Односторонние изотопы конечномерных алгебр

Л. Р. БОРИСОВА
Финансовый университет при Правительстве РФ
e-mail: borisovalr@mail.ru

В. И. ГЛИЗБУРГ
Московский городской педагогический университет
e-mail: glizburg@mail.ru

С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ
Финансовый университет при Правительстве РФ
e-mail: pchelinzev@mail.ru

УДК 512.554

Ключевые слова: односторонние изотопы, $(-1,1)$-алгебра, алгебра Михеева.

Аннотация

Показано, что правые изотопы конечномерных $(-1,1)$-алгебр нельзя свести к левым. Доказано, что никакой унитальный изотоп алгебры Михеева не является левоальтернативной алгеброй. В частности, противоположная алгебра, вообще говоря, не является изотопом исходной алгебры.

Abstract

L. R. Borisova, V. I. Glizburg, S. V. Pchelintsev, One-sided isotopes of finite-dimensional algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2021), no. 4, pp. 3—16.

It is shown that the right isotopes of finite-dimensional $(-1,1)$-algebras cannot be reduced to left isotopes. It is proved that no unital isotope of the Mikheev algebra is a left alternative algebra. In particular, the opposite algebra, generally speaking, is not an isotope of the original algebra.

1. Введение

Отношение изотопии, как более широкое по сравнению с изоморфизмом, было введено в 1942 г. А. А. Албертом [7]. Он же доказал, что в классе конечномерных унитальных ассоциативных алгебр изотопные алгебры изоморфны.

Ряд важных результатов об изотопах получил Р. Х. Брак [9], ему принадлежит понятие *изотопно простой* алгебры. Он доказал теорему о наличии композиционного ряда в подходящем изотопе, факторы которого являются изотопно простыми алгебрами, а также показал, что не существует 2-мерных изотопно простых алгебр над алгебраически замкнутым полем.

Фундаментальная и прикладная математика, 2021, том 23, № 4, с. 3—16.

В 1952 г. А. И. Мальцев [2] доказал, что любая (неассоциативная) алгебра вложима в изотоп некоторой ассоциативной алгебры.

Частные типы изотопов, а именно c-изотопы, использовались в теории альтернативных и йордановых алгебр (см. [1, 14, 17, 18]). А. Теди [20], используя изотопы, доказал, что теорема Веддербёрна об отщеплении радикала не имеет места для правоальтернативных алгебр. Отметим, что аналог теоремы Алберта для алгебр Кэли был получен Р. Д. Шафером [18]. К. Маккриммон [17] доказал, что в классе унитальных алгебр изотоп конечномерной альтернативной алгебры является альтернативной алгеброй. Аналог теоремы Алберта для альтернативных алгебр доказан в [6].

Изучению изотопов также посвящены работы [8, 10—12, 19], в них рассматривались изотопы алгебр с делением, лиевых торов, алгебр Гурвица и некоторые другие вопросы.

В [16] изучались изотопы алгебр с ниль-базисом, в частности, было доказано, что так называемые «круговые» алгебры изотопно просты.

В [13] изучались изотопы простых альтернативных и йордановых алгебр произвольной размерности. Кроме того, там же с помощью изотопов доказана теорема о вложении конечномерной алгебры в простую.

К настоящему времени для конечномерных алгебр оставались открытыми два вопроса:

1) верно ли, что всякий изотоп $A^{(\varphi,\psi)}$ изоморфен левому изотопу вида $A^{(\xi,1)}$, где $1 = 1_A$ — тождественное отображение множества A на себя?
2) является ли антиизоморфная алгебра изотопом исходной? Заметим, что для конечномерных правоальтернативных полупростых алгебр ответ на этот вопрос положителен.

Данная заметка посвящена применению $(-1,1)$-алгебр к общей теории изотопов. В ней получены ответы на указанные два вопроса. Работа состоит из четырёх разделов. Раздел 1 — введение. В разделе 2 приведены определения основных понятий: изотопа, главного изотопа, c-изотопа и M_c-изотопа.

В разделе 3 приводятся свойства обратимых элементов правоальтернативных алгебр и критерий правой альтернативности правого изотопа $A^{(1,b)}$ для правоальтернативной алгебры A.

Заметим, что для алгебр бесконечной размерности отрицательный ответ на первый вопрос получен в [13]. В разделе 4 показано, что правые изотопы 4-мерной унитальной алгебры Михеева $M^{(1,b)}$ нельзя свести к левым изотопам вида $M^{(\varphi,1)}$. Кроме того, доказано, что противоположная (антиизоморфная) алгебра к M не является изотопом M. На самом деле доказано, что алгебра M не имеет унитальных левоальтернативных изотопов. Последний результат совсем нетривиален, поскольку в классе простых конечномерных алгебр изотоп коммутативной алгебры может быть антикоммутативен [16].

2. Основные понятия

2.1. Важнейшие типы изотопов

Под алгеброй понимается линейная алгебра над основным полем F, которое предполагается алгебраически замкнутым. Следуя А. А. Алберту [7], напомним определение.

Определение 1. Алгебры A и B называются *изотопными*, если существует такая тройка линейных изоморфизмов $\Lambda = (\varphi, \psi, \xi)\colon A \to B$, что

$$x^{\varphi} \cdot y^{\psi} = (xy)^{\xi} \quad \text{для любых} \quad x, y \in A.$$

Отношение изотопии является отношением эквивалентности, причём более широким, чем отношение изоморфизма.

Определение 2. Пусть $\varphi, \psi\colon A \to A$ — обратимые линейные операторы. Определим алгебру $A^* = (A; +, *)$ на том же линейном пространстве A относительно нового умножения $a * b = a^{\varphi} \cdot b^{\psi}$. Алгебра A^* называется *главным изотопом* A.

Известно [7], что алгебра, изотопная алгебре A, изоморфна главному изотопу алгебры A. Тем самым можно ограничиться рассмотрением только главных изотопов.

Если $\varphi, \psi\colon A \to A$ — обратимые линейные операторы, то всюду ниже $A^{(\varphi,\psi)}$ обозначает главный изотоп алгебры A.

Легко видеть, что главный изотоп можно получить в виде композиции двух «односторонних» изотопов $A^{(\varphi,\psi)} = \left(A^{(\varphi,1)}\right)^{(1,\psi)}$, где $1 = 1_A$ — тождественное отображение множества A на себя. Позже мы покажем, что главные изотопы $A^{(\varphi,\psi)}$ конечномерной алгебры A нельзя свести к левым изотопам вида $A^{(\xi,1)}$.

Пусть, как обычно, R_a и L_a обозначают операторы правого и левого умножения на элемент $a \in A$, т. е.

$$xR_a = xa, \quad xL_a = ax \quad \text{для любого} \quad x \in A.$$

Среди изотопов выделяют *внутренние* изотопы специальных типов, которые связаны с наборами операторов $(R_c, 1)$, $(L_c, 1)$ и (R_a, L_b); для этих изотопов будем использовать обозначения

$$A^{(c)} = A^{(R_c,1)}, \quad A^{[c]} = A^{(L_c,1)}, \quad A^{(a,b)} = A^{(R_a,L_b)}.$$

Изотоп вида $A^{(c)}$ называется *c-изотопом*, изотоп $A^{[c]}$ мы называем *изотопом в смысле Мальцева* (сокращённо *M_c-изотопом*). Изотопы вида $A^{(a,b)}$ ввёл К. Маккриммон [17] и назвал их *(a,b)-изотопами*.

2.2. Правоальтернативные алгебры

Как обычно, используются следующие обозначения: $[x, y] = xy - yx$ — коммутатор, $x \circ y = xy + yx$ — йорданово произведение, $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор указанных элементов.

Через $A^{(-)}$ и $A^{(+)}$ обозначаются присоединённые алгебры относительно коммутирования $[x,y]$ и симметризованного умножения $x \bullet y = \frac{1}{2}\, x \circ y$ соответственно.

Понятия ассоциативной, альтернативной, йордановой алгебры и алгебры Ли считаются известными. Алгебра A над полем характеристики, отличной от 2, называется *правоальтернативной*, если

$$(x,y,y) = 0 \quad \text{для любых} \quad x,y \in A.$$

Отметим, что $A^{(+)}$ — йорданова алгебра, если A правоальтернативна [1].

Нам потребуется ряд тождеств, выполняющихся в правоальтернативных алгебрах, доказательство которых можно найти в [1, 15]:

$$(a,x,y) + (a,y,x) = 0, \tag{1}$$

$$(a,x,xb) = (a,x,b)x, \tag{2}$$

$$(ab,x,y) + (a,b,[x,y]) = a(b,x,y) + (a,x,y)b, \tag{3}$$

$$\big((a,x,y),x,y\big) + (a,x,y)[x,y] = 0. \tag{4}$$

Тождество (2) называется правым тождеством Муфанг, а тождества (3) и (4) — тождествами Клейнфелда. Тождество (1) применяется, как правило, без пояснений.

Правоальтернативная алгебра над полем характеристики, отличной от 2, 3, называется $(-1,1)$-*алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$(x,y,z) + (y,z,x) + (z,x,y) = 0. \tag{5}$$

Правоальтернативная алгебра A удовлетворяет тождеству (5) тогда и только тогда, когда её коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ является алгеброй Ли.

2.3. Изотопы альтернативных алгебр

Алгебра с единицей (нейтральный элемент по умножению) называется *унитальной*. Одним из первых результатов, относящихся к изотопам, была следующая теорема Алберта.

Теорема 1 [7]. *Пусть A — унитальная ассоциативная алгебра. Если её главный изотоп $A^* = A^{(\varphi,\psi)}$ унитален, то алгебры A^* и A изоморфны.*

Напомним, что *центром* алгебры A называется множество

$$Z(A) = \{z \in A \mid [z,A] = (z,A,A) = (A,z,A) = (A,A,z) = 0\}.$$

Заметим, что если c обратим и $c \in Z(A)$, то отображение

$$A^{(c)} \to A, \quad x \mapsto xc^{-1}$$

является изоморфизмом алгебр.

Алгебра A называется *алгеброй с делением*, если для любых $a \neq 0$, $b \in A$ существуют единственные элементы x, y, такие что

$$ax = b, \quad ya = b.$$

Легко видеть, что класс алгебр с делением замкнут относительно изотопий, т. е. изотоп $A^* = A^{(\varphi,\psi)}$ алгебры с делением A является алгеброй с делением.

Если не налагается требование обратимости элементов (a, b), то по [17] алгебра $A^{(a,b)}$ называется (a, b)-*гомотопом* алгебры A. Следующий результат называется теоремой Маккриммона.

Теорема 2 [17]. *Справедливы следующие свойства:*

а) *гомотоп $A^* = A^{(a,b)}$ альтернативной алгебры A относительно умножения $x * y = xa \cdot by$ является альтернативной алгеброй;*

б) *если a, b — обратимые элементы альтернативной алгебры A, то отображение $R_b\colon A^{(bab)} \to A^{(a,b)}$ — изоморфизм изотопов.*

Недавно одним из авторов были доказаны следующие две теоремы.

Теорема 3 [6]. *Пусть A — конечномерная альтернативная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики, отличной от 3. Если алгебра A и её изотоп $A^* = A^{(\varphi,\psi)}$ унитальны, то они изоморфны.*

Теорема 4 [6]. *Пусть A — унитальная альтернативная алгебра над бесконечным полем F характеристики, отличной от 3. Тогда всякое тождество A является тождеством её (a, b)-гомотопа $A^* = A^{(a,b)}$.*

2.4. Одно замечание об изотопах Мальцева

Напомним, что алгебра называется *эластичной*, если она удовлетворяет тождеству $(x, y, x) = 0$. Всякая коммутативная или антикоммутативная алгебра эластична.

Предложение 1. *Пусть A — унитальная ассоциативная алгебра, $A^{[c]}$ — её M_c-изотоп. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

а) *алгебра $A^{[c]}$ правоальтернативна;*

б) *алгебра $A^{[c]}$ эластична;*

в) *$c \in Z(A)$ — центр алгебры A.*

Доказательство. Вычислим необходимые ассоциаторы в алгебре $A^* = A^{[c]}$:

$$\begin{aligned}(x, y, y)_* &= (x * y) * y - x * (y * y) = (cxy) * y - x * (cy^2) = \\ &= c(cxy)y - cx(cy^2) = ccxy^2 - cxcy^2 = c[c, x]y^2; \\ (x, y, x)_* &= (x * y) * x - x * (y * x) = (cxy) * x - x * (cyx) = \\ &= c(cxy)x - cx(cyx) = ccxyx - cxcyx = c[c, x]yx.\end{aligned}$$

Значит, справедливы эквивалентности

$$(x, y, y)_* = 0 \iff c \in Z(A) \iff (x, y, x)_* = 0. \qquad \square$$

Таким образом, из предложения 1 следует, что если M_c-изотоп алгебры A правоальтернативен или эластичен, то он ассоциативен и изоморфен исходной алгебре. В связи с доказанным предложением 1 отметим теорему Мальцева [2] о вложимости произвольной алгебры в M_c-изотоп $A^{[c]}$ подходящей ассоциативной алгебры A (хотя А. И. Мальцев доказывал вложимость в M_c-гомотоп, его доказательство проходит и для обратимого элемента c). Таким образом, всякая правоальтернативная (эластичная) алгебра вкладывается в алгебру $A^{[c]}$, которая не является правоальтернативной (эластичной).

3. Обратимые элементы и правые изотопы правоальтернативных алгебр

3.1. Обратимые элементы правоальтернативных алгебр

Определение 3. Пусть A — унитальная правоальтернативная алгебра. Элемент $a \in A$ называется *обратимым* в алгебре A, если найдётся элемент $b \in A$, такой что $ab = ba = 1$.

Следующая лемма является аналогом предложения 14.2 из [1].

Лемма 1. *Пусть A — унитальная правоальтернативная алгебра, $a \in A$. Тогда следующие свойства эквивалентны*:

а) *элемент a обратим в алгебре A*;
б) *элемент a обратим в $A^{(+)}$, т. е. найдётся элемент $b \in A$, такой что $a \bullet b = 1$, $a^2 \bullet b = a$, где $x \bullet y = \frac{1}{2}(x \circ y)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что а) влечёт б). Пусть для элементов a, b выполнено $ab = ba = 1$. Тогда имеем

$$2a \bullet b = ab + ba = 2$$

и

$$2a^2 \bullet b = a^2 b + ba^2 = -(ab)a + a(a \circ b) + (ba)a = 2a.$$

Докажем теперь, что б) влечёт а). Пусть найдётся элемент $b \in A$, такой что $a \bullet b = 1$, $a^2 \bullet b = a$. Проверим сначала, что $(ab)a = a$. Заметим, что

$$L_a R_a = U_a := 2a'^2 - (a^2)',$$

где $xa' = x \bullet a$, т. е. a' — оператор правого умножения на элемент a в алгебре $A^{(+)}$ (см. [1]). Тогда

$$(ab)a = bU_a = 2(b \bullet a) \bullet a - b \bullet a^2 = 2(1 \bullet a) - a = 2a - a = a.$$

Далее, $[a^2, b] = [a, a \circ b] = 2[a, 1] = 0$, откуда следует, что $a^2 b = ba^2 = a$. Так как $(ab)a = a = (ba)a$, то $[a, b]a = 0$. Аналогично $[a, b]b = 0$. Тогда

$$2[a, b] = [a, b](a \circ b) = [a, b]a \cdot b + [a, b]b \cdot a = 0,$$

откуда следует, что $[a, b] = 0$ и $ab = ba = 1$. □

Следствие 1. *Всякий обратимый элемент a правоальтернативной алгебры A обладает ровно одним обратным, который обозначается через a^{-1}. Кроме того, элементы, обратные к a, в алгебрах A и $A^{(+)}$ совпадают.*

В самом деле, если a обратим в алгебре A, то он обратим в йордановой алгебре $A^{(+)}$, т. е. найдётся элемент $b \in A$, такой что $a \bullet b = 1$, $a^2 \bullet b = a$. Известно [1], что для этих элементов также верно равенство $b^2 \bullet a = b$. Отсюда следует единственность элемента b. Осталось воспользоваться леммой 1.

Предложение 2. *Пусть a — обратимый элемент правоальтернативной алгебры A. Тогда операторы R_a, L_a, $U_a = L_a R_a$ также обратимы.*

Доказательство. По условию элемент a обратим в A, значит, он обратим в $A^{(+)}$. Тогда оператор U_a обратим; в частности, $1 = bU_a = (ab)a$ для некоторого $b \in A$. Применяя правое тождество Муфанг $R_a R_b R_a = R_{(ab)a}$, получаем обратимость оператора R_a. Наконец, оператор $L_a = U_a R_a^{-1}$ обратим как произведение обратимых операторов. □

Для правоальтернативных алгебр остаётся открытым вопрос, поставленный И. П. Шестаковым.

Вопрос. Является ли произведение обратимых элементов правоальтернативной алгебры обратимым элементом?

Для альтернативных алгебр ответ на указанный вопрос положителен, поскольку $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ для любых обратимых элементов a и b альтернативной алгебры. Отметим, что ответ на указанный вопрос неизвестен даже для $(-1,1)$-алгебр.

3.2. Изотопы вида $A^{(1,b)}$

Если A — правоальтернативная унитальная алгебра и элемент c обратим в A, то изотоп $A^{(c)}$ является правоальтернативной алгеброй с единицей c^{-1}. Известно, что алгебры A и $A^{(c)}$ имеют различные идеалы тождеств; аналогичный результат справедлив и для йордановых алгебр J и $J^{(c)}$ (см. [5]).

Лемма 2. *Пусть A — унитальная правоальтернативная алгебра, элемент b обратим в A и $A^* = A^{(1,b)}$ — её правый изотоп. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *алгебра A^* правоальтернативна тогда и только тогда, когда для любого $y \in A$ верно равенство $(b, y, by) = 0$;*

б) *алгебра A^* правоальтернативна тогда и только тогда, когда верно равенство $(b, b, A) = 0$;*

в) *если алгебра A^* имеет единицу ε, то $\varepsilon = b^{-1}$ и $(b^{-1}, b, y) = 0$.*

Доказательство. Поскольку в A^* умножение имеет вид $x * y = x(by)$, то

$$(x, y, y)_* = (x * y) * y - x * (y * y) = \big(x(by)\big) * y - x * \big(y(by)\big) =$$
$$= \big(x(by)\big)(by) - x\Big(b\big(y(by)\big)\Big) = x\big\{(by)^2 - b\big(y(by)\big)\big\} = x(b, y, by).$$

Отсюда вытекает а).

Равенство из б) получается из равенства $(b, y, by) = 0$ взятием частной производной по переменной y. Обратно, если $(b, b, A) = 0$, то в силу линеаризованного правого тождества Муфанг (2)

$$(b, y, by) = -(b, b, y^2) + (b, y, y)b + (b, b, y)y = 0.$$

Докажем в). Если алгебра A^* имеет единицу ε, то для любых $x, y \in A$

$$x = x * \varepsilon = x(b\varepsilon), \qquad y = \varepsilon * y = \varepsilon(by),$$

значит, $b\varepsilon = \varepsilon b = 1$ и $y = \varepsilon(by)$, откуда следует, что $\varepsilon = b^{-1}$ и $(b^{-1}, b, y) = 0$. □

Позже мы покажем, что $(1, b)$-изотоп правоальтернативной алгебры может не быть правоальтернативной алгеброй. Отсюда будет следовать, что «правые» изотопы, вообще говоря, не сводятся к «левым».

4. Односторонние изотопы $(-1, 1)$-алгебр

4.1. Обратимые элементы $(-1, 1)$-алгебр

В этом разделе A — унитальная $(-1, 1)$-алгебра. Положим, что $\mathrm{D}(A)$ — ассоциаторный идеал, т. е. идеал, порождённый ассоциаторами, $\mathrm{N}^*(A)$ — наибольший идеал, содержащийся в ассоциативном центре $\mathrm{N}(A)$.

Лемма 3. *Пусть A — унитальная $(-1, 1)$-алгебра и $a, b \in A$. Если $ab = 1$, то $(x, a, b) = 0$.*

Доказательство. Учитывая тождества Муфанг (2) и Клейнфелда (4), имеем

$$(x, a, b) = (x, a, b) \cdot 1 = (x, a, b) \cdot ab = (x, a, b)a \cdot b - \big((x, a, b), a, b\big) =$$
$$= (x, a, ab)b - \big((x, a, b), a, b\big) = -\big((x, a, b), a, b\big) = (x, a, b)[a, b],$$

следовательно,

$$(x, a, b) = (x, a, b)[a, b] = (x, a, b)[a, b]^4 \in \mathrm{D}(A) \cdot \mathrm{N}^*(A) = 0$$

на основании включения $[a, b]^4 \in \mathrm{N}^*(A)$, доказанного в [3]. □

Следствие 2. *Если $ab = 1$, $ca = 1$, то $b = c$.*

По лемме 3 $(c, a, b) = 0$, значит, $0 = (c, a, b) = (ca)b - c(ab) = b - c$.

Лемма 4. *Если $(-1, 1)$-алгебра A конечномерна, то равенства $ab = 1$ и $ba = 1$ равносильны.*

Доказательство. Допустим, что $ab = 1$, и рассмотрим оператор R_a. Если бы он был вырожденным, т. е. $xa = 0$ для некоторого $0 \neq x \in A$, то на основании леммы 3 было бы верно $0 = (xa)b = x(ab) = x \cdot 1 = x$, что невозможно. Значит, $\mathrm{Im}(R_a) = A$, откуда следует, что $ca = 1$ для некоторого c и в силу следствия 2 $b = c$, т. е. $ba = 1$. □

4.2. Вполне унитальные изотопы $(-1,1)$-алгебр

Следующая лемма является аналогом результатов Р. Д. Шафера [18] и К. Маккриммона [17] для альтернативных алгебр и доказывается точно так же.

Лемма 5. *Пусть A — конечномерная унитальная $(-1,1)$-алгебра. Если её изотоп $A^* = A^{(\varphi,\psi)}$ унитален, то $A^* = A^{(a,b)}$ для подходящих обратимых элементов a, b.*

Доказательство. Пусть ε — единица алгебры $A^* = A^{(\varphi,\psi)}$, умножение в которой имеет вид $x*y = x^\varphi y^\psi$. Тогда $x = x*\varepsilon = x^\varphi \cdot e^\psi$, а также $y = e*y = e^\varphi y^\psi$. Таким образом, $x = x^\varphi \cdot a$, $y = by^\psi$, где $a = \varepsilon^\psi$, $b = \varepsilon^\varphi$. В частности, $1 = 1^\varphi \cdot a = b \cdot 1^\psi$. Тогда по лемме 4 $\varphi = R_{a^{-1}}$; аналогично $\psi = L_{b^{-1}}$. Итак, можно считать, что $A^* = A^{(a,b)}$, т. е. $x*y = (xa)(by)$ для некоторых обратимых элементов a, b.

Заметим, что (a,b)-изотоп $A^{(a,b)}$ правоальтернативной алгебры A может не быть правоальтернативной алгеброй (см. раздел 4.3). □

4.3. Правые изотопы алгебры Михеева

Пусть M_3 — алгебра Михеева с базисом e, g, h и следующими ненулевыми произведениями базисных элементов:

$$e^2 = e, \quad ge = g, \quad g^2 = h.$$

Всюду далее элементы e, g, h обозначают указанные базисные элементы алгебры M_3.

Унитальной алгеброй Михеева называется алгебра M, полученная внешним присоединением единицы 1 к алгебре M_3. Эта алгебра играет важную роль в теории свободных $(-1,1)$-алгебр (см. [4]).

Лемма 6. *Если M — унитальная алгебра Михеева, то существует обратимый элемент $b \in M$, такой что правый изотоп $M^* = M^{(1,b)}$ не является правоальтернативной алгеброй.*

Доказательство. Заметим, что для $b = 1 + g$ верно

$$(b,b,e) = (g,g,e) = -h \neq 0;$$

элемент b обратим, поскольку g нильпотентен: $g^3 = 0$. Значит, в силу леммы 2 алгебра $M^{(1,b)}$ не правоальтернативна. □

Замечание 1. Пусть $M^* = M^{(1,b)}$, где $b = 1 + g$. Тогда алгебра M^* не является моноассоциативной, т. е. $(x,x,x)_* \neq 0$ для некоторого $x \in M$.

Доказательство. Допустим, от противного, что $(x,x,x)_* = 0$ — тождество. Тогда

$$0 = (x,x,x)_* = \big(x(bx)\big)(bx) - x\big(b(x \cdot bx)\big) = x(bx)^2 - x\big(b(x \cdot bx)\big) = x(b,x,bx),$$

значит, частная производная по x приводит к тождеству

$$0=(b,x,bx)+x(b,x,b),$$

откуда при $x=e$ имеем

$$0=(b,e,be)+e(b,e,b)=(g,e,ge)+e(g,e,g)=h.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Предложение 3. *Пусть M — унитальная алгебра Михеева. Тогда для некоторого обратимого $b\in M$ правый изотоп $M^{(1,b)}$ не представим в виде $M^{(\varphi,1)}$, т. е. не является левым изотопом.*

Доказательство. Заметим, что алгебра $M^{(1,b)}$ имеет правую единицу $p=b^{-1}$. В самом деле, так как $x*y=x(by)$, то $x*p=x(bp)=x(bb^{-1})=x$. Допустим, что $M^{(1,b)}\cong M^{(\varphi,1)}$, значит, алгебра $M^{\times}=M^{(\varphi,1)}$ относительно операции $x\times y=x^{\varphi}y$ также имеет правую единицу, т. е. для некоторого q верно $x=x\times q=x^{\varphi}q$. Отсюда ввиду леммы 4 вытекает, что q обратим и $\varphi=R_{q^{-1}}$. Тогда алгебра $M^{\times}=M^{(\varphi,1)}=M^{(c)}$, где $c=q^{-1}$, правоальтернативна. Однако по лемме 2 алгебра $M^{(1,b)}$ может не быть правоальтернативной. □

Лемма 7. *В алгебре M обратимы только элементы вида*

$$\alpha(1+\beta e+\gamma g+\delta h),$$

где $0\neq\alpha$, $\beta\neq-1\in F$.

Доказательство. Прямым вычислением в алгебре M можно убедиться в справедливости равенства

$$(1+\beta e+\gamma g+\delta h)^{-1}=1+\lambda e+\mu g+\nu h, \tag{6}$$

где $\lambda=-\beta(1+\beta)^{-1}$, $\mu=-\gamma$, $\nu=-\delta+\gamma^2$. □

Предложение 4. *Если правый изотоп $M^*=M^{(1,b)}$ для обратимого $b\in M$ правоальтернативен, то алгебры M^* и M изоморфны.*

Доказательство. По лемме 7 без ограничения общности можно считать, что $b=1+\beta e+\gamma g+\delta h$. Покажем сначала, что $\gamma=0$. В силу леммы 2 верно равенство $(b,b,M)=0$. Значит, учитывая соотношения $(e,e,M)=0$ и $h\in\mathrm{Ann}(M_3)$, получаем

$$0=(b,b,e)=(\beta e+\gamma g,\beta e+\gamma g,e)=(\beta e+\gamma g,\gamma g,e)=(\gamma g,\gamma g,e)=-\gamma^2h.$$

Отсюда следует, что $\gamma=0$ и $b=1+\beta e+\delta h$. Положим

$$1'=b^{-1},\quad e'=(1+\beta)^{-1}e,\quad g'=g,\quad h'=h.$$

Заметим, что в алгебре M^* $1'$ — единица, e' — идемпотент. Кроме того,

$$\begin{aligned}
e'*g&=(1+\beta)^{-1}e\Big(\big((1+\beta e)\big)g\Big)=(1+\beta)^{-1}eg=0,\\
g'*e'&=g(be')=g\big((1+\beta e)(1+\beta)^{-1}e\big)=ge=g=g',\\
g'*g'&=g(bg)=g^2=h=h',\quad h'*M_3=M_3*h'=0.
\end{aligned}$$

Следовательно, отображение φ, определённое на базисе путём

$$1 \mapsto 1', \quad e \mapsto e', \quad g \mapsto g', \quad h \mapsto h',$$

является изоморфизмом алгебр M и M^*.

Заметим, что $\varphi = R_{b^{-1}}$. Кроме того, элементы b и b^{-1} лежат в левом ассоциативном центре

$$\mathrm{N}_l(M) = \{n \in M \mid (n, M, M) = 0\},$$

поскольку они линейно выражаются через 1, e, h. $\square$

4.4. Тождества изотопов и антиизоморфизмы

В качестве ещё одного применения указанной техники докажем следующее утверждение.

Предложение 5. *Пусть M — унитальная алгебра Михеева и a, b — обратимые элементы в M. Тогда изотоп $M^{(a,b)}$ не является унитальной левоальтернативной алгеброй, значит, противоположная алгебра M^Δ не может быть изотопом алгебры M.*

Доказательство. Допустим, от противного, что изотоп $M^* = M^{(a,b)}$ — унитальная левоальтернативная алгебра. По условию алгебра M^* имеет единицу ε, т. е. $x = x * \varepsilon = (xa)(b\varepsilon)$, $1 = a(b\varepsilon)$ и по лемме 4 $b\varepsilon = a^{-1}$. Далее,

$$y = \varepsilon * y = (\varepsilon a)(by) \quad \text{и} \quad (\varepsilon a)b = 1, \quad \varepsilon a = b^{-1}.$$

Тогда $y = b^{-1}(by)$ и $(b^{-1}, b, y) = 0$ для любого y. Теперь ввиду (3)

$$(b^{-1}b, b, y) + (b^{-1}, b, [b, y]) = b^{-1}(b, b, y) + (b^{-1}, b, y)b,$$

откуда следует, что $b^{-1}(b, b, y) = 0$. По предложению 2 имеем $(b, b, y) = 0$.

По лемме 7 можно считать, что

$$a = 1 + \beta e + \gamma g + \delta h, \quad b = 1 + \beta' e + \gamma' g + \delta' h,$$

где $\beta, \beta' \neq -1$.

Поскольку $(g, g, e) = he - g^2 = -h \neq 0$, $(e, e, M) = 0$ и $0 = (b, b, e) = \gamma'^2(g, g, e)$, имеем $\gamma' = 0$. Итак,

$$a = 1 + \beta e + \gamma g + \delta h, \qquad b = 1 + \beta' e + \delta' h,$$

где $\beta, \beta' \neq -1$.

Вычислим левый альтернатор в алгебре $M^* = M^{(a,b)}$:

$$x * x = (xa)(bx), \quad x * y = (xa)(by),$$
$$(x * x) * y = \big((xa)(bx)\big)a \cdot by, \quad x * (x * y) = xa \cdot b\big((xa)(by)\big).$$

Значит,

$$\big((xa)(bx)\big)a \cdot by = xa \cdot b\big((xa)(by)\big) \tag{7}$$

для любых $x, y \in M$. В частности, если $y = b^{-1}$, то

$$\big((xa)(bx)\big)a = xa \cdot b(xa).$$

Полагая $x = 1$, получаем $(ab)a = a(ba)$, т. е. $(a, b, a) = 0$. Учитывая, что элементы 1 и h содержатся в ассоциативном центре $\mathrm{N}(M)$, получаем

$$0 = (a, a, b) = (a, a, \beta' e) = \beta'(a, a, e) = \beta'(\gamma g, \gamma g, e) = -\beta'\gamma^2 h.$$

Если $\beta' \neq 0$, то $\gamma = 0$. Итак, имеет место один из следующих случаев:

$$\text{а)} \quad a = 1 + \beta e + \delta h, \quad b = 1 + \beta' e + \delta' h \quad (\beta' \neq 0), \tag{8}$$

$$\text{б)} \quad a = 1 + \beta e + \gamma g + \delta h, \quad b = 1 + \delta' h. \tag{9}$$

Рассмотрим каждый из случаев по отдельности.

Рассмотрим случай а). Допустим, что выполнены соотношения (8). Заметим, что все ассоциаторы от элементов a, b, M, как, впрочем, и от a^{-1}, b, M, равны 0. Полагая $z = by$, по (7) имеем

$$\big((xa)(bx)\big)a \cdot z = xa \cdot b\big((xa)z\big) \tag{10}$$

для любых $x, y, z \in M$. Тогда при $z = 1$ имеем

$$\big((xa)(bx)\big)a = (xa)\big((bx)a\big) = (xa)\big(b(xa)\big), \tag{11}$$

значит, $\big(t(bx)\big)a = t(bt)$, где $t = xa$. Отсюда следует, что

$$\big(t(bx)\big) = \big(t(bt)\big)a^{-1}, \quad t(bt \cdot a^{-1}) = \big(t(bt)\big)a^{-1}.$$

Следовательно, $(t, bt, a^{-1}) = 0$. Тогда в силу (8) и (6)

$$\beta(1+\beta)^{-1}(t, bt, e) = 0.$$

Докажем, что $\beta = 0$. Пусть, от противного, $\beta \neq 0$. Тогда $(g, bg, e) = 0$, значит, $(g, (1 + \beta' e)g, e) = 0$ и $(g, g, e) = 0$, противоречие.

Итак, справедливы равенства

$$a = 1 + \delta h \in Z(M), \quad b = 1 + \beta' e + \delta' h \quad (\beta' \neq 0). \tag{12}$$

Тогда в силу равенств (10) и (11) верно

$$\big(t(bt)\big) \cdot z = t \cdot b(tz).$$

Применяя частную производную $\partial/\partial t$, получаем, что

$$(b \circ t)z = b(tz) + t(bz),$$

т. е. для любых $z, t \in M$

$$(b, t, z) + (t, b, z) = 0.$$

Тогда $(t, t, b) = 0$, и в силу (12) верно $\beta'(t, t, e) = 0$. Следовательно, $\beta' = 0$ и $a, b \in Z(M)$. Стало быть, изотоп $M^* = M^{(a,b)}$ имеет умножение

$$x * y = (xa)(by) = (xc)y, \quad \text{где} \quad c = ab \in Z(M).$$

Значит, $M^* = M^{(c)}$. В силу центральности элемента c верно $M^{(c)} \cong M$. Поскольку алгебра Михеева не альтернативна, получили противоречие.

Рассмотрим случай б). Имеем $b = 1 + \delta' h \in Z(M)$. Тогда из равенства (7) и включения $b \in Z(M)$ следует

$$\big((xa)x\big)a \cdot y = (xa)\big((xa)y\big). \tag{13}$$

Полагая $x = 1$, получаем $a^2 y = a(ay)$, в частности, $(a, a, e) = 0$. Отсюда вытекает, что $\gamma = 0$ и

$$a = 1 + \beta e + \delta h, \quad b = 1 + \delta' h.$$

Применяя частную производную $\partial/\partial x$ к равенству (13), получаем

$$\{(ax)a + xa^2\}y = a\big((xa)y\big) + (xa)(ay).$$

В частности, верно

$$\{(ag)a + ga^2\}g = a\big((ga)g\big) + (ga)(ag). \tag{14}$$

Подставим в это равенство $a = 1 + \beta e + \delta h$. Заметим, что если вместо одного из символов a подставлено h, то равенство превращается в тождество. Значит, мы должны рассмотреть подстановку $a = 1 + \beta e$. Частная производная (14) по a имеет вид $(3ga + ag)g = 2(ga)g + a(gg) + g(ag)$, откуда получаем

$$3(ga)g = 2(ga)g + g(ag). \tag{15}$$

Заметим, что частная производная (15) по a является тождеством. Стало быть, верно

$$3\beta(ge)g + \beta^2(ge)g = 2\beta(ge)g, \quad (\beta + \beta^2)h = 0.$$

Значит, $\beta = 0$ и $a, b \in Z(M)$. Повторяя рассуждения о случае а), получаем, что равенства (8) также не могут быть выполнены.

Поскольку противоположная алгебра M^{Δ} унитальна и левоальтернативна, то она не может быть изотопом алгебры M. $\square$

В заключение работы сформулируем открытые вопросы.

1. Удовлетворяет ли изотоп $M^{(a,b)}$ алгебры Михеева какому-нибудь тождеству степени 3?
2. Пусть конечномерная унитальная алгебра A над алгебраически замкнутым полем и её унитальный изотоп A^* имеют одинаковые идеалы тождеств. Верно ли, что они изоморфны?

Для начала можно было бы получить ответ для c-изотопов правоальтернативных и йордановых алгебр. Заметим, что ответ неизвестен для $(-1,1)$-алгебр.

Литература

[1] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[2] Мальцев А. И. Об одном представлении неассоциативных колец // УМН. — 1952. — Т. 7, № 1. — С. 181—185.

[3] Пчелинцев С. В. Нильпотентность ассоциаторного идеала свободного конечнопорождённого $(-1,1)$-кольца // Алгебра и логика. — 1975. — Т. 14, № 5. — С. 543—571.

[4] Пчелинцев С. В. О многообразии, порождённом свободной алгеброй типа $(-1,1)$ с двумя порождающими // Сиб. матем. журн. — 1981. — Т. 22, № 3. — С. 162—178.

[5] Пчелинцев С. В. Изотопы первичных $(-1,1)$- и йордановых алгебр // Алгебра и логика. — 2010. — Т. 49, № 3. — С. 388—423.

[6] Пчелинцев С. В. Изотопы альтернативных алгебр характеристики, отличной от 3 // Изв. РАН. Сер. матем. — 2020. — Т. 84, № 5. — С. 197—210.

[7] Albert A. A. Non-associative algebras // Ann. Math. — 1942. — Vol. 43. — P. 685—707.

[8] Allison B., Faulkner J. Isotopy for extended affine Lie algebras and Lie tori // Developments and Trends in Infinite-Dimensional Lie Theory / Neeb K.-H., Pianzola A., eds. — Birkhäuser, 2011. — (Progress Math.; Vol. 288). — P. 3—43.

[9] Bruck R. H. Some results in the theory of linear non-associative algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1944. — Vol. 56. — P. 141—199.

[10] Darpö E. Isotopes of Hurwitz algebras // Mediterr. J. Math. — 2018. — Vol. 15. — P. 52.

[11] Darpö E., Izquierdo J. M. P. Autotopies and quasigroup identities: New aspects of non-associative division algebras // Forum Math. — 2012. — Vol. 27, no. 5. — P. 2691—2745.

[12] Falcón O. J., Falcón R. M., Núñez J. Isomorphism and isotopism classes of filiform Lie algebras of dimension up to seven. — 2015. — arXiv:1510.07066 [math.RA].

[13] Glizburg V. I., Pchelintsev S. V. Isotopes of simple algebras of arbitrary dimension // Asian-Eur. J. Math. — 2020. — Vol. 13, no. 6. — P. 2050108.

[14] Jacobson N. Structure and Representations of Jordan Algebras. — Amer. Math. Soc., 1968. — (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; Vol. 39).

[15] Kleinfeld E. Right alternative rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 4. — P. 939—944.

[16] Krylov A. A., Pchelintsev S. V. Isotopic simple algebras with a nil basis // Commun. Algebra. — 2020. — Vol. 48, no. 4. — P. 1697—1712.

[17] McCrimmon K. Homotopes of alternative algebras // Math. Ann. — 1971. — Vol. 191, no. 4. — P. 253—262.

[18] Schafer R. D. Alternative algebras over an arbitrary filds // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 49. — P. 549—555.

[19] Schwarz T. Small non-associative division algebras up to isotopy // Algebra Discrete Math. — 2010. — Vol. 9. — P. 103—108.

[20] Thedy A. Right alternative algebras and Wedderburn principal theorem // Proc. Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 72, no. 3. — P. 427—435.