Инварианты Жордана—Кронекера для алгебр Ли малых размерностей

А. Ю. ГРОЗНОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: avsav999@mail.ru

УДК 512.812

Ключевые слова: скобка Пуассона, алгебра Ли, скобка Пуассона—Ли, инварианты Жордана—Кронекера.

Аннотация

В работе вычисляются инварианты Жордана—Кронекера для всех нильпотентных шестимерных и семимерных алгебр Ли. Рассматривается семейство скобок Пуассона, зависящих от параметра лямбда на коалгебре Ли, т. е. на линейном пространстве, сопряжённом к алгебре Ли. Для некоторого пространства $\mathfrak{g}$ предложенного в работе, определяются две кососимметрические матрицы для каждой точки x этого линейного пространства. Чтобы понять, как ведёт себя пучок таких матриц $(A-\lambda B)(x)$, рассматриваем инварианты Жордана—Кронекера этого пучка, а также как они меняются при изменении x (последнее — для шестимерных алгебр Ли).

Abstract

A. Yu. Groznova, Jordan–Kronecker invariants for Lie algebras of small dimensions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2021), no. 4, pp. 73—86.

In this paper, Jordan–Kronecker invariants are calculated for all nilpotent 6- and 7-dimensional Lie algebras. We consider the Poisson bracket family, depending on the lambda parameter on a Lie coalgebra, i.e., on the linear space dual to a Lie algebra. For some space $\mathfrak{g}$ proposed in the paper, two skew-symmetric matrices are defined for all points x on this linear space. To understand the behaviour of the matrix pencil $(A-\lambda B)(x)$, we consider Jordan–Kronecker invariants for this pencil and how they change with x (the latter is done for 6-dimensional Lie algebras).

1. Основные определения и теоремы

Определение 1. Скобкой Пуассона называется билинейная кососимметрическая операция над функциями $f,g\to\{f,g\}$, удовлетворяющая тождеству Якоби и правилу Лейбница. Общий вид скобки Пуассона в координатах $(x^1,\ldots,x^n)$:

$$\{f,g\}(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{\partial g}{\partial x^j}\,A^{ij}(x),$$

где $A^{ij}(x)=\{x^i,x^j\}$ — кососимметричная матрица (тензор Пуассона).

Фундаментальная и прикладная математика, 2021, том 23, № 4, с. 73—86.

Определение 2. Алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ называется векторное пространство V с заданным коммутатором $x, y \to [x, y]$, т. е. билинейной кососимметричной операцией, удовлетворяющей тождеству Якоби. Если в алгебре Ли фиксировать базис $e_1, \ldots, e_n$, то

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k,$$

где числа c_{ij}^k называются структурными константами алгебры Ли относительно данного базиса $e_1, \ldots, e_n$.

Теорема (теорема Жордана—Кронекера)**.** *Пусть A и B — две кососимметрические билинейные формы на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем K. Тогда существует такой базис пространства V, что матрицы обеих форм A и B одновременно приводятся к блочно-диагональному виду*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix},$$

где каждая пара соответствующих блоков A_i и B_i имеет один из следующих видов:

1) *жорданов блок с собственным значением $\lambda \in \Bbbk$:*

$$A_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & \lambda & 1 & & \\ & 0 & & & & \lambda & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & \lambda \\ \hline -\lambda & & & & & & & \\ -1 & -\lambda & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ & & -1 & -\lambda & & & & \end{array}\right), \quad B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \end{array}\right);$$

2) *жорданов блок с собственным значением $\lambda = \infty$:*

$$A_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \end{array}\right), \quad B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 \\ \hline 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ & & -1 & 0 & & & & \end{array}\right);$$

3) *кронекеров блок*:

$$
A_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 1 & 0 & \\
 & 0 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & 1 & 0 \\ \hline
-1 & & & & & \\
0 & \ddots & & & & \\
 & \ddots & -1 & & 0 & \\
 & & 0 & & &
\end{array}\right), \quad
B_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 0 & 1 & \\
 & 0 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & 0 & 1 \\ \hline
0 & & & & & \\
-1 & \ddots & & & & \\
 & \ddots & 0 & & 0 & \\
 & & -1 & & &
\end{array}\right).
$$

Каждый кронекеров блок — это блок размера $(2k_i-1)\times(2k_i-1)$, *где* $k_i \geqslant 1$. *В частности, если* $k_i = 1$, *то* A_i *и* B_i *— это две нулевые матрицы размера* 1×1:

$$A_i = (0), \quad B_i = (0).$$

Определение 3. Инвариантами Жордана—Кронекера пары билинейных кососимметричных форм являются количество и размеры жордановых и кронекеровых блоков для этой пары форм.

Определение 4. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то на её коалгебре $\mathfrak{g}^*$ определена *скобка Пуассона—Ли*, заданная формулой

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [df(x), dg(x)]\rangle, \quad x \in \mathfrak{g}^*.$$

Если в алгебре Ли фиксирован базис $e_1, \ldots, e_n$ (для которого c_{ij}^k — структурные константы), то в координатах $(x_1, \ldots, x_n)$ на $\mathfrak{g}^*$, соответствующих двойственному базису

$$\{f, g\}(x) = A_{ij}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad \text{где} \quad A_{ij}(x) = c_{ij}^k x_k.$$

Компоненты тензора Пуассона $A_{ij}(x)$ для скобки Пуассона—Ли линейно зависят от координат $(x_1, \ldots, x_n)$. Аналогичным образом для каждого элемента $a \in \mathfrak{g}^*$ можно определить на $\mathfrak{g}^*$ постоянную скобку Пуассона:

$$\{f, g\}_a(x) = B_{ij}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad B_{ij} = A_{ij}(a) = c_{ij}^k a_k.$$

Известно, что скобка Пуассона—Ли и $\{\cdot,\cdot\}_a$ согласованны (т. е. любая их линейная комбинация $\mu\{\cdot,\cdot\}+\nu\{\cdot,\cdot\}_a$ с постоянными коэффициентами μ, ν тоже скобка Пуассона).

Нас интересуют инварианты Жордана—Кронекера для пучка матриц

$$\{A - \lambda B\}_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k (x_k - \lambda a_k)\right)$$

(т. е. количество и размеры жордановых и кронекеровых блоков для этой пары матриц) при различном выборе элементов $x, a \in \mathfrak{g}^*$. В частности, если в качестве

x, a выбраны элементы общего положения в $\mathfrak{g}^*$, то инварианты Жордана—Кронекера такого пучка матриц называются инвариантами Жордана—Кронекера соответствующей алгебры Ли.

2. Результаты

Для поиска инвариантов Жордана—Кронекера в точках общего положения была написана программа на языке Python 3.6, в которой использовались символьные вычисления (библиотека SymPy). Алгоритм основан на утверждениях из [2]. Рассмотрим его более подробно.

1. Находим количество кронекеровых блоков по формуле
$$n - \max_{\lambda} \operatorname{rk}(A - \lambda B),$$
где n — размер матрицы $A - \lambda B$.
2. Ищем значения λ, при которых ранг $A{-}\lambda B$ уменьшается. Если при определённых λ ранг падает на m, то жордановых блоков с таким параметром λ ровно $m/2$. Если нет λ, при которых ранг уменьшается, то жордановых блоков нет, так как ранг кронекеровых блоков от значений λ не зависит.
3. Находим количества жордановых и кронекеровых блоков по пунктам 1 и 2. Учитывая, что жордановы блоки всегда чётной размерности, а кронекеровы — нечётной, разбиваем число n на чётные и нечётные слагаемые, перебирая таким образом все возможные варианты.
4. Для уточнения количества нетривиальных жордановых μ-блоков применяем в программе формулу
$$\frac{1}{2}\operatorname{corank}(B|_{\ker(A-\mu B)}) - \max_{\lambda} \operatorname{corank}(A - \lambda B).$$
5. Для подсчёта количества тривиальных кронекеровых блоков находим векторы из ядра матрицы B. Далее вычисляем произведения $B + \lambda A$ на каждом из этих векторов. Количество векторов из ядра, при которых произведение равно нулю, — число тривиальных кронекеровых блоков в разложении Жордана—Кронекера (см. [2, с. 60]). В соответствии с ними программа выдавала варианты ответа.

Нами были вычислены инварианты Жордана—Кронекера для шестимерных нильпотентных алгебр Ли (список состоит из 22 алгебр Ли), не только для точек общего положения, но и для всех частных случаев, каждый из которых непосредственно рассматривался с помощью алгоритма выше.

Все результаты представлены в следующих двух таблицах. Сразу договоримся о следующих сокращениях: т. о. п. — точки общего положения; Ж, К — жордановы и кронекеровы блоки соответственно.

Таблица 1. Инварианты Жордана—Кронекера для матриц $A - \lambda B = (x_i - \lambda a_i)_{jk}$,
$\{i, j, k\colon [e_j, e_k] = e_i\}$

Алгебра Ли		**Случаи**	**Блоки**	
			Ж	**К**
$\mathcal{A}_{6,1}$	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_5] = e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i = x_i = 0,\ i = 3, 4, 6$ (3) $x_3/a_3 = x_4/a_4 = x_6/a_6$	– – 2	1 1 1 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$\mathcal{A}_{6,2}$	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_1, e_5] = e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i = x_i = 0,\ i = \overline{3, 6}$ (3) $x_3/a_3 = x_4/a_4 = x_5/a_5 = x_6/a_6$	– – 2	1 1 1 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$\mathcal{A}_{6,3}$	$[e_1, e_2] = e_6$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_5$	(1) т. о. п. (2) $a_i = x_i = 0,\ i = \overline{4, 6}$ (3) $x_4/a_4 = x_5/a_5 = x_6/a_6$	– – 2	1 1 1 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$\mathcal{A}_{6,4}$	$[e_1, e_2] = e_5$, $[e_1, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i = x_i = 0,\ i = 5, 6$ (3) $x_5/a_5 = x_6/a_6$	4 – 2 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$\mathcal{A}_{6,5}$	$[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_3] = \pm e_6$, $[e_2, e_4] = e_5$	(1) т. о. п. (2) $a_i = x_i = 0,\ i = 5, 6$	2 2 –	1 1 1 1 1 1 1 1
$\mathcal{A}_{6,6}$	$[e_1, e_2] = e_6$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_5$	(1) т. о. п. (2) $a_i = x_i = 0,\ i = \overline{4, 6}$ (3) $a_5 = x_5 = 0,\ x_4/a_4 = x_6/a_6$ (4) $x_3/a_3 = x_4/a_4 = x_6/a_6$	4 – 2 2 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$\mathcal{A}_{6,7}$	$[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i = x_i = 0,\ i = \overline{4, 6}$ (3) $a_5 = x_5 = 0,\ a_6, x_6 \neq 0$	2 2 – –	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3
$\mathcal{A}_{6,8}$	$[e_1, e_2] = e_3 + e_5$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_2, e_5] = e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i = x_i = 0,\ i = \overline{3, 6}$ (3) $a_6 = x_6 = 0$, $x_4/a_4 = (x_3 + x_5)/(a_3 + a_5)$	2 2 – 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$\mathcal{A}_{6,9}$	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_5] = e_6$, $[e_2, e_3] = e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i = x_i = 0,\ i = 3, 4, 6$ (3) $a_6 = x_6 = 0,\ x_3/a_3 = x_4/a_4$ (4) $x_3/a_3 = x_4/a_4 = x_6/a_6$	4 – 2 2 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\mathcal{A}_{6,\,10}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_5$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=\pm e_6$, $[e_2,e_4]=e_5$	(1) т. о. п. (2) $a_i=x_i=0,\ i=3,5,6$ (3) $a_i=x_i=0,\ i=5,6$	2 2 – 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$\mathcal{A}_{6,\,11}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_2,e_3]=e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{3,6}$ (3) $a_6=x_6=0$, $x_3/a_3=x_4/a_4=x_5/a_5$ (4) $a_6=x_6=0$, $x_3/a_3=x_4/a_4\neq x_5/a_5$	2 2 – 2 –	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3
$\mathcal{A}_{6,\,12}$	$[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_5]=e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i=x_i=0,\ i=4,6$ (3) $a_6=x_6=0$ (4) $x_4/a_4=x_6/a_6$	4 – 2 2 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$\mathcal{A}_{6,\,13}$	$[e_1,e_2]=e_5$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_5]=e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{4,6}$ (3) $a_6=x_6=0,\ x_4/a_4=x_5/a_5$ (4) $a_6=x_6=0,\ x_4/a_4\neq x_5/a_5$ (5) $x_4/a_4=x_5/a_5=x_6/a_6$	2 – 2 – 2 2	1 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3 1 1
$\mathcal{A}_{6,\,14}$	$[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_5$, $[e_2,e_5]=\pm e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{4,6}$ (3) $a_6=x_6=0,\ x_4/a_4=x_5/a_5$ (4) $a_6=x_6=0,\ x_4/a_4\neq x_5/a_5$ (5) $x_4/a_4=x_5/a_5=x_6/a_6$	2 – 2 – 2 2	1 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3 1 1
$\mathcal{A}_{6,\,15}$	$[e_1,e_2]=e_3+e_5$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_5]=e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{3,6}$ (3) $a_6=x_6=0$, $x_4/a_4=(x_3+x_5)/(a_3+a_5)$ (4) $a_6=x_6=0$, $x_4/a_4\neq(x_3+x_5)/(a_3+a_5)$ (5) $x_4/a_4=x_6/a_6=$ $=(x_3+x_5)/(a_3+a_5)$	2 – 2 – 2 2	1 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3 1 1
$\mathcal{A}_{6,\,16}$	$[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$	(1) т. о. п. (2) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{4,6}$ (3) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{5,6}$ (4) $x_4/a_4=x_5/a_5=x_6/a_6$	– – 2 2 2	1 5 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\mathcal{A}_{6,17}$	$[e_1,e_2]=e_3,$	(1) т. о. п.	2	1 3
	$[e_1,e_3]=e_4,$	(2) $a_i=x_i=0,\ i=3,4,6$	–	1 1 1 1 1 1
	$[e_1,e_4]=e_6,$	(3) $a_6=x_6=0,\ x_3/a_3=x_4/a_4$	2	1 1 1 1
	$[e_2,e_5]=e_6$	(4) $a_6=x_6=0,\ x_3/a_3\neq x_4/a_4$	–	1 1 1 3
		(5) $x_3/a_3=x_4/a_4=x_6/a_6$	2 2	1 1
$\mathcal{A}_{6,18}$	$[e_1,e_2]=e_3,$	(1) т. о. п.	2	1 3
	$[e_1,e_3]=e_4,$	(2) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{3,6}$	–	1 1 1 1 1 1
	$[e_1,e_4]=e_6,$	(3) $a_6=x_6=0,$		
	$[e_2,e_3]=e_5,$	$x_3/a_3=x_4/a_4=x_5/a_5$	2	1 1 1 1
	$[e_2,e_5]=\pm e_6$	(4) $a_6=x_6=0,$		
		$x_3/a_3=x_4/a_4\neq x_5/a_5$	–	1 1 1 3
		(5) $x_3/a_3=x_4/a_4=x_5/a_5=x_6/a_6$	2 2	1 1
$\mathcal{A}_{6,19}$	$[e_1,e_2]=e_3,$	(1) т. о. п.	2	1 3
	$[e_1,e_3]=e_4,$	(2) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{3,6}$	–	1 1 1 1 1 1
	$[e_1,e_4]=e_5,$	(3) $a_6=x_6=0,$		
	$[e_1,e_5]=e_6,$	$x_3/a_3=x_4/a_4=x_5/a_5$	2	1 1 1 1
	$[e_2,e_3]=e_6$	(4) $a_6=x_6=0,$		
		$x_3/a_3=x_4/a_4\neq x_5/a_5$	–	1 1 1 3
		(5) $x_3/a_3=x_4/a_4=x_5/a_5$	2 2	1 1
$\mathcal{A}_{6,20}$	$[e_1,e_2]=e_3,$	(1) т. о. п.	–	1 5
	$[e_1,e_3]=e_4,$	(2) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{3,6}$	–	1 1 1 1 1 1
	$[e_1,e_4]=e_5,$	(3) $a_i=x_i=0,\ i=5,6,$		
	$[e_1,e_5]=e_6,$	$x_3/a_3=x_4/a_4$	2	1 1 1 1
	$[e_2,e_3]=e_5,$	(4) $a_i=x_i=0,\ i=5,6,$		
	$[e_2,e_4]=e_6$	$x_3/a_3\neq x_4/a_4$	–	1 1 1 3
		(5) $x_3/a_3=x_4/a_4=x_5/a_5$	2 2	1 1
$\mathcal{A}_{6,21}$	$[e_1,e_2]=e_3,$	(1) т. о. п.	2	1 3
	$[e_1,e_5]=e_6,$	(2) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{3,6}$	–	1 1 1 1 1 1
	$[e_2,e_3]=e_4,$	(3) $a_6=x_6=0,$		
	$[e_2,e_4]=e_5,$	$x_3/a_3=x_4/a_4=x_5/a_5$	2	1 1 1 1
	$[e_3,e_4]=e_6$	(4) $a_6=x_6=0,$		
		$x_3/a_3=x_4/a_4\neq x_5/a_5$	–	1 1 1 3
		(5) $x_3/a_3=x_4/a_4=x_5/a_5$	2	1 1
$\mathcal{A}_{6,22}$	$[e_1,e_2]=e_3,$	(1) т. о. п.	2 2	1 1
	$[e_1,e_3]=e_5,$	(2) $a_i=x_i=0,\ i=\overline{3,6}$	–	1 1 1 1 1 1
	$[e_1,e_5]=e_6,$	(3) $a_i=x_i=0,\ i=5,6,$		
	$[e_2,e_3]=e_4,$	$x_3/a_3=x_4/a_4$	2	1 1 1 1
	$[e_2,e_4]=e_5,$	(4) $a_i=x_i=0,\ i=5,6,$		
	$[e_3,e_4]=e_6$	$x_3/a_3\neq x_4/a_4$	–	1 1 1 3

Таблица 2. Инварианты Жордана—Кронекера для семимерных неразложимых нильпотентных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем ($\chi \neq 2$)

Алгебра Ли		**Блоки**	
		Ж	**К**
$37A$	$[e_1, e_2] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_7$	–	1 1 1 1 3
$37B$	$[e_1, e_2] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_6,\ [e_3, e_4] = e_7$	2 2	1 1 1
$37C$	$[e_1, e_2] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_6,\ [e_3, e_4] = e_7$	4	1 1 1
$37D$	$[e_1, e_2] = e_5,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_7,\ [e_3, e_4] = e_5$	2 2	1 1 1
$357A$	$[e_1, e_2] = e_5,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_7,\ [e_3, e_4] = e_5$	2 2	1 1 1
$357B$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_7,\ [e_2, e_3] = e_6$	2 2	1 1 1
$357C$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_7,\ [e_2, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_5$	2 2	1 1 1
$27A$	$[e_1, e_2] = e_6,\ [e_1, e_4] = e_7,\ [e_3, e_5] = e_7$	2	1 1 3
$27B$	$[e_1, e_2] = e_6,\ [e_1, e_5] = e_7,\ [e_2, e_3] = e_7,\ [e_3, e_4] = e_6$	–	1 1 5
$257A$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_1, e_5] = e_7,\ [e_2, e_4] = e_6$	2	1 1 3
$257B$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_1, e_4] = e_7,\ [e_2, e_5] = e_7$	2	1 1 3
$257C$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_6,\ [e_2, e_5] = e_7$	2 2	1 1 1
$257D$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_1, e_4] = e_7,\ [e_2, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_5] = e_7$	–	1 1 5
$257E$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_7,\ [e_4, e_5] = e_6$	2	1 1 3
$257F$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_7,\ [e_4, e_5] = e_6$	2	1 1 3
$257G$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_1, e_5] = e_7,\ [e_2, e_4] = e_7,$ $[e_4, e_5] = e_6$	–	1 1 5
$257H$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_6,\ [e_4, e_5] = e_7$	–	1 1 5
$257I$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_1, e_5] = e_7,$ $[e_2, e_3] = e_7$	2	1 1 3
$257J$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_1, e_5] = e_7,\ [e_2, e_3] = e_7,$ $[e_2, e_4] = e_6$	–	1 1 5
$257K$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_7,\ [e_4, e_5] = e_7$	2	1 1 3
$257L$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_7,\ [e_2, e_4] = e_6,$ $[e_4, e_5] = e_7$	–	1 1 5
$247A$	$[e_1, e_i] = e_{i+2},\ i = 2, 3, 4, 5$	–	1 1 1 1 3
$247B$	$[e_1, e_i] = e_{i+2},\ i = 2, 3, 4,\ [e_3, e_5] = e_7$	2	1 1 3
$247C$	$[e_1, e_i] = e_{i+2},\ i = 2, 3, 4,\ [e_1, e_5] = e_7,\ [e_3, e_5] = e_6$	2	1 1 3
$247D$	$[e_1, e_i] = e_{i+2},\ i = 2, 3,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_2, e_5] = e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$	2	1 1 3

$247E$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,4,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7$	2	1 1 3
$247F$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_6$	–	1 1 5
$247G$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,4,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_6$	–	1 1 5
$247H$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,4,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_6$	–	1 1 5
$247I$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,\ [e_2,e_5]=e_6,\ [e_3,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_7$	–	1 1 5
$247J$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_6$	–	1 1 5
$247K$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,4,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_6$	–	1 1 5
$247L$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,4,5,\ [e_2,e_3]=e_6$	2	1 1 3
$247M$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,4,\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_7$	–	1 1 5
$247N$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6$	2	1 1 3
$247O$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,4,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_6$	–	1 1 5
$247P$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7$	2	1 1 3
$247Q$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,4,\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7$	–	1 1 5
$247R$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=2,3,4,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7$	–	1 1 5
$2457A$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=4,5$	–	1 1 1 1 3
$2457B$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_7,\ [e_2,e_5]=e_6$	2	1 1 3
$2457C$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=4,5,\ [e_2,e_5]=e_6$	2	1 1 3
$2457D$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=4,5,\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_6$	2	1 1 3
$2457E$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_6$	2	1 1 3
$2457F$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=4,5,\ [e_2,e_3]=e_6$	2	1 1 3
$2457G$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_7,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_6$	2	1 1 3

$2457H$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_5]=e_7$	2	1 1 3
$2457I$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_5]=e_7$	–	1 1 5
$2457J$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,$ $[e_2,e_3]=e_6+e_7$	–	1 1 5
$2457K$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_7,\ [e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7$	–	1 1 5
$2457L$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_1,e_5]=e_7,$ $[e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_4]=e_7,\ [e_2,e_5]=e_6$	–	1 1 5
$2457M$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_7,\ [e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_4]=e_6$	–	1 1 5
$2357A$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,$ $[e_3,e_4]=-e_7,\ [e_2,e_3]=e_5+e_6$	–	1 1 5
$2357B$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=e_6,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,$ $[e_2,e_3]=e_5,\ [e_3,e_4]=-e_7$	–	1 1 5
$2357C$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_4]=-e_7$	–	1 1 5
$2357D$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=e_6,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,$ $[e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_4]=-e_7$	–	1 1 5
$23457A$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,4,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_7$	2	1 1 3
$23457B$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_5]=e_6,$ $[e_3,e_4]=-e_6$	–	1 1 5
$23457C$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,4,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,$ $[e_3,e_4]=-e_7$	2	1 1 3
$23457D$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,4,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=-e_7$	–	1 1 5
$23457E$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,4,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_5+e_7$	–	1 1 5
$23457F$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,4,\ [e_2,e_5]=e_6,$ $[e_3,e_4]=-e_6,\ [e_2,e_3]=e_5+e_7$	–	1 1 5
$23457G$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,4,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=-e_7$	–	1 1 5
17	$[e_1,e_2]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7,\ [e_5,e_6]=e_7$	2 2 2	1
157	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_7,\ [e_5,e_6]=e_7$	2 4	1
$147A$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_5]=e_7,$ $[e_3,e_4]=e_7$	2 4	1
$147B$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_7,$ $[e_3,e_5]=e_7$	2 4	1

$147D$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=-e_6,\ [e_1,e_5]=e_7,$ $[e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_6]=e_7,$ $[e_3,e_4]=-2e_7$	2 4	1
$147E,$ $\lambda\neq 0,1$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=-e_6,\ [e_1,e_5]=-e_7,$ $[e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_6]=\lambda e_7,\ [e_3,e_4]=(1-\lambda)e_7$	2 4	1
$147F$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=-e_6,\ [e_1,e_5]=e_7,$ $[e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_4]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_7,$ $[e_3,e_4]=e_7$	2 4	1
$1457A$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_7,\ [e_5,e_6]=e_7$	2	1 1 3
$1457B$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_7,$ $[e_5,e_6]=e_7$	2 4	1
$137A$	$[e_1,e_2]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_6,\ [e_3,e_6]=e_7$	–	1 3 3
$137B$	$[e_1,e_2]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_6,$ $[e_3,e_6]=e_7$	6	1
$137C$	$[e_1,e_2]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_6,$ $[e_3,e_5]=-e_7$	–	1 3 3
$137D$	$[e_1,e_2]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_4]=e_7,\ [e_3,e_5]=-e_7$	6	1
$1357A$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_6]=e_7,\ [e_3,e_4]=-e_7$	6	1
$1357B$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,$ $[e_3,e_4]=-e_7,\ [e_3,e_6]=e_7$	–	1 3 3
$1357C$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_7,\ [e_3,e_4]=-e_7,\ [e_3,e_6]=e_7$	6	1
$1357D$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_i]=e_{i+2},\ i=3,4,$ $[e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7$	2 4	1
$1357E$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_2,e_i]=e_{i+2},\ i=3,4,\ [e_2,e_5]=e_7,$ $[e_4,e_6]=e_7$	2	1 1 3
$1357F$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_7,\ [e_2,e_i]=e_{i+2},\ i=3,4,$ $[e_2,e_5]=e_7,\ [e_4,e_6]=-e_7$	2 4	1
$1357G$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_5]=e_7$	–	1 3 3
$1357H$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_5]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_7,\ [e_3,e_4]=-e_7$	6	1
$1357I$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_5]=e_7,$ $[e_4,e_6]=e_7$	–	1 3 3
$1357J$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_7,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_5]=e_7,\ [e_4,e_6]=e_7$	6	1
$1357L$	$[e_1,e_i]=e_{i+2},\ i=3,4,5,\ [e_1,e_2]=e_3,\ [e_2,e_3]=e_7,$ $[e_2,e_4]=e_5,\ [e_2,e_6]=(1/2)e_7,\ [e_3,e_4]=(1/2)e_7$	6	1

1357M, $\lambda \neq 0$	$[e_1, e_i] = e_{i+2}$, $i = 3, 4, 5$, $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_4] = e_5$, $[e_2, e_6] = \lambda e_7$, $[e_3, e_4] = (1-\lambda)e_7$	6	1
1357N	$[e_1, e_i] = e_{i+2}$, $i = 3, 4, 5$, $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = \lambda e_7$, $[e_2, e_4] = e_5$, $[e_3, e_4] = e_7$, $[e_4, e_6] = e_7$	6	1
1357O	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_6] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_5$, $[e_2, e_5] = e_7$	–	1 3 3
1357P	$[e_1, e_i] = e_{i+2}$, $i = 3, 5$, $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_5$, $[e_2, e_6] = e_7$, $[e_3, e_4] = e_7$	6	1
1357Q	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_5] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_6$, $[e_2, e_6] = e_7$	–	1 3 3
1357R	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_6] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_6$, $[e_2, e_5] = e_7$, $[e_3, e_4] = e_7$	6	1
1357S	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_5] = e_7$, $[e_1, e_6] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_6$, $[e_2, e_5] = e_7$, $[e_2, e_6] = \lambda e_7$, $[e_3, e_4] = e_7$	6	1
13457A	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3, 4$, $[e_1, e_5] = e_7$, $[e_2, e_6] = e_7$	2	1 1 3
13457B	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3, 4$, $[e_1, e_5] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_7$, $[e_2, e_6] = e_7$	2	1 1 3
13457C	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3, 4$, $[e_1, e_6] = e_7$, $[e_2, e_5] = e_7$, $[e_3, e_4] = -e_7$	2 4	1
13457D	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3, 4$, $[e_1, e_5] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_2, e_4] = e_7$, $[e_2, e_6] = e_7$	–	1 3 3
13457E	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3, 4$, $[e_1, e_6] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_2, e_5] = e_7$, $[e_3, e_4] = -e_7$	6	1
13457F	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3, 4$, $[e_1, e_5] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_6] = e_7$	–	1 3 3
13457G	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3, 4$, $[e_1, e_6] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_7$, $[e_2, e_5] = e_7$, $[e_3, e_4] = -e_7$	6	1
13457I	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3, 4$, $[e_1, e_5] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_5] = e_7$, $[e_2, e_6] = e_7$, $[e_3, e_4] = -e_7$	6	1
12457A	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_1, e_6] = e_7$, $[e_2, e_5] = e_6$, $[e_3, e_5] = e_7$	–	1 3 3
12457B	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_1, e_6] = e_7$, $[e_2, e_5] = e_6 + e_7$, $[e_3, e_5] = e_7$	–	1 3 3
12457C	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_5] = e_6$, $[e_2, e_6] = e_7$, $[e_3, e_4] = -e_7$	–	1 3 3
12457D	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3$, $[e_1, e_i] = e_{i+2}$, $i = 4, 5$, $[e_2, e_5] = e_6$, $[e_2, e_6] = e_7$, $[e_3, e_4] = -e_7$	6	1
12457E	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, 3$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_1, e_6] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_7$, $[e_2, e_5] = e_6$, $[e_3, e_5] = e_7$	6	1

$12457F$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_i]=e_{i+1},\ i=5,6,\ [e_3,e_4]=-e_7$	–	1 3 3
$12457G$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_1,e_5]=e_7,$ $[e_2,e_i]=e_{i+1},\ i=5,6,\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_3,e_4]=-e_7$	6	1
$12457H$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,5,6,\ [e_2,e_i]=e_{j+2},\ j=3,4,$ $[e_3,e_4]=e_7$	–	1 3 3
$12457I$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,5,6,\ [e_2,e_j]=e_{j+2},\ j=3,4,$ $[e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7$	6	1
$12457J$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,5,6,\ [e_1,e_4]=e_7,$ $[e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7$	6	1
$12457K$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,5,6,\ [e_1,e_4]=e_7,$ $[e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_4]=e_7$	–	1 3 3
$12457L$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,5,6,\ [e_2,e_j]=e_{j+2},\ j=3,4,$ $[e_2,e_6]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7,\ [e_3,e_5]=-e_7$	–	1 3 3
$12457N$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,3,5,6,\ [e_1,e_4]=e_7,$ $[e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=\lambda e_7,$ $[e_2,e_6]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7,\ [e_3,e_5]=-e_7$	6	1
$12357A$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=4,5,6,\ [e_1,e_2]=e_4,$ $[e_3,e_5]=-e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,\ [e_3,e_4]=-e_6$	–	1 3 3
$12357B$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=4,5,6,\ [e_2,e_3]=e_5+e_7,$ $[e_1,e_2]=e_4,\ [e_3,e_4]=-e_6,\ [e_3,e_5]=-e_7$	–	1 3 3
$12357C$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=4,5,6,\ [e_1,e_2]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_7,\ [e_3,e_4]=-e_6,\ [e_3,e_5]=-e_7$	6	1
$123457A$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ 2\leqslant i\leqslant 6$	–	1 1 1 1 3
$123457B$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ 2\leqslant i\leqslant 6,\ [e_2,e_3]=e_7$	2	1 1 3
$123457C$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ 2\leqslant i\leqslant 6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=-e_7$	2 4	1
$123457D$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ 2\leqslant i\leqslant 5,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_4]=e_7$	–	1 3 3
$123457E$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ 2\leqslant i\leqslant 5,\ [e_2,e_3]=e_6+e_7,$ $[e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_7$	–	1 3 3
$123457F$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ 2\leqslant i\leqslant 5,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_4]=[e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=-e_7$	6	1
$123457H$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ 2\leqslant i\leqslant 5,\ [e_2,e_3]=e_5+e_7,$ $[e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7$	–	1 3 3
$123457I$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ 2\leqslant i\leqslant 5,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=\lambda e_7,\ [e_3,e_4]=(1-\lambda)e_7$	6	1

Литература

[1] Короткевич А. А. Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности // Матем. сб. — 2009. — Т. 200, № 12. — С. 3—40.

[2] Bolsinov A. V. and Zhang P. Jordan—Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transform. Groups. — 2016. — Vol. 21, no. 1. — P. 51—86.

[3] Gong M.-P. Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and $\mathbb{R}$). — UWSpace, 1998. — http://hdl.handle.net/10012/1148.