О тотальном и регулярном графах многочлена

А. М. МАКСАЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: artmak95@mail.ru

В. В. ПРОМЫСЛОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: valentin.promyslov@gmail.com

УДК 519.174

Ключевые слова: регулярный граф, тотальный граф, кликовое число, хроматическое число, кольцо матриц.

Аннотация

Регулярным графом кольца квадратных матриц над полем называется граф, вершинами которого является множество невырожденных матриц, а рёбрами — множество пар невырожденных матриц, сумма которых вырожденна. В 2009 году математиками С. Акбари, М. Джамаали и С. Сеед Фахари было установлено, что если характеристика поля не равна 2, то кликовое число указанного графа конечно. Этими же авторами был поставлен вопрос о конечности хроматического числа этого графа (для полей характеристики 0 этот вопрос является открытым). В данной работе вводятся понятия тотального и регулярного графов многочлена, обобщающие регулярный граф кольца квадратных матриц. Исследуются свойства этих графов и их связь с поставленным вопросом, также ставится ряд новых открытых вопросов.

Abstract

A. M. Maksaev, V. V. Promyslov, On total and regular graphs of a polynomial, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2021), no. 4, pp. 113—142.

A regular graph of the ring of $n \times n$ matrices over a field is a graph whose vertices are nonsingular matrices. Two different matrices are adjacent if their sum is singular. In 2009, S. Akbari, M. Jamaali, and S. Seed Fakhari found that the clique number of this graph is finite whenever the field is not of characteristic 2. The same authors asked if the chromatic number of the graph is finite (for fields of characteristic 0 this question is still open). In this paper, we introduce a concept of total and regular graph of a polynomial, generalizing the regular graph of a matrix ring. We investigate some properties of these graphs and their relationship with the above question. Several new open questions are also posed.

1. Введение

Все рассматриваемые в этом тексте графы предполагаются неориентированными, без петель и кратных рёбер (возможно, бесконечными).

Фундаментальная и прикладная математика, 2021, том 23, № 4, с. 113—142.

Пусть Γ — граф с множеством вершин $V = V(\Gamma)$ и множеством рёбер $E = E(\Gamma)$. *Порядком* графа Γ будем называть мощность множества его вершин. Для $v \in V(\Gamma)$ мы обозначим через $\deg_\Gamma v$ *степень вершины* v в Γ. Также введём следующие обозначения:

$$\Delta(\Gamma) = \max_{v \in V(\Gamma)} \deg_\Gamma v, \quad \delta(\Gamma) = \min_{v \in V(\Gamma)} \deg_\Gamma v.$$

Если $u, v \in V(\Gamma)$, то обозначим через $d(u, v)$ *расстояние* от u до v, то есть минимальную длину (в рёбрах) конечного пути, соединяющего u и v, если такой путь существует. Будем называть граф Γ *связным*, если для любых двух его вершин u, v существует конечный соединяющий их путь. *Диаметр* $\operatorname{diam}(\Gamma)$ связного графа Γ — это $\max\limits_{u,v \in V(\Gamma)} d(u, v)$ (диаметр может быть бесконечным).

Подграфом графа Γ будем называть граф, все вершины и рёбра которого принадлежат Γ. Скажем, что подграф H графа Γ *порождён* множеством вершин $S \subseteq V(\Gamma)$, если

$$V(H) = S \quad \text{и} \quad E(H) = E(\Gamma) \cap \bigl\{\{u, v\} \mid u, v \in S\bigr\}.$$

Через K_n и $K_{m,n}$ обозначаются *полный граф* порядка n и *полный двудольный граф* с долями размеров m и n соответственно.

Кликой в графе называется полный подграф. *Кликовое число* графа Γ, обозначаемое через $\omega(\Gamma)$, есть максимальная мощность клики в Γ. Мы пишем $\omega(\Gamma) < \infty$ (говорим, что кликовое число конечно), если Γ содержит подграф K_m для некоторого натурального m, но не содержит полных подграфов большего порядка. Минимальное число цветов, в которые можно правильно раскрасить вершины графа (так, что любые две соединённые ребром вершины раскрашены в разные цвета), называется *хроматическим числом* Γ и обозначается через $\chi(\Gamma)$.

Д. Ф. Андерсон и А. Бадави [6] ввели понятия регулярного и тотального графов коммутативного кольца с единицей, в [4] аналогичные графы были рассмотрены и над некоммутативными кольцами. Нам понадобится лишь определение регулярного графа кольца квадратных матриц над полем (через $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ обозначаются невырожденные $(n \times n)$-матрицы над полем $\mathbb{F}$).

Определение 1.1. Регулярным графом кольца $(n \times n)$-матриц над полем $\mathbb{F}$ называется граф $\Gamma_n(\mathbb{F})$ с множеством вершин $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, такой что различные матрицы $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ соединены ребром, если и только если $\det(A + B) = 0$.

В 2009 году математиками С. Акбари, М. Джамаали и С. Сеед Фахари было установлено, что если характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2, то кликовое число регулярного графа конечно (см. [5, теорема 1 и замечание 2]):

$$\omega\bigl(\Gamma_n(\mathbb{F})\bigr) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k}^2 - n! + 1.$$

Таким образом, размеры полных подграфов в $\Gamma_n(\mathbb{F})$ ограниченны; в частности, $\Gamma_n(\mathbb{F})$ не содержит бесконечных полных подграфов. В связи с этим тот же коллектив авторов поставил вопрос о том, является ли конечным хроматическое число графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$ (см. [8, задача 525, с. 1082, 1083]). Некоторые результаты были получены в [3,10]. В частности, в 2015 году И. Томон [10, теорема 2.4] дал отрицательный ответ на поставленный вопрос, доказав, что при натуральном $n \geqslant 2$ и простом $p \geqslant 3$ выполнено

$$\chi\big(\Gamma_n(\overline{\mathbb{F}_p})\big) = \infty,$$

где $\overline{\mathbb{F}_p}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_p$ из p элементов. Однако вопрос остаётся открытым для полей характеристики 0, в частности для $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

В данной работе мы вводим понятия тотального и регулярного графов многочлена, обобщающие регулярный граф $\Gamma_n(\mathbb{F})$ кольца квадратных матриц над полем, но эти обобщения отличны от рассматриваемых в [4, 6]. Исследуются свойства этих графов и их связь с поставленной выше задачей, также формулируется ряд открытых вопросов.

Работа построена следующим образом. В части 2 мы даём определение тотального и регулярного графов многочлена и формулируем их базовые свойства. В части 3 показывается связность регулярного графа матриц, а также формулируются критерии связности тотального и регулярного графов однородного многочлена и верхние оценки на их диаметры (теорема 3.6). В части 4 на основе идей доказательства теоремы 1 работы [5] устанавливается её обобщение — конечность кликового числа регулярного графа любого многочлена (теорема 4.2), а также доказывается её аналог для тотального графа некоторого класса многочленов от двух переменных (теорема 4.8 и следствие 4.9). Часть 5 посвящена рассмотрению примеров тотальных и регулярных графов кривых второго порядка; исследуются их свойства и связь с регулярным графом кольца квадратных матриц. Наконец, в заключительной части 6 мы показываем (см. теорему 6.10), что тотальный граф бесконечного множества содержит подграфы со сколь угодно большой минимальной степенью вершины — это не позволяет доказать конечность его хроматического числа «простыми» средствами.

2. Определение и основные свойства

На протяжении всего текста мы обозначаем через $\mathbb{F}$ поле с характеристикой, отличной от 2, а через $\deg p$ — степень многочлена $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, т. е. максимальную из степеней его мономов.

Дадим определение тотального и регулярного графа для произвольного подмножества векторного пространства $\mathbb{F}^n$.

Определение 2.1. Пусть n — натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$.

Тотальным графом множества A называется граф $T_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n$, такой что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n$ соединены ребром, если и только если $(x + y)/2 \in A$.

Регулярным графом множества A называется граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n \setminus A$, такой что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus A$ соединены ребром, если и только если $(x+y)/2 \in A$.

Определение 2.2. Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Обозначим через $V(p)$ множество нулей многочлена $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. множество $\{x \in \mathbb{F}^n \mid p(x) = 0\}$.

Определение 2.3. *Тотальным* и *регулярным графами многочлена* $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ будем называть графы $T_{V(p)}(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_{V(p)}(\mathbb{F}^n)$ соответственно. Для краткости далее мы будем обозначать их соответственно через $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$.

Пример 2.4. Регулярный граф $\Gamma_n(\mathbb{F})$ кольца квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$ является графом $\Gamma_{\det(X)}(\mathbb{F}^{n^2})$, где $\det(X)$ — многочлен степени n от n^2 переменных, образующих матрицу X (являющийся определителем матрицы X).

По сравнению с определением 1.1 в определении 2.3 тотального и регулярного графов многочлена мы рассматриваем не сумму, а полусумму векторов по следующим причинам.

— Среднее арифметическое двух точек есть середина соединяющего их отрезка, которая не зависит от выбора начала координат (в отличие от вершины параллелограмма, заданной суммой векторов).
— При определении через сумму векторов становится неверным одно из ключевых утверждений про регулярный граф многочлена — теорема 4.2. Бесконечная клика может оказаться в множестве $\{x/2 \mid x \in V(p)\}$. Для примера достаточно рассмотреть линейный многочлен $p(x,y) = ax+by+c$ от двух переменных, задающий прямую, не проходящую через 0. Тогда точки параллельной ей прямой $ax+by+c/2 = 0$, проходящей вдвое ближе к нулю, образуют бесконечную клику.
— Для однородного многочлена $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ эти два подхода эквивалентны, поскольку $p\big((x+y)/2\big) = 0$ тогда и только тогда, когда $p(x+y) = 0$.

Утверждение 2.5.

А. *Пусть $\tilde{A}$ является образом множества A при некотором невырожденном аффинном преобразовании пространства $\mathbb{F}^n$, т. е. $\tilde{A} = \{Ca+b \mid a \in A\}$ для некоторой невырожденной матрицы C порядка n и вектора $b \in \mathbb{F}^n$. Тогда $T_A(\mathbb{F}^n) \cong T_{\tilde{A}}(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_A(\mathbb{F}^n) \cong \Gamma_{\tilde{A}}(\mathbb{F}^n)$.*

Б. *Аналогичное утверждение выполняется и для графов многочлена. Пусть некоторые многочлены $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\tilde{p}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ таковы, что $p(x) = \tilde{p}(Cx+b)$ для некоторой невырожденной матрицы C порядка n и вектора $b \in \mathbb{F}^n$. Тогда $T_p(\mathbb{F}^n) \cong T_{\tilde{p}}(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n) \cong \Gamma_{\tilde{p}}(\mathbb{F}^n)$.*

Иными словами, графы инвариантны (с точностью до изоморфизма) относительно невырожденного аффинного преобразования пространства.

Доказательство. Искомым изоморфизмом является отображение $x \mapsto Cx+b$. $\square$

Пример 2.6. Обратное неверно: существуют такие множества A и B (и даже многочлены $p(x)$, $q(x)$ с множествами нулей $V(p) = A$, $V(q) = B$), что $\Gamma_A(\mathbb{R}) \cong \Gamma_B(\mathbb{R})$, но $A \neq \{Cb + d \mid b \in B\}$ для любых $C, d \in \mathbb{R}$.

Пусть $A = \{0, 1, \sqrt{2}\}$, $B = \{0, 1, \sqrt{3}\}$ (соответствующие им многочлены имеют вид $p(x) = x(x-1)(x-\sqrt{2})$, $q(x) = x(x-1)(x-\sqrt{3})$). Нетрудно заметить, что A и B не являются аффинно эквивалентными, поскольку аффинное преобразование прямой $\mathbb{R}$ задаётся образами двух точек.

Выберем два базиса Гамеля $\mathbb{R}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$:

$$G_1 = \{r_0 = 1,\ r_1 = \sqrt{2}\} \cup \{r_\alpha \mid \alpha \in I\}, \quad G_2 = \{s_0 = 1,\ s_1 = \sqrt{3}\} \cup \{s_\alpha \mid \alpha \in I\},$$

здесь I — континуальное множество.

Для каждого

$$x = k_0 + k_1\sqrt{2} + k_{\alpha_1} r_{\alpha_1} + \ldots + k_{\alpha_n} r_{\alpha_n} \quad (k_i \in \mathbb{Q})$$

определим

$$f(x) = k_0 + k_1\sqrt{3} + k_{\alpha_1} s_{\alpha_1} + \ldots + k_{\alpha_n} s_{\alpha_n}.$$

Поскольку $f(x)$ биективно (т. е. сохраняет множество вершин $\Gamma_A(\mathbb{R})$) и аддитивно (т. е. сохраняет множество рёбер), $f\colon \Gamma_A(\mathbb{R}) \to \Gamma_B(\mathbb{R})$ является изоморфизмом графов $\Gamma_A(\mathbb{R})$ и $\Gamma_B(\mathbb{R})$. Таким образом, $\Gamma_A(\mathbb{R}) \cong \Gamma_B(\mathbb{R})$, но при этом A и B не являются аффинно эквивалентными.

Предложение 2.7.

А. *Пусть* $A \subseteq \mathbb{F}^n$. *Тогда* $\omega\big(\Gamma_A(\mathbb{F}^n)\big) = \omega\big(\Gamma_{A\times\mathbb{F}}(\mathbb{F}^{n+1})\big)$ *и* $\chi\big(\Gamma_A(\mathbb{F}^n)\big) = \chi\big(\Gamma_{A\times\mathbb{F}}(\mathbb{F}^{n+1})\big)$.

Б. *Пусть многочлен* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. *Тогда* $\omega\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) = \omega\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^{n+1})\big)$ *и* $\chi\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) = \chi\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^{n+1})\big)$. *В правых частях этих равенств* p *рассматривается как многочлен от переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Доказательство. Докажем утверждение А. Сначала получим равенство кликовых чисел графов. Заметим, что кликовое число графа не могло уменьшиться. Действительно, $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ является подграфом $\Gamma_{A\times\mathbb{F}}(\mathbb{F}^{n+1})$, поэтому $\omega\big(\Gamma_{A\times\mathbb{F}}(\mathbb{F}^{n+1})\big) \geqslant \omega\big(\Gamma_A(\mathbb{F}^n)\big)$.

Докажем обратное неравенство. Рассмотрим клику $K \subseteq \mathbb{F}^{n+1} \setminus (A \times \mathbb{F})$. Для двух произвольных вершин клики

$$x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}),\ y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \in K$$

выполнено

$$\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \ldots, \frac{x_n+y_n}{2}, \frac{x_{n+1}+y_{n+1}}{2}\right) \in A \times \mathbb{F}.$$

Но тогда вершины $x' = (x_1, \ldots, x_n)$, $y' = (y_1, \ldots, y_n)$ графа $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ тоже соединены ребром (ясно, что $x', y' \notin A$), причём $x' \neq y'$, иначе $x \in A \times \mathbb{F}$. Тогда множество

$$K' = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in K\}$$

образует клику в графе $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$. Более того, мощности клик K и K' совпадают, ведь $x' \neq y'$.

Теперь получим равенство хроматических чисел графов. Заметим, что хроматическое число графа не могло уменьшиться. Действительно, $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ является подграфом $\Gamma_{A\times\mathbb{F}}(\mathbb{F}^{n+1})$.

Для доказательства того, что хроматическое число не увеличилось, предъявим раскраску графа в исходное количество цветов. Раскрасим каждую точку

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus (A \times \mathbb{F})$$

в цвет точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n \setminus A$ в графе $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$. Полученная раскраска будет правильной. Действительно, если точки

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}) \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus (A \times \mathbb{F})$$

соединены ребром, то точки $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ были соединены ребром в $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$, т. е. были раскрашены в разные цвета, а значит, и x, y раскрашены в разные цвета.

Пункт Б следует из пункта А и того, что

$$V\big(p(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})\big) = V\big(p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) \times \mathbb{F},$$

если x_{n+1} — фиктивная переменная. □

Замечание. Предложение 2.7 не выполняется для тотального графа. Действительно, если $A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\} \subset \mathbb{F}^n$ состоит только из одной точки, то, очевидно, кликовое и хроматические числа графа $T_A(\mathbb{F}^n)$ на превосходят 2 (поскольку $T_A(\mathbb{F}^n)$ — набор попарно несмежных рёбер). Однако множество $A\times\mathbb{F} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n, t) \mid t \in \mathbb{F}\}$ — прямая в $\mathbb{F}^{n+1}$. Поскольку любые две точки на этой прямой являются соседями в графе $T_{A\times\mathbb{F}}(\mathbb{F}^{n+1})$ (середина отрезка, соединяющего две точки прямой, тоже лежит на ней), то

$$\chi\big(T_{A\times\mathbb{F}}(\mathbb{F}^{n+1})\big) = \omega\big(T_{A\times\mathbb{F}}(\mathbb{F}^{n+1})\big) \geqslant |\mathbb{F}| > 2.$$

Утверждение 2.8. *Для линейного многочлена*

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{F}$, *хроматическое и кликовое числа графа* $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ *равны* 2: $\omega\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) = \chi(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) = 2$.

Доказательство. Поскольку $2 \leqslant \omega\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) \leqslant \chi\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big)$, достаточно доказать утверждение только для хроматического числа. Ввиду утверждения 2.5 можно считать, что

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1.$$

По пункту Б предложения 2.7 получаем $\chi\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) = \chi\big(\Gamma_{x_1}(\mathbb{F})\big)$. Вершины v и w соединены ребром в $\Gamma_{x_1}(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $v + w = 0$.

По лемме Цорна существует такое максимальное по включению множество $\mathbb{F}^+ \subset \mathbb{F} \setminus \{0\}$, что для любых $a, b \in \mathbb{F}^+$ выполнено $a + b \neq 0$. Множество $\mathbb{F}^- = \mathbb{F} \setminus (\{0\} \cup \mathbb{F}^+)$ удовлетворяет тому же свойству: для любых

$a, b \in \mathbb{F}^-$выполнено $a+b \neq 0$. Действительно, если $a+b=0$ для некоторых $a, b \in \mathbb{F}^-$, то $\mathbb{F}^+ \cup \{a\} \supset \mathbb{F}^+$, но тогда для любых $a', b' \in \mathbb{F}^+ \cup \{a\}$ выполнено $a'+b' \neq 0$, что противоречит максимальности $\mathbb{F}^+$. Таким образом, ни $\mathbb{F}^+$, ни $\mathbb{F}^-$ не содержат смежных в $\Gamma_{x_1}(\mathbb{F})$ вершин. Тогда, раскрасив все элементы множества $\mathbb{F}^+$ в первый цвет, а элементы $\mathbb{F}^-$ — во второй, мы получим $\chi\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) = \chi\big(\Gamma_{x_1}(\mathbb{F})\big) \leqslant 2$. □

Утверждение 2.9. *Пусть $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{F}^n$. Тогда*

$$\chi\big(\Gamma_{A_1 \cup A_2}(\mathbb{F}^n)\big) \leqslant \chi\big(\Gamma_{A_1}(\mathbb{F}^n)\big) \cdot \chi\big(\Gamma_{A_2}(\mathbb{F}^n)\big)$$

и

$$\chi\big(T_{A_1 \cup A_2}(\mathbb{F}^n)\big) \leqslant \chi\big(T_{A_1}(\mathbb{F}^n)\big) \cdot \chi\big(T_{A_2}(\mathbb{F}^n)\big).$$

Доказательство. Докажем утверждение для регулярного графа. Пусть f_1, f_2 — правильные раскраски графов $\Gamma_{A_1}(\mathbb{F}^n)$, $\Gamma_{A_2}(\mathbb{F}^n)$ в минимальное число цветов:

$$f_i\colon V\big(\Gamma_{A_i}(\mathbb{F}^n)\big) \to C_i, \quad i = 1, 2, \quad |C_i| = \chi\big(\Gamma_{A_i}(\mathbb{F}^n)\big).$$

Поставим в соответствие каждой вершине пару цветов в исходных раскрасках, т. е. определим

$$f\colon V\big(\Gamma_{A_1 \cup A_2}(\mathbb{F}^n)\big) \to C_1 \times C_2$$

как $f(v) = \big(f_1(v), f_2(v)\big)$. Нетрудно видеть, что f является правильной раскраской $\Gamma_{A_1 \cup A_2}(\mathbb{F}^n)$ в $\chi\big(\Gamma_{A_1}(\mathbb{F}^n)\big) \cdot \chi\big(\Gamma_{A_2}(\mathbb{F}^n)\big)$ цветов. Из этого факта следует доказываемое неравенство

$$\chi\big(\Gamma_{A_1 \cup A_2}(\mathbb{F}^n)\big) \leqslant \chi\big(\Gamma_{A_1}(\mathbb{F}^n)\big) \cdot \chi\big(\Gamma_{A_2}(\mathbb{F}^n)\big).$$

Доказательство для тотального графа аналогично. □

Поскольку множеством нулей произведения многочленов $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ является $V(p_1) \cup V(p_2)$, то аналогичная оценка верна и для графов многочлена.

Следствие 2.10. *Пусть*

$$p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ p_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \,—$$

два многочлена. Тогда

$$\chi\big(\Gamma_{p_1 \cdot p_2}(\mathbb{F}^n)\big) \leqslant \chi\big(\Gamma_{p_1}(\mathbb{F}^n)\big) \cdot \chi\big(\Gamma_{p_2}(\mathbb{F}^n)\big)$$

и

$$\chi\big(T_{p_1 \cdot p_2}(\mathbb{F}^n)\big) \leqslant \chi\big(T_{p_1}(\mathbb{F}^n)\big) \cdot \chi\big(T_{p_2}(\mathbb{F}^n)\big).$$

В частности, если левая часть неравенства бесконечна, то такова и правая часть.

Следствие 2.11. *Пусть для некоторого многочлена $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ хроматическое число его графа бесконечно: $\chi\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) = \infty$ ($\chi\big(T_p(\mathbb{F}^n)\big) = \infty$). Тогда существует неприводимый над $\mathbb{F}$ многочлен $\tilde{p}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такой что хроматическое число $\chi\big(\Gamma_{\tilde{p}}(\mathbb{F}^n)\big) = \infty$ (соответственно $\chi\big(T_{\tilde{p}}(\mathbb{F}^n)\big) = \infty$).*

Доказательство. Многочлен $p(x)$ раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{F}$ многочленов: $p(x) = p_1^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}(x)$, где $p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Если для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ выполнено $\Gamma_{p_i}(\mathbb{F}^n) < \infty$ ($\chi\big(T_{p_i}(\mathbb{F}^n)\big) = \infty$), то по следствию 2.10 $\Gamma_p(\mathbb{F}^n) < \infty$ (соответственно $\chi\big(T_p(\mathbb{F}^n)\big) < \infty$). □

Несмотря на то что получено некоторые оценки на хроматическое число регулярного и тотального графов многочлена, авторам неизвестен ответ на вопрос о его конечности в общем случае.

Вопрос 2.12. Конечны или бесконечны числа $\chi\big(T_p(\mathbb{F}^n)\big)$, $\chi\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big)$ в зависимости от многочлена $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и поля $\mathbb{F}$?

Вопрос 2.13. Пусть $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$. Существует ли многочлен $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, такой что $\chi\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) = \infty$?

Вопрос о конечности чисел $\chi\big(T_p(\mathbb{F}^n)\big)$, $\chi\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big)$ для данного многочлена и поля оказывается сложным даже в случае конкретных многочленов второй степени; например, авторам неизвестен ответ для многочлена x^2+y^2-1, задающего окружность на евклидовой плоскости (подробнее см. часть 5, где рассматриваются тотальные и регулярные графы кривых второго порядка).

3. Связность

3.1. Связность $\Gamma_n(\mathbb{F})$

Легко заметить, что $\Gamma_1(\mathbb{F})$ не связен. Действительно, две вершины $a, b \in \mathbb{F}$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $a + b = 0$, т. е. $a = -b$. Тем не менее для $n \neq 1$ ситуация противоположная.

Предложение 3.1. *Если* $n \neq 1$, *то* $\Gamma_n(\mathbb{F})$ *связен. Более того,* $\mathrm{diam}\big(\Gamma_n(\mathbb{F})\big) = 2$.

Доказательство. Пусть A и B — две различные вершины $\Gamma_n(\mathbb{F})$:

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n), \quad B = (B_1, B_2, \ldots, B_n),$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{F}^n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathbb{F}^n$ — столбцы матриц A и B соответственно.

Если $n \geqslant 3$, то найдётся $i \neq 1$, такое что A_1 и B_i неколлинеарны. Поскольку A_1 и B_i линейно независимы, можно дополнить их до базиса $\mathbb{F}^n$ векторами $C_2, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_n \in \mathbb{F}^n$. Определим матрицу

$$C = (-A_1, C_2, \ldots, C_{i-1}, -B_i, C_{i+1}, \ldots, C_n).$$

Матрица C невырожденна и является общим соседом для A и B.

В случае $n = 2$ для $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ можно выбрать общего соседа из матриц

$$D = (-A_1, -B_2), \quad F = (-A_1, B_1 - B_2 - A_1),$$

поскольку матрицы $D+A$, $D+B$, $F+A$, $F+B$ вырожденны и по крайней мере одна из матриц D, F невырожденна (в противном случае B была бы вырожденна). □

Радиусом связного графа Γ называется следующая величина:

$$r(\Gamma) = \min_{v \in V} \max_{u \in V} d(v, u).$$

Утверждение 3.2. *Если $n \neq 1$, то $r\big(\Gamma_n(\mathbb{F})\big) = 2$.*

Доказательство. Для произвольного связного графа Γ с $\operatorname{diam}(\Gamma) < \infty$ выполняются следующие оценки на радиус:

$$r(\Gamma) \leqslant \operatorname{diam}(\Gamma) \leqslant 2r(\Gamma).$$

Таким образом, по предложению 3.1 достаточно доказать, что не существует матрицы $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, смежной в $\Gamma_n(\mathbb{F})$ со всеми остальными невырожденными матрицами.

Предположим противное: пусть $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ такова, что $\det(A+X) = 0$ для любой матрицы $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Тогда для любой невырожденной матрицы B имеем

$$0 = \det(A+X) = \det(A+X)\det(A^{-1}B) = \det(AA^{-1}B + XA^{-1}B) = \det(B+X'),$$

где матрица X', как и матрица X, пробегает все $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, т. е. B тоже смежна со всеми остальными невырожденными матрицами.

Тем самым любые две вершины графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$ смежны между собой, т. е. граф $\Gamma_n(\mathbb{F})$ полный. Однако это, конечно, не так: поскольку $\operatorname{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, любые две верхние унитреугольные, т. е. верхнетреугольные с единицами на главной диагонали, матрицы не смежны. □

Замечание. Предложение 3.1 и утверждение 3.2 остаются верными и в случае $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 2$ (утверждение 3.2 в этом случае требует отдельного доказательства).

3.2. Связность $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$

Эта часть посвящена установлению критерия связности тотального и регулярного графов однородного многочлена p.

Утверждение 3.3. *Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — некоторый многочлен.*

1. *Если $T_p(\mathbb{F}^n)$ связен, то $\dim\langle V(p)\rangle = n$.*
2. *Если $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ связен и $|\mathbb{F}| > 3$, то $\dim\langle V(p)\rangle = n$.*

Доказательство. Докажем утверждения от противного. Предположим, что $\dim\langle V(p)\rangle < n$. Отсюда следует, что $V(p) \subseteq L$ для некоторого линейного подпространства $L \subset \mathbb{F}^n$ размерности $m < n$. Согласно пункту Б утверждения 2.5 без ограничения общности можно считать, что

$$L = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n \mid x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0\}.$$

Заметим, что смежность (как в $T_p(\mathbb{F}^n)$, так и в $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$) двух вершин $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ влечёт равенство $x_i = -y_i$ для всех $i = m+1, m+2, \ldots, n$. Следовательно, если

$$(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \neq \pm(y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n),$$

то x и y не связаны. Такие x и y всегда найдутся в графе $T_p(\mathbb{F}^n)$, ведь в поле $\mathbb{F}$ не менее трёх элементов.

В случае графа $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ дополнительно необходимо, чтобы x и y не попали в $V(p)$. Для этого достаточно условия $|\mathbb{F}| > 3$. $\square$

Пример 3.4. Отметим, что граф $\Gamma_{x_1}(\mathbb{F}_3^n)$ связен (здесь $\mathbb{F}_3$ — поле из трёх элементов).

Из доказательства утверждения 3.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.5. *Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — произвольный многочлен над бесконечным полем $\mathbb{F}$. Если $\dim\langle V(p)\rangle < n$, то у каждого из графов $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ есть бесконечно много компонент связности.*

Теорема 3.6. *Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — однородный многочлен.*

1. *$T_p(\mathbb{F}^n)$ связен тогда и только тогда, когда $\dim\langle V(p)\rangle = n$. Более того, в этом случае $\operatorname{diam}\bigl(T_p(\mathbb{F}^n)\bigr) \leqslant n$.*
2. *Пусть $|\mathbb{F}| > 2\deg p$ (в частности, $\mathbb{F}$ может быть бесконечным). Тогда $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ связен тогда и только тогда, когда $\dim\langle V(p)\rangle = n$. Более того, этом случае $\operatorname{diam}\bigl(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\bigr) \leqslant 2n$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Импликация «$\Longrightarrow$» следует из утверждения 3.3. Докажем импликацию «$\Longleftarrow$». Поскольку $\dim\langle V(p)\rangle = n$, найдётся n линейно независимых векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V(p)$. Без ограничения общности можно считать, что

$$v_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ v_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ v_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Иначе можно сделать линейную однородную замену координат; многочлен p при этом останется однородным, а граф — изоморфным исходному вследствие пункта Б утверждения 2.5.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) \in \mathbb{F}^n$. Рассмотрим последовательность вершин

$$\begin{aligned}
&w_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x,\\
&w_1 = \bigl((-1)^{n-1}y_1, -x_2, -x_3, \ldots, -x_{n-1}, -x_n\bigr),\\
&w_2 = \bigl((-1)^{n-2}y_1, (-1)^{n-2}y_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n\bigr),\\
&\quad \ldots\\
&w_{n-1} = (-y_1, -y_2, -y_3, \ldots, -y_{n-1}, (-1)^{n-1}x_n),\\
&w_n = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n) = y.
\end{aligned}$$

Тогда последовательность $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n$ задаёт путь от x до y длины n. Действительно, каждые две соседние вершины в этой последовательности соединены ребром: для произвольного натурального $k \leqslant n$ вершина w_k получена из вершины w_{k-1} домножением её координат на -1 и заменой её k-й координаты на $(-1)^{n-k} y_k$. Таким образом,

$$\frac{w_k + w_{k-1}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-1}, (-1)^{n-k} y_k + (-1)^{k-1} x_k, 0, \ldots, 0, 0\Big) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-k} y_k + (-1)^{k-1} x_k}{2} v_k \in V(p),$$

поскольку многочлен p однородный. Таким образом, $T_p^n(\mathbb{F})$ связен и $\operatorname{diam}\big(T_p^n(\mathbb{F})\big) \leqslant n$.

Докажем утверждение 2. Импликация «$\Longrightarrow$» следует из утверждения 3.3. Докажем импликацию «$\Longleftarrow$». Поскольку $\dim\langle V(p)\rangle = n$, найдётся n линейно независимых векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V(p)$. Аналогично пункту 1 без ограничения общности можно считать, что

$$v_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ v_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ v_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) \in \mathbb{F}^n \setminus V(p)$ — две произвольные вершины графа $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$. Докажем, что существует набор векторов $w_0^x, w_0^y, w_1^x, w_1^y, \ldots, w_n^x, w_n^y$, являющихся вершинами графа $\Gamma_p^n(\mathbb{F})$ (т. е. не лежащих в $V(p)$) и определённых при $k = 0, 1, \ldots, n$ следующим образом:

$$w_k^x = (-1)^k (z_1, z_2, \ldots, z_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$
$$w_k^y = (-1)^k (z_1, z_2, \ldots, z_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n),$$

для некоторых чисел $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n \in \mathbb{F}$. Построим этот набор индукцией по k.

База индукции: при $k = 0$ положим $w_0^x = x$, $w_0^y = y \notin V(p)$.

Индукционный переход: пусть теперь для некоторого $k \geqslant 0$ уже найдены $z_1, \ldots, z_k$ и $w_0^x, w_0^y, \ldots, w_k^x, w_k^y \notin V(p)$. Покажем, что найдётся z_{k+1}, для которого w_{k+1}^x и w_{k+1}^y не лежат в $V(p)$.

Рассмотрим прямые

$$l_x = \{(-1)^{k+1}(z_1, \ldots, z_k, t, x_{k+2}, \ldots, x_n) \mid t \in \mathbb{F}\},$$
$$l_y = \{(-1)^{k+1}(z_1, \ldots, z_k, t, y_{k+2}, \ldots, y_n) \mid t \in \mathbb{F}\}.$$

По теореме Безу каждая из прямых l_x и l_y имеет не более чем $\deg p$

общих точек с $V(p)$. Действительно, $l_x, l_y \nsubseteq V(p)$, так как $(-w_k^x) \in l_x \setminus V(p)$, $(-w_k^y) \in l_y \setminus V(p)$ по предположению индукции и ввиду однородности p. Следовательно, поскольку $|\mathbb{F}| > 2 \deg p$, найдётся такое t_0, что

$$(-1)^{k+1}(z_1, \ldots, z_k, t_0, x_{k+2}, \ldots, x_n),\ (-1)^{k+1}(z_1, \ldots, z_k, t_0, y_{k+2}, \ldots, y_n) \notin V(p).$$

Возьмём $z_{k+1}=t_0$. Тогда векторы

$$w^x_{k+1}=(-1)^{k+1}(z_1,z_2,\ldots,z_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n),$$
$$w^y_{k+1}=(-1)^{k+1}(z_1,z_2,\ldots,z_{k+1},y_{k+2},\ldots,y_n)$$

не лежат в $V(p)$, что завершает индукционный переход.

Заметим, что последовательность вершин $x=w^x_0,w^x_1,w^x_2,\ldots,w^x_n$ задаёт путь от вершины $w^x_0=x$ до w^x_n, поскольку для любого $k=0,1,\ldots,n-1$ вершины w^x_k и w^x_{k+1} соединены ребром в $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$. Действительно,

$$\frac{w^x_k+w^x_{k+1}}{2}=\frac{(-1)^k}{2}\cdot\Big(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k},x_{k+1}-z_{k+1},0,\ldots,0\Big)=$$
$$=\frac{(-1)^k(x_{k+1}-z_{k+1})}{2}v_{k+1}\in V(p).$$

Аналогично последовательность вершин $y=w^y_0,w^y_1,w^y_2,\ldots,w^y_n$ задаёт путь от вершины $w^y_0=y$ до w^y_n. Тогда путь от x до y задаётся последовательностью из $2n+1$ вершин $x=w^x_0,w^x_1,\ldots,w^x_n=w^y_n,w^y_{n-1},\ldots,w^y_1,w^y_0=y$, что доказывает связность и оценку на диаметр. □

Следствие 3.7. *Пусть $p(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{F}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ — однородный многочлен, причём $V(p)\neq\{0\}$. Тогда верно следующее.*

1. *Диаметр каждой компоненты связности $T_p(\mathbb{F}^n)$ не превосходит $\dim\langle V(p)\rangle+1$.*
2. *У одной из компонент связности графа $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ диаметр не превосходит $2\dim\langle V(p)\rangle$. Диаметр всех остальных компонент связности $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ не превосходит $\dim\langle V(p)\rangle+1$.*

Доказательство. Пусть $\dim\langle V(p)\rangle=m>0$. Согласно пункту Б утверждения 2.5 с точностью до замены координат можно считать, что

$$v_1=(1,0,0,\ldots,0),\ v_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,\ v_m=\Big(0,0,\ldots,0,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-m}\Big)\in V(p).$$

Тогда

$$\langle V(p)\rangle=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{F}^n\mid x_{m+1}=x_{m+2}=\ldots=x_n=0\}.$$

Из доказательства утверждения 3.3 следует, что две вершины $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ могут быть связаны (как в $T_p(\mathbb{F}^n)$, так и в $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$), только если $(x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n)=\pm(y_{m+1},y_{m+2},\ldots,y_n)$. Покажем, что в этом случае они связаны.

Если $(x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n)=(0,0,\ldots,0)=(y_{m+1},y_{m+2},\ldots,y_n)$, то x, y лежат в $\langle V(p)\rangle$. Тогда задача сводится к рассмотрению одного из графов $T_{p'}(\mathbb{F}^m)$ или $\Gamma_{p'}(\mathbb{F}^m)$, где

$$p'(x_1,x_2,\ldots,x_m)=p(x_1,x_2,\ldots,x_m,0,\ldots,0),$$

и оценка для этой компоненты связности следует из теоремы 3.6.

Пусть теперь

$$(0,0,\ldots,0) \neq (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) = (-1)^t (y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n),$$

где $t = 0$ или $t = 1$. Рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned}
&w_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = x,\\
&w_1 = \big((-1)^{t+1} y_1, -x_2, -x_3, \ldots, -x_{m-1}, -x_m, -x_{m+1}, \ldots, -x_n\big),\\
&w_2 = \big((-1)^{t+2} y_1, (-1)^{t+2} y_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\big),\\
&\quad \ldots\\
&w_{m-1} = \big((-1)^{t+m-1} y_1, (-1)^{t+m-1} y_2, \ldots, (-1)^{t+m-1} y_{m-1},\\
&\quad (-1)^{m-1} x_m, (-1)^{m-1} x_{m+1}, \ldots, (-1)^{m-1} x_n\big),\\
&w_m = \big((-1)^{t+m} y_1, (-1)^{t+m} y_2, \ldots, (-1)^{t+m} y_m, (-1)^m x_{m+1}, \ldots, (-1)^m x_n\big) =\\
&\quad = (-1)^{t+m} y.
\end{aligned}$$

Все члены последовательности являются вершинами как графа $T_p(\mathbb{F}^n)$, так и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$, поскольку

$$(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \neq (0,0,\ldots,0).$$

Кроме того, каждые две подряд идущие вершины этой последовательности являются соседними в графах $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ (аналогично пункту 1 теоремы 3.6). Таким образом, эта последовательность задаёт путь от вершины x до вершины $(-1)^{m+t} y$ длины m. В комбинации с тем, что y и $-y$ соединены ребром (так как многочлен p однородный), этот факт доказывает, что x и y соединены путём длины, не превосходящей $m+1$. А значит, диаметр компоненты связности вершины x в этом случае не превосходит $m+1$ как в $T_p(\mathbb{F}^n)$, так и в $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$. □

Пример 3.8. Пусть $q(x) = q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Тогда оценка теоремы 3.6 для диаметра тотального графа $T_p(\mathbb{R}^n)$ достигается на многочлене

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (q(x) - x_1^2) \cdot (q(x) - x_2^2) \cdot \ldots \cdot (q(x) - x_n^2),$$

задающем координатные прямые в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Докажем, что расстояние в графе $T_p(\mathbb{R}^n)$ от точки $(0,0,\ldots,0)$ до точки $(1,1,\ldots,1)$ не меньше n. Действительно, поскольку многочлен $p(x)$ задаёт координатные прямые, соседними в графе $T_p(\mathbb{R}^n)$ могут быть только те точки, у которых количество нулевых координат отличается не более чем на одну. Но тогда все соседи точки $(0,0,\ldots,0)$ имеют не более одной ненулевой координаты, их соседи имеют не более двух ненулевых координат и т. д. Таким образом, точка, находящаяся на расстоянии m от $(0,0,\ldots,0)$ (в графе $T_p(\mathbb{R}^n)$), имеет не более m ненулевых координат. Следовательно, расстояние от $(0,0,\ldots,0)$ до $(1,1,\ldots,1)$ не меньше n. Значит, $\operatorname{diam}\big(T_p(\mathbb{R}^n)\big) = n$. □

4. Кликовое число графов многочлена

В этой части мы исследуем свойства кликовых чисел тотального и регулярного графов многочлена. Прежде всего покажем, что кликовое число регулярного графа произвольного множества может быть бесконечным.

Пример 4.1.

1. Рассмотрим следующее множество в $\mathbb{R}^2$:
$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$
(внутренность единичного круга). Тогда кликой в графе $\Gamma_A(\mathbb{R}^2)$ будет единичная окружность $\big\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\big\}$.
2. Можно рассмотреть и замкнутое множество: пусть
$$A = \{(x, y) \mid y \geqslant x^2\} \subset \mathbb{R}^2 \,—$$
внутренность и граница стандартной параболы. Покажем, что у соответствующего графа $\Gamma_A(\mathbb{R}^2)$ есть бесконечная клика. Определим $A_m = (m, m^2 - 1/4)$, $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ — клика. Действительно, рассмотрим середину отрезка $[A_m, A_k]$. Её координаты равны
$$\left(\frac{m+k}{2},\ \frac{m^2+k^2}{2} - \frac{1}{4}\right).$$
Она лежит внутри параболы или на ней, так как
$$\left(\frac{m+k}{2}\right)^2 \leqslant \frac{m^2+k^2}{2} - \frac{1}{4}, \quad \text{поскольку} \quad 1 \leqslant (m-k)^2.$$
3. Можно также рассмотреть подмножество прямой, все точки которого изолированные:
$$A = \left\{ \frac{2^k+1}{2^m} \;\middle|\; m, k \in \mathbb{N},\ m > k \right\} \subset \mathbb{R}.$$
Тогда кликой в графе $\Gamma_A(\mathbb{R})$ будет множество дробей, обратных степеням двойки: $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Однако оказывается, что кликовое числа регулярного графа многочлена всегда конечно. Докажем соответствующую теорему. Идеи её доказательства во многом схожи с доказательством теоремы 1 из [5].

Теорема 4.2. *Пусть* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — *произвольный многочлен степени* $k \geqslant 0$. *Тогда* $\omega\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big)$ *конечно и выполнена оценка* $\omega\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) \leqslant \binom{n+k}{k}$.

Доказательство. Для $a \in \mathbb{F}^n \setminus V(p)$ обозначим через $p_a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ многочлен $p\big((x+a)/2\big)$. Пусть $K \subseteq V\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big)$ — вершины произвольной клики. Докажем, что множество многочленов
$$\mathcal{P}_K = \{p_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid a \in K\}$$

линейно независимо над $\mathbb{F}$. Предположим противное: пусть

$$0 = \lambda_1 p_{a_1}(x) + \lambda_2 p_{a_2}(x) + \ldots + \lambda_m p_{a_m}(x),$$

где m натуральное, $a_i \in K$, $\lambda_i \in \mathbb{F}$. Подставив в это равенство $x = a_i$, получаем

$$0 = \lambda_i p_{a_i}(a_i) = \lambda_i p(a_i)$$

(поскольку K — вершины клики). Тем самым $\lambda_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ (так как $p(a_i) \neq 0$).

Таким образом, $\mathcal{P}_K$ — линейно независимое подмножество линейного пространства $\mathbb{F}_{\leqslant k}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ многочленов над $\mathbb{F}$ степени не выше k. Широко известно, что размерность этого пространства равна $\binom{n+k}{k}$ (совпадает с числом решений неравенства $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqslant k$ в целых неотрицательных числах), что означает $|\mathcal{P}_K| \leqslant \binom{n+k}{k}$.

Отметим, что $|\mathcal{P}_K| = |K|$, поскольку двум различным точкам $a, b \in K$ соответствуют различные многочлены из $\mathcal{P}_K$: $p_a(x) \neq p_b(x)$, так как $p_a(a) = p(a) \neq 0$, но $p_b(a) = 0$. Значит, $\omega\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) \leqslant \binom{n+k}{k}$. □

Для тотального графа утверждение теоремы 4.2 неверно (см. пример 4.6) по причине того, что клику может образовывать подмножество $V(p)$. В связи с этим введём следующее обозначение.

Определение 4.3. Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — многочлен. Обозначим через $N_p(\mathbb{F}^n)$ подграф $T_p(\mathbb{F}^n)$, порождённый множеством вершин $V(p)$.

Утверждение 4.4. *Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — многочлен. Тогда*

$$\omega\big(T_p(\mathbb{F}^n)\big) < \infty \iff \omega\big(N_p(\mathbb{F}^n)\big) < \infty,$$

причём в этом случае

$$\omega\big(T_p(\mathbb{F}^n)\big) \leqslant \omega\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) + \omega\big(N_p(\mathbb{F}^n)\big).$$

Доказательство. Необходимость очевидна: кликовое число подграфа не превосходит кликового числа всего графа. Докажем достаточность.

Пусть K — вершины произвольной клики в $T_p(\mathbb{F}^n)$. Тогда $K = K_\Gamma \cup K_N$, где $K_\Gamma \subseteq \mathbb{F}^n \setminus V(p)$, $K_N \subseteq V(p)$. По теореме 4.2 $|K_\Gamma| \leqslant \omega\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)\big) < \infty$, $|K_N| \leqslant \omega\big(N_p(\mathbb{F}^n)\big) < \infty$, отсюда вытекает требуемое. □

Таким образом, для исследования конечности кликового числа графа $T_p(\mathbb{F}^n)$ необходимо задаться аналогичным вопросом для $N_p(\mathbb{F}^n)$. Далее мы отвечаем на этот вопрос для многочленов от двух переменных.

Определение 4.5. Для многочлена $p(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$ скажем, что $V(p)$ содержит прямую, если $p(x, y)$ делится на многочлен $l(x, y)$ первой степени.

Замечание. Если $l(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$ — многочлен первой степени и $|\mathbb{F}| = \infty$ (и даже если $|\mathbb{F}| > \deg p$), то условие делимости $p(x, y)$ на $l(x, y)$ (т. е. условие того, что $V(p)$ содержит прямую) эквивалентно тому, что $V(l) \subseteq V(p)$.

Пример 4.6. Если $V(p)$ содержит прямую $l(x,y)=0$, то над бесконечным полем $\mathbb{F}$ выполнено $\omega\big(T_p(\mathbb{F}^2)\big)=\omega\big(N_p(\mathbb{F}^2)\big)=\infty$, поскольку клику образует произвольное подмножество этой прямой.

Широко известна теорема Безу о числе пересечения точек двух алгебраических кривых (см., например, [1,2]). Нам потребуется эта теорема в следующей форме.

Теорема 4.7. *Пусть $p(x,y),q(x,y)\in\mathbb{F}[x,y]$ — ненулевые взаимно простые (т. е. не имеющие общего неприводимого множителя) многочлены степеней m и n соответственно. Тогда $|V(p)\cap V(q)|\leqslant mn$.*

Рассмотрим преобразование $H_k^C\colon\mathbb{F}[x,y]\to\mathbb{F}[x,y]$, где $C=(c_x,c_y)\in\mathbb{F}^2$ и $k\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$, определённое для произвольного многочлена $p(x,y)$ следующим образом:

$$H_k^C(p)(x,y)=p(k(x-c_x)+c_x,k(y-c_y)+c_y). \qquad (*)$$

Замечание.

1. Формула $(*)$ означает, что $V(p)$ есть образ $V\big(H_k^C(p)\big)$ при гомотетии с центром в точке C и коэффициентом k.
2. $\deg p=\deg H_k^C(p)$.
3. $H_k^C\circ H_{1/k}^C=\mathrm{id}$. Таким образом, H_k^C биективно.
4. Если $p(x,y)$ — неприводимый над $\mathbb{F}$ многочлен, то многочлен $H_k^C(p)$ также неприводим над $\mathbb{F}$.

Теорема 4.8. *Пусть $p(x,y)\in\mathbb{F}[x,y]$ — такой многочлен, что $V(p)$ не содержит прямых, а поле $\mathbb{F}$ таково, что $\mathrm{char}(\mathbb{F})=0$ или $\mathrm{char}(\mathbb{F})>\deg p$. Тогда $\omega\big(N_p(\mathbb{F}^2)\big)$ конечно и выполнена оценка $\omega\big(N_p(\mathbb{F}^2)\big)\leqslant(\deg p)^2$.*

Доказательство. Учитывая, что для многочлена $p(x,y)$ с $V(p)=\varnothing$ утверждение теоремы верно, далее будем считать, что $V(p)\neq\varnothing$.

Пусть

$$p(x,y)=q_1^{\alpha_1}(x,y)\cdot q_2^{\alpha_2}(x,y)\cdot\ldots\cdot q_k^{\alpha_k}(x,y) -$$

разложение многочлена $p(x,y)$ на неприводимые множители. Не умаляя общности, можно считать, что $V(q_i)\neq\varnothing$ для каждого i, иначе можно рассмотреть многочлен

$$p'(x,y)=\frac{p(x,y)}{q_i^{\alpha_i}(x,y)}$$

меньшей степени, однако $V(p)=V(p')$. Более того, по аналогичным соображениям можно считать, что $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=1$.

Докажем теорему от противного: предположим, что в графе $N_p(\mathbb{F}^2)$ существует (конечная) клика A мощности $|A|=N>(\deg p)^2$. Будем считать, что $A=\{A_1,A_2,\ldots,A_N\}$. Для каждой точки $A_i=(x_i,y_i)\in A$ определим многочлен $p_{A_i}(x,y)=H_2^{A_i}(p)(x,y)=p(2x-x_i,2y-y_i)$. Согласно замечанию выше $V(p_{A_i})$ есть образ множества $V(p)$ при гомотетии с центром A_i и коэффициентом $1/2$. Следовательно, середина каждого из отрезков $[A_i,A_j]$ принадлежит множеству $V(p_{A_i})$ для всех $j = 1, 2, \ldots, N$. Значит, $|V(p_{A_i}) \cap V(p)| \geqslant N > (\deg p)^2$. По теореме 4.7 многочлены p и p_{A_i} имеют общий неприводимый множитель, скажем q_{r_i}, где $r_i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Так как $r_i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N$, по принципу Дирихле мы заключаем, что по крайней мере N/k из чисел $r_1, r_2, \ldots, r_N$ одинаковы. Тем самым существует неприводимый делитель $q(x, y)$ многочлена $p(x, y)$, такой что $q = q_{r_i}$ для хотя бы N/k различных значений i. Поскольку q — неприводимый делитель p_{A_i}, применяя преобразование $H_{1/2}^{A_i}$, получаем, что $H_{1/2}^{A_i}(q)$ — неприводимый делитель $H_{1/2}^{A_i}(p_{A_i}) = p$. Ясно, что $N/k > (\deg p)^2/k \geqslant k$. Тогда, вновь по принципу Дирихле, существуют две различные точки $A_s, A_t \in A$, такие что $H_{1/2}^{A_s}(q) = H_{1/2}^{A_t}(q)$ (равенство выполнено с учётом того, что старшие члены в лексикографическом порядке и коэффициенты при них у этих многочленов равны). Значит, $H_2^{A_t}\big(H_{1/2}^{A_s}(q)\big) = q$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$H_2^{A_t}\big(H_{1/2}^{A_s}(q)\big)(x, y) = q\left(x + \frac{x_s - x_t}{2}, y + \frac{y_s - y_t}{2}\right).$$

Таким образом,

$$q(x, y) = q\left(x + \frac{1}{2}(x_s - x_t),\, y + \frac{1}{2}(y_s - y_t)\right).$$

Рассмотрим произвольную точку $R \in V(q)$ (напомним, что $V(q) \neq \varnothing$) и обозначим

$$v = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_t A_s} = \frac{1}{2}(x_s - x_t,\, y_s - y_t).$$

Поскольку $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 0$ или $\operatorname{char}(\mathbb{F}) > \deg p$, точки $R, R + v, R + 2v, \ldots, R + \deg(p) \cdot v$ — попарно различные точки множества $V(q)$. Следовательно, $V(q)$ пересекает прямую $\{R + t \cdot v \mid t \in \mathbb{F}\}$ по меньшей мере в $\deg p + 1$ различных точках. Вновь применяя теорему 4.7, получаем, что q делится на некоторый линейный многочлен (и даже равен ему, поскольку q неприводим), но тогда $V(p)$ содержит прямую. Противоречие. Значит, $\omega\big(N_p(\mathbb{F}^2)\big) \leqslant (\deg p)^2$. □

Следствие 4.9. *Пусть $p(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$ — такой многочлен, что $V(p)$ не содержит прямых, а поле $\mathbb{F}$ таково, что $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 0$ или $\operatorname{char}(\mathbb{F}) > \deg p$. Тогда $\omega\big(T_p(\mathbb{F}^2)\big)$ конечно и*

$$\omega\big(T_p(\mathbb{F}^2)\big) \leqslant \frac{3(\deg p)^2 + 3\deg p + 2}{2}.$$

Доказательство. Действительно, из теорем 4.2, 4.8 и утверждения 4.4 немедленно вытекает, что

$$\omega\big(T_p(\mathbb{F}^2)\big) \leqslant \omega\big(N_p(\mathbb{F}^2)\big) + \omega\big(\Gamma_p(\mathbb{F}^2)\big) \leqslant \\ \leqslant (\deg p)^2 + \frac{(\deg p + 1)(\deg p + 2)}{2} = \frac{3(\deg p)^2 + 3\deg p + 2}{2}. \quad \square$$

Если $p(x,y)$ — неприводимый многочлен, то оказывается, что степень каждой вершины графа $N_p(\mathbb{F}^2)$ ограничена сверху числом $(\deg p)^2$, и в этом случае мы получаем более сильное, чем теорема 4.8, утверждение.

Утверждение 4.10. *Пусть $p(x,y) \in \mathbb{F}[x,y]$ — неприводимый многочлен степени $\deg p > 1$ и $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$. Тогда $\Delta\big(N_p(\mathbb{F}^2)\big) \leqslant (\deg p)^2$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть некоторая точка $C_0 = (x_0, y_0) \in V(p)$ смежна в $N_p(\mathbb{F}^2)$ с точками $C_1, C_2, \ldots, C_N$, где $N > (\deg p)^2$. Рассмотрим многочлен

$$q(x,y) = H_2^{C_0}(p)(x,y) = p(2x - x_0, 2y - y_0).$$

Согласно замечанию выше $V(q)$ есть образ множества $V(p)$ при гомотетии с центром C_0 и коэффициентом $1/2$, а также q неприводим ввиду неприводимости p. Следовательно, середина каждого из отрезков $[C_0, C_j]$ принадлежит множеству $V(q)$ для всех $j = 1, 2, \ldots, N$. Значит, $|V(q) \cap V(p)| \geqslant N > (\deg p)^2$. По теореме 4.7 неприводимые многочлены p и q имеют общий неприводимый множитель. Тогда $p(x,y) = \alpha q(x,y)$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Таким образом,

$$p(x,y) = \alpha \cdot p(2x - x_0, 2y - y_0). \tag{$**$}$$

Пусть $C_1 = (x_1, y_1) \in V(p)$. Докажем по индукции, что

$$D_k = \big(x_0 + 2^k(x_1 - x_0),\, y_0 + 2^k(y_1 - y_0)\big) \in V(p)$$

при любом целом $k \geqslant 0$. Ясно, что $D_0 = C_1$, поэтому база индукции верна. Пусть $D_k \in V(p)$. Подставив D_k в равенство $(**)$, получим

$$0 = p\big(x_0 + 2^k(x_1 - x_0), y_0 + 2^k(y_1 - y_0)\big) = \alpha \cdot p\big(x_0 + 2^{k+1}(x_1 - x_0), y_0 + 2^{k+1}(y_1 - y_0)\big).$$

откуда следует, что $D_{k+1} \in V(p)$, что и требовалось.

Следовательно, прямая $\big\{\big(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)\big) \mid t \in \mathbb{F}\big\}$ пересекается с $V(p)$ в бесконечном числе точек. Вновь применяя теорему 4.7, получаем, что $p(x,y)$ делится на многочлен первой степени, что невозможно, поскольку $p(x,y)$ неприводим и $\deg p > 1$. Противоречие. $\square$

5. Графы кривых второго порядка

Хроматическое число регулярного графа многочлена первой степени всегда конечно, как показывает утверждение 2.8. Однако вопрос 2.12 оказывается сложным даже для многочленов второй степени от двух переменных — кривых второго порядка. Как известно, вещественное уравнение каждой из невырожденных непустых кривых второго порядка аффинно эквивалентно уравнению окружности ($x^2 + y^2 = 1$), параболы ($y = x^2$) или гиперболы ($xy = 1$). Поэтому согласно пункту Б утверждения 2.5 имеет смысл рассмотреть соответствующие регулярные графы.

Рассмотрение регулярных графов кривых второго порядка также мотивировано изучением регулярного графа вещественного конуса $x^2 + y^2 = z^2$: конечно или бесконечно его хроматическое число? Чтобы пролить свет на этот вопрос, мы рассмотрим конические сечения: окружность, параболу и гиперболу. Если хроматическое число хотя бы одного из этих графов бесконечно, то бесконечно и хроматическое число регулярного графа конуса. Оказывается, что это повлечёт и бесконечность хроматического числа регулярного графа кольца квадратных матриц (см. предложения 5.1, 5.4, 5.9).

5.1. Граф окружности $x^2 + y^2 = 1$

Предложение 5.1. *Если $\chi\bigl(\Gamma_{x^2+y^2-1}(\mathbb{F}^2)\bigr)$ бесконечно, то $\chi\bigl(\Gamma_n(\mathbb{F})\bigr)$ также бесконечно для любого $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M(x,y) \in M_n(\mathbb{F})$, где $n \geqslant 3$:

$$M(x,y) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & x & 1 & \\ y & 1 & x & O \\ 1 & y & 0 & \\ \hline & O & & E_{n-3} \end{array}\right),$$

здесь O — матрица из одних нулей, E_{n-3} — единичная матрица (их размеры восстанавливаются из контекста). Тогда $\det M(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Тем самым функция $(x,y) \mapsto M(x,y)$ инъективно отображает вершины графа $\Gamma_{x^2+y^2-1}(\mathbb{F}^2)$ в вершины графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$. Предложение будет доказано, если мы покажем, что это отображение — гомоморфизм графов (сохраняет смежность вершин). Действительно, пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — смежные вершины в $\Gamma_{x^2+y^2-1}(\mathbb{F}^2)$, т. е.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = 1.$$

Но тогда

$$\det\bigl(M(x_1,y_1) + M(x_2,y_2)\bigr) = 2^{n-3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & x_1 + x_2 & 2 \\ y_1 + y_2 & 2 & x_1 + x_2 \\ 2 & y_1 + y_2 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 2^{n-3} \cdot (2(x_1 + x_2)^2 + 2(y_1 + y_2)^2 - 8) = 0,$$

а значит, $M(x_1,y_1)$ и $M(x_2,y_2)$ смежны в $\Gamma_n(\mathbb{F})$. □

Обозначим через G_0 граф $\Gamma_{x^2+y^2-1}(\mathbb{R}^2)$ и через ω — единичную окружность $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Утверждение 5.2. *Для графа G_0 выполняются следующие свойства.*

1. $\Delta(G_0) = \delta(G_0) = \infty$.
2. *G_0 не содержит подграфа, изоморфного $K_{2,3}$.*
3. $\omega(G_0) = 4$.

4. *G_0 связен.*
5. $\operatorname{diam}(G_0) = \infty$ (*в том смысле, что* $\operatorname{diam}(G_0) > k$ *для любого натурального* k).
6. *Каждое конечное дерево* T *является подграфом* G_0.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Соседями произвольной вершины $a \in V(G_0)$ являются точки окружности, гомотетичной ω относительно точки a с коэффициентом 2 (не принадлежащие ω). Будем обозначать её через ω_a (её центр расположен в точке $-a$, а радиус равен 2).

Докажем утверждение 2 от противного. Пусть $K_{2,3} \subset G_0$ и его вершины разбиваются на две доли: $V(K_{2,3}) = \{a_1, a_2\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}$. Согласно пункту 1 множествами соседей точек a_1, a_2 являются две окружности ω_{a_1} и ω_{a_2} радиуса 2 (быть может, за исключением одной или двух точек), причём, поскольку вершины b_1, b_2, b_3 являются соседями каждой из точек a_1, a_2, окружности ω_{a_1} и ω_{a_2} пересекаются не менее чем в трёх точках. Это означает, что они совпадают. Но тогда совпадают и точки a_1, a_2, противоречие.

Докажем утверждение 3. Ясно, что $\omega(G_0) < 5$ по пункту 2, так как K_5 содержит $K_{2,3}$ в качестве подграфа. Однако есть бесконечно много клик из четырёх элементов: для любых трёх точек окружности ω кликой будет являться треугольник, середины сторон которого — данные точки, и его ортоцентр (тогда ω будет его окружностью Эйлера). Например, подойдёт множество $\{(1{,}6, 1{,}8), (-1{,}6, 0{,}2), (0{,}4, -1{,}8), (-0{,}4, -0{,}2)\}$.

Докажем утверждение 4. Рассмотрим вершину a графа G_0, такую что $\|a\|_2 > 5$ (здесь и ниже мы обозначаем через $\|a\|_2$ евклидово расстояние от точки a до начала координат). Как отмечено в пункте 1, соседями точки a являются точки окружности ω_a радиуса 2. Тогда соседями всех точек на окружности ω_a является множество

$$\omega'_a = \{b \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega \mid b \in \omega_c \text{ для некоторого } c \in \omega_a\}.$$

Нетрудно понять, что ω'_a — замкнутый круг радиуса 4 с центром в точке a, так как для любого $c \in \omega_a$ выполнено $\omega_c \cap \omega = \varnothing$. Следовательно, все точки в круге радиуса 4 с центром в точке a связаны с a (и, значит, друг с другом). Тем самым точки в пересекающихся кругах такого вида тоже связаны. Поскольку кругами радиуса 4 с центрами на расстоянии не менее 5 от нуля можно покрыть всю плоскость (за исключением точек внутри ω), все точки вне окружности ω связаны. А поскольку любая точка внутри ω имеет соседа вне ω, то связен и весь граф G_0.

Докажем утверждение 5. Заметим, что для произвольной вершины a расстояние (на евклидовой плоскости) от точки 0 до соседей точки a ограничено:

$$\sup\{\|x\|_2 \mid x \in \omega_a\} \leqslant \|a\|_2 + 2.$$

Поэтому расстояние (в графе G_0) от точки $(0, 0)$ до точки $(2n, 2n)$ не меньше n.

Для доказательства утверждения 6 достаточно показать, что если произвольный конечный граф H является подграфом G_0 и $h \in V(H)$, то к вершине h можно добавить висячую вершину так, чтобы полученный граф H'

остался подграфом G_0. Действительно, количество общих точек у ω_h и множества $V(H) \cup \{\omega_a \mid a \in V(H-h)\} \cup \omega$ конечно. Следовательно, на ω_h найдётся точка, не являющаяся вершиной H и не смежная в G_0 ни одной из вершин H, кроме h, что и требовалось. $\square$

Гипотеза 5.3. Хроматическое число $\chi(G_0)$ конечно.

5.2. Граф параболы $y = x^2$

Предложение 5.4. *Если $\chi\big(\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)\big)$ бесконечно, то $\chi\big(\Gamma_n(\mathbb{F})\big)$ также бесконечно для любого $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M(x,y) \in M_n(\mathbb{F})$, где $n \geqslant 2$:

$$M(x,y) = \left(\begin{array}{cc|c} x & 1 & \\ y & x & O \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & E_{n-2} \end{array}\right),$$

здесь O — матрица из одних нулей, а E_{n-2} — единичная матрица (их размеры восстанавливаются из контекста). Тогда $\det M(x,y) = x^2 - y$. Тем самым функция $(x,y) \mapsto M(x,y)$ инъективно отображает вершины графа $\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)$ в вершины графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$. Покажем, что это отображение — гомоморфизм графов (сохраняет смежность вершин). Действительно, пусть (x_1,y_1) и (x_2,y_2) — смежные вершины в $\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)$, т. е.

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}\det\big(M(x_1,y_1)+M(x_2,y_2)\big) = 2^{n-2}\cdot\det\begin{pmatrix} x_1+x_2 & 2 \\ y_1+y_2 & x_1+x_2\end{pmatrix} &= \\ = 2^{n-2}\cdot\big((x_1+x_2)^2 - 2(y_1+y_2)\big) &= 0,\end{aligned}$$

а значит, $M(x_1,y_1)$ и $M(x_2,y_2)$ смежны в $\Gamma_n(\mathbb{F})$. $\square$

Предложение 5.5. *Вершины графа $N_{x^2-y}(\mathbb{F})$ (см. определение 4.3) образуют независимое множество.*

Доказательство. Пусть две вершины графа $N_{x^2-y}(\mathbb{F})$ с координатами (x_1,y_1) и (x_2,y_2) связаны. Тогда

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{4} = \frac{y_1+y_2}{2} \Longrightarrow (x_1-x_2)^2 = 0 \quad (\text{так как } x_1^2 = y_1,\ x_2^2 = y_2).$$

Но это возможно только тогда, когда $x_1 = x_2$, что означает совпадение исходных вершин. $\square$

Следствие 5.6. *Если $\chi\big(T_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)\big)$ бесконечно, то $\chi\big(\Gamma_n(\mathbb{F})\big)$ также бесконечно для любого $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что если $\chi\big(\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)\big)$ конечно, то

$$\chi\big(\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)\big) \leqslant \chi\big(T_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)\big) \leqslant \chi\big(\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)\big) + 1.$$

Действительно, если дана правильная раскраска графа $\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)$, то, покрасив все вершины графа $N_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)$ в дополнительный цвет, мы получим правильную раскраску тотального графа $T_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)$. Тогда если $\chi\big(T_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)\big)$ бесконечно, то таково и $\chi\big(\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)\big)$, а значит, по предложению 5.4 $\chi\big(\Gamma_n(\mathbb{F})\big)$ бесконечно. $\square$

Обозначим через G_1 граф $T_{x^2-y}(\mathbb{R}^2)$ и через P стандартную параболу $\{(x,y) \mid x^2 = y\} \subset \mathbb{R}^2$.

Утверждение 5.7. *Для графа G_1 выполняются следующие свойства.*

1. $\Delta(G_1) = \delta(G_1) = \infty$.
2. *G_1 не содержит в качестве подграфа цикла C_4 из четырёх вершин.*
3. $\omega(G_1) = 3$.
4. *Если абсциссы вершин $u, v \in V(G_1)$ различны, то u и v смежны или имеют общего соседа в G_1 (т. е. $d(u,v) \leqslant 2$).*
5. *G_1 связен и* $\operatorname{diam}(G_1) = 3$.
6. *Каждое конечное дерево T является подграфом G_1.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Соседями произвольной вершины $a = (a_x, a_y) \in V(G_1)$ являются все точки параболы (за исключением самой точки a, если $a \in P$), гомотетичной P относительно точки a с коэффициентом 2. Будем обозначать её через P_a (её вершина расположена в точке $-a$, и её уравнение таково: $(x + a_x)^2/2 = y + a_y$).

Докажем утверждение 2. Предположим противное: пусть цикл C_4 содержится в графе G_1 и

$$V(C_4) = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, \quad E(C_4) = \big\{\{c_1, c_2\}, \{c_2, c_3\}, \{c_3, c_4\}, \{c_4, c_1\}\big\}.$$

Согласно пункту 1 множествами соседей точек c_1 и c_3 являются параболы P_{c_1} и P_{c_3}, гомотетичные P с коэффициентом 2, причём эти параболы должны пересекаться в точках c_2 и c_4, поскольку эти вершины соединены с c_1 и c_3. Но из указанного в пункте 1 вида уравнений, задающих P_{c_1} и P_{c_3}, видно, что эти параболы пересекаются хотя бы в двух различных точках только тогда, когда совпадают. А значит, совпадают и точки c_1 и c_3, что приводит к противоречию.

Докажем утверждение 3. Ясно, что $\omega(G_1) < 4$ по пункту 2, так как K_4 содержит C_4 в качестве подграфа. Однако есть бесконечно много клик из трёх элементов: для любых двух смежных вершин $a, b \in V(G_1)$ с разными абсциссами рассмотрим точку c — пересечение парабол P_a и P_b (из уравнения в пункте 1 ясно, что точка c существует и единственна). Тогда, если $c \notin P$, точки a, b, c будут образовывать клику. Например, подойдёт множество $\{(0,1), (2,1), (-1,-0{,}5)\}$.

Докажем утверждение 4. Как уже было отмечено, для произвольных вершин $u = (u_x, u_y)$, $v = (v_x, v_y)$ с $u_x \neq v_x$ параболы P_u и P_v пересекаются (быть может, в точке u или v). Это означает, что эти вершины смежны или у них имеется общий сосед.

Докажем утверждение 5. Рассмотрим $u, v \in V(G_1)$, не соединённые ребром. Согласно пункту 4 если их абсциссы различны, то они имеют общего соседа, т. е. $d(u, v) = 2$. Если же их абсциссы совпали, то $P_u \cap P_v = \varnothing$, что означает $d(u, v) > 2$. Тем не менее всегда можно выбрать такую точку $w \in P_u$, что её абсцисса будет отличаться от абсциссы v. По пункту 4 v и w имеют общего соседа, поэтому $d(u, v) = 3$.

Докажем утверждение 6. Аналогично пункту 6 утверждения 5.2 достаточно показать, что если произвольный конечный граф H является подграфом G_1 и $h \in V(H)$, то к вершине h можно добавить висячую вершину так, чтобы полученный граф H' остался подграфом G_1. Действительно, количество общих точек у P_h и множества $V(H) \cup \{P_a \mid a \in V(H - h)\}$ конечно. Следовательно, на P_h найдётся точка, не являющаяся вершиной H и не смежная в G_1 ни с одной из вершин H, кроме h, что и требовалось. $\square$

Гипотеза 5.8. Хроматическое число $\chi(G_1)$ конечно.

5.3. Граф гиперболы $xy = 1$

Предложение 5.9. *Если $\chi\big(\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2)\big)$ бесконечно, то $\chi\big(\Gamma_n(\mathbb{F})\big)$ также бесконечно для любого $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M(x, y) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, где $n \geqslant 2$:

$$M(x,y) = \left(\begin{array}{cc|c} x & 1 & \multirow{2}{*}{O} \\ 1 & y & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & E_{n-2} \end{array}\right),$$

здесь O — матрица из одних нулей, а E_{n-2} — единичная матрица (их размеры восстанавливаются из контекста). Тогда $\det M(x, y) = xy - 1$. Таким образом, функция $(x, y) \mapsto M(x, y)$ инъективно отображает вершины графа $\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2)$ в вершины графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$. Покажем, что это отображение — гомоморфизм графов (сохраняет смежность вершин). Действительно, пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — смежные вершины в $\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2)$, т. е.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 1.$$

Но тогда

$$\det\big(M(x_1, y_1) + M(x_2, y_2)\big) = 2^{n-2} \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 2 \\ 2 & y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \\ = 2^{n-2} \cdot \big((x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - 4\big) = 0,$$

а значит, $M(x_1, y_1)$ и $M(x_2, y_2)$ смежны в $\Gamma_n(\mathbb{F})$. $\square$

Предложение 5.10. *Вершины графа $N_{xy-1}(\mathbb{F})$ (см. определение 4.3) образуют независимое множество.*

Доказательство. Рассмотрим две произвольные вершины графа $N_{xy-1}(\mathbb{F})$ с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тогда $x_1y_1 = 1$, $x_2y_2 = 1$. Если эти вершины смежны, то

$$\begin{aligned}
&\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{4} = 1 \Longrightarrow \\
&\quad\Longrightarrow x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = 4 \Longrightarrow x_1y_2 + x_2y_1 = 2 \Longrightarrow \\
&\quad\Longrightarrow x_1x_1x_2y_2 + x_2x_2x_1y_1 = 2x_1x_2 \text{ (получено домножением на } x_1x_2) \Longrightarrow \\
&\quad\Longrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Это означает, что вершины (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают. □

Следствие 5.11. *Если $\chi\big(T_{xy-1}(\mathbb{F}^2)\big)$ бесконечно, то $\chi\big(\Gamma_n(\mathbb{F})\big)$ также бесконечно для любого $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Аналогично доказательству следствия 5.6, если $\chi\big(\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2)\big)$ конечно, получаем оценку

$$\chi\big(\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2)\big) \leqslant \chi\big(T_{xy-1}(\mathbb{F}^2)\big) \leqslant \chi\big(\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2)\big) + 1. \qquad \square$$

Обозначим через G_2 граф $T_{xy-1}(\mathbb{R}^2)$ и через $\mathcal{G}$ стандартную гиперболу $\{(x, y) \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Утверждение 5.12. *Для графа G_2 выполняются следующие свойства.*

1. $\Delta(G_2) = \delta(G_2) = \infty$.
2. *G_2 не содержит подграфа, изоморфного $K_{2,3}$.*
3. $\omega(G_2) = 4$.
4. *Если ординаты и абсциссы вершин $v, w \in V(G_2)$ различны, то u и v смежны или имеют общего соседа в G_2 (т. е. $d(u, v) \leqslant 2$).*
5. *G_2 связен и* $\operatorname{diam}(G_2) = 3$.
6. *Каждое конечное дерево T является подграфом G_2.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Соседями произвольной вершины $a = (a_x, a_y) \in V(G_1)$ являются все точки гиперболы (за исключением самой точки a, если $a \in \mathcal{G}$), гомотетичной $\mathcal{G}$ относительно точки a с коэффициентом 2. Будем обозначать её через $\mathcal{G}_a$ (её центр расположен в точке $-a$, и её уравнение таково: $(x + a_x)(y + a_y) = 4$).

Докажем утверждение 2 от противного. Пусть $K_{2,3} \subset G_2$ и вершины $K_{2,3}$ разбиваются на две доли: $V(K_{2,3}) = \{a_1, a_2\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}$. Согласно пункту 1 множествами соседей точек a_1, a_2 являются две гиперболы $\mathcal{G}_{a_1}$ и $\mathcal{G}_{a_2}$ (быть может, за исключением точек a_1, a_2 соответственно), причём, поскольку вершины b_1, b_2, b_3 являются соседями каждой из точек a_1, a_2, гиперболы $\mathcal{G}_{a_1}$ и $\mathcal{G}_{a_2}$ пересекаются не менее чем в трёх точках. Это означает, что они совпадают (с учётом того, что они задаются уравнением вида $(x + a_x)(y + a_y) = 4$). Но тогда совпадают и точки a_1, a_2, противоречие.

Докажем утверждение 3. Ясно, что $\omega(G_2) < 5$ по пункту 2, так как K_5 содержит $K_{2,3}$ в качестве подграфа. Однако есть бесконечно много клик из четырёх элементов. Например, подойдёт множество

$$\{(-0{,}5, 2{,}5),\ (2{,}5, -0{,}5),\ (1{,}5, 1{,}5),\ (-3{,}5, -3{,}5)\}.$$

Докажем утверждение 4. Согласно уравнению из пункта 1 для произвольных вершин $u = (u_x, u_y)$, $v = (v_x, v_y)$ с $u_x \neq v_x$ и $u_y \neq v_y$ гиперболы $\mathcal{G}_u$ и $\mathcal{G}_v$ пересекаются (быть может, в точке u или v). Это означает, что эти вершины смежны или у них имеется общий сосед.

Докажем утверждение 5. Рассмотрим $u, v \in V(G_2)$, не соединённые ребром. Согласно пункту 4 если их ординаты и абсциссы различны, то они имеют общего соседа, т. е. $d(u,v) = 2$. Если же их ординаты или абсциссы совпали, то $\mathcal{G}_u \cap \mathcal{G}_v = \varnothing$, что означает, что $d(u,v) > 2$. Тем не менее всегда можно выбрать такую точку $w \in \mathcal{G}_u$, что и её ордината, и её абсцисса будут отличаться от ординаты и абсциссы точки v соответственно. По пункту 4 v и w имеют общего соседа, поэтому $d(u,v) = 3$.

Доказательство утверждения 6 аналогично пункту 6 утверждения 5.7. □

Гипотеза 5.13. Хроматическое число $\chi(G_2)$ конечно.

6. Вложенные подграфы тотального графа

Как обсуждалось в разделе 2, основным вопросом мы считаем вопрос 2.12 о конечности хроматического числа графов $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ для многочлена $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. В общем случае данные графы бесконечны, но благодаря следующей теореме Эрдёша—де-Брёйна достаточно исследовать лишь их конечные подграфы.

Теорема 6.1 [7, теорема 1]. *Пусть Γ — произвольный граф, k — натуральное число. Тогда $\chi(\Gamma) \leqslant k$ в том и только том случае, когда для любого конечного подграфа H графа Γ выполнено $\chi(H) \leqslant k$.*

Для конечных графов известна следующая оценка на хроматическое число (см., например, [9, с. 153, теорема 12.2]).

Утверждение 6.2. *Пусть G — конечный граф. Тогда*

$$\chi(G) \leqslant 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H),$$

где максимум берётся по всем подграфам H графа G.

Пусть есть бесконечный граф Γ. Из утверждения 6.2 и теоремы 6.1 следует, что если множество $\{\delta(H) \mid H$ — конечный подграф $\Gamma\}$ ограничено сверху, то $\chi(\Gamma) < \infty$. Таким образом, если $\chi(\Gamma) = \infty$, то для каждого натурального числа s найдётся конечный подграф $H = H(s)$ графа Γ, степень каждой вершины которого не меньше s.

Определение 6.3. Пусть Γ — произвольный граф, s — натуральное число. Назовём *s-конструкцией* для графа Γ такой его конечный подграф H, что $\delta(H) \geqslant s$.

В действительности, как следует из предложения ниже, для установления факта конечности или бесконечности хроматического числа графа достаточно исследовать все его s-конструкции при достаточно большом s.

Предложение 6.4. *Пусть Γ — произвольный граф, s — натуральное число. Тогда $\chi(\Gamma) < \infty$, если и только если найдётся такое натуральное $k = k(s, \Gamma)$, что для любой s-конструкции H графа Γ выполнено $\chi(H) \leqslant k$.*

Доказательство. Необходимость очевидна: можно рассмотреть $k = \chi(\Gamma)$.

Докажем достаточность. Покажем, что $\chi(\Gamma) \leqslant k + s$. Для этого рассмотрим любой конечный подграф $H \subseteq \Gamma$, покажем, что $\chi(H) \leqslant k + s$, и применим теорему 6.1.

Рассмотрим s-конструкцию A для графа H, размер которой максимален (возможно, равен 0). По условию $\chi(A) \leqslant k$. Рассмотрим подграф B графа H, порождённый множеством вершин $V(H) \setminus V(A)$. Заметим, что никакой подграф графа B не может быть s-конструкцией для H, иначе, объединив его с A, мы получили бы s-конструкцию для H большего размера. Следовательно, $\delta(B') < s$ для любого подграфа B' графа B. Значит, по утверждению 6.2 $\chi(B) \leqslant s$.

Таким образом, $\chi(H) \leqslant \chi(A) + \chi(B) \leqslant k + s$, что и требовалось показать. □

Описание всех s-конструкций тотального или регулярного графа многочлена представляется весьма трудной задачей, поэтому мы зададимся лишь следующим вопросом.

Вопрос 6.5. При каких условиях на множество $A \subseteq \mathbb{F}^n$ для каждого натурального s существует s-конструкция для графа $T_A(\mathbb{F}^n)$ (соответственно $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$)?

Ясно, что приведённый вопрос является содержательным только для бесконечного поля $\mathbb{F}$ (иначе соответствующий граф кончен). Мы ответим на него для тотального графа. Оказывается, что в этом случае необходимым и достаточным условием является бесконечность множества A.

Определение 6.6. Пусть n — натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$. Скажем, что $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Назовём A центрально-симметричным, если $A = -A$.

Теорема 6.7. *Пусть n — натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$ — центрально-симметричное бесконечное множество. Тогда для графа $T_A(\mathbb{F}^n)$ существует s-конструкция при любом натуральном s.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по s. При $s = 1$ оно верно, так как в графе $T_A(\mathbb{F}^n)$ есть рёбра.

Индукционный переход. Пусть для натурального s нашёлся подграф H графа $T_A(\mathbb{F}^n)$, такой что $\delta(H) \geqslant s$. Обозначим его вершины через $h_1, h_2, \ldots, h_m \in \mathbb{F}^n$.

Выберем $u, v \in A$, такие что каждый из векторов $2u$, $2v$, $2(v - u)$, $2(u + v)$ не равен никакому из векторов множества

$$D = \big\{\varepsilon_1 h_i + \varepsilon_2 h_j \mid i, j = 1, 2, \ldots, m,\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}\big\}.$$

А именно, сначала выберем $u \in A$, такой что $2u \notin D$ (это возможно, поскольку $|A| = \infty$). Затем, вновь пользуясь бесконечностью множества A, выберем $v \in A$, такой что

$$2v \notin D \cup (D + 2u) \cup (D - 2u).$$

Теперь нетрудно видеть, что $2u, 2v, 2(v-u), 2(u+v) \notin D$.

Пусть $\tilde{H}$ — подграф $T_A(\mathbb{F}^n)$, порождённый следующим множеством вершин:

$$\begin{aligned}
&h_1^{--} = h_1 - u - v, && h_2^{--} = h_2 - u - v, \ldots, && h_m^{--} = h_m - u - v,\\
&h_1^{+-} = -h_1 + u - v, && h_2^{+-} = -h_2 + u - v, \ldots, && h_m^{+-} = -h_m + u - v,\\
&h_1^{-+} = -h_1 - u + v, && h_2^{-+} = -h_2 - u + v, \ldots, && h_m^{-+} = -h_m - u + v,\\
&h_1^{++} = h_1 + u + v, && h_2^{++} = h_2 + u + v, \ldots, && h_m^{++} = h_m + u + v.
\end{aligned}$$

По выбору u и v указанные $4m$ точек различны. Действительно, для любых $i, j = 1, 2, \ldots, m$

— $h_i^{--} \neq h_j^{+-}$, так как $2u \neq h_i + h_j$;
— $h_i^{--} \neq h_j^{-+}$, так как $2v \neq h_i + h_j$;
— $h_i^{--} \neq h_j^{++}$, так как $2(u+v) \neq h_i - h_j$;
— $h_i^{+-} \neq h_j^{-+}$, так как $2(v-u) \neq h_j - h_i$;
— $h_i^{+-} \neq h_j^{++}$, так как $2v \neq -h_i - h_j$;
— $h_i^{-+} \neq h_j^{++}$, так как $2u \neq -h_i - h_j$.

Покажем, что $\delta(\tilde{H}) \geqslant s+2$. Действительно, пусть h_i смежна с h_{j_1}, h_{j_2}, $\ldots, h_{j_s}$ в H (считаем, что индексы $i, j_1, j_2, \ldots, j_s$ различны). Тогда нетрудно видеть, что (напомним, что A — центрально-симметрично, в частности, $-u, -v \in A$)

— h_i^{--} смежна в $\tilde{H}$ с $h_{j_1}^{++}$, $h_{j_2}^{++}, \ldots, h_{j_s}^{++}$, а также с h_i^{+-}, h_i^{-+};
— h_i^{+-} смежна в $\tilde{H}$ с $h_{j_1}^{-+}$, $h_{j_2}^{-+}, \ldots, h_{j_s}^{-+}$, а также с h_i^{++}, h_i^{--};
— h_i^{-+} смежна в $\tilde{H}$ с $h_{j_1}^{+-}$, $h_{j_2}^{+-}, \ldots, h_{j_s}^{+-}$, а также с h_i^{++}, h_i^{--};
— h_i^{++} смежна в $\tilde{H}$ с $h_{j_1}^{--}$, $h_{j_2}^{--}, \ldots, h_{j_s}^{--}$, а также с h_i^{+-}, h_i^{-+}.

Значит, $\delta(\tilde{H}) \geqslant s+2$, что завершает доказательство индукционного перехода. □

Чтобы избавиться от условия центральной симметричности множества A, нам потребуется следующая общая лемма.

Лемма 6.8. *Пусть k, s — натуральные числа и G — конечный граф, причём $\delta(G) \geqslant 2ks$. Предположим, что рёбра G произвольным образом раскрашены в k цветов (каждое ровно в один цвет). Тогда найдётся подграф H графа G, такой что все рёбра H одноцветны и $\delta(H) \geqslant s$.*

Доказательство. Пусть порядок G равен n. Тогда $|E(G)| \geqslant 2ksn/2 = ksn$. Рассмотрим тот цвет, рёбер которого больше всего, и удалим рёбра остальных цветов. Обозначим через G' полученный подграф графа G (порядок G' тоже равен n). Отметим, что $|V(G')| = n$, $|E(G')| \geqslant sn$.

Рассмотрим непустой подграф H графа G' наименьшего порядка, такой что $|E(H)| \geqslant |V(H)| \cdot s$. Докажем, что H — искомый подграф графа G.

Предположим противное: пусть $\delta(H) < s$. Пусть в H есть $m > 0$ вершин, степень каждой из которых меньше s. Удалив из H эти m вершин вместе со смежными им рёбрами, получим граф H'. Ясно, что число удалённых рёбер не превосходит $m(s-1) < ms$. Заметим, что $|V(H')| = |V(H)| - m$ и

$$|E(H')| > |E(H)| - ms \geqslant |V(H)| \cdot s - ms = (|V(H)| - m) \cdot s = |V(H')| \cdot s \geqslant 0.$$

Значит, H' — непустой подграф G' (так как $E(H') > 0$), более того, $E(H') \geqslant |V(H')| \cdot s$. Это противоречит минимальности порядка H. Следовательно, H — искомый подграф. $\square$

Следующее утверждение является следствием доказанной леммы.

Утверждение 6.9. *Пусть n — натуральное число, $A, B \subseteq \mathbb{F}^n$, и пусть для графа $T_{A\cup B}(\mathbb{F}^n)$ существует s-конструкция при любом натуральном s. Тогда верно хотя бы одно из следующих условий:*

— *для графа $T_A(\mathbb{F}^n)$ существует s-конструкция при любом натуральном s;*
— *для графа $T_B(\mathbb{F}^n)$ существует s-конструкция при любом натуральном s.*

Доказательство. Раскрасим каждое ребро $\{u, v\}$ графа $T_{A\cup B}(\mathbb{F}^n)$ в один из двух цветов: в цвет 1, если $(u+v)/2 \in A$, и в цвет 2, если $(u+v)/2 \in B \setminus A$.

Рассмотрим произвольное натуральное s. По условию найдётся конечный подграф $G = G(s)$ графа $T_{A\cup B}(\mathbb{F}^n)$, такой что $\delta(G) \geqslant 4s$. Применяя лемму 6.8, получаем существование s-конструкции для графа $T_A(\mathbb{F}^n)$ или для графа $T_{B\setminus A}(\mathbb{F}^n)$ (а тогда и для $T_B(\mathbb{F}^n)$). Остаётся заметить, что для $T_A(\mathbb{F}^n)$ или для $T_B(\mathbb{F}^n)$ существуют s-конструкции для бесконечного количества натуральных чисел s, а следовательно, для любого натурального s. $\square$

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основной результат секции — критерий того, что для тотального графа существует s-конструкция при любом натуральном s.

Теорема 6.10. *Пусть n — натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$. Тогда для графа $T_A(\mathbb{F}^n)$ существует s-конструкция при любом натуральном s в том и только том случае, когда множество A бесконечно.*

Доказательство. Необходимость. От противного: предположим, что множество A конечно. Тогда для любого конечного подграфа H графа $T_A(\mathbb{F}^n)$ выполнено $\delta(H) \leqslant \Delta(H) \leqslant |A|$. Таким образом, для графа $T_A(\mathbb{F}^n)$ не существует s-конструкций при $s > |A|$.

Достаточность. Заметим, что множество $(-A) \cup A$ центрально-симметрично и бесконечно. Следовательно, по теореме 6.7 при любом натуральном s для графа $T_{(-A)\cup A}(\mathbb{F}^n)$ существует s-конструкция. Значит, по утверждению 6.9 для графа $T_A(\mathbb{F}^n)$ существует s-конструкция при любом натуральном s или для графа $T_{-A}(\mathbb{F}^n)$ существует s-конструкция при любом натуральном s. Остаётся заметить, что если подграф, порождённый точками $h_1, h_2, \ldots, h_m \in \mathbb{F}^n$, — s-конструкция для $T_{-A}(\mathbb{F}^n)$, то подграф, порождённый точками $-h_1, -h_2, \ldots, -h_m \in \mathbb{F}^n$, — s-конструкция для $T_A(\mathbb{F}^n)$. $\square$

Доказанная теорема означает, что во всех нетривиальных случаях попытки доказать конечность хроматического числа тотального графа многочлена $T_p(\mathbb{F}^n)$, используя утверждение 6.2, терпят неудачу. Согласно предложению 6.4 необходимо использовать более сложную технику и строить s-конструкции с бóльшим хроматическим числом или опровергать их существование. Согласно части 5 при попытках это сделать даже в самых простых случаях возникают определённые трудности.

Теорема 6.10 вызывает некоторое удивление: из неё следует, например, что тотальный граф $T_\gamma(\mathbb{R}^2)$ любой дуги γ (сколь угодно малой ненулевой длины) кусочно-гладкой кривой в $\mathbb{R}^2$ обладает s-конструкцией для любого натурального s. В частности, это верно для дуги окружности, параболы и гиперболы, что само по себе не является очевидным.

Результат, аналогичный теореме 6.10, вероятно, во многих случаях верен и для регулярного графа $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$: приведённое доказательство сталкивается с проблемой, что некоторые вершины построенной благодаря теореме 6.7 s-конструкции могут принадлежать множеству A, однако интуитивно ясно, что для её устранения можно изменить выбор векторов u и v. Тем не менее авторы не смогли формализовать это и сформулировать критерий, которому должно удовлетворять A (ясно, что бесконечности множества A теперь недостаточно).

Авторы выражают глубокую благодарность своим научным руководителям профессору А. Э. Гутерману и профессору А. В. Михалёву за постоянное внимание к тексту и ценные обсуждения. Мы также признательны М. Г. Шелакову за обсуждение части 2 и вклад в итоговое определение 2.3, А. Н. Трушину и Н. Ю. Медведю за обсуждение теоремы 4.8, В. В. Новикову за формулировку и доказательство леммы 6.8 и М. А. Хрыстику за интерес к тексту и содержательные вопросы. Авторы отдельно благодарят Н. В. Остроухову за помощь с переводом текста.

Исследование второго автора выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

Литература

[1] Фултон У. Теория пересечений. — М.: Мир, 1989.

[2] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. — М.: МЦНМО, 2007.

[3] Akbari S., Aryapoor M., Jamaali M. Chromatic number and clique number of subgraphs of regular graph of matrix algebras // Linear Algebra Its Appl. — 2012. — Vol. 436. — P. 2419—2424.

[4] Akbari S., Heydari F. The regular graph of a noncommutative ring // Bull. Austr. Math. Soc. — 2014. — Vol. 89, no. 1. — P. 132—140.

[5] Akbari S., Jamaali M., Seyed Fakhari S. A. The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite // Linear Algebra Its Appl. — 2009. — Vol. 431. — P. 1715—1718.

[6] Anderson D. F., Badawi A. The total graph of a commutative ring // J. Algebra. — 2008. — Vol. 320. — P. 2706—2719.

[7] Bruijn N. G., Erdős P. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Indag. Math. — 1951. — Vol. 13. — P. 371—373.

[8] Cameron P. Research problems from the BCC22 // Discrete Math. — 2011. — Vol. 311. — P. 1074—1083.

[9] Harary F. Graph theory. — Addison-Wesley, 1969.

[10] Tomon I. On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras // Linear Algebra Its Appl. — 2015. — Vol. 475. — P. 154—162.