Эндоморфизмы полугрупп неотрицательных обратимых матриц порядка два над коммутативными упорядоченными кольцами

Е. БУНИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: helenbunina@gmail.com

К. СОСОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kirsig@yandex.ru

УДК 512.534.7+512.555

Ключевые слова: описание эндоморфизмов, полугруппа обратимых неотрицательных матриц, коммутативные упорядоченные кольца.

Аннотация

Пусть R — линейно упорядоченное коммутативное кольцо с $1/2$, порождаемое своими обратимыми элементами, $G_2(R)$ — подполугруппа в $\mathrm{GL}_2(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными коэффициентами. В работе описываются эндоморфизмы данной полугруппы.

Abstract

E. Bunina, K. Sosov, Endomorphisms of the semigroup of nonnegative invertible matrices of order two over commutative ordered rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2021), no. 4, pp. 39—53.

Let R be a linearly ordered commutative ring with $1/2$ generated by its invertible elements, $G_2(R)$ be the subsemigroup in $\mathrm{GL}_2(R)$ consisting of all matrices with nonnegative elements. In this paper, we describe endomorphisms of the given semigroup.

Введение

Пусть R — упорядоченное кольцо, $G_n(R)$ — подполугруппа $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными коэффициентами.

В [6] А. В. Михалёв и М. А. Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geqslant 2$. В [2] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, когда R — произвольное линейно упорядоченное кольцо с $1/2$, $n \geqslant 3$. В [3] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв нашли необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти полугруппы были элементарно эквивалентны.

Фундаментальная и прикладная математика, 2021, том 23, № 4, с. 39—53.
© 2021 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

В [4] Е. И. Бунина и П. П. Семёнов описали автоморфизмы полугруппы обратимых неотрицательных матриц порядка больше 2 над коммутативными частично упорядоченными кольцами с обратимой двойкой, а в [5] нашли необходимые и достаточные условия их элементарной эквивалентности. В [1] Е. И. Бунина описала автоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ в случае, когда R является частично упорядоченным коммутативным кольцом с обратимой двойкой, порождённым своими обратимыми элементами. В [8] П. П. Семёнов описал автоморфизмы полугруппы неотрицательных матриц над кольцом целых чисел.

Менее привычным является вопрос описания всех эндоморфизмов данной полугруппы. В [9] эндоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ были описаны в случае, когда R является линейно упорядоченным коммутативным кольцом для $n > 2$. В [7] были описаны эндоморфизмы данной полугруппы в случае, когда R является линейно упорядоченным некоммутативным кольцом для $n > 2$.

В данной работе мы описываем эндоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным коммутативным кольцом с обратимой двойкой, порождённым своими обратимыми элементами, для $n = 2$. Везде далее будем считать R именно таким кольцом.

1. Основные определения

Определение 1. Кольцо R называется *линейно упорядоченным*, если на нём задано отношение частичного порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующим свойствам:

— $\forall\, x, y \in R\ (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$;
— $\forall\, x, y, z \in R\ (x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z)$;
— $\forall\, x, y \in R\ (0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant xy)$.

Определение 2. Пусть R — линейно упорядоченное кольцо. Через $G_n(R)$ обозначим подполугруппу группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящую из матриц с неотрицательными элементами.

Определение 3. Пусть $e = I_n$, $\Gamma_n(R)$ — группа, состоящая из всех обратимых матриц из $G_n(F)$, Σ_n — симметрическая группа порядка n, σ — матрица перестановки, $\sigma \in \Sigma_n$ (т. е. матрица $\left(\delta_{i\sigma(j)}\right)$, где $\delta_{i\sigma(j)}$ — символ Кронекера), S_n — группа, состоящая из всех σ. Через N_S мы обозначим нетривиальную нормальную подгруппу в S_n, а через $\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ — диагональную матрицу с элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на диагонали, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R_+^*$. Через $D_n(R)$ мы обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $G_n(R)$, N_D — подгруппа в $D_n(R)$.

Пусть $E_{i,j}$ — матричная единица.

Определение 4. Через $t_{ij}(x)$ мы обозначим матрицу $e + xE_{i,j}$, t_{ij} обозначает $t_{ij}(1)$. Пусть $\mathbf{P}$ — подполугруппа в группе $G_n(R)$, порождённая всеми матрицами σ ($\sigma \in S_n$), $t_{ij}(x)$ ($x \in R_+$, $i \neq j$) и $\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in D_n(R)$.

Определение 5. Две матрицы $A, B \in G_n(R)$ называются *$\mathcal{P}$-эквивалентными* (см. [4]), если существуют $A_j \in G_n(P)$, $j = 0, \ldots, k$, $A = A_0$, $B = A_k$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \ldots, k-1$, такие что $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$.

Определение 6. Через $\mathrm{GE}_n^+(R)$ мы обозначим подполугруппу в группе $G_n(R)$, порождённую всеми матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$. В случае когда R является кольцом, полугруппа $\mathrm{GE}_n^+(R)$ не обязательно совпадает с $G_n(R)$.

Определение 7. Если G — некоторая полугруппа (например, R_+^*, $G_n(R)$, $\mathrm{GE}_n^+(R)$), то гомоморфизм $\lambda(\cdot)\colon G \to G$ называется *центральным* G, если $\lambda(G) \subset Z(G)$. Отображение $\Omega(\cdot)\colon G \to G$, такое что для каждого $X \in G$

$$\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X,$$

где $\lambda(\cdot)$ — центральный гомоморфизм, называется *центральной гомотетией*.

Например, если $R = \mathbb{R}$ (поле вещественных чисел), то гомоморфизм $\lambda(\cdot)\colon G_n(\mathbb{R}) \to G_n(\mathbb{R})$, такой что для каждого $A \in G_n(\mathbb{R})$ $\lambda(A) = |\det A| \cdot e$, есть центральный гомоморфизм, и отображение $\Omega(\cdot)\colon G_n(\mathbb{R}) \to G_n(\mathbb{R})$, такое что для каждого $A \in G_n(\mathbb{R})$ $\Omega(A) = |\det A| \cdot A$, является центральной гомотетией. Заметим, что центральная гомотетия $\Omega(\cdot)$ всегда является эндоморфизмом полугруппы G: для каждых $X, Y \in G$

$$\Omega(X)\Omega(Y) = \lambda(X)X \cdot \lambda(Y)Y = \lambda(X)\lambda(Y)X \cdot Y = \lambda(XY)XY = \Omega(XY).$$

Для каждой матрицы $M \in \Gamma_n(R)$ через Φ_M определим автоморфизм полугруппы $G_n(F)$, такой что для каждого $X \in G_n(F)$ $\Phi_M(X) = MXM^{-1}$ (*внутренний автоморфизм*).

Для каждого $y(\cdot) \in \mathrm{End}(R_+)$ через Φ^y мы обозначим эндоморфизм полугруппы $G_n(R)$, такой что для каждого $X = (x_{ij}) \in G_n(R)$ $\Phi^y(X) = \Phi^y\big((x_{ij})\big) = \big(y(x_{ij})\big)$ (*кольцевой эндоморфизм*).

В случае эндоморфизмов можно построить эндоморфизм полугруппы $G_n(R)$, который похож на композицию центральной гомотетии и кольцевого эндоморфизма, но таковой не является. Именно, рассмотрим эндоморфизм $\Phi \in \mathrm{End}\big(G_n(R)\big)$, для которого $\Phi(A) = \lambda(A) \cdot \Phi^y(A)$, где $\lambda(\cdot)$ — центральный гомоморфизм, а Φ^y — кольцевой эндоморфизм. Такой эндоморфизм в общем случае не является ни композицией кольцевого эндоморфизма и центральной гомотетии (так как не всегда можно представить $\lambda(A)$ как $\lambda'\big(\Phi^y(A)\big)$), ни композицией центральной гомотетии и кольцевого эндоморфизма (так как не всегда можно представить $\lambda(A)$ как $\Phi^y\big(\lambda'(A)\big)$). Таким образом, будем обозначать описанный эндоморфизм через $\Phi^{\lambda,y}$ и называть его *центрально-кольцевым эндоморфизмом*.

2. Образы элементов t_{ij}

Лемма 1. *Если хотя бы для одной пары $i \neq j$ выполнено $\Phi(t_{ij}) = e$, то $\Phi\big(t_{kl}(x)\big) = e$ для любой пары $k \neq l$ и любого $x > 0$.*

Доказательство. В двумерном случае имеются только $t_{12}(x)$ и $t_{21}(x)$. Элементы $t_{12}(x)$ и $t_{21}(x)$ сопряжены перестановкой $\sigma = (1\ 2)$, т. е. имеем $\sigma t_{12}(x)\sigma^{-1} = t_{21}(x)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $\Phi(t_{12}) = e$ то и $\Phi(t_{21}) = e$. Возьмём произвольный элемент нашего кольца и вспомним, что он представляется в виде некоторой суммы порождающих:

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k.$$

Возьмём некоторый элемент x_l из разложения x и поймём, чему равно $t_{12}(x_l)$. Заметим, что верно представление

$$t_{12}(x_l) = \begin{pmatrix} 1 & x_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Посмотрим, куда переходит $\Phi\big(t_{ij}(x_l)\big)$. Пусть

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x_l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = B.$$

Тогда

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x_l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = B^{-1},$$

$$\Phi\big(t_{12}(x_l)\big) = \Phi\left(\begin{pmatrix} x_l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \Phi(t_{12}) \Phi\left(\begin{pmatrix} x_l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = BeB^{-1} = e.$$

Заметим, что

$$t_{12}(x_l)t_{12}(x_r) = \begin{pmatrix} 1 & x_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_r + x_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = t_{12}(x_r + x_l).$$

Наконец, посчитаем $\Phi\big(t_{12}(x)\big)$:

$$\Phi\big(t_{12}(x)\big) = \Phi\big(t_{12}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\big) = \Phi\big(t_{12}(x_1)\big)\Phi\big(t_{12}(x_2)\big)\ldots\Phi\big(t_{12}(x_k)\big) = e.$$

Пользуясь свойством сопряжения, получим нужный результат и для $\Phi\big(t_{21}(x)\big)$:

$$\Phi\big(t_{21}(x)\big) = \Phi(\sigma t_{12}(x)\sigma^{-1}) = \Phi(\sigma)\Phi\big(t_{12}(x)\big)\Phi(\sigma^{-1}) = CeC^{-1} = e. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть эндоморфизм Φ таков, что найдётся $i \neq j$, такой что $\Phi(t_{ij}) = e$. Тогда образ при эндоморфизме полугруппы GE_2^+ является подгруппой в Γ_2.*

Доказательство. По лемме 1 все $t_{ij}(x)$ переходят в e. В таком случае $\Phi(\mathrm{GE}_2^+) = \Phi(\mathbf{P})$. Действительно, пусть матрица M $\mathcal{P}$-эквивалентна матрице $M_1 \in \mathbf{P}$. Тогда переход от $\Phi(M_1)$ к $\Phi(M)$ осуществляется с помощью обратимых матриц (см. определение 5). Поэтому $\Phi(M) \in \Phi(\mathbf{P})$, и $\Phi(\mathbf{P})$, в свою очередь, лежит в Γ_2. $\square$

В случае когда $\Phi(t_{ij}) = e$, зная описание всех нормальных подгрупп в Γ_2, мы можем понять, какими могут быть образы полугруппы $\mathrm{GE}_2^+(R)$.

3. Описание группы Γ_2

Лемма 3. $\Gamma_2(R) = D_2(R) \cdot S_2$, *т. е. группа* $\Gamma_2(R)$ *состоит из всех мономиальных матриц.*

Доказательство. Понятно, что любая мономиальная матрица обратима, т. е. $D_2(R) \cdot S_2 \subset \Gamma_2(R)$.

Теперь возьмём произвольную матрицу $A = (a_{ij}) \in \Gamma_2(R)$. Нам нужно показать, что в каждой её строке (столбце) есть всего один ненулевой элемент. Предположим, что это не так и, например, первая строка состоит из двух ненулевых (т. е. строго положительных) элементов a_{11} и a_{12}. Возьмём обратную матрицу $B = (b_{l,m})$. Из условия $AB = I$ получим

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножим первую строку матрицы A и второй столбец матрицы B:

$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0.$$

Элементы a_{11} и a_{12} неотрицательные, значит, чтобы получить 0, b_{12} и b_{22} должны быть равны 0. Теперь перемножим вторую строку матрицы A и второй столбец матрицы B:

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1.$$

Из прошлого равенства знаем, что b_{12} и b_{22} равны нулю, значит, левая часть равна нулю, а правая — единице. Получили противоречие. □

Заметим, что представление матрицы $A \in \Gamma_2(R)$ в виде $A = \alpha\sigma$, $\alpha \in D_2(R)$, $\sigma \in \Sigma_2$, единственно.

У нас имеются две ситуации: если какая-то из матриц t_{ij} переходит в единичную, то, применяя леммы 1 и 2, мы получаем, что образ GE_2^+ будет некоторой подгруппой в $\Gamma_2(R)$. В случае же, когда ни одна матрица t_{ij} не переходит в единичную, нам ещё предстоит разобраться. Далее мы покажем, что если $\Phi\big(\sigma_{(12)}\big) = e$, мы имеем первый случай, а если $\Phi\big(\sigma_{(12)}\big) \neq e$, — второй.

4. Тривиальность ядра на группе S_2

В этом разделе мы обсудим, как связано ядро эндоморфизма на мономиальных матрицах с образом элемента t_{ij}.

Лемма 4. *Пусть* $\Phi\big(\sigma_{(12)}\big) = e$. *Тогда* $\Phi\big(t_{ij}(x)\big) = e$.

Доказательство. Пусть $\Phi(t_{12}) = A$. Рассмотрим следующее равенство:

$$\Phi(t_{12}^2) = A^2 = \Phi\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t_{12} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) A \Phi\left(\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right). \tag{4.1}$$

Теперь сопряжём

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

перестановкой σ_{12}:

$$\sigma_{(1\,2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_{(1\,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Применив к этому равенству эндоморфизм Φ, получим

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

Аналогично можно получить

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right).$$

Теперь свяжем новые диагональные матрицы с $t_{12}(1/2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = t_{12}\,(1/2)\,. \tag{4.2}$$

Пусть $\Phi\big(t_{12}(1/2)\big) = B$. Из равенств (4.1) и (4.2) выводим, что $B = A^2$. Заметим, что t_{12} и $t_{12}(1/2)$ связаны и иным способом:

$$t_{12}\,(1/2)\,t_{12}\,(1/2) = t_{12}.$$

Отсюда получаем, что $B^2 = A$. Возведём это равенство в квадрат и получим, что $(B^2)^2 = A^2 = B$, т. е. $B^4 = B$. Так как матрица B обратима в полной линейной группе, то $B^3 = E$. Это означает, что B обратима в полугруппе $G_2(R)$, т. е. либо B диагональна, откуда следует, что $B^2 = B$, т. е. $B = E$ (что и требовалось), либо $B = \mathrm{diag}[a, b]\sigma_{(1\,2)}$, что невозможно для матрицы третьего порядка. □

Из леммы 4 следует, что если какой-то из элементов t_{ij} не лежит в ядре эндоморфизма Φ, то $\mathrm{Ker}\,\Phi \cap S_2 = e$.

5. Действие эндоморфизма на матрицах подстановок

Теперь займёмся случаем, когда $\Phi\big(\sigma_{(12)}\big) \neq e$.

Рассматривая случай, когда ни одна из матриц t_{ij} не переходит в единицы (т. е. $N_S = e$), можно считать, что по крайней мере диагональная матрица $\mathrm{diag}[2, 1]$ не переходит в центр полугруппы $G_2(R)$ (иначе, как мы уже видели выше, было бы $\Phi(t_{ij}) = \Phi(t_{ij})^2$).

Далее будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 5. *Если $a, b > 0$ и $a^2 = b^2$, то $a = b$.*

Доказательство. Пусть это неверно и $a > b$. Тогда из $a - b > 0$ и $a > 0$ следует, что $a(a-b) = a^2 - ab > 0$, а из $a - b > 0$ и $b > 0$ следует, что $(a-b)b = ab - b^2 > 0$, откуда получаем, что $a^2 - b^2 > 0$, противоречие.

Значит, $a = b$. □

Лемма 6. *Пусть $\Phi(t_{ij}) \neq e$ для некоторых $i \neq j$. Тогда $N_S = e$ и существует внутренний автоморфизм Φ_M полугруппы $G_2(R)$, такой что $\Phi_M\Phi\big(\sigma_{(1\,2)}\big) = \sigma_{(1\,2)}$.*

Доказательство. Заметим, что $\sigma_{(1\,2)}$ — элемент второго порядка, а эндоморфизм Φ не увеличивает порядок, значит, $\Phi\big(\sigma_{(1\,2)}\big)$ также имеет порядок два (так как не может быть единичным элементом).

Из предыдущей леммы следует, что не существует неединичных диагональных матриц с положительными элементами на диагонали порядка два, поэтому эндоморфизм Φ переводит $\sigma_{(12)}$ обязательно в матрицу вида

$$\Phi\big(\sigma_{(1\,2)}\big) = \alpha_{\sigma_{(1\,2)}}\sigma_{(1\,2)} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $ab = 1$.

Выберем для сопряжения следующую матрицу M:

$$M = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остаётся проверить, что для такой матрицы верно нужное нам свойство:

$$M\Phi\big(\sigma_{(12)}\big)M^{-1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & ba \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ba \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Действие эндоморфизма Φ' на диагональные матрицы

По лемме 6 существует такой эндоморфизм Φ', что $\Phi' = \Phi_M \circ \Phi$ и $\Phi'\big(\sigma_{(1\,2)}\big) = \sigma_{(1\,2)}$, где

$$\sigma_{(1\,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим этот эндоморфизм Φ'.

Лемма 7. *Пусть Φ' — эндоморфизм полугруппы $G_2(R)$, такой что $\Phi'\big(\sigma_{(1\,2)}\big) = \sigma_{(1\,2)}$, а также не все t_{ij} лежат в ядре. Тогда*

$$\Phi'\big(D_2(R)\big) \subset D_2(R).$$

Доказательство. Пусть образом матрицы $\operatorname{diag}[2,1]$ является матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\operatorname{diag}[2,1]\big(\sigma_{(12)}\operatorname{diag}[2,1]\sigma_{(12)}\big) = \operatorname{diag}[2,2] -$$

скалярная матрица (в частности, коммутирующая с $\sigma_{(12)}$), то, переходя к образам, получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\sigma_{(12)}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\sigma_{(12)} = \operatorname{diag}[b^2, a^2],$$

откуда следует, что $a^2 = b^2$, т. е. $a = b$.

Рассмотрим соотношение

$$\operatorname{diag}[2,1]t_{12}\operatorname{diag}[2,1]^{-1} = t_{12}^2.$$

Переходя к образам, получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\Phi'(t_{12})\begin{pmatrix} 0 & 1/a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix} = \Phi'(t_{12})^2.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_{(1\,2)}A\sigma_{(1\,2)} = A^2,$$

значит,

$$A = \sigma_{(1\,2)}A^2\sigma_{(1\,2)} = A^4,$$

т. е. $A^3 = E$, откуда следует, что A обратима, т. е. либо диагональна, либо антидиагональна: $\operatorname{diag}[b,a] = \operatorname{diag}[a^2, b^2]$, значит, $a^4 = a$, поэтому $a(a^3 - 1) = 0$, что возможно только при $a = 1$ (а мы знаем, что матрица A не единична), либо

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ba \end{pmatrix},$$

что также, очевидно, невозможно.

Таким образом, мы доказали, что матрица $\operatorname{diag}[2,1]$ может переходить при эндоморфизме Φ' только в диагональную матрицу $\operatorname{diag}[a,b]$, у которой $a \neq b$.

Все диагональные матрицы коммутируют с матрицей $\operatorname{diag}[2,1]$, поэтому их образы должны коммутировать с матрицей $\Phi'(\operatorname{diag}[2,1]) = \operatorname{diag}[a,b]$, т. е. обязательно быть диагональными.

Значит, диагональные матрицы переходят в диагональные. $\square$

7. Получение эндоморфизма полукольца неотрицательных элементов

Лемма 8. *Пусть Φ' — эндоморфизм полугруппы $G_2(R)$, такой что $\Phi'\big(\sigma_{(12)}\big) = \sigma_{(12)}$ и $\Phi'(t_{ij}) \neq e$. Тогда существует такая матрица $M_1 \in \Gamma_2(R)$, что для эндоморфизма $\Phi'' = \Phi_{M_1} \circ \Phi'$ выполнено $\Phi''\big(\sigma_{(12)}\big) = \sigma_{(12)}$ и $\Phi''(t_{12}) = t_{12}(x_0)$, где $x_0 \in R_+$.*

Доказательство. Пусть

$$\Phi'(t_{12}) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = A.$$

Воспользуемся тем же соотношением, что и раньше:

$$\operatorname{diag}[a,b] \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \operatorname{diag}[a,b]^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+t) \\ z(x+t) & t^2 + yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & ab^{-1}y \\ ba^{-1}z & t \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если $y \neq 0$ и $z \neq 0$, то из сравнения элементов на местах $(1,2)$ и $(2,1)$ получим, что $ab^{-1} = ba^{-1}$, т. е. $a^2 = b^2$, откуда следует, что $a = b$, чего не может быть.

Пусть теперь $y = 0$. Тогда $x^2 = x$, т. е. $x(x-1) = 0$, и так как $x \neq 0$, то $x = 1$. Аналогично $t = 1$. Точно так же если $z = 0$, то $x = t = 1$. Таким образом,

$$\Phi'(t_{12}) = t_{12}(y) \quad \text{или} \quad \Phi'(t_{12}) = t_{21}(z).$$

В первом случае для доказательства леммы ничего не требуется, во втором надо в качестве матрицы M_1 выбрать $\sigma_{(12)}$. □

Лемма 9. *Для эндоморфизма Φ'' из предыдущей леммы выполнено*

$$\Phi''(\operatorname{diag}[2,1/2]) = \operatorname{diag}[2,1/2].$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\Phi''(\operatorname{diag}[2,1])$. Это некоторая диагональная матрица $\operatorname{diag}[\alpha,\beta]$. Снова воспользуемся свойством

$$\operatorname{diag}[2,1] t_{12}(1) \operatorname{diag}[2,1]^{-1} = t_{12}(1)^2.$$

Имеем

$$\operatorname{diag}[\alpha,\beta] t_{12}(x_0) \operatorname{diag}[\alpha,\beta]^{-1} = t_{12}(x_0)^2,$$

откуда следует, что

$$\frac{\alpha x_0}{\beta} = 2x_0.$$

Так как x_0 не является делителем нуля, то $\alpha = 2\beta$. Таким образом, $\Phi'(\mathrm{diag}[2,1]) = \mathrm{diag}[2\beta,\beta]$. Значит,

$$\begin{aligned}\Phi''(\mathrm{diag}[2,1/2]) &= \Phi''(\mathrm{diag}[2,1]\cdot(\sigma_{12}\,\mathrm{diag}[2,1]\sigma_{12})^{-1}) = \\ &= \mathrm{diag}[2\beta,\beta](\sigma_{12}\,\mathrm{diag}[2\beta,\beta]\sigma_{12})^{-1} = \\ &= \mathrm{diag}[2\beta,\beta]\,\mathrm{diag}[\beta^{-1},\beta^{-1}/2] = \mathrm{diag}[2,1/2],\end{aligned}$$

что нам и требовалось. □

Лемма 10. *Элемент x_0, построенный в лемме 8, равен единице.*

Доказательство. В полугруппе $G_2(R)$ выполняется равенство

$$t_{12}(1)t_{21}(1) = \mathrm{diag}[2,1/2]t_{21}(2)t_{12}(1/2).$$

Теперь воспользуемся условием $\Phi''(\mathrm{diag}[2,1/2]) = \mathrm{diag}[2,1/2]$ леммы 9 и получим

$$t_{12}(x_0)t_{21}(x_0) = \mathrm{diag}[2,1/2]t_{21}(2x_0)t_{12}(x_0/2),$$

что даёт условие $1 + x_0^2 = 2$, т. е. $x_0^2 = 1$, а по лемме 5 получаем $x_0 = 1$. □

Лемма 11. *Пусть Φ'' — эндоморфизм полугруппы $G_2(R)$ из леммы 8. Тогда $\Phi''\big(t_{12}(x)\big) = t_{12}\big(b(x)\big)$, где $b\colon R_+ \to R_+$ — некоторое отображение полукольца R_+ в себя.*

Доказательство. В лемме 8 мы показали, что $\Phi''\big(t_{12}(1)\big) = t_{12}(x_0)$, из леммы 10 получили, что $x_0 = 1$, а из леммы 9 знаем, что $\Phi''(\mathrm{diag}[2,1]) = \mathrm{diag}[2\beta,\beta]$ и $\Phi''(\mathrm{diag}[1/2,1]) = \mathrm{diag}[\beta^{-1}/2,\beta^{-1}]$.

Пусть

$$\Phi''\big(t_{12}(x)\big) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x)\end{pmatrix} = A.$$

Воспользуемся тем, что $t_{12}(x)$ и t_{12} коммутируют, значит, коммутируют их образы:

$$\Phi''(t_{12}(x)t_{12}) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x) & a(x)+b(x) \\ c(x) & c(x)+d(x)\end{pmatrix},$$

$$\Phi'\big(t_{12}t_{12}(x)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x)+c(x) & b(x)+d(x) \\ c(x) & d(x)\end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\begin{pmatrix} a(x) & a(x)+b(x) \\ c(x) & c(x)+d(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x)+c(x) & b(x)+d(x) \\ c(x) & d(x)\end{pmatrix}.$$

Из равенства элементов на позиции $(1,1)$ получаем $c(x) = 0$, а равенство элементов на позиции $(1,2)$ даёт $d(x) = a(x)$. Тогда

$$\Phi''\big(t_{12}(x)\big) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ 0 & a(x)\end{pmatrix}.$$

Теперь найдём $\Phi''\big(t_{12}(x/2)\big)$ и рассмотрим равенство $\Phi''\big(t_{12}(x/2)t_{12}(x/2)\big) = \Phi''\big(t_{12}(x)\big)$. Зная, что Φ'' оставляет $\sigma_{(12)}$ на месте, получаем выражения для $\Phi''(\operatorname{diag}[1,2])$ и $\Phi''(\operatorname{diag}[1,1/2])$:

$$\Phi''(\operatorname{diag}[1,2]) = \Phi''\big(\sigma(12)\operatorname{diag}[2,1]\sigma_{(12)}\big) = \operatorname{diag}[\beta, 2\beta],$$
$$\Phi''(\operatorname{diag}[1,1/2]) = \Phi''\big(\sigma(12)\operatorname{diag}[1/2,1]\sigma_{(12)}\big) = \operatorname{diag}[\beta^{-1}, \beta^{-1}/2],$$
$$\Phi''\big(t_{12}(x/2)\big) = \begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & 2\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(x) & b(x)\\ 0 & a(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta^{-1} & 0\\ 0 & \beta^{-1}/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(x) & b(x)/2\\ 0 & a(x)\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix}a(x) & b(x)/2\\ 0 & a(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(x) & b(x)/2\\ 0 & a(x)\end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix}a(x)^2 & \big(a(x)b(x)\big)/2 + \big(b(x)a(x)\big)/2\\ 0 & a(x)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(x) & b(x)\\ 0 & a(x)\end{pmatrix}.$$

Сравним элементы на позиции $(1,1)$ и получим $a(x)^2 = a(x)$, откуда следует, что $a(x) = 1$. В результате имеем

$$\Phi''\big(t_{12}(x)\big) = \begin{pmatrix}1 & b(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad \square$$

Лемма 12. *Отображение $b\colon R_+ \to R_+$, полученное в лемме 11, является эндоморфизмом полукольца R_+.*

Доказательство. Докажем аддитивность $b(x)$. Воспользуемся свойством $t_{12}(x_1 + x_2) = t_{12}(x_1)t_{12}(x_2)$, применим к нему эндоморфизм Φ'':

$$\begin{pmatrix}1 & b(x_1+x_2)\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & b(x_1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b(x_2)\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & b(x_1)+b(x_2)\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Сравним элементы на позиции $(1,2)$ и получим $b(x_1 + x_2) = b(x_1) + b(x_2)$.

Теперь докажем мультипликативность $b(x)$. Рассмотрим образ произвольной диагональной матрицы $\operatorname{diag}[a,1]$, $a \in R_+^*$. Это некоторая матрица $\operatorname{diag}[\alpha,\beta]$. Обозначим соответствующие отображения $a \to \alpha$ и $b \to \beta$ через $\alpha, \beta\colon R_+^* \to R_+^*$. Оба отображения являются эндоморфизмами полугруппы R_+^*.

По построению

$$\Phi''(\operatorname{diag}[a,b]) = \Phi''(\operatorname{diag}[a,1]\operatorname{diag}[1,b]) = \Phi''\big(\operatorname{diag}[a,1]\sigma_{(12)}\operatorname{diag}[b,1]\sigma_{(12)}\big) = \\ = \operatorname{diag}[\alpha(a),\beta(a)]\operatorname{diag}[\beta(a),\alpha(b)] = \operatorname{diag}[\alpha(a)\beta(b),\beta(a)\alpha(b)].$$

Пусть $x \in R_+^*$. Тогда имеем

$$\operatorname{diag}[x,x]t_{12}(x) = \operatorname{diag}[x,1]t_{12}(1)\operatorname{diag}[1,x],$$

откуда после применения эндоморфизма Φ'' получаем, что

$$\operatorname{diag}[\alpha(x)\beta(x),\alpha(x)\beta(x)]t_{12}\big(b(x)\big) = \operatorname{diag}[\alpha(x),\beta(x)]t_{12}(1)\operatorname{diag}[\beta(x),\alpha(x)],$$

т. е.

$$\alpha(x)\beta(x)b(x) = \alpha(x)^2.$$

Значит,

$$b(x) = \alpha(x)\beta(x)^{-1},$$

и для каждого элемента $x \in R_+^*$ мы можем теперь писать

$$\Phi''(\mathrm{diag}[x,1]) = \mathrm{diag}[b(x)\beta(x), \beta(x)].$$

Так как отображения α и β мультипликативны, то отображение b мультипликативно на обратимых (в кольце R) элементах. Так как неотрицательные обратимые элементы кольца R по нашему условию порождают полукольцо R_+, а отображение b по доказанному аддитивно, то b мультипликативно на элементах полукольца R_+, а значит, является его эндоморфизмом. □

8. Основной результат

Теорема 1. *Пусть Φ — эндоморфизм полугруппы $G_2(R)$, где R — линейно упорядоченное коммутативное кольцо с обратимой двойкой, порождённое своими обратимыми элементами. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

— *образом полугруппы $\mathrm{GE}_2^+(R)$ является некоторая подгруппа группы $\Gamma_2(R)$, и все матрицы $t_{ij}(x)$ переходят в единичную*;

— *существуют $M \in \Gamma_2(R)$, $b \in \mathrm{End}(R_+)$, центральный гомоморфизм $\tilde{\gamma}$, такие что Φ совпадает с $\Phi_M \circ \Phi^{\tilde{\gamma},b}$ на полугруппе $\mathrm{GE}_2^+(R)$.*

Доказательство. Первый случай, как мы видели выше, получается, когда для некоторых $i \neq j$ имеем $\Phi(t_{ij}) = e$.

Рассмотрим случай, когда $\Phi(t_{ij}) \neq e$.

Заметим, что из лемм 6 и 12 следует, что эндоморфизм Φ^b совпадает с эндоморфизмом $\Phi'' = \Phi_{M'} \circ \Phi$ на полугруппе, порождённой матрицами перестановок и $t_{ij}(x)$.

По лемме 7

$$\Phi''([\alpha_1 = x]) = \Phi''(\mathrm{diag}[x,1]) = \mathrm{diag}[\xi(x), \gamma(x)].$$

При этом

$$\Phi^b([\alpha_1 = x]) = \mathrm{diag}[b(x), 1].$$

Воспользовавшись условием

$$[\alpha_1 = x]t_{12}(1)[\alpha_1 = x^{-1}] = t_{12}(x),$$

мы получаем, что

$$\xi(x)\gamma(x)^{-1} = b(x).$$

Таким образом,

$$\Phi''([\alpha_1 = x]) = \gamma(x)\Phi^b([\alpha_1 = x]),$$

при этом очевидно, что отображение $\gamma(\cdot)\colon R_+^* \to R_+^*$ мультипликативно.

Если $\alpha = \operatorname{diag}[x_1, x_2] \in D_2(R)$, то

$$\begin{aligned}\Phi''(\alpha) &= \Phi''\big([\alpha_1 = x_1]\sigma_{(1,2)}[\alpha_1 = x_2]\sigma_{(1,2)}\big) = \\ &= \gamma(x_1)\Phi^b([\alpha_1 = x_1])\sigma_{(1,2)}\gamma(x_2)\Phi^b([\alpha_1 = x_2])\sigma_{(1,2)} = \\ &= \gamma(x_1)\gamma(x_2)\Phi^b(\alpha) = \gamma(x_1x_2)\Phi^b(\alpha).\end{aligned}$$

Понятно, что любая матрица $A \in \mathbf{P}$ может быть представлена в виде

$$A = \operatorname{diag}[\alpha_1, \alpha_2]A_1 \dots A_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in R_+^*$,

$$A_1, \dots, A_k \in \{\sigma, t_{ij}(x) \mid \sigma \in \Sigma_2,\ x \in R_+,\ i, j = 1, 2,\ i \neq j\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Phi''(A) &= \Phi''(\operatorname{diag}[\alpha_1, \alpha_2]A_1 \dots A_k) = \\ &= \gamma(\alpha_1\alpha_2)\operatorname{diag}[b(\alpha_1), b(\alpha_2)]\Phi^b(A_1 \dots A_k) = \gamma(\alpha_1\alpha_2)\Phi^b(A).\end{aligned}$$

Теперь введём отображение $\bar{\gamma}(\cdot)\colon \mathbf{P} \to R_+^*$ по следующему правилу: если $A \in \mathbf{P}$ и $A = \operatorname{diag}[\alpha_1, \alpha_2]A_1 \dots A_k$, где

$$A_1, \dots, A_k \in \{\sigma, t_{ij}(x) \mid \sigma \in S_2,\ x \in R_+,\ i, j = 1, 2,\ i \neq j\},$$

то $\bar{\gamma}(A) = \gamma(\alpha_1\alpha_2)$. Отображение $\bar{\gamma}(\cdot)$ однозначно определено, так как если

$$A = \operatorname{diag}[\alpha_1, \alpha_2]A_1 \dots A_k = \operatorname{diag}[\alpha_2', \alpha_2']A_1' \dots A_m',$$

то $\Phi''(A) = \gamma(\alpha_1\alpha_2)\Phi^b(A)$ и $\Phi''(A) = \gamma(\alpha_1'\alpha_2')\Phi^b(A)$ и поэтому $\gamma(\alpha_1\alpha_2) = \gamma(\alpha_1'\alpha_2')$.

Так как

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(AA')\Phi^b(AA') &= \Phi''(AA') = \Phi''(A)\Phi''(A') = \\ &= \bar{\gamma}(A)\Phi^b(A) \cdot \bar{\gamma}(A')\Phi^b(A') = \bar{\gamma}(A)\bar{\gamma}(A')\Phi^b(AA'),\end{aligned}$$

то $\bar{\gamma}$ является гомоморфизмом $\mathbf{P} \to R_+^*$.

Теперь мы видим, что на полугруппе $\mathbf{P}$ эндоморфизм Φ'' совпадает с композицией центральной гомотетии $\Omega(\cdot)\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$, где для всех $A \in \mathbf{P}$ имеем $\Omega(A) = \bar{\gamma}(A) \cdot A$, и кольцевого эндоморфизма Φ^b.

Пусть $B \in G_2(R)$. Тогда матрица $B = B_1 \dots B_l$, где каждая B_m $\mathcal{P}$-эквивалентна некоторой матрице $A \in \mathbf{P}$, т. е. существуют матрицы $A_0, \dots, A_k \in G_2(R)$, $A_0 = A \in \mathbf{P}$, $A_k = B_m$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \dots, k-1$, такие что для всех $i = 0, \dots, k-1$

$$P_iA_i\tilde{P}_i = Q_iA_{i+1}\tilde{Q}_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\Phi''(P_0A_0\tilde{P}_0) = \Phi''(Q_0A_1\tilde{Q}_0) \Longrightarrow \\
&\quad \Longrightarrow \bar{\gamma}(P_0)\Phi^b(P_0)\bar{\gamma}(A_0)\Phi^b(A_0)\bar{\gamma}(\tilde{P}_0)\Phi^b(\tilde{P}_0) = \\
&\quad = \bar{\gamma}(Q_0)\Phi^b(Q_0)\Phi''(A_1)\bar{\gamma}(\tilde{Q}_0)\Phi^b(\tilde{Q}_0) \Longrightarrow \\
&\quad \Longrightarrow \bar{\gamma}(P_0A_0\tilde{P}_0)\Phi^b(P_0A_0\tilde{P}_0) = \bar{\gamma}(Q_0\tilde{Q}_0)\Phi^b(Q_0)\Phi''(A_1)\Phi^b(\tilde{Q}_0) \Longrightarrow \\
&\quad \Longrightarrow \bar{\gamma}(P_0A_0\tilde{P}_0)\bar{\gamma}(Q_0\tilde{Q}_0)^{-1}\Phi^b(Q_0A_1\tilde{Q}_0) = \Phi^b(Q_0)\Phi''(A_1)\Phi^b(\tilde{Q}_0) \Longrightarrow \\
&\quad \Longrightarrow \Phi''(A_1) = \bar{\gamma}(P_0A_0\tilde{P}_0)\bar{\gamma}(Q_0\tilde{Q}_0)^{-1}\Phi^b(A_1), \ldots, \\
&\quad \Phi''(B_m) = \Phi''(A_k) = \bar{\gamma}(P_{k-1})\bar{\gamma}(A_{k-1})\bar{\gamma}(\tilde{P}_{k-1})\bar{\gamma}(Q_{k-1})^{-1}\bar{\gamma}(\tilde{Q}_{k-1})\Phi^b(B_m).
\end{aligned}$$

Поэтому мы можем расширить $\bar{\gamma}(\cdot)\colon \mathbf{P} \to R_+^*$ до некоторого отображения $\tilde{\gamma}(\cdot)\colon G_2(R) \to R_+^*$, такого что для каждого $B \in G_2(R)$

$$\Phi''(B) = \tilde{\gamma}(B) \cdot \Phi^b(B).$$

Так как Φ'' является эндоморфизмом $G_2(R)$, то $\tilde{\gamma}(\cdot)$ — центральный гомоморфизм, $\tilde{\gamma}(\cdot)\colon G_2(R) \to R_+^*$, и поэтому эндоморфизм $\Phi''\colon G_2(R) \to G_2(R)$ является центрально-кольцевым эндоморфизмом $\Phi^{\tilde{\gamma},b}$. Вспоминая, что Φ'' получился из исходного эндоморфизма Φ домножением на внутренний автоморфизм полугруппы $G_2(R)$, мы приходим к тому, что изначальный эндоморфизм Φ является композицией внутреннего автоморфизма и центрально-кольцевого эндоморфизма, что и требовалось. □

Литература

[1] Бунина Е. И. Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами // Матем. заметки. — 2011. — Т. 91, № 1. — С. 3—12.

[2] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. матем. — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 3—23.

[3] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 2 — С. 39—53.

[4] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 2 — С. 69—100.

[5] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 4. — С. 75—85.

[6] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Матем. сб. — 1970. — Т. 81, № 4. — С. 600—609.

[7] Немиро В. В. Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными некоммутативными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — В печати.

[8] Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными целыми элементами // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 9. — С. 117—132.

[9] Семёнов П. П. Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 5. — С. 165—178.