О кручении в полной линейной группе и алгоритме диагонализации

А. В. ГРИШИН
Московский педагогический государственный университет

Л. М. ЦЫБУЛЯ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: периодическая матрица, жорданова форма матрицы, степень расширения, параллельные гиперболоиды, алгоритм диагонализации.

Аннотация

Работа посвящена описанию периодических матриц из полной линейной группы над полем вещественных чисел, а также над полем $\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}}$, максимальным абелевым расширением поля рациональных чисел. Показано, что в вещественном случае общий вопрос сводится к (2×2)-матрицам. Для (2×2)-матриц дан простой критерий периодичности. Приведена геометрическая интерпретация полученных результатов. Основной результат — построение алгоритма исследования данной матрицы на периодичность и нахождения в случае периодичности её жордановой формы.

Abstract

A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, On the torsion in the general linear group and the diagonalization algorithm, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2021), no. 4, pp. 55—71.

This work describes periodic matrices in the general linear group over the real numbers field and over the maximal Abelian extension $\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}}$ of the rational numbers field. It is shown that for the case of real numbers the general question is reduced to the 2×2 matrices. A simple periodicity criterion is provided for them. We demonstrate a geometric interpretation of the results. The main result is an algorithm that tests periodicity of a matrix and, if the matrix is periodic, finds its Jordan form.

1. Введение

Периодическая часть (кручение) $T(G)$ группы G, состоящая по определению из элементов этой группы, которые в некоторой степени равны единице, нередко несёт весьма существенную информацию о самой группе. Если G — абелева группа, то $T(G)$ — её подгруппа. В общем случае это, разумеется, не

Фундаментальная и прикладная математика, 2021, том 23, № 4, с. 55—71.

так. Произведение двух элементов конечного порядка может не быть элементом конечного порядка. Описание множества $T(G)$, а также его пересечения, если $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, с важнейшими линейными алгебраическими группами — это, как правило, весьма интересная задача. В разделах 3—6 нас будет интересовать случай $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, причём в первую очередь $n = 2$, к которому, как будет показано ниже, всё и сводится. В разделах 7, 8, которые являются основными, даётся алгоритм исследования произвольной матрицы из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}})$ на периодичность и диагонализации этой матрицы в случае её периодичности.

В более геометрическом направлении вопрос рассматривался, например, в работе [4], где изучалась периодическая часть аффинной алгебраической группы над замкнутым полем.

2. Предварительные результаты

Будем пользоваться стандартными обозначениями: $o(x)$ — порядок элемента x в данной группе G, $\det x$ — определитель матрицы x, $\operatorname{tr} x$ — след матрицы x, $\bar{\varepsilon}$ — комплексно-сопряжённое число к комплексному числу ε, $\mathrm{GL}_n(k)$ — группа невырожденных $(n \times n)$-матриц с коэффициентами из поля k, e — единичная матрица, $[L : k]$ — степень расширения поля L над полем k.

Подобные матрицы, как легко видеть, имеют одинаковые порядки. В некоторых вопросах бывает удобно заменять рассматриваемую матрицу на подобную ей жорданову форму.

Лемма 2.1. *Если $x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ и $o(x) < \infty$, то $\det x = \pm 1$.*

Доказательство. В силу того что $x^m = e$ для некоторого натурального m, имеем $\det x^m = (\det x)^m = 1$. Следовательно, $\det x = \pm 1$. Лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Если x — невырожденная жорданова клетка размера не меньше 2×2, то $x^m \neq e$ для любого натурального m.*

Доказательство. Так как $x = te + \theta$, где $t \neq 0$, а θ — нильпотентная матрица, то, используя бином Ньютона (см. также [1]), имеем $x^m = t^m e + \Delta$, где Δ — отличная от нуля нильпотентная матрица. Отсюда получаем $x^m \neq e$, что и доказывает лемму. □

Лемма 2.3. *Если $x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ и $o(x) < \infty$, то матрица x подобна диагональной матрице с корнями из единицы на главной диагонали.*

Доказательство. Матрица x подобна своей жордановой форме, в которой все клетки согласно лемме 2.2 являются (1×1)-матрицами, коэффициенты которых равны некоторым корням из единицы. Лемма доказана. □

Замечание 2.1. Как показывают несложные примеры, если не требовать от матрицы диагонализируемости, то она, не будучи периодической, может иметь точно такой же набор характеристических чисел, что и периодическая. Всюду ниже при исследовании матрицы на периодичность мы предполагаем, что она диагонализируема. Это имеет место при выполнении некоторых дополнительных условий. Одно из них: исследуемая матрица имеет простой спектр.

Лемма 2.4. *Если x — диагональная матрица, подобная матрице y из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $o(x) < \infty$, то после надлежащей перенумерации диагональных элементов имеем*

$$x = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & & \\ & \bar{\varepsilon}_1 & & & & & & \\ & & \dots & & & & & \\ & & & \varepsilon_r & & & & \\ & & & & \bar{\varepsilon}_r & & & \\ & & & & & \delta_1 & & \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & \delta_s \end{pmatrix},$$

где ε_i — мнимые корни из 1, $\delta_j = \pm 1$.

Доказательство. Характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ вещественной матрицы y распадается в произведение неприводимых над $\mathbb{R}$ квадратичных многочленов $\chi_1, \dots, \chi_r$ и линейных многочленов $\psi_1, \dots, \psi_s$:

$$\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda) \dots \chi_r(\lambda) \psi_1(\lambda) \dots \psi_s(\lambda).$$

Корни многочленов $\chi_i(\lambda)$ попарно сопряжены и в силу однозначности разложения при надлежащей перенумерации совпадают с диагональными элементами. То, что все рассматриваемые диагональные элементы являются корнями из единицы, следует из периодичности матрицы x. Лемма доказана. □

3. Основная теорема

Следующий факт показывает, что множество периодических матриц из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ имеет с точностью до подобия достаточно удобную для вычислений структуру. Из результатов предыдущего раздела вытекает следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если матрица x лежит в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ и $o(x) < \infty$, то x подобна блочно-диагональной матрице из*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & & & \\ & \dots & & \\ & & \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \\ & & & \{\pm 1\} \end{pmatrix},$$

если n нечётно, и блочно-диагональной матрице из

$$\begin{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & & \\ & \dots & \\ & & \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \end{pmatrix},$$

если n чётно.

Доказательство. Согласно лемме 2.4 матрица x подобна матрице

$$x = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & & \\ & \bar{\varepsilon}_1 & & & & & & \\ & & \dots & & & & & \\ & & & \varepsilon_r & & & & \\ & & & & \bar{\varepsilon}_r & & & \\ & & & & & \delta_1 & & \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & \delta_s \end{pmatrix},$$

где ε_i — мнимые корни из 1, $\delta_j = \pm 1$.

Каждая из клеток

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_i & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_i \end{pmatrix}$$

подобна вещественной матрице

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix},$$

у которой

$$a_i + d_i = \varepsilon_i + \bar{\varepsilon}_i, \quad a_i d_i - b_i c_i = \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i = 1,$$

а оставшуюся часть диагонали можно сгруппировать на матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

если n чётно, и на матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

плюс (1×1)-матрицу вида (± 1), если n нечётно. Теорема доказана. □

Таким образом, описание множества $T\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)$ сводится к описанию произведения множеств $T\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\big)$, рассмотренных в их естественной геометрии и топологии.

4. Строение элементов пространства $T\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\big)$

Из рассуждений раздела 3 следует, что периодическая часть группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ распадается в объединение двух непересекающихся множеств

$$T\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\big) = \big\{x \in T\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\big) \bigm| \det x = 1\big\}$$

и

$$T\big(-\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\big) = \big\{x \in T\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\big) \bigm| \det x = -1\big\}.$$

Согласно результатам предыдущего раздела если матрица x лежит в $T\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\big)$, то x подобна либо диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

где ε — мнимый корень из 1, а $\bar{\varepsilon}$ — сопряжённый к нему, либо одной из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причём последняя матрица подобна диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Если же матрица x лежит в $T\big(-\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\big)$, то она подобна диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

которая подобна матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $\mathrm{tr}\, x = 0$ и $o(x) = 2$.

Получаем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Если вещественная матрица*

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

периодична, то либо $ad - bc = 1$ и $a + d = 2\cos 2\pi l/m$, где $(l, m) = 1$ и $o(x) = m$, либо $ad - bc = -1$, $a + d = 0$ и $o(x) = 2$.

Доказательство. Если матрица x подобна диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

где ε — мнимый первообразный корень из 1 степени m, то $\mathrm{tr}\, x = \varepsilon + \bar{\varepsilon} = 2\cos 2\pi l/m$, где $(l, m) = 1$ и $o(x) = m$. Если

$$x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то $o(x) = 2$ и $\mathrm{tr}\, x = a + d = -2 = 2\cos \pi l$, причём l нечётное. Если же

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $a + d = 2\cos 2\pi l/1$, $\mathrm{tr}\, x = 2$, что и заканчивает рассмотрение случая $ad - bc = 1$.

Рассмотрим случай $ad - bc = -1$. В этом случае матрица x подобна диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и тогда $\operatorname{tr} x = a + d = 0$ и $o(x) = 2$. Теорема доказана. □

Замечание 4.1. Легко видеть, что условия теоремы обратимы в следующем смысле. Если x не подобна никакой из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\det x = 1$, $\operatorname{tr} x = 2\cos 2\pi l/m$, то рассматриваемая матрица x периодична и имеет порядок m.

Если $\det x = -1$ и $\operatorname{tr} x = 0$, то $o(x) = 2$ и рассматриваемая матрица подобна диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доказанную теорему можно переформулировать в виде следующего критерия.

Следствие 4.1. *Матрица*

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

с вещественными коэффициентами периодична тогда и только тогда, когда x не подобна никакой из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$ad - bc = 1$ *и* $a + d = 2\cos\alpha$, *где* α/π — *рациональное число, либо* $ad - bc = -1$ *и* $a = -d$.

Таким образом, можно сформулировать следующее правило исследования матрицы на периодичность.

1. Убеждаемся, что $\det x = \pm 1$.
2. Убеждаемся, что x не подобна никакой из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для этого достаточно рассмотреть x^2. Если матрица x имеет двукратный характеристический корень ± 1, то в случае подобия таким матрицам $x^2 \neq e$, а в противном случае

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = e.$$

3. Убеждаемся, что в случае $\det x = 1$ имеем $a + d = 2\cos\alpha$, где α/π — рациональное число, а в случае $\det x = -1$ имеет место равенство $a = -d$.

Таблица 1. Корни из 1

	$\varepsilon^5 = 1$		$\xi^{10} = 1$
ε_0	1	ξ_0	1
		ξ_1	$\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}i$
ε_1	$\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}i$	ξ_2	$\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}i$
		ξ_3	$-\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}i$
ε_2	$-\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}i$	ξ_4	$-\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}i$
		ξ_5	-1
ε_3	$-\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}i$	ξ_6	$-\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}i$
		ξ_7	$-\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}i$
ε_4	$\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}i$	ξ_8	$\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}i$
		ξ_9	$\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}i$

Если хотя бы одно условие не выполнено, то матрица x не периодична. Если все три условия выполнены, то $o(x) < \infty$ и несложно найти порядок матрицы x.

Приведём теперь примеры построения матриц заданного порядка.

Начнём со случая $\det x = 1$. Для этого может быть полезна следующая таблица 1.

Для (2×2)-матриц с определителем 1 имеем

$$o\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 2,$$

так как $-2 = 2\cos 2\pi/2$;

$$o\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 3,$$

так как $-1 = 2\cos 2\pi/3$;

$$o\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right) = o\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = o\left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right) = 4,$$

так как $0 = 2\cos 2\pi/4$;

$$o\left(\begin{pmatrix}1/2 & 1/4\\ -3 & 1/2\end{pmatrix}\right) = o\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) = 6,$$

так как $1 = 2\cos 2\pi/6$.

Таким образом, существуют (2×2)-матрицы с рациональными коэффициентами, имеющие порядки 2, 3, 4 и 6. Других возможностей, как нетрудно видеть, нет.

Далее,

$$o\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\right) = 8,$$

так как $\sqrt{2} = 2\cos 2\pi/8$;

$$o\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\right) = 12,$$

так как $\sqrt{3} = 2\cos 2\pi/12$;

$$o\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & (\sqrt{5}-1)/2\end{pmatrix}\right) = 5,$$

так как $(\sqrt{5}-1)/2 = 2\cos 2\pi/5$;

$$o\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & (1-\sqrt{5})/2\end{pmatrix}\right) = 10,$$

так как $(1-\sqrt{5})/2 = 2\cos 6\pi/10$.

Таким образом, существуют (2×2)-матрицы порядков 8, 12, 5 и 10 соответственно с коэффициентами в полях $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Других возможностей в квадратичных вещественных полях, как нетрудно видеть, нет.

Замечание 4.2. Можно было бы рассмотреть и мнимые квадратичные расширения, однако при этом нарушается некоторая однозначность. Например, группы $\mathrm{GL}_2\bigl(\mathbb{Q}(\sqrt{3})\bigr)$ и $\mathrm{GL}_2\bigl(\mathbb{Q}(i)\bigr)$ содержат элемент порядка 12.

Случай $\det x = -1$ иллюстрируется примерами

$$x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Аналогично можно было бы проанализировать, как ведут себя степени расширений поля $\mathbb{Q}$ при росте порядков матриц. В частности, можно поставить следующий вопрос.

Пусть $D(n)$ — наименьшее натуральное число, для которого существует вещественное расширение L поля $\mathbb{Q}$ степени $D(n)$, такое что группа $\mathrm{GL}_2(L)$ содержит элемент порядка n. Легко видеть, что

$$D(1) = D(2) = D(3) = D(4) = D(6) = 1;$$
$$D(5) = D(8) = D(10) = D(12) = 2.$$

Какова общая формула для $D(n)$ (см. [2])?

Теорема 4.2. *Если* $n \geqslant 3$, *то* $D(n) = \varphi(n)/2$.

Доказательство. Как уже было показано, вещественная матрица x с единичным определителем имеет порядок n тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} x = 2\cos 2\pi l/n$, где $(l, n) = 1$. Остаётся понять, какова степень расширения $[\mathbb{Q}(\cos 2\pi l/n) : \mathbb{Q}]$, так как меньше её число $D(n)$, очевидно, быть не может.

Пусть $\varepsilon = \cos 2\pi l/n + i \sin 2\pi l/n$ — первообразный корень из единицы степени n. Тогда $\bar{\varepsilon}$ также первообразный корень, $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \mathbb{Q}(\bar{\varepsilon})$ и $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 2\cos 2\pi l/n$. Имеем цепочку включений

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\cos 2\pi l/n) \subset \mathbb{Q}(\varepsilon).$$

Отсюда получаем

$$\varphi(n) = [\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\cos 2\pi l/n) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}(\cos 2\pi l/n)].$$

Следовательно,

$$[\mathbb{Q}(\cos 2\pi l/n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)/2.$$

Теорема доказана. □

5. Описание матриц из пространства $T\bigl(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\bigr)$

Пусть x — матрица из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Наша задача, как и в предыдущем разделе, не вычисляя жорданову форму матрицы x, по $\det x$ и $\operatorname{tr} x$, решить вопрос о порядке $o(x)$ этой матрицы.

Как следует из леммы 2.4, для того чтобы матрица x из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ была периодической, необходимо и достаточно, чтобы её жорданова форма имела вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$ или $\varepsilon = \cos 2\pi l/m + i \sin 2\pi l/m$, причём $(l, m) = 1$. Если при этом $\det x = 1$, причём ε — мнимое число, т. е. $m \geqslant 3$ и $\operatorname{tr} x = 2\cos 2\pi l/m + 1$, то $o(x) = m$.

Если $\det x = 1$ и $\operatorname{tr} x = 3$ или $\operatorname{tr} x = -1$, то $x = e$, либо x подобна

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично разбирается случай $\det x = -1$. В любом случае матрица x подобна вещественной матрице

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

где $y \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, причём y — периодическая матрица, описываемая так же, как и в разделе 4.

Для решения вопроса о периодичности матрицы из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ при $n > 3$ без приведения её к жордановой форме необходимо привлекать, кроме определителя и следа, ещё и другие матричные инварианты.

6. Геометрия пространства $T\bigl(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\bigr)$

Геометрия пространства $T\bigl(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\bigr)$, так же как и его алгебра, в силу сказанного выше сводится к рассмотрению случая произведения пространств $T\bigl(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\bigr)$. Поэтому объектом нашего исследования будет пространство $T\bigl(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\bigr)$, распадающееся в объединение пространств $T\bigl(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\bigr)$ и $T\bigl(-\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\bigr)$.

Матрицы

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

естественным образом можно представлять в виде точек x аффинного пространства $\mathbb{R}^4$. Пусть Π_m — множество, состоящее из $\varphi(m)$ непересекающихся трёхмерных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^4$, задающихся условиями

$$\Pi_m = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a + d = 2\cos 2\pi l/m;\ (l, m) = 1,\ 1 \leqslant l < m \right\}.$$

Из результатов раздела 4 следует, что $T\bigl(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\bigr)$ является объединением множеств $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cap \Pi_m$ по всем m, причём каждое такое пересечение состоит из $\varphi(m)$ двумерных гиперболоидов, лежащих в трёхмерном пространстве, соответствующем трёхмерной гиперплоскости. Отметим, что точки набора параллельных гиперболоидов соответствуют матрицам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

имеющим порядок m, причём

$$\operatorname{tr} x = a + d = 2\cos 2\pi l/m,\ (l, m) = 1.$$

То, что составляющие этого набора действительно являются гиперболоидами, гарантирует следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть γ — некоторое фиксированное вещественное число. Тогда множество*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a + d = \gamma \right\},$$

а также множество

$$-\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a + d = \gamma \right\}$$

являются гиперболоидами в трёхмерном пространстве.

Доказательство. Выражая d через a, получаем соотношения

$$a(\gamma - a) - bc = \pm 1.$$

Отсюда, используя стандартные критерии из пространственной аналитической геометрии (см. [3]), получаем в $\mathbb{R}^3$ поверхности, являющиеся однополостными или двуполостными гиперболоидами в зависимости от знака перед единицей. Теорема доказана. □

Приведём следующую иллюстрацию в трёхмерном пространстве. Будем рассматривать только матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

т. е. $\operatorname{tr} x = d$, $\det x = -bc$. Придавая d всевозможные вещественные значения γ (в частности, $\gamma = 2\cos 2\pi l/m$), мы получаем бесконечную систему параллельных плоскостей в трёхмерном пространстве. Тогда кручение в этой ситуации описывается объединением параллельных гипербол, задаваемых уравнениями

$$bc = -1, \quad d = 2\cos 2\pi l/m \quad \text{или} \quad bc = 1, \quad d = 0.$$

Такой подход может быть полезен при изучении кручения в *вещественных* аффинных алгебраических группах.

Другой иллюстрацией является группа $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда $T\big(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\big)$, очевидно, состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi l/m & \sin 2\pi l/m \\ -\sin 2\pi l/m & \cos 2\pi l/m \end{pmatrix}.$$

Разумеется, имеются и более сложные примеры нахождения $T(G)$ для аффинных алгебраических групп G.

7. Понятие S-характеристики

В разделах 7 и 8 продолжается изучение периодической части группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, начатое в разделах 3—6. Особенность состоит только в том, что раньше рассматривались произвольные матрицы из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, а здесь L — это, как правило, $\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}}$-максимальное абелево расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, совпадающее по теореме Кронекера—Вебера (см. [5]) с объединением всех конечных круговых расширений поля $\mathbb{Q}$. Главная причина этого состоит в том, что согласно разделам 3—6 все характеристические числа периодической матрицы являются корнями из единицы и порядок периодической матрицы равен наименьшему общему кратному степеней корней из единицы, являющихся характеристическими числами матрицы x.

Пусть S — некоторое множество корней из единицы и x — некоторая периодическая матрица из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\chi_x(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы x. Назовём *S-характеристикой* матрицы x неупорядоченный набор $h_s(x)$ длины n вида

$$h_s(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S$, причём элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — это те характеристические корни многочлена $\chi_x(\lambda)$, взятые со своими кратностями, которые лежат в S, а $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_n = 0$. Корни из единицы, являющиеся характеристическими числами и не лежащие в S, просто не рассматриваются. Если у характеристического многочлена нет корней, лежащих в S, то $m = 0$. Если все характеристические корни лежат в S, то $m = n$.

Рассмотрим следующий сильный вариант периодичности. Скажем, что периодическая матрица x *S-периодична*, если все её характеристические корни лежат в S. В нашей ситуации будет предполагаться, что множество S достаточно велико и содержит «почти» все характеристические корни многочлена $\chi_x(\lambda)$. Другими словами, периодичность «почти» совпадает с S-периодичностью. Если вне множества S нет корней из единицы, являющихся характеристическими числами, то периодичность и «почти» периодичность совпадают.

Таким образом, если некоторые характеристические числа матрицы x не являются корнями из единицы или являются корнями из единицы, не попадающими в S, то матрица x не S-периодична.

Нам понадобится следующий факт, являющийся несложным упражнением для читателя.

Теорема 7.1. *Пусть ε_1 и ε_2 — первообразные корни из единицы степеней m_1 и m_2 соответственно. Тогда $\mathbb{Q}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathbb{Q}(\varepsilon_3)$, где ε_3 — первообразный корень степени m_3, причём m_3 — наименьшее общее кратное чисел m_1 и m_2, а ε_1 и ε_2 являются некоторыми степенями ε_3.*

Следующее утверждение показывает в какой области будут производиться вычисления (достаточно ограничиться конечными круговыми расширениями).

Теорема 7.2. *Пусть x — некоторая периодическая матрица из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Тогда $\chi_x(\lambda) \in \mathbb{Q}_{\mathrm{ab}}[\lambda]$.*

Доказательство. По определению $\chi_x(\lambda) = |\lambda e - x|$ — нормированный многочлен. С другой стороны, $\chi_x(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{n} (\lambda - \varepsilon_i)$, где ε_i — корни из единицы, т. е. элементы из $\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}}$. Сравнивая коэффициенты, получаем требуемый результат. Теорема доказана. $\square$

Следствие 7.1. *Пусть x — некоторая периодическая матрица из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Тогда все коэффициенты многочлена $\chi_x(\lambda)$ и все его характеристические корни являются элементами поля $\mathbb{Q}(\zeta)$, где ζ — некоторый корень из единицы, который мы будем называть основным корнем из единицы для данного многочлена $\chi_x(\lambda)$.*

Назовём множество S корней из единицы *$\mathcal{E}$-замкнутым*, если из того, что ε_1 и ε_2 лежат в S и $\mathbb{Q}(\varepsilon_3) = \mathbb{Q}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, следует, что ε_3 лежит в S. Естественным образом можно определить $\mathcal{E}$-замыкание $\bar{S}$ множества S.

Зафиксируем некоторое конечное $\mathcal{E}$-замкнутое множество корней из единицы S, которое будем называть *допустимым* (*допустимые* корни из единицы), и все дальнейшие рассмотрения будем производить только относительно *допустимого* множества корней из единицы S. Все остальные корни из единицы в данной конкретной серии вычислений просто не рассматриваются. Аналогично сказанному выше существует корень из единицы ζ, для которого $\mathbb{Q}(S) = \mathbb{Q}(\zeta)$. Он будет называться *основным* для данного допустимого множества S.

Пример. Рассмотрим все корни из единицы степени не выше 5. Легко видеть, что это множество не является $\mathcal{E}$-замкнутым и его $\mathcal{E}$-замыкание — это множество $\mathbb{Q}(\zeta) = \{1, \zeta, \ldots, \zeta^{59}\}$, где ζ — некоторый первообразный корень степени 60 из единицы.

Другой важный пример допустимого множества — это множество всех корней из единицы, лежащих в данном конечном расширении поля $\mathbb{Q}$. Легко видеть, что оно конечно и $\mathcal{E}$-замкнуто.

Пусть S_d — $\mathcal{E}$-замкнутое множество корней из единицы, порождённое всеми корнями из единицы степени не выше d. Тогда имеется следующая неубывающая цепочка включений множеств:

$$S_5 \subset S_6 \subset \ldots \subset S_d \subset \ldots .$$

На некоторых местах этой цепочки возможны равенства. Так, например, S_5 — множество всех корней из единицы степени 60 и $S_5 = S_6$, так как все корни из единицы степени 6, очевидно, лежат в S_5. Если рассматривать только такие корни из единицы, которые могут быть корнями фиксированного многочлена f над фиксированным полем K, то цепочка множеств S_d, в силу теоремы 8.1 из следующего раздела, конечна. Это и лежит в основе переборочного алгоритма поиска корней характеристического многочлена.

В разделе 3 доказано, что любая периодическая вещественная матрица подобна так называемой 2-*диагональной матрице*, т. е. матрице вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ldots & & \\ & & x_{2k-2} & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix},$$

если $n = 2k - 1$, и матрице вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ldots & \\ & & x_{2k} \end{pmatrix},$$

если $n = 2k$, причём в любом случае x_i — вещественная периодическая (2×2)-матрица, собственные значения которой являются взаимно-сопряжёнными корнями из единицы, или матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Одна из целей настоящей работы — указать алгоритм, который по любой вещественной матрице x из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}})$ находит подобную ей 2-диагональную матрицу или выясняет, что это невозможно.

Другая задача, которая будет исследована в дальнейшем, — описать некоторые подгруппы периодической части группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}})$ как модули Галуа над $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}})/\mathbb{Q}$.

Как следует из разделов 3—6, вещественная матрица x подобна 2-диагональной тогда и только тогда, когда

1) матрица x подобна диагональной;
2) собственные значения матрицы x можно выстроить в последовательность
$$\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_1, \ldots, \varepsilon_r, \bar{\varepsilon}_r, \delta_1, \ldots, \delta_s,$$
ε_i — корни из единицы, причём ε_i мнимые; здесь r и s могут быть и нулями, $\delta_j = \pm 1$, причём $2r + s = n$.

8. Алгоритм нахождения характеристических чисел

Итак, у нас на входе матрица x из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}})$, которая согласно теореме Кронекера—Вебера лежит в $\mathrm{GL}_n\big(\mathbb{Q}(\zeta)\big)$, для некоторого корня из единицы ζ. Элементы матрицы x — это полиномиальные выражения с рациональными коэффициентами от символа ζ, взятые по модулю кругового многочлена. Здесь ζ — основной элемент допустимого множества S, построенного по характеристическому многочлену. Ограниченность степеней элементов ζ^k над полем $\mathbb{Q}$ вытекает из следующего утверждения.

Теорема 8.1. *Пусть K — конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ и $f(\lambda)$ — некоторый многочлен из $K[\lambda]$. Если α — корень многочлена $f(\lambda)$ с коэффициентами из поля K, то степень α над $\mathbb{Q}$ не превосходит $[K:\mathbb{Q}]\deg f$.*

Доказательство. Ясно, что $[K(\alpha):K] \leqslant \deg f$. С другой стороны,
$$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] \leqslant [K(\alpha)]:\mathbb{Q}] = [K(\alpha):K][K:\mathbb{Q}] \leqslant [K:\mathbb{Q}]\deg f,$$
Отсюда всё и следует. Теорема доказана. □

Изложим более подробно алгоритм построения допустимого множества S.

Согласно теореме 8.1 имеется лишь конечное множество корней из единицы, которые могут быть корнями многочленов фиксированной степени с коэффициентами из кругового поля K. Таким образом, по любому многочлену $f(\lambda)$ из $K[\lambda]$ строится конечное множество корней из единицы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, содержащее все корни всех многочленов степени не выше $\deg f$. Пусть ζ — такой корень из единицы, что $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m, K)$, и S — множество всех корней из единицы поля $\mathbb{Q}(\zeta)$. Перебирая эти корни и выделяя те из них, которые являются корнями многочлена $\chi_x(\lambda)$, мы и заканчиваем работу алгоритма. Если количество этих корней, взятое с кратностями, равно n, то матрица x периодична. Если меньше n, то не периодична.

Таким образом, построено допустимое множество S, из которого берутся все допустимые корни из единицы и строится множество решений характеристического уравнения. Конечность этого множества обеспечивает сходимость алгоритма.

Для построения множества S удобно рассмотреть цепочку подмножеств

$$S_5 \subset S_6 \subset \ldots \subset S_d \subset \ldots .$$

Множество S строится, разумеется, не однозначно. Оно может быть слишком большим, что приведёт к долгой работе алгоритма. Поиску оптимальной конструкции алгоритма будет посвящена следующая работа.

На выходе алгоритма — результат подстановок в характеристический многочлен символов $1, \zeta, \ldots, \zeta_k, \ldots$. Точное значение этого результата позволяет судить о том, какой из элементов ζ^k является характеристическим корнем. Таким образом, основной смысл предлагаемого алгоритма состоит в последовательном переборе всех подстановок элементов ζ^k и фиксации подстановок, которые дают нуль. Отметим, что, находя корень с помощью подстановок, мы находим и кратность корня, с которой он входит в данный многочлен. Обращаем внимание, что здесь нигде нет десятичных дробей и приближённых вычислений (это просто бессмысленно). Везде только точные выкладки с рациональными числами и элементом ζ по модулю кругового многочлена.

Итак, подбирая подходящее множество S, мы либо получаем характеристику матрицы x относительно S, т. е. строку $h_S(x) = (\zeta^{k_1}, \ldots, \zeta^{k_n})$, заполненную корнями из единицы, либо ответ «Матрица не является периодической».

Если x — периодическая вещественная матрица, то по $h_S(x)$ можно строить подобную ей 2-диагональную матрицу.

Рассмотрим конкретный пример поиска корней. Пусть x — (6×6)-матрица вида

$$x = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{5}+3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{5}+3}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}+3}{2} & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}+3}{2} & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}+3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & \varepsilon+\bar{\varepsilon}+2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \varepsilon+\bar{\varepsilon}+2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \varepsilon+\bar{\varepsilon}+2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & \varepsilon+\bar{\varepsilon}+1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \varepsilon+\bar{\varepsilon}+2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & \varepsilon+\bar{\varepsilon}+2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где ε — первообразный корень степени 5 из единицы, и $\det(x - \lambda e)$ — её характеристический многочлен. Этот многочлен задан над полем $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, и по теореме 8.1 степень его корней над $\mathbb{Q}$ ограничена числом $6\cdot 2 = 12$. Согласно алгоритму перебора мы должны проанализировать множества S_d до определённого предела, пока не исчерпаем ограничения по степени.

Начнём сразу с S_5, порождённого основным корнем из единицы ζ степени 60. Тогда рассматриваемая матрица будет иметь вид

$$x = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & \zeta^{12}+\zeta^{48}+2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \zeta^{12}+\zeta^{48}+2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \zeta^{12}+\zeta^{48}+2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & \zeta^{12}+\zeta^{48}+1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \zeta^{12}+\zeta^{48}+2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & \zeta^{12}+\zeta^{48}+2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и будет равна по модулю кругового многочлена Φ_{60} матрице

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1+\zeta^4+\zeta^6-\zeta^{14} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1+\zeta^4+\zeta^6-\zeta^{14} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1+\zeta^4+\zeta^6-\zeta^{14} & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & \zeta^4+\zeta^6-\zeta^{14} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1+\zeta^4+\zeta^6-\zeta^{14} & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1+\zeta^4+\zeta^6-\zeta^{14} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(несложное упражнение для читателя).

Непосредственная компьютерная проверка показывает, что уже на этом этапе обнаруживаются все корни многочлена $\chi_x(\lambda)$. Это корни 3-й, 4-й и 5-й степени из единицы, имеющие вид ζ^{20} и ζ^{40}, ζ^{15} и ζ^{45}, ζ^{12} и ζ^{48}, т. е. это пары взаимно-сопряжённых корней многочлена $\chi_x(\lambda)$.

Отсюда следует, что матрица x подобна диагональной матрице

$$y = \begin{pmatrix} \zeta^{20} & & & & & \\ & \zeta^{40} & & & & \\ & & \zeta^{15} & & & \\ & & & \zeta^{45} & & \\ & & & & \zeta^{12} & \\ & & & & & \zeta^{48} \end{pmatrix}$$

и $o(x) = o(y) = 60$.

Авторы благодарят К. Г. Цыбулю за большую помощь в организации компьютерных вычислений.

Литература

[1] Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1966.

[2] Гришин А. В. О периодической части группы невырожденных (2×2)-матриц с алгебраическими коэффициентами // Международная конференция, посвящённая 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ. Тезисы докладов (электронная версия). — М., 2019. — С. 26.

[3] Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.

[4] Федотов С. Н. Аффинные алгебраические группы с периодическими компонентами // Матем. сб. — 2009. — Т. 200, № 7. — С. 145—160.

[5] Greenberg M. J. An elementary proof of the Kronecker—Weber theorem // Amer. Math. Monthly. — 1974. — Vol. 81, no. 6. — P. 601—607.