

Вещественные морсовские многочлены степени 5 и 6

Ю. Ю. КОЧЕТКОВ

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: yukochetkov@hse.ru, yuyukochetkov@gmail.com

УДК 512.62

Ключевые слова: морсовский многочлен, график, змея, паспорт многочлена.

Аннотация

Вещественный многочлен степени n называется морсовским, если его производная имеет $n - 1$ попарно различных вещественных корней, а значения многочлена в корнях производной попарно различны. График такого многочлена называется «змея». Занумеруем критические точки и критические значения в порядке возрастания. Определим перестановку (a_1, \dots, a_{n-1}) , где a_i — это номер значения многочлена в i -й критической точке. Эту перестановку мы будем называть паспортом змеи (многочлена). В работе для многочленов степени 5 и 6 описано разбиение пространства коэффициентов на области постоянства паспорта.

Abstract

Yu. Yu. Kochetkov, Real Morse polynomials of degree 5 and 6, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2021), no. 4, pp. 99–112.

A real polynomial p of degree n is called a Morse polynomial if its derivative has $n - 1$ pairwise distinct real roots and values of p at these roots (critical values) are also pairwise distinct. The plot of such a polynomial is called a “snake.” By enumerating critical points and critical values in increasing order, we construct a permutation a_1, \dots, a_{n-1} , where a_i is the number of the polynomial’s value at the i th critical point. This permutation is called the passport of the snake (polynomial). In this work, for Morse polynomials of degree 5 and 6, we describe the partition of the coefficient space into domains of constant passport.

1. Введение

Мы будем изучать вещественные многочлены, все критические точки которых (т. е. корни производной) вещественны, имеют кратность 2, а значения многочлена в критических точках попарно различны (морсовские многочлены). Кроме того, мы будем считать многочлен нормализованным, т. е. его старший коэффициент равен единице. График такого многочлена — «змея» (по терминологии В. И. Арнольда [1]). Змея порядка n — это график нормализованного морсовского многочлена степени $n + 1$. У такого графика

Фундаментальная и прикладная математика, 2021, том 23, № 4, с. 99–112.
© 2021 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

- а) имеется n экстремумов — чередующиеся минимумы и максимумы;
 б) значения функции в точках экстремумов попарно различны.

Пронумеруем критические точки и критические значения морсовского многочлена в порядке возрастания. Поставим в соответствие n -змею перестановку $(a_1, \dots, a_n) \in S_n$, где i -й элемент перестановки — это номер i -го экстремума. Эта перестановка называется *паспортом* змеи (многочлена). Два морсовских многочлена с одинаковыми паспортами мы будем называть s -эквивалентными.

Определение. Перестановка (a_1, \dots, a_n) называется альтернированной, если три элемента a_i, a_{i+1}, a_{i+2} не образуют монотонную последовательность ни для какого $i, 1 \leq i \leq n-2$.

Паспорт змеи — альтернированная перестановка. Уровень альтернированной перестановки — её первый элемент. Так как мы изучаем графики нормализованных многочленов, то уровень змеи чётного порядка n строго больше единицы (у нормализованного морсовского многочлена нечётной степени первый экстремум — максимум), а уровень змеи нечётного порядка n строго меньше n (у нормализованного морсовского многочлена чётной степени первый экстремум — минимум). Соответственно, мы будем рассматривать не просто альтернированные перестановки, а строго альтернированные перестановки. Уровень такой перестановки из S_n больше единицы при чётном n и меньше n при нечётном n .

На вопрос, верно ли, что любая строго альтернированная перестановка является паспортом некоторой змеи, утвердительный ответ дан в [2].

Пример. Имеется пять различных строго альтернированных перестановок порядка 4:

$$(4, 2, 3, 1), \quad (3, 2, 4, 1), \quad (4, 1, 3, 2), \quad (3, 1, 4, 2), \quad (2, 1, 4, 3)$$

и соответственно пять змей порядка 4:

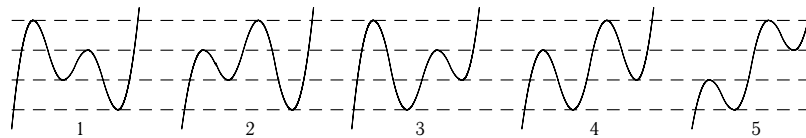


Рис. 1

Замечание. Различных строго альтернированных перестановок порядка 5 — шестнадцать, и столько же имеется змей порядка 5.

2. Перечисление строго альтернированных перестановок

Определим процедуру, которая превращает строго альтернированную перестановку порядка n и уровня t в строго альтернированную перестановку по-

рядка $n + 1$. Если n чётно, то добавляем элемент k , $1 \leq k \leq m$, при этом все элементы перестановки, меньшие k , не меняются, а все элементы, большие или равные k , увеличиваются на 1. Например,

$$(3, 1, 5, 2, 6, 4) \text{ добавляем } 2 \Rightarrow (2, 4, 1, 6, 3, 7, 5).$$

Если n нечётно, то добавляем элемент k , $m < k \leq n + 1$, при этом все элементы перестановки, меньшие k , не меняются, а все элементы большие или равные k , увеличиваются на 1. Например,

$$(2, 4, 1, 5, 3) \text{ добавляем } 4 \Rightarrow (4, 2, 5, 1, 6, 3).$$

Очевидно, что эта процедура переводит строго альтернированную перестановку порядка n в строго альтернированную перестановку порядка $n + 1$.

Обратная процедура — удаление первого элемента: мы удаляем первый элемент m , все элементы, меньшие m , не меняются, а все элементы, большие m , уменьшаются на 1. Любая строго альтернированная перестановка порядка $n + 1$ единственным образом может быть получена из некоторой строго альтернированной перестановки порядка n .

Обозначим через $s(n, m)$ число строго альтернированных перестановок порядка n и уровня m . Если n чётно, то

$$s(n + 1, m) = s(n, m) + \dots + s(n, n). \quad (1)$$

Если n нечётно, то

$$s(n + 1, m) = s(n, 1) + \dots + s(n, m - 1). \quad (2)$$

Имеем

$$\begin{aligned} s(6, 2) &= s(5, 1), \\ s(6, 3) &= s(5, 1) + s(5, 2), \\ s(6, 4) &= s(5, 1) + s(5, 2) + s(5, 3), \\ s(6, 5) &= s(5, 1) + s(5, 2) + s(5, 3) + s(5, 4), \\ s(6, 6) &= s(5, 1) + s(5, 2) + s(5, 3) + s(5, 4) \end{aligned}$$

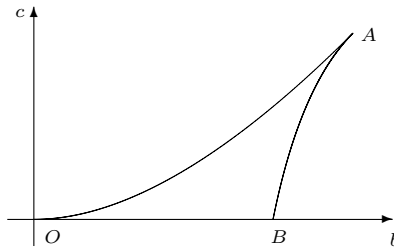
(напоминаем, что $s(5, 5) = 0$ и $s(6, 1) = 0$). Аналогично

$$\begin{aligned} s(5, 1) &= s(4, 2) + s(4, 3) + s(4, 4), \\ s(5, 2) &= s(4, 2) + s(4, 3) + s(4, 4), \\ s(5, 3) &= s(4, 3) + s(4, 4), \\ s(5, 4) &= s(4, 4) \end{aligned}$$

(напоминаем, что $s(4, 1) = 0$ и $s(5, 5) = 0$).

Теперь мы можем построить треугольник строго альтернированных перестановок — треугольник Эйлера—Бернулли (см. [1]). В n -м ряду треугольника располагаются числа $s(n, 1), s(n, 2), \dots, s(n, n)$ в порядке слева направо. Напомним, что $s(n, 1) = 0$ для чётных n и $s(n, n) = 0$ для нечётных n . Случай $n = 1$

График кривой $dq = 0$ в прямоугольнике $[0, 3] \times [0, 1]$ имеет следующий вид.



Точка A с координатами $(3, 1)$ — точка возврата дискриминантной кривой. Тангенс наклона касательной в этой точке равен 1. Точка B имеет координаты $(9/4, 0)$. Тангенс наклона касательной в ней равен $3/2$. В точке O дискриминантная кривая касается оси b . Для точек в криволинейном треугольнике OAB многочлен $x^3 + 3x^2 + bx + c$ имеет три вещественных корня.

Критические значения многочлена p должны быть попарно различны. Это требование описывается двумя условиями:

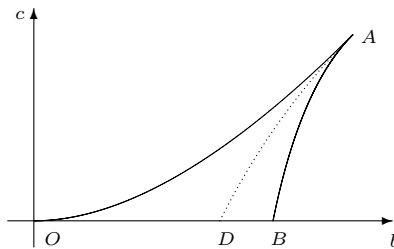
$$g(b, c) = 128b^3 - 1998b^2 - 216c^2 + 1512bc + 3645b - 729c \neq 0$$

и

$$h(b, c) = 640b^3 - 1350b^2 + 5832c^2 - 9720bc + 18225c \neq 0.$$

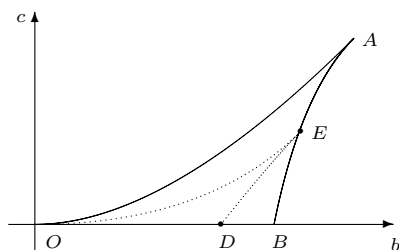
Первое условие означает, что значения многочлена p в корнях многочлена q попарно различны, а второе условие означает, что эти значения не равны нулю.

Кривая $g(b, c) = 0$ представляет собой дугу, соединяющую точку A и точку D с координатами $(135/64, 0)$ и лежащую внутри криволинейного треугольника OAB :



Тангенс наклона касательной кривой $g = 0$ в точке D равен $5/4$.

Расположение кривой $h(b, c) = 0$ относительно дискриминантной кривой показано на следующем рисунке.



Точка E с координатами $(45/16, 25/32)$ — точка возврата кривой $h = 0$ — лежит также и на дискриминантной кривой. Тангенс наклона касательной кривой $h = 0$ в этой точке равен $5/6$, а тангенс наклона дискриминантной кривой в этой точке равен $5/4$. Кривая $h = 0$ входит в точку $D(135/64, 0)$ с тангенсом наклона $5/4$ и входит в начало координат с горизонтальной касательной.

На рис. 2 приведена схема разбиения криволинейного треугольника OAB на пять криволинейных треугольников кривыми $g = 0$ и $h = 0$.

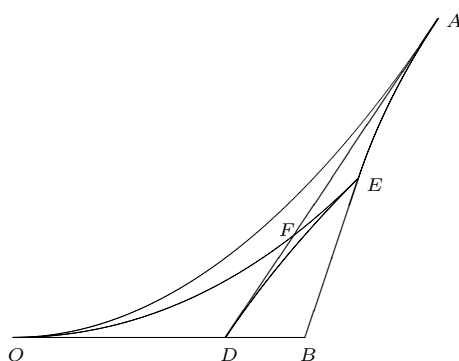


Рис. 2

Координаты точки F — точки пересечения кривых $g = 0$ и $h = 0$ — примерно равны $(2,73, 0,72)$.

На рис. 1 были приведены графики пяти змей порядка 4. Рассмотрим график многочлена p :

$$p(x) = 5 \int (x^4 + 3x^3 + bx^2 + cx) dx = x^5 + \frac{15}{4}x^4 + \frac{5b}{3}x^3 + \frac{5c}{2}x^2.$$

- Если точка с координатами (b, c) лежит в треугольнике OAF , то график p — первая змея.
- Если точка с координатами (b, c) лежит в треугольнике AEF , то график p — вторая змея.

- Если точка с координатами (b, c) лежит в треугольнике ODF , то график p — третья змея.
- Если точка с координатами (b, c) лежит в треугольнике DEF , то график p — четвёртая змея.
- Если точка с координатами (b, c) лежит в треугольнике BDE , то график p — пятая змея.

Замечание. Если число вещественных критических точек у вещественного многочлена степени 5 равно 4, а число критических значений — 3, то график такого многочлена мы назовём «вырожденной» змеей порядка 4. На рис. 3 приведены все пять вырожденных змей порядка 4.

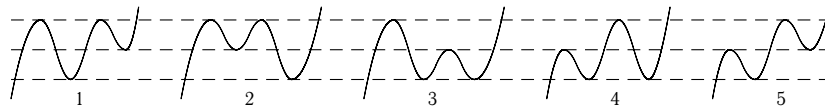


Рис. 3

Точки, лежащие на дугах AF , OF , DF , EF и DE , отвечают вырожденным змеям:

- дуга AF — вырожденной змее 2;
- дуга OF — вырожденной змее 3;
- дуга DF — вырожденной змее 1;
- дуга EF — вырожденной змее 4;
- дуга DE — вырожденной змее 5.

4. Многочлены степени 6

Введём аналогичную параметризацию. Пусть p — вещественный морсовский многочлен. Мы будем считать, что

- а) корни его производной неположительны;
- б) один из корней производной равен нулю;
- в) сумма корней производной равна -4 .

Это означает, что

$$p' = x(x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + c),$$

где $0 < a \leq 6$, $0 < b \leq 4$, $0 < c \leq 1$.

Предложение. Если коэффициенты a , b , c вещественного многочлена

$$q = x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + c$$

положительны, то его корни отрицательны.

Доказательство. Докажем утверждение от противного. Число положительных корней q может быть только чётным (иначе c отрицательно). Так как сумма корней равна -4 , то у нас два положительных корня x_1 и x_2 и два отрицательных $-y_1$ и $-y_2$. Пусть $y_1 + y_2 = 2k$ и $x_1 + x_2 = 2l$. Тогда $k - l = 2$ и

$$\begin{cases} x_1x_2 + y_1y_2 > (x_1 + x_2)(y_1 + y_2), \\ x_1x_2(y_1 + y_2) > y_1y_2(x_1 + x_2) \end{cases} \implies \begin{cases} x_1x_2 + y_1y_2 > 4kl, \\ kx_1x_2 > ly_1y_2. \end{cases}$$

Так как $l^2 \geq x_1x_2$, то

$$\begin{cases} y_1y_2 > 4kl - l^2 = 3k^2 - 4k - 4, \\ y_1y_2 < kl = k^2 - 2k \end{cases} \implies \implies 3k^2 - 4k - 4 < k^2 - 2k \implies k^2 - k - 2 < 0 \implies k < 2.$$

Противоречие. □

Пространством коэффициентов будет параллелепипед Π в системе координат abc : $0 < a \leq 6$, $0 < b \leq 4$, $0 < c \leq 1$. Мы будем изучать значения многочлена

$$p = \int xq(x) dx, \quad \text{где } q = x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + c,$$

в корнях многочлена $xq(x)$ в той области параллелепипеда Π , где многочлен q имеет четыре вещественных корня.

Пусть

$$d(a, b, c) = 16a^4c - 4a^3b^2 - 64a^3c + 16a^2b^2 - 320a^2bc - 128a^2c^2 + 72ab^3 + 144ab^2c + \\ + 1152abc + 2304ac^2 - 27b^4 - 256b^3 - 96b^2c - 768bc^2 + 256c^3 - 6912c^2 -$$

дискриминант многочлена q . Мы будем рассматривать сечения параллелепипеда Π плоскостями $c = \gamma$ и поведение кривой $d(a, b, \gamma) = 0$ в прямоугольнике

$$R = \{0 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 4\}.$$

На рис. 4 показано поведение кривых $d(a, b, 1) = 0$ и $d(a, b, 3/4) = 0$ в прямоугольнике $\{3 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 4\}$. Здесь точка A имеет приблизительные координаты $(3,76, 0)$, точка $B - (3,82, 0)$, точка $C - (6, 3,62)$. На правом рисунке показан участок кривой $d(a, b, 3/4) = 0$ (квадратик на среднем рисунке) в прямоугольнике $5,63 \leq a \leq 5,81, 3,39 \leq b \leq 3,56$ (масштаб соблюден). На этом участке кривая имеет две точки возврата и точку самопересечения. Кривая разбивает прямоугольник R на три области:

- 1) выше кривой;
- 2) внутри криволинейного треугольника;
- 3) ниже кривой.

В первой области многочлен $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 3/4$ имеет два вещественных корня, во второй — четыре вещественных корня, в третьей области многочлен не имеет вещественных корней.

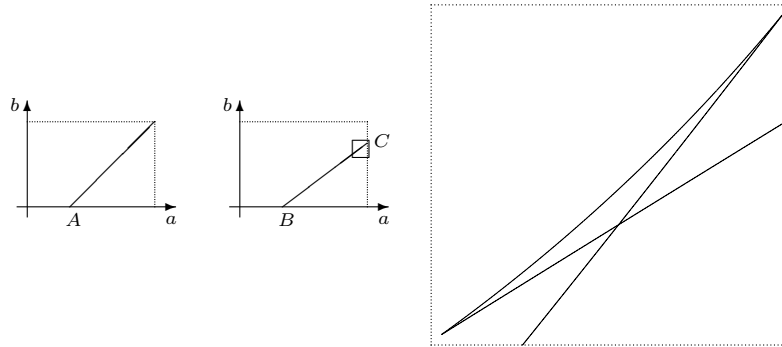


Рис. 4

При уменьшении c криволинейный треугольник смещается влево и вниз, а также увеличивается в размерах. Ни рисунках ниже показаны:

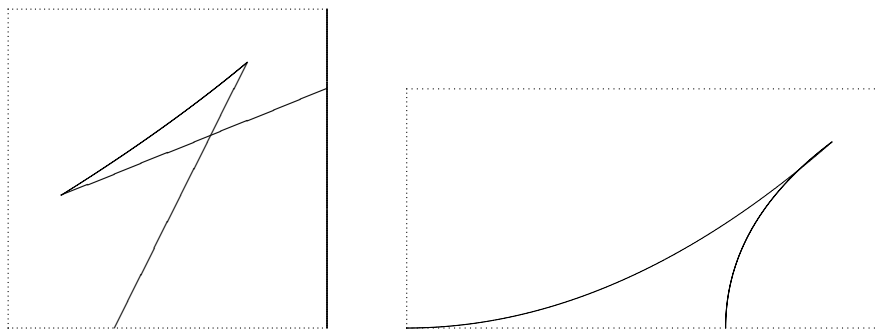
а) слева — график кривой $d(a, b, 1/16) = 0$ в прямоугольнике

$$[3 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 3]$$

(масштаб соблюден);

б) справа — график кривой $d(a, b, 0) = 0$ в прямоугольнике

$$[0 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 3].$$



На правом рисунке кривая входит в точку $(4, 0)$ с вертикальной касательной, а точка возврата имеет приблизительные координаты $(5,33, 2,37)$.

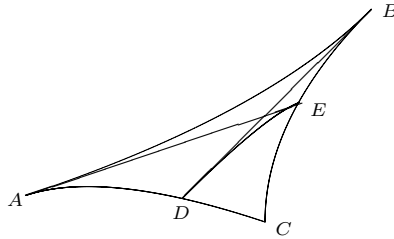
Далее нас будет интересовать только область внутри криволинейного треугольника, который мы будем называть *основным треугольником* и обозначать Δ_γ (т. е. основной треугольник в плоскости $c = \gamma$).

Условие того, что значения многочлена p в корнях многочлена $q = x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + c$ не являются попарно различными, имеет вид $s(a, b, c) = 0$,

где

$$\begin{aligned}
s = & 37500a^7b - 15625a^6b^2 - 688000a^6b - 90000a^6c - 480000a^5b^2 - \\
& - 450000a^5bc + 3624960a^5b + 1651200a^5c + 600000a^4b^3 + \\
& + 187500a^4b^2c + 13363200a^4b^2 + 13824000a^4bc - 5898240a^4b + \\
& + 1080000a^4c^2 - 8699904a^4c - 125000a^3b^4 - 9344000a^3b^3 - 8160000a^3b^2c - \\
& - 73662464a^3b^2 + 1800000a^3bc^2 - 163184640a^3bc - 28416000a^3c^2 + \\
& + 14155776a^3c + 1440000a^2b^4 + 1200000a^2b^3c + 3932160a^2b^3 - \\
& - 750000a^2b^2c^2 + 126259200a^2b^2c + 116391936a^2b^2 - 24576000a^2bc^2 + \\
& + 723517440a^2bc - 4320000a^2c^3 + 299630592a^2c^2 + 19046400ab^4 - \\
& - 46080000ab^3c + 154140672ab^3 + 23040000ab^2c^2 - 438829056ab^2c - \\
& - 2400000abc^3 - 47185920abc^2 - 1056964608abc + 70656000ac^3 - \\
& - 1264582656ac^2 - 4096000b^5 + 7680000b^4c - 66322432b^4 - 4800000b^3c^2 + \\
& + 96337920b^3c + 1000000b^2c^3 - 8601600b^2c^2 + 276824064b^2c - 23552000bc^3 + \\
& + 421527552bc^2 - 203423744c^3 - 268435456b^3 + 1811939328c^2 + 5760000c^4.
\end{aligned}$$

Пересечение поверхности $s = 0$ и основного треугольника Δ_γ в плоскости $c = \gamma$ имеет следующий вид.



Здесь ABC — основной треугольник, D и E — точки возврата кривой $s = 0$ (обе лежат на сторонах основного треугольника), дуги кривой $s = 0$ входят в точки возврата A и B с теми же касательными.

Нам также понадобится условие того, что значения многочлена p в корнях многочлена q не обращаются в нуль. Это условие имеет вид $z(a, b, c) \neq 0$, где z — многочлен:

$$\begin{aligned}
z = & 5625a^4c - 1250a^3b^2 - 21600a^3c + 4800a^2b^2 - 120000a^2bc - 60000a^2c^2 + \\
& + 24000ab^3 + 60000ab^2c + 414720abc + 1036800ac^2 - 10000b^4 - \\
& - 81920b^3 - 38400b^2c - 384000bc^2 + 160000c^3 - 2985984c^2.
\end{aligned}$$

При фиксированном $c = \gamma$ кривая $z(a, b, \gamma) = 0$ разбивает основной треугольник вместе с кривой $s(a, b, \gamma) = 0$ на области. В отличие от кривой $s(a, b, \gamma) = 0$,

расположение кривой $z(a, b, \gamma) = 0$ в основном треугольнике меняется с изменением γ . Мы опишем конфигурации областей, на которые основной треугольник разбивают эти две кривые, опишем перестройки конфигураций и укажем паспорт многочлена p в каждой области.

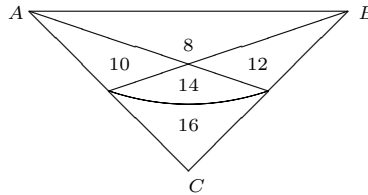
Перечислим паспорта шестнадцати змей порядка 5.

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| (1) 1, 3, 2, 5, 4 | (2) 1, 4, 2, 5, 3 | (3) 1, 4, 3, 5, 2 | (4) 1, 5, 2, 4, 3 |
| (5) 1, 5, 3, 4, 2 | (6) 2, 3, 1, 5, 4 | (7) 2, 4, 1, 5, 3 | (8) 2, 4, 3, 5, 1 |
| (9) 2, 5, 1, 4, 3 | (10) 2, 5, 3, 4, 1 | (11) 3, 4, 1, 5, 2 | (12) 3, 4, 2, 5, 1 |
| (13) 3, 5, 1, 4, 2 | (14) 3, 5, 2, 4, 1 | (15) 4, 5, 1, 3, 2 | (16) 4, 5, 2, 3, 1 |

Ниже мы будем схематически изображать разбиение основного треугольника на области. Кривые $z(a, b, \gamma)$ будут изображаться пунктиром.

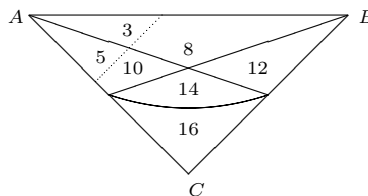
4.1. $1 > c > 512/625 \approx 0,8192$

Если параметр γ принадлежит этому промежутку, то кривая $z(a, b, \gamma)$ основной треугольник Δ_γ не пересекает и конфигурация областей выглядит следующим образом (число в области указывает, какая именно змея реализуется графиком многочлена, если параметры a и b выбраны из этой области).



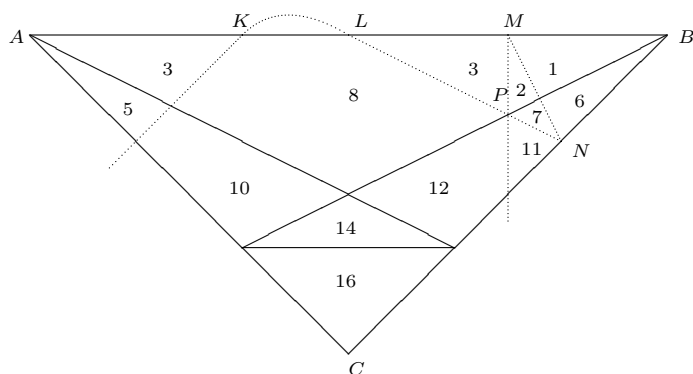
При $\gamma = 512/625$ кривая $z(a, b, \gamma) = 0$ проходит через точку A треугольника Δ_γ .

4.2. $512/625 > c > 432/625 \approx 0,6912$



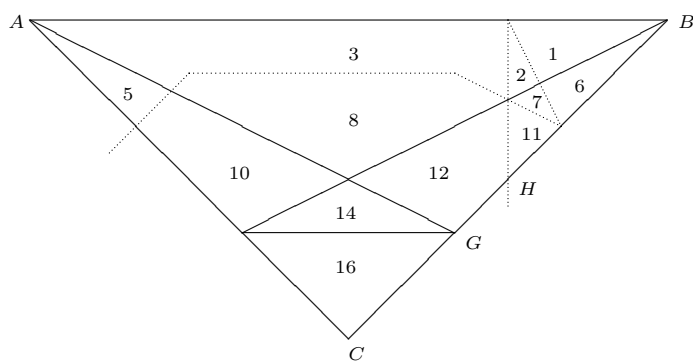
При $\gamma = 432/625$ кривая $z(a, b, \gamma) = 0$ проходит через точку B треугольника Δ_γ .

4.3. $432/625 > c > 52488/72125 \approx 0,6718$



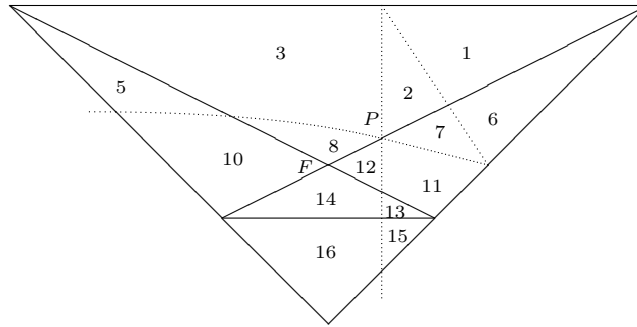
Здесь точки M и N лежат на границе основного треугольника и являются точками возврата кривой $z(a, b, \gamma) = 0$. Точка P лежит на кривой $s(a, b, \gamma) = 0$ и является точкой самопересечения кривой $z(a, b, \gamma) = 0$. Дуга KL этой кривой исчезает при $\gamma = 52488/72125$, и при этом γ кривая $z(a, b, \gamma) = 0$ касается границы основного треугольника изнутри. Далее те области, в которых график реализует змею 3, сливаются в одну.

4.4. $52488/72125 > c > \approx 0,57613$



При $c \approx 0,57613$ точки G и H сливаются. Это значение c является корнем многочлена степени 6, у которого отношение младшего коэффициента к старшему равно $2^{52}/5^{15}$.

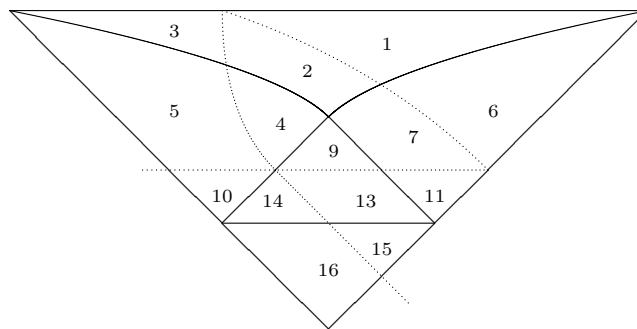
4.5. $0.57613 > c > 1024/1875 \approx 0,5461$



При $c = 1024/1875$ точки F и P сливаются и область 12 исчезает.

4.6. $0 < c < 1024/1875$

Здесь конфигурация областей в основном треугольнике не меняется и выглядит следующим образом.

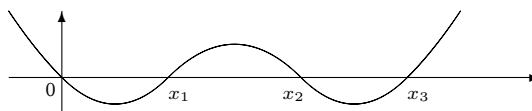


5. Построение морсовских многочленов

Пусть $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k$ — критические точки вещественного морсовского многочлена p . Тогда $p' = x(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$, а

$$p(x) = \int_0^x p'(t) dt.$$

График p' имеет вид



(при нечётном k). На рисунке выше мы видим последовательность областей, ограниченных графиком многочлена p' и осью OX . Площади этих областей — это разности между последовательными критическими значениями. Это замечание даёт нам эвристическое правило построения морсовского многочлена: уменьшению величины $x_i - x_{i-1}$ отвечает уменьшение величины $|p(x_i) - p(x_{i-1})|$.

Пример. Построим морсовский многочлен с паспортом $(3, 1, 4, 2)$. Вот как работает подбор корней производной:

- корни $(0, 1, 2, 3)$ — паспорт змеи $(4, 2, 3, 1)$;
- корни $(0, 1, 3, 4)$ — паспорт змеи $(2, 1, 4, 3)$;
- корни $(0, 1, 3, 5)$ — паспорт змеи $(3, 2, 4, 1)$;
- корни $(0, 1, 3, 4, 4)$ — паспорт змеи $(3, 1, 4, 2)$.

Тот же метод работает при построении многочлена степени 7 с паспортом $(4, 1, 5, 3, 6, 2)$: $0, 1, 3, 5, 7, 8, 4$ — его критические точки.

Литература

- [1] Арнольд В. И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // УМН. — 1992. — Т. 47, № 1. — С. 3–45.
- [2] Itenberg I., Zvonkine D. Hurwitz numbers for real polynomials. — 2016. — [arXiv: 1609.05219](https://arxiv.org/abs/1609.05219).