частично упорядоченное поле нулевой характеристики с положительной единицей.

Определение 2 [2, 6]. Линейное пространство $V = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\} \rangle$ над частично упорядоченным полем F называется частично упорядоченным линейным пространством, если $\langle V, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию

из $0 \leq v$ следует, что $0 \leq \alpha v$ для всех элементов $v \in V$ и всех $\alpha > 0$ из поля F . (2)

Определение 3. Кольцо R называется частично псевдоупорядоченным кольцом, если аддитивная группа $\langle R, +, \leq \rangle$ кольца R является частично упорядоченной группой, удовлетворяющей условию

из неравенства $0 \leq a$ следует верность неравенств $ab \leq a$ и $ba \leq a$ для всех элементов $b \in R$. (3)

Свойства частично псевдоупорядоченных колец (а не только алгебр) изучались в [1, 12, 17].

Определение 4. Алгебра $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq \rangle$ над частично упорядоченным полем F называется частично псевдоупорядоченной алгеброй, если выполняются следующие условия:

- 1) $\langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leq \rangle$ является частично упорядоченным линейным пространством над полем F ;
- 2) $\langle A, +, \cdot, \leq \rangle$ является частично псевдоупорядоченным кольцом.

Если группа $\langle A, +, \leq \rangle$ является направленной (решёточно упорядоченной, линейно упорядоченной), то алгебру A называют направленной (решёточно, линейно) псевдоупорядоченной алгеброй.

С примеров псевдоупорядоченных алгебр начинается следующий раздел статьи.

Понятие частично псевдоупорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем было введено Ю. В. Кочетовой и Е. Е. Ширшовой [5]. Первоначально эти алгебры были названы частично $\mathcal{K}$ -упорядоченными алгебрами. Свойства таких алгебр исследовались в [5, 6, 18]. Мотивацией для рассмотрения $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры послужило понятие частично упорядоченной алгебры Ли, введённое В. М. Копытовым (см. [3, 4]).

Напомним, что алгебра Ли $L = \langle L, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot \rangle$ над частично упорядоченным полем F называется *частично упорядоченной алгеброй Ли*, если $\langle L, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leq \rangle$ является частично упорядоченным линейным пространством над полем F , удовлетворяющим условию

$$\text{если } a \leq b, \text{ то } a + ac \leq b + bc \text{ для всех элементов } a, b, c \in L. \quad (4)$$

Если алгебра Ли L является частично упорядоченным линейным пространством над частично упорядоченным полем F , то условия (3) и (4) равносильны.

Действительно, если $a \leq b$ в L , то $0 \leq b - a$, откуда по условию (3) следует, что $(b - a)(-c) \leq b - a$ для любого элемента $c \in L$. Значит, $-bc + ac \leq b - a$, т. е. $a + ac \leq b + bc$.

С другой стороны, если $0 \leq a$, то по условию (4) $0 \leq a + a(-b)$ для любого элемента $b \in L$, т. е. $ab \leq a$. Из свойства антикоммутативности следует справедливость условия (3).

Таким образом, частично упорядоченные алгебры Ли образуют подкласс частично псевдоупорядоченных алгебр.

Пусть A — частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F , положим $A^+ = \{a \in A \mid 0 \leq a\}$.

Отметим, что частично псевдоупорядоченная алгебра A не содержит единицу (если $1 \in A$, из $0 < a \in A$ по условию (3) определения 3 следует верность неравенства $(1 + 1)a \leq a$, т. е. $a \leq 0$).

Пусть A — произвольная алгебра над полем F , I и J — (двусторонние) идеалы алгебры A . *Произведением идеалов* называется подпространство

$$IJ = \left\{ u = \sum_{k=1}^{n(u)} x_k y_k \mid x_k \in I, y_k \in J \right\}$$

линейного пространства A над полем F .

Заметим, что в общем случае произведение идеалов алгебры не обязано быть идеалом. Пусть, например, A — свободная неассоциативная алгебра, I порождён элементом a , а J — элементом b . Тогда $(ab)a \notin IJ$.

Идеал P алгебры A над полем F называется *первичным*, если в фактор-алгебре A/P произведение ненулевых идеалов всегда отлично от нуля. *Первичным радикалом алгебры A* ($\text{rad}(A)$) называется пересечение всех первичных идеалов алгебры A . Известно, что $\text{rad}(L)$ алгебры Ли L над полем F является совокупностью строго нильпотентных (t -нильпотентных) элементов (см. [13]). Элемент $a \in L$ называется *t -нильпотентным*, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$ и $a_{k+1} \in I_{a_k} I_{a_k}$ начиная с некоторого места все элементы равны нулю. (Здесь I_{a_k} — наименьший идеал алгебры L , содержащий элемент a_k .)

Первичный радикал исследовался в различных частично упорядоченных алгебраических системах. В классе решёточно упорядоченных колец первоначально идея первичного радикала рассматривалась в работе Г. Биркгофа и Р. Пирса [19] (см. также [2]). В работах А. В. Михалёва и М. А. Шаталовой получено

позлементное описание первичного радикала в классах ассоциативных решёточно упорядоченных колец [7], решёточно упорядоченных групп [8] и модулей [9]. В работах А. В. Михалёва и Е. Е. Ширшовой [10, 11, 16] полученоazole элементное описание первичного радикала в некоторых классах направленных групп, а в [12] полученоazole элементное описание первичного радикала в классе неассоциативных направленных псевдоупорядоченных колец. В работе Ю. В. Кочетовой и Е. Е. Ширшовой [6] можно найтиazole элементное описание первичного радикала решёточно псевдоупорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем.

Целью данной работы является характеристика аналога первичного радикала алгебры в классе направленных псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями. Интерес к этому мотивирован свойствами частично упорядоченных алгебр Ли и других алгебр без единицы.

В статье используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных алгебраических систем (см. [2, 4, 14]).

В следующем разделе исследуются свойства порядковых гомоморфизмов частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями.

Определение 5. Идеал (подпространство) M частично псевдоупорядоченной алгебры A (частично упорядоченного линейного пространства V) над частично упорядоченным полем F называется выпуклым (направленным) идеалом (подпространством), если группа $\langle M, +, \leq \rangle$ является выпуклой (направленной) подгруппой группы $\langle A, +, \leq \rangle$ ($\langle V, +, \leq \rangle$).

Определение 6. Пусть

$$A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq_1 \rangle, \quad B = \langle B, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq_2 \rangle -$$

частично псевдоупорядоченные алгебры над частично упорядоченным полем F . Отображение f алгебры A в алгебру B называется o -гомоморфизмом алгебр, если выполняются следующие условия:

- 1) f — гомоморфизм кольца $\langle A, +, \cdot \rangle$ в кольцо $\langle B, +, \cdot \rangle$;
- 2) f — гомоморфизм линейного пространства $\langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\} \rangle$ в линейное пространство $\langle B, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\} \rangle$;
- 3) $f(A^+) \subseteq B^+$;

при этом f называется строгим o -гомоморфизмом алгебр, если выполняется условие

- 4) $f(A^+) = B^+ \cap f(A)$.

Если для o -гомоморфизма алгебр f существует o -гомоморфизм алгебр f^{-1} , то f называется o -изоморфизмом алгебр.

В данном разделе работы содержится доказательство следующей теоремы об o -гомоморфизмах псевдоупорядоченных алгебр.

Теорема 1. Если A является частично псевдоупорядоченной алгеброй над частично упорядоченным полем F , то справедливы следующие утверждения.

1. Если $f: A \rightarrow B$ — o -гомоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр, то ядро гомоморфизма f ($\ker f$) является выпуклым идеалом алгебры A .

2. Если I — выпуклый идеал алгебры A , то

- а) фактор-алгебра A/I является частично псевдоупорядоченной алгеброй;
- б) канонический гомоморфизм алгебр $\pi: A \rightarrow A/I$ является строгим o -гомоморфизмом алгебр;
- в) если I и J — идеалы алгебры A , $K = \pi(I)$ и $L = \pi(J)$, то

$$KL = \{u = z + M \mid z \in IJ\} = \{\pi(z) + M \mid z \in IJ\},$$

т. е.

$$\pi(I)\pi(J) = \pi(IJ).$$

- 3. Если $f: A \rightarrow B$ — строгий o -гомоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр, то существует o -изоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр $\varphi: A/\ker f \rightarrow f(A)$, где $\varphi(a + \ker f) = f(a)$ для всех $a \in A$.
- 4. Если I — выпуклый направленный идеал алгебры A , K — выпуклый направленный идеал алгебры A/I , то в алгебре A существует выпуклый направленный идеал J , для которого $\pi(J) = K$.

Элементы a и b из G^+ называются *почти ортогональными* или *АО-элементами* (*almost orthogonal elements*) в частично упорядоченной группе $G = \langle G, +, \leq \rangle$, если из неравенств $x \leq a, b$ следуют неравенства $nx \leq a, b$ для всех $x \in G$ и целых положительных чисел n .

Ортогональные элементы (те, у которых точная нижняя грань равна нулю) обладают указанным свойством. Но не только они.

Рассмотрим группу $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, в которой $(a, b) \in G^+ \setminus \{(0, 0)\}$, если $a > 0$ и $b > 0$. Тогда элементы $u = (3, 1)$ и $v = (1, 3)$ почти ортогональны в группе G , но не ортогональны, так как, например, $(-1, 0) \leq u, v$, но $(-1, 0) \not\parallel (0, 0)$.

Частично упорядоченную группу $G = \langle G, +, \leq \rangle$ называют *АО-группой*, если любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где элементы a и b почти ортогональны в группе G . Класс АО-групп является подклассом направленных групп и включает в себя класс псевдорешёточно упорядоченных групп и, следовательно, классы линейно упорядоченных и решёточно упорядоченных групп (подробнее см., например, в [21]).

Определение 7. Частично псевдоупорядоченное кольцо $R = \langle R, +, \cdot, \leq \rangle$ называется АО-упорядоченным кольцом, если группа $\langle R, +, \leq \rangle$ является АО-группой.

Частично псевдоупорядоченную алгебру $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq \rangle$ над частично упорядоченным полем F будем называть АО-упорядоченной алгеброй, если кольцо $\langle A, +, \cdot, \leq \rangle$ является АО-упорядоченным кольцом.

Примерами таких алгебр открывается третий раздел, в котором исследуются свойства идеалов АО-упорядоченных алгебр.

Надо отметить, что М. Якубикова [20] привела пример направленной группы, в которой пересечение выпуклых направленных подгрупп не является направленным, но в любой АО-группе пересечение выпуклых направленных подгрупп сохраняет направленность (см. [21, теорема 1]). Это обстоятельство и

обуславливает выбор данного класса псевдоупорядоченных алгебр для рассмотрения свойств первичного радикала.

Пусть $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq_1 \rangle$ и $B = \langle B, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq_2 \rangle$ являются $\mathcal{AO}$ -упорядоченными алгебрами над частично упорядоченным полем F .

Определение 8. Отображение f алгебры A в алгебру B называется $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмом алгебр, если

- 1) f является гомоморфизмом кольца $\langle A, +, \cdot \rangle$ в кольцо $\langle B, +, \cdot \rangle$;
- 2) f является гомоморфизмом линейного пространства $\langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\} \rangle$ в линейное пространство $\langle B, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\} \rangle$;
- 3) из почти ортогональности элементов a и b в алгебре A следует почти ортогональность их образов $f(a)$ и $f(b)$ в алгебре B .

Доказательства следующих двух теорем об $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмах содержатся в третьем разделе.

Теорема 2. Пусть A — $\mathcal{AO}$ -упорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если f — $\mathcal{AO}$ -гомоморфизм алгебры A в $\mathcal{AO}$ -упорядоченную алгебру B , то
 - а) f является строгим o -гомоморфизмом алгебр;
 - б) ядро гомоморфизма f является выпуклым направленным идеалом алгебры A .
2. Если I — выпуклый направленный идеал алгебры A , то
 - а) фактор-алгебра A/I является $\mathcal{AO}$ -упорядоченной алгеброй над полем F ;
 - б) канонический гомоморфизм алгебр $\pi: A \rightarrow A/I$ является $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмом алгебр;
 - в) если J — выпуклый направленный идеал алгебры A , то $\pi(J)$ — выпуклый направленный идеал алгебры A/I .
3. Если f — $\mathcal{AO}$ -гомоморфизм алгебры A в $\mathcal{AO}$ -упорядоченную алгебру B , то существует o -изоморфизм алгебр $\varphi: A/\ker f \rightarrow f(A)$.

Теорема 3. Пусть $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq \rangle$ — $\mathcal{AO}$ -упорядоченная алгебра над направленным полем F , $x \in A$ и $x = a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов в группе $\langle A, +, \leq \rangle$. Тогда существует выпуклый направленный идеал I_x алгебры A , для которого

$$I_x^+ = \{u \in A^+ \mid u \leq \alpha a + \alpha b \text{ для некоторых } \alpha > 0 \text{ из поля } F\}.$$

Если J — выпуклый направленный идеал алгебры A и $x \in J$, то $I_x \subseteq J$.

Определение 9. Пусть A — $\mathcal{AO}$ -упорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F . Алгебру A будем называть $\mathcal{AO}$ -первичной, если для любых выпуклых направленных идеалов I и J алгебры A из $IJ = 0$ следует $I = 0$ или $J = 0$. Выпуклый направленный идеал P алгебры A будем называть $\mathcal{AO}$ -первичным, если фактор-алгебра A/P является $\mathcal{AO}$ -первичной алгеброй. Пересечение

всех $\mathcal{AO}$ -первичных идеалов алгебры A будем называть $\mathcal{AO}$ -первичным радикалом алгебры A ($\mathcal{AO}\text{-rad}(A)$).

Определение 10. Пусть A — $\mathcal{AO}$ -упорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F . Будем называть элемент $a \in A$ псевдо- t -нильпотентным, если в любой последовательности (a_i) элементов алгебры, где $a_0 = a$ и $a_{k+1} \in I_{a_k} I_{a_k}$, начиная с некоторого места все элементы равны нулю. (Здесь I_{a_k} — наименьший выпуклый направленный идеал алгебры A , содержащий элемент a_k .)

Основными результатами данной статьи являются следующие теоремы, доказательства которых приведены в четвёртом разделе.

Теорема 4. Пусть A — $\mathcal{AO}$ -упорядоченная алгебра над направленным F . Тогда $\mathcal{AO}$ -первичный радикал $\mathcal{AO}\text{-rad}(A)$ совпадает с совокупностью псевдо- t -нильпотентных элементов алгебры A .

Теорема 5. Пусть A — $\mathcal{AO}$ -упорядоченная алгебра над направленным полем F , $M = \mathcal{AO}\text{-rad}(A)$. Тогда $\mathcal{AO}$ -первичный радикал алгебры A/M равен $\{M\}$, т. е. $\mathcal{AO}\text{-rad}(A/M) = \{M\}$.

2. Гомоморфизмы частично псевдоупорядоченных алгебр. Доказательство теоремы 1

Начнём с примеров псевдоупорядоченных алгебр.

Пример 1 (см. [6]). Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра строго верхнетреугольных матриц над линейно упорядоченным полем $\mathbb{R}$.

Положим

$$A = (a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что $A = (a, b, c) \in \mathcal{A}^+$, если $a > 0$, или $a = 0$ и $b > 0$, или $a = b = 0$ и $c \geq 0$. В этом случае $\langle \mathcal{A}, +, \leq \rangle$ — линейно упорядоченная группа. Кроме того, $\mathcal{A}$ — частично упорядоченное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Если $A \geq (0, 0, 0)$, то $A - AB = (a, b, c - av) \geq (0, 0, 0)$ и $A - BA = (a, b, c - ub) \geq (0, 0, 0)$ для любой матрицы $B = (u, v, w) \in \mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{A}$ — ассоциативная линейно псевдоупорядоченная алгебра.

Пример 2 (см. [6]). Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{R}$ из примера 1, определив на ней новый частичный порядок.

Будем считать, что $A = (a, b, c) \in \mathcal{A}^+$, если или $a > 0$ и $b > 0$, или $a = b = 0$ и $c \geq 0$. В этом случае $\langle \mathcal{A}, +, \leq \rangle$ — направленная группа. Кроме того, $\mathcal{A}$ — частично упорядоченное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Если $A \geq (0, 0, 0)$, то $A - AB = (a, b, c - av) \geq (0, 0, 0)$ и $A - BA = (a, b, c - ub) \geq (0, 0, 0)$ для любой матрицы $B = (u, v, w) \in \mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{A}$ — ассоциативная направленная псевдоупорядоченная алгебра над полем $\mathbb{R}$.

Пример 3. Пусть A — ассоциативная линейно псевдоупорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем F . Тогда, учитывая определение 2.1.3, теорему 2.2.1 и следствие 2.1.1 из [6], можно сделать следующие выводы.

Если $0 \leq a$ в алгебре A , то $ab + ba \leq a$ и $ab - ba \leq a$ для любого элемента $b \in A$.

Рассмотрим для алгебры A соответствующую алгебру Ли $A^- = \langle A, +, \circ \rangle$, где $a \circ b = ab - ba$ для всех элементов $a, b \in A$. Тогда согласно сказанному выше A^- становится линейно псевдоупорядоченной алгеброй Ли над полем F .

Рассмотрим для алгебры A соответствующую йорданову алгебру $A^+ = \langle A, +, * \rangle$, где $a * b = ab + ba$ для всех элементов $a, b \in A$. Тогда согласно сказанному выше A^+ становится линейно псевдоупорядоченной йордановой алгеброй над полем F .

Напомним нужные нам свойства псевдоупорядоченных алгебр, доказательства которых можно найти в [6].

Лемма 6 [6, предложения 2.2.3 и 2.3.1, теоремы 2.3.1 и 2.3.3]. Если $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq \rangle$ — частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F , то справедливы следующие утверждения.

1. Если I — выпуклое направленное подпространство линейного пространства $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leq \rangle$ над полем F , то I является идеалом алгебры A .
2. Если I — выпуклый идеал алгебры A , то фактор-алгебра A/I является частично псевдоупорядоченной алгеброй над полем F .
3. Если I — выпуклый направленный идеал алгебры A , K — выпуклый направленный идеал фактор-алгебры A/I , то в алгебре A существует выпуклый направленный идеал J , для которого $\pi(J) = K$.
4. Если f является o -гомоморфизмом алгебры A в частично псевдоупорядоченную алгебру B , то ядро гомоморфизма f является выпуклым идеалом алгебры A .

Лемма 7. Если R является частично псевдоупорядоченным кольцом (см. определение 3), то справедливы следующие утверждения.

1. Если M — выпуклый идеал кольца R , то
 - а) канонический гомоморфизм колец $\pi: R \rightarrow R/M$, где $\pi(r) = r + M$ для любого $r \in R$, является строгим o -гомоморфизмом колец;
 - б) если I и J — идеалы кольца R , $K = \pi(I)$ и $L = \pi(J)$, то

$$KL = \{u = z + M \mid z \in IJ\} = \{\pi(z) + M \mid z \in IJ\},$$

т. е.

$$\pi(I)\pi(J) = \pi(IJ).$$

2. Если f — строгий o -гомоморфизм кольца R в частично псевдоупорядоченное кольцо S , то существует o -изоморфизм частично псевдоупорядоченных колец $\varphi: R/\ker f \rightarrow f(R)$ по правилу $\varphi(r + \ker f) = f(r)$ для любого $r \in R$.

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [12, теорема 3]. $\square$

Доказательство теоремы 1. Утверждение 1 теоремы является следствием утверждения 4 леммы 6.

Утверждение 2 а) теоремы является следствием утверждения 2) леммы 6.

Докажем утверждение 2 б). Заметим, что канонический гомоморфизм π алгебры A на алгебру A/I является гомоморфизмом кольца $\langle A, +, \cdot \rangle$ на кольцо $\langle A/I, +, \cdot \rangle$, где по определению 4 A — частично псевдоупорядоченное кольцо. Отсюда по утверждению 1 а) леммы 7 следует, что π является строгим o -гомоморфизмом колец. С другой стороны, π — гомоморфизм линейных пространств. Следовательно, по определению 6 справедливо утверждение 2 б) теоремы.

Утверждение 2 в) теоремы является следствием утверждения 2 б) леммы 7.

Докажем утверждение 3 теоремы. Если f — строгий o -гомоморфизм псевдоупорядоченных алгебр, то по определению 6 отображение f является строгим o -гомоморфизмом псевдоупорядоченных колец, поэтому по утверждению 2 леммы 7 существует o -изоморфизм φ кольца $A/\ker f$ на кольцо $f(A)$, где $\varphi(a + \ker f) = f(a)$ для любого $a \in A$. Таким образом, для π справедливы условия 1) и 4) определения 6.

Пусть $\alpha \in F$ и $a + \ker f \in A/\ker f$. Тогда

$$\varphi(\alpha(a + \ker f)) = \varphi(\alpha a + \ker f) = f(\alpha a) = \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot \varphi(a + \ker f).$$

Значит, для π справедливо условие 2) определения 6, т. е. π — гомоморфизм линейных пространств. Следовательно, по определению 6 π — o -изоморфизм алгебр.

Утверждение 4 теоремы следует из утверждения 3 леммы 6.

Теорема 1 доказана полностью. $\square$

Лемма 8. Для частично упорядоченной группы $G = \langle G, +, \leq \rangle$ следующие условия равносильны:

- 1) G является направленной группой;
- 2) для нуля и каждого элемента $a \in G$ существует верхняя грань;
- 3) каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где $a, b \in G^+$.

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [14, ч. I, гл. II, § 1, предложение 1]. $\square$

Лемма 9. Пусть A — частично псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F , $a \in A$ и $a > 0$. Тогда в алгебре A существует выпуклый направленный идеал алгебры I_a , для которого

$$I_a^+ = \{x \in A^+ \mid x \leq \alpha a \text{ для некоторых } \alpha > 0 \text{ из поля } F\}.$$

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [18, теорема 1]. $\square$

Лемма 10. Если $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq \rangle$ — частично псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F , то для любого элемента $a > 0$ в алгебре A существует выпуклый направленный идеал алгебры I_a , являющийся наименьшим выпуклым идеалом алгебры, содержащим элемент a .

Доказательство. Пусть $0 < a \in A$. Из леммы 9 следует существование выпуклого направленного идеала алгебры I_a . Пусть J — выпуклый идеал алгебры A , для которого $a \in J$. Если $x \in I_a^+$, то по лемме 9 $0 \leq x \leq \alpha a$ для некоторого $\alpha > 0$ из поля F . Так как J — подпространство линейного пространства $\langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\} \rangle$ над полем F , то $\alpha a \in J$. Значит, $x \in J$, так как J — выпуклый идеал алгебры A . Таким образом, $I_a^+ \subset J$. Так как I_a — направленный идеал алгебры A , то по утверждению 3) леммы 8 $I_a \subseteq J$. $\square$

3. Идеалы $\mathcal{AO}$ -упорядоченных алгебр. Доказательства теорем 2 и 3

Начнём с примеров.

Пример 4. Пусть $\mathbb{R}$ — аддитивная группа действительных чисел с естественной упорядоченностью, $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — прямое произведение линейно упорядоченных групп. Тогда B — решёточно упорядоченная группа (см. [14, ч. I, гл. II, § 6]).

Рассмотрим лексикографическое произведение $D = \overrightarrow{B \times B}$ решёточно упорядоченных групп. В этом случае D не является решёточно упорядоченной группой (см. [14, ч. I, гл. II, § 7]). С другой стороны, D — псевдорешёточная группа (см. [15]), поэтому, D — $\mathcal{AO}$ -группа (см. [21, лемма (B)]). В этом случае элемент $g = ((a, b), (c, d))$ считается положительным, если выполняется одно из следующих условий: $0 < a$ и $0 \leq b$, или $0 \leq a$ и $0 < b$, или $a = b = 0$, а $0 \leq c$ и $0 \leq d$.

Если обозначить $F = \mathbb{R}$ и для $\alpha \in F$ положить $\alpha g = ((\alpha a, \alpha b), (\alpha c, \alpha d))$, то D станет частично упорядоченным линейным пространством над полем F .

Определим на группе D операцию умножения $\circ$: если $g_1 = ((a, b), (c, d))$ и $g_2 = ((u, v), (s, t))$, то положим $g_1 \circ g_2 = ((0, 0), (0, av - ub))$. Тогда $A = \langle D, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \circ \rangle$ — алгебра Ли над полем F .

Если $0 < g_1$, то $g_1 \circ g_2 \leq g_1$ и $g_2 \circ g_1 \leq g_1$ для всех $g_2 \in A$. Поэтому A — $\mathcal{AO}$ -упорядоченная алгебра Ли, не являющаяся решёточно упорядоченной.

Пример 5. Рассмотрим частично упорядоченное линейное пространство D над полем F из примера 4. Определим на D новую операцию умножения $*$: если $g_1 = ((a, b), (c, d))$ и $g_2 = ((u, v), (s, t))$, то положим $g_1 * g_2 = ((0, 0), (0, av + ub))$. Тогда $A_1 = \langle D, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, * \rangle$ — йорданова алгебра над полем F .

Если $0 < g_1$, то $g_1 * g_2 \leq g_1$ и $g_2 * g_1 \leq g_1$ для всех $g_2 \in A$. Поэтому A_1 — $\mathcal{AO}$ -упорядоченная йорданова алгебра, не являющаяся решёточно упорядоченной.

Лемма 11. Если R является $\mathcal{AO}$ -упорядоченным кольцом (см. определение 7), то справедливы следующие утверждения.

1. Если f — $\mathcal{AO}$ -гомоморфизм кольца R в $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо S , то
 - а) f является строгим o -гомоморфизмом колец;
 - б) ядро гомоморфизма f является выпуклым направленным идеалом кольца R .
2. Если I — выпуклый направленный идеал кольца R , то
 - а) фактор-кольцо R/I является $\mathcal{AO}$ -упорядоченным кольцом;
 - б) канонический гомоморфизм $\pi: R \rightarrow R/I$ является $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмом колец;
 - в) если J — выпуклый направленный идеал кольца R , то $\pi(J)$ — выпуклый направленный идеал кольца R/I .

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [12, теорема 4]. $\square$

Доказательство теоремы 2. Отметим, что если f является $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмом $\mathcal{AO}$ -упорядоченной алгебры $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq_1 \rangle$ в $\mathcal{AO}$ -упорядоченную алгебру $B = \langle B, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leq_2 \rangle$ над полем F , то в силу определений 6 и 8 справедливы следующие утверждения:

f является o -гомоморфизмом частично псевдоупорядоченной алгебры A
в частично псевдоупорядоченную алгебру B ; (*)

f является $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмом $\mathcal{AO}$ -упорядоченного кольца $A_1 = \langle A, +, \cdot, \leq_1 \rangle$
в $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо $B_1 = \langle B, +, \cdot, \leq_2 \rangle$. (**)

В этом случае по замечанию (**) и утверждению 1 а) леммы 11 имеет место равенство $f(A_1^+) = f(A_1) \cap B_1^+$.

Из определения 4 и [6, теорема 2.1.1] следуют равенства $A^+ = A_1^+$ и $B^+ = B_1^+$. По определению 6 утверждение 1 а) теоремы 2 является справедливым.

По замечанию (*) и утверждению 1 теоремы 1 ядро $\ker f$ является выпуклым идеалом алгебры A . Из замечания (**) и утверждения 1 б) леммы 11 следует, что $\ker f$ является направленным идеалом кольца A_1 . Следовательно, справедливо утверждение 1 б) теоремы 2.

По замечанию (*) и утверждению 2 а) теоремы 1 фактор-алгебра A/I является частично псевдоупорядоченной алгеброй. По замечанию (**) и утверждению 2 а) леммы 11 фактор-кольцо A_1/I является $\mathcal{AO}$ -упорядоченным кольцом. Из определения 7 следует справедливость утверждения 2 а) теоремы 2.

Из замечания (**) и утверждения 2 б) леммы 11 следует справедливость утверждения 2 б) теоремы 2.

Пусть J — выпуклый направленный идеал алгебры A . По замечанию (**) и утверждению 2 в) леммы 11 $\pi(J)$ — выпуклый направленный идеал кольца A_1/I . С другой стороны, J — подпространство пространства $A = \langle A, +,$

$\{\alpha \mid \alpha \in F\}$ над полем F . Если $X \in \pi(J)$, то существует элемент $a \in J$, для которого $X = a + I$. Пусть $\alpha \in F$, тогда

$$\alpha X = \alpha(a + I) = \alpha a + I, \text{ где } \alpha a \in J.$$

Значит, $\alpha X \in \pi(J)$. Таким образом, $\pi(J)$ — идеал алгебры A/I , т. е. справедливо утверждение 2 в) теоремы 2.

Утверждение 3 теоремы 2 является следствием утверждения 1 а) теоремы 2, замечания (*) и утверждения 3 теоремы 1. Тем самым теорема 2 доказана полностью. $\square$

Лемма 12. Пусть M — выпуклая направленная подгруппа частично упорядоченной группы $G = \langle G, +, \leq \rangle$. Если $m \in M$ и $m = a - b$ для некоторых элементов a и b из G^+ , почти ортогональных в группе G , то $a, b \in M$.

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [21, лемма 2]. $\square$

Доказательство теоремы 3. Так как $a, b \in A^+$, то $a + b \in A^+$. По лемме 10 существует выпуклый направленный идеал I_{a+b} алгебры A . Пусть J — произвольный выпуклый направленный идеал алгебры A и $x \in J$. Тогда по лемме 12 $a, b \in J$. Значит, $a + b \in J$.

Пусть $u \in I_{a+b}^+$. Тогда справедливы неравенства $0 \leq u \leq \alpha(a + b)$ для некоторых $\alpha > 0$ из поля F . Так как J — подпространство пространства A над полем F , то $\alpha(a + b) \in J$. Так как J — выпуклый идеал алгебры A , то $u \in J$. Таким образом, справедливо включение $I_{a+b}^+ \subset J$.

Так как I_{a+b} — направленный идеал алгебры A , то по утверждению 3 леммы 8 верно включение $I_{a+b} \subseteq J$. С другой стороны, так как имеют место неравенства $0 \leq a, b \leq a + b$ и I_{a+b} — выпуклый идеал алгебры A , то $a, b \in I_{a+b}$, т. е. $x \in I_{a+b}$. Значит, $I_x = I_{a+b}$. Итак, теорема 3 доказана. $\square$

Лемма 13. Пусть A — $\mathcal{AO}$ -упорядоченная алгебра над направленным полем F , J — выпуклый направленный идеал алгебры A и $x \in A \setminus J$. Если $y \in I_x$, то $y + J \in I_{x+J}$ в фактор-алгебре A/J .

Доказательство. Из условия леммы следует, что $x = a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов алгебры A . Тогда в алгебре A/J имеет место равенство $x + J = (a + J) - (b + J)$, где по утверждению 2 б) теоремы 2 классы $a + J$ и $b + J$ почти ортогональны в группе A/J . Так как по утверждению 2 а) теоремы 2 фактор-алгебра A/J является $\mathcal{AO}$ -упорядоченной алгеброй над направленным полем F , то по теореме 3 существует выпуклый направленный идеал алгебры $I_{x+J} = I_{(a+J)+(b+J)}$. Так как $(a + J) + (b + J) = (a + b) + J$, то $I_{x+J} = I_{a+b+J}$.

Пусть $u \in I_x^+$. Тогда по лемме 9 $0 \leq u \leq \alpha(a + b)$ для некоторого $\alpha > 0$ из поля F . В этом случае в алгебре A/J имеют место соотношения

$$J \leq u + J \leq \alpha(a + b) + J = \alpha(a + b + J).$$

Согласно лемме 9 это означает, что $u + J \in I_{a+b+J}$, т. е., как следует из сказанного выше, $u + J \in I_{x+J}$.

Рассмотрим произвольный элемент $y \in I_x$. Так как I_x — направленный идеал, то по утверждению 3 леммы 8 $y = u - v$ для некоторых $u, v \in I_x^+$. Тогда в фактор-алгебре A/J имеет место равенство $y + J = (u + J) - (v + J)$. Из вышесказанного следует, что $u + J, v + J \in I_{x+J}$. Значит, $y + J \in I_{x+J}$. $\square$

4. АО-первичные идеалы.

Доказательство теорем 4 и 5

Лемма 14. Пусть A — АО-упорядоченная алгебра над направленным полем F . Если в алгебре A существует последовательность (a_i) из элементов, удовлетворяющих условию $a_{k+1} \in I_{a_k} I_{a_k}$, в которой для любого индекса i $a_i \neq 0$, то в алгебре A существует АО-первичный идеал P , который не содержит никаких членов последовательности (a_i) .

Доказательство. Рассмотрим множество $M = \{I_j \mid j \in J\}$, где I_j — выпуклый направленный идеал алгебры A , который не содержит членов последовательности (a_i) . Так как $\{0\} \in M$, то $M \neq \emptyset$. Пусть цепь

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots \quad (5)$$

состоит из идеалов множества M .

Обозначим через I объединение всех идеалов цепи (5). Тогда I — выпуклый направленный идеал алгебры A , который не содержит членов последовательности (a_i) , т. е. $I \in M$.

В силу леммы Цорна существуют максимальные выпуклые направленные идеалы алгебры, которые не содержат членов последовательности (a_i) . Пусть P — максимальный выпуклый направленный идеал алгебры A , который не содержит членов последовательности (a_i) . Докажем, что P является АО-первичным идеалом в алгебре A . Для этого рассмотрим в алгебре A/P выпуклые направленные идеалы

$$K \neq \{P\} \text{ и } L \neq \{P\}.$$

По утверждению 4 теоремы 1 существуют выпуклые направленные идеалы I и J алгебры A , для которых $\pi(I) = K$ и $\pi(J) = L$. Тогда $P \subset I$ и $P \subset J$.

Из максимальной идеала P следует существование элементов $a_s \in I$ и $a_t \in J$, которые являются членами последовательности (a_i) . Если $s \neq t$, то для определённости будем считать, что $s < t$.

Из теоремы 3 следует существование идеалов I_{a_s} и I_{a_t} , для которых верны включения $I_{a_s} \subseteq I$ и $I_{a_t} \subseteq J$. Так как по определению произведения идеалов $I_{a_s} I_{a_s} \subseteq I_{a_s}$, то $I_{a_s} I_{a_s} \subseteq I$. Тогда по определению последовательности (a_i) $a_{s+1} \in I \cap (a_i)$.

Рассуждая аналогично, через конечное число шагов увидим, что $a_t \in I$. По теореме 3 верно включение $I_{a_t} \subseteq I$. По определению последовательности это

означает, что $a_{t+1} \in IJ$. По утверждению 2 в) теоремы 1 существует смежный класс $a_{t+1} + P \in KL$. С другой стороны, $a_{t+1} \notin P$, значит, $a_{t+1} + P \neq P$. Таким образом, $KL \neq \{P\}$. Следовательно, фактор-алгебра A/P является $\mathcal{AO}$ -первичной алгеброй. $\square$

Лемма 15. Пусть A — $\mathcal{AO}$ -упорядоченная алгебра над направленным полем F . Если $a \notin \mathcal{AO}\text{-rad}(A)$, то существует последовательность (a_i) из элементов алгебры, где $a_0 = a$ и $a_{k+1} \in I_{a_k}I_{a_k}$, в которой для любого индекса i элемент a_i отличен от 0.

Доказательство. Так как $a \notin \mathcal{AO}\text{-rad}(A)$, то существует $\mathcal{AO}$ -первичный идеал P в алгебре A , для которого $a \notin P$. По теореме 3 это означает, что идеал I_a не является подмножеством идеала P .

По утверждению 2 в) теоремы 2 в алгебре A/P существует выпуклый направленный идеал $K = \pi(I_a) \neq \{P\}$. Так как P — $\mathcal{AO}$ -первичный идеал алгебры A , то фактор-алгебра A/P является $\mathcal{AO}$ -первичной алгеброй. Поэтому $KK \neq \{P\}$. Следовательно, найдётся элемент $u \in KK \setminus P$. По утверждению 2 в) теоремы 1 это означает, что существует элемент $z \in I_aI_a$, для которого $u = z + P$ и $z \notin P$. Положим $a_1 = z$. Так как $a_1 \notin P$, то по теореме 3 идеал I_{a_1} не является подмножеством идеала P .

Рассмотрев в алгебре A/P выпуклый направленный идеал $\pi(I_{a_1}) \neq \{P\}$, рассуждая аналогично предыдущему, найдём элемент $a_2 \in I_{a_1}I_{a_1}$, для которого $a_2 \notin P$. Процесс построения последовательности можно продолжить. $\square$

Доказательство теоремы 4. Если элемент a не является псевдо- t -нильпотентным, то по лемме 14 он не принадлежит $\mathcal{AO}$ -первичному радикалу алгебры A . Если же элемент a не принадлежит $\mathcal{AO}$ -первичному радикалу алгебры A , то по лемме 15 он не является псевдо- t -нильпотентным. Итак, теорема 4 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим смежный класс $X \in A/M$, где $X \neq M$. Тогда существует элемент $a_1 \notin M$ в алгебре A , для которого $X = a_1 + M$. Так как $a_1 \notin \mathcal{AO}\text{-rad}(A)$, то существует $\mathcal{AO}$ -первичный идеал P алгебры A , для которого $a_1 \notin P$. Тогда по теореме 3 идеал I_{a_1} не является подмножеством идеала P .

Повторив рассуждения леммы 15, найдём элемент $a_2 \in I_{a_1}I_{a_1}$, не принадлежащий идеалу P . Значит, $a_2 \notin M$. Так как $a_2 \in I_{a_1}I_{a_1}$, то

$$a_2 = \sum_{i=1}^{n(a)} x_i y_i, \quad \text{где } x_i, y_i \in I_{a_1}.$$

Из леммы 13 следует, что $x_i + M$ и $y_i + M$ принадлежат идеалу I_{a_1+M} в алгебре A/M . Таким образом,

$$a_2 + M \in I_{a_1+M}I_{a_1+M} \quad \text{и} \quad a_2 + M \neq M.$$

В этом случае найдётся элемент $a_3 \notin M$, для которого

$$a_3 + M \in I_{a_2+M}I_{a_2+M} \quad \text{и} \quad a_3 + M \neq M.$$

Продолжая процесс, можно получить в фактор-алгебре A/M последовательность смежных классов $(a_i + M)$, в которой для любого индекса i $a_i + M \neq M$. Следовательно, никакой ненулевой класс в фактор-алгебре A/M не является псевдо- t -нильпотентным. Тем самым теорема 5 доказана. $\square$

Литература

- [1] Бибеева В. Н., Ширшова Е. Е. О линейно K -упорядоченных кольцах // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 13—23.
- [2] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
- [3] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // *Алгебра и логика.* — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.
- [4] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.
- [5] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 53—63.
- [6] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал решёточно K -упорядоченных алгебр // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 85—158.
- [7] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных колец // *Сборник работ по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина.* — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178—184.
- [8] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных групп // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика.* — 1990. — № 2. — С. 84—86.
- [9] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал Ω -групп и Ω - l -групп // *Фундамент. и прикл. матем.* — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1405—1413.
- [10] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичные радикалы AO -групп // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 197—206.
- [11] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал pl -групп // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 193—199.
- [12] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных колец // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2019. — Т. 22, вып. 4. — С. 147—166.
- [13] Пихтильников С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли. — Тула: Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.
- [14] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.
- [15] Ширшова Е. Е. Лексикографические расширения и pl -группы // *Фундамент. и прикл. матем.* — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 1133—1138.
- [16] Ширшова Е. Е. О первичных радикалах и сплетениях частично упорядоченных групп // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2010. — Т. 16, вып. 8. — С. 245—261.
- [17] Ширшова Е. Е. О частично K -упорядоченных кольцах // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2016. — Т. 21, вып. 1. — С. 225—239.
- [18] Ширшова Е. Е. О частично упорядоченных алгебрах над полями // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2016. — Т. 21, вып. 4. — С. 249—263.
- [19] Birkhoff G., Pierce R. S. Lattice-ordered rings // *An. Acad. Brasil. Ci.* — 1956. — Vol. 28. — P. 41—69.

- [20] Jakubiková M. Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen // Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied. — 1971. — Vol. 21, no. 1. — P. 3—8.
- [21] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.