

О множествах Жюлиа функций, имеющих неподвижные параболические точки

В. С. СЕКОВАНОВ

Костромской государственный университет
e-mail: sekovanovvs@yandex.ru

УДК 517.988.5

Ключевые слова: неподвижная параболическая точка, множество Жюлиа, заполняющее множество Жюлиа, орбита точки, лепесток Ло, граница притяжения.

Аннотация

В статье рассматриваются функции, имеющие неподвижные параболические точки, и исследуются их множества Жюлиа, включая выявление осевой симметрии. Приведены семейства функций, имеющих в качестве множеств Жюлиа прямые линии и лучи. Описаны алгоритмы построения множеств Жюлиа некоторых функций и ряд результатов, полученных аналитическими исследованиями, визуализированных с помощью компьютерных программ. Проведено сравнение голоморфной динамики семейства функций, имеющих параболическую неподвижную точку, с голоморфной динамикой семейства функций, имеющих притягивающую неподвижную точку.

Abstract

V. S. Sekovanov, On Julia set of the functions which have parabolic fixed points, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2021), no. 4, pp. 163–176.

In the present article, functions with parabolic fixed points are examined and Julia sets have been investigated, including rotational symmetry revealing. Collections of functions which have lines and rays as Julia sets, have been adduced. Construction algorithms for Julia sets of some functions and a number of results obtained by analytical investigations which are visualised by means of computer programs, have been described. Comparison of holomorphic dynamics of a collection of functions which have parabolic fixed point, with holomorphic dynamics of a collection of functions which have attracting fixed point, has been conducted.

Нелинейные дискретные динамические системы и тесно связанная с ними фрактальная геометрия в настоящее время изучаются интенсивно, о чём свидетельствуют работы [1–13]. Интерес к данной тематике связан с тем, что стали появляться фрактальные модели различных объектов и процессов реального мира. Особый интерес проявляется в настоящее время к нелинейным дискретным динамическим системам, порождённым функциями комплексной переменной, т. е. к нелинейной голоморфной динамике.

Важными компонентами нелинейной голоморфной динамики являются множества Жюлиа и связанные с ними множества Мандельброта. Исследование

Фундаментальная и прикладная математика, 2021, том 23, № 4, с. 163–176.

© 2021 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

дискретных динамических систем на комплексной плоскости сводится часто к исследованию структуры множеств Жюлиа.

Следует отметить, что интерес к множествам Жюлиа в настоящее время проявляется и с дидактической точки зрения, поскольку визуализация данных множеств без тесной интеграции математических методов и информационных и коммуникационных технологий практически невозможна, что вызывает у студентов особый интерес к данной теме.

Отметим также, что множества Жюлиа представляют интерес и с эстетической точки зрения, поскольку они являются одним из самых красивых математических объектов (см. [5]).

Множества Жюлиа появились в начале прошлого века в результате итерирования функций комплексной переменной. Исследования показали, что в большинстве случаев множества Жюлиа являются фракталами. В настоящее время интенсивно исследуются фрактальные множества на комплексной плоскости. Это связано с их использованием при создании математических моделей в физике, экономике и других науках.

Пусть дана функция $f(z)$ комплексной переменной. Точка z^0 называется неподвижной, если $f(z^0) = z^0$. Если же $f^{(n)}(z^0) = z^0$ ($n > 1$), то точку z^0 мы назовём периодической точкой. Наименьшее n , при котором $f^{(n)}(z^0) = z^0$, называется периодом z^0 . Если $|\lambda| > 1$ ($|\lambda| = 1$, $|\lambda| < 1$), где $\lambda = (f^{(n)}(z^0))'$, то точка z^0 называется отталкивающей (соответственно нейтральной или параболической, притягивающей).

Пусть z_0 — притягивающая неподвижная точка функции f . Множество $A(z_0) = \{z \in \mathbb{C}: f^{(n)}(z) \rightarrow z_0, n \rightarrow \infty\}$ будем называть бассейном притяжения точки z_0 . Множество Жюлиа функции f есть граница множества точек z , бассейна притяжения [4].

Для полиномов будем рассматривать заполняющие множества Жюлиа, т. е. множества, которые содержат те и только те точки, орбиты которых ограничены. Ниже мы будем закрашивать заполняющие множества Жюлиа в чёрный цвет. Границей заполняющего множества Жюлиа будет множество Жюлиа (как правило, с дробной фрактальной размерностью).

В дальнейшем заполняющее множество Жюлиа для функции f будем обозначать $\gamma(f)$. Отметим, что если модуль производной в неподвижной точке функции $f_1(z)$ равен единице, то не ясно, сходятся ли орбиты точек, расположенных вблизи от неподвижной точки, к данной точке. Например, функция $f_1(z) = z^2 - 0,75$ имеет две неподвижные точки $z_1 = -0,5$ и $z_2 = 1,5$, причём $|f_1'(z_1)| = 1$, $|f_1'(z_2)| = 3$. Однако, как показывает компьютерный эксперимент, последовательность орбиты нуля сходится к точке $z_1 = -0,5$. Нетрудно заметить, что в любой окрестности точки $z_1 = -0,5$ можно найти точку с мнимой частью, не равной нулю, орбита которой не сходится к точке z_1 . Точка z_2 будет отталкивающей, и сходимость орбит близлежащих точек не будет наблюдаться. Согласно результатам компьютерного эксперимента сходимость орбиты нуля к точке $z_1 = -0,5$ медленная. Например, $f_1^{(9999)}(0) \approx -0,507$,

$f_1^{(10000)}(0) \approx -0,492$. Множество Жюлиа для данной функции имеет вид, изображённый на рис. 1. Напомним, что началом координат является левый верхний угол экрана компьютера.

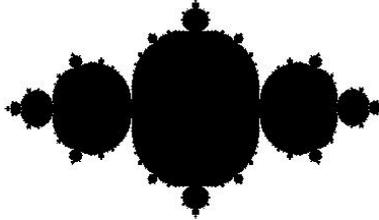


Рис. 1. Множество Жюлиа функции $f_1(z) = z^2 - 0,75$

Рассмотрим функцию $f_2(z) = z^3 + z$ и исследуем дискретную динамическую систему, порождённую данной функцией. Замечаем, что она имеет нейтральную (параболическую) неподвижную точку $z_0 = 0$.

Покажем, что заполняющее множество Жюлиа данной функции симметрично относительно вещественной и мнимой оси. Действительно, пусть $z_1 = x + iy$, $z_2 = x - iy$, $z_3 = -x + iy$, $z_4 = -x - iy$. Покажем, что модули орбит данных точек одновременно ограничены (или не ограничены). Действительно, с одной стороны, $f_2(z_1) = x^3 - 3xy^2 + x + i(3x^2y - y^3 + y) = x_1 + iy_1$, с другой стороны, $f_2(z_2) = x^3 - 3xy^2 + x - i(3x^2y - y^3 + y) = x_1 - iy_1$. Далее имеем, что $f_2^{(2)}(z_1) = x_2 + iy_2$, $f_2^{(2)}(z_2) = x_2 - iy_2$. Продолжая наши рассуждения, получаем, что $f_2^{(n)}(z_1) = x_n + iy_n$, $f_2^{(n)}(z_2) = x_n - iy_n$ для каждого натурального n . Следовательно, $|f_2^{(n)}(z_1)| = |f_2^{(n)}(z_2)|$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Рассуждая аналогично, получаем, что для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ $|f_2^{(n)}(z_1)| = |f_2^{(n)}(z_3)|$, $|f_2^{(n)}(z_1)| = |f_2^{(n)}(z_4)|$. Таким образом, точки $z_1 = x + iy$, $z_2 = x - iy$, $z_3 = -x + iy$, $z_4 = -x - iy$ одновременно либо принадлежат заполняющему множеству Жюлиа, либо не принадлежат, откуда следует, что заполняющее множество Жюлиа будет симметрично как относительно вещественной оси, так и относительно мнимой оси. Заметим, что и множество Жюлиа как граница заполняющего множества Жюлиа также будет симметрично относительно осей координат. Компьютерный эксперимент иллюстрирует наше исследование (рис. 2).

Рассмотрим теперь функцию $f_3(z) = z^4 + z$. Покажем, что заполняющее множество Жюлиа данной функции симметрично относительно вещественной оси, но не является симметричным относительно мнимой оси.

Рассмотрим симметричные относительно мнимой оси точки $u = 1$ и $v = -1$. Вычислим орбиты данных точек. Имеем $f_3(1) = 2$, $f_3^{(2)}(1) = 2^4 + 2$, $f_3^{(3)}(1) = 18^4 + 18, \dots$. Нетрудно заметить, что орбита точки $u = 1$ стремится

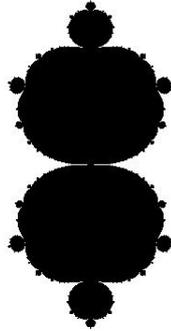


Рис. 2. Множество Жюлиа для функции $f_2(z) = z^3 + z$.

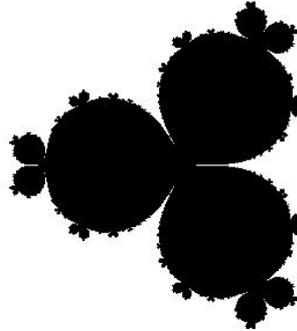


Рис. 3. Множество Жюлиа для функции $f_3(z) = z^4 + z$.

к бесконечности и, следовательно, данная точка не принадлежит заполняющему множеству Жюлиа. Исследуем орбиту точки $v = -1$. Имеем $f_3(-1) = 0$, $f_3^{(2)}(-1) = 0, \dots$. Поскольку орбита точки $v = -1$ ограничена, то она принадлежит множеству Жюлиа. Тот факт, что $|f_3^{(n)}(z_1)| = |f_3^{(n)}(z_2)|$ для каждого натурального n , проверяется по аналогии с предыдущим случаем.

Таким образом, заполняющее множество Жюлиа функции $f_3(z) = z^4 + z$ симметрично относительно вещественной оси и несимметрично относительно мнимой оси (рис. 3).

Теорема 1. Пусть $f_p(z) = z^p + z$, $p \geq 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- если $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$, то множество Жюлиа $\gamma(f_p)$ для функции $f_p(z) = z^p + z$ симметрично относительно вещественной оси;
- если $p \geq 2$ — чётное число, то множество Жюлиа для функции $f_p(z) = z^p + z$ несимметрично относительно мнимой оси;
- если $p \geq 3$ — нечётное число, то множество Жюлиа для функции $f_p(z) = z^p + z$ симметрично относительно мнимой оси.

Доказательство. Докажем утверждение а). Мы убедимся, что

$$f_p^{(n)}(\bar{z}) = \overline{f_p^{(n)}(z)}$$

для каждого натурального числа n . Применим метод математической индукции по n , где n — номер итерации. При $n = 1$ наше утверждение справедливо. Действительно,

$$f_p^{(1)}(\bar{z}) = \bar{z}^p + \bar{z} = \overline{z^p} + \bar{z} = \overline{z^p + z} = \overline{f_p^{(1)}(z)}.$$

Пусть теперь наше утверждение справедливо при $n = k$, т. е.

$$f_p^{(k)}(\bar{z}) = \overline{f_p^{(k)}(z)}.$$

Покажем тогда, что

$$f_p^{(k+1)}(\bar{z}) = \overline{f_p^{(k+1)}(z)}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f_p^{(k+1)}(\bar{z}) &= f_p(f_p^{(k)}(\bar{z})) = f_p(\overline{f_p^{(k)}(z)}) = \overline{(f_p^{(k)}(z))^P + f_p^{(k)}(z)} = \\ &= \overline{(f_p^{(k)}(z))^P} + \overline{f_p^{(k)}(z)} = \overline{(f_p^{(k)}(z))^P} + \overline{f_p^{(k)}(z)} = \overline{f_p^{(k+1)}(z)}. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого натурального числа n имеем равенство

$$f_p^{(n)}(\bar{z}) = \overline{f_p^{(n)}(z)}. \quad (*)$$

Предположим теперь, что точка z принадлежит множеству Жюлиа $\gamma(f_p)$. Тогда орбита точки z — последовательность $\{f_p^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ — ограничена. Будет ограничена и последовательность $\{\overline{f_p^{(n)}(z)}\}_{n=1}^{\infty}$. Ввиду равенства (*) орбита точки \bar{z} также ограничена. Следовательно, точка \bar{z} также принадлежит множеству Жюлиа $\gamma(f_p)$, и утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть $p = 2k$, $k \geq 1$. Найдём две точки, симметричные относительно мнимой оси, одна из которых принадлежит $\gamma(f_p)$, а другая не принадлежит. Пусть $u = -1$. Заметим, что $u \in \gamma(f_p)$, поскольку орбита точки u ограничена.

Действительно, $f_p(u) = 0$, $f_p^{(2)}(u) = 0, \dots$, $f_p^{(n)}(u) = 0, \dots$. Однако орбита точки $v = 1$ не ограничена, поскольку орбита точки v стремится к бесконечности. Действительно, $f_p(v) = 2$, $f_p^{(2)}(v) = 2^p + 2, \dots$, и утверждение б) доказано, поскольку точка $u = -1$ принадлежит множеству $\gamma(f_p)$, а точка $v = 1$ данному множеству не принадлежит.

Докажем утверждение в). Пусть $z = x + iy$, $p = 2k + 1$, $k \geq 1$. Введём обозначение $\tilde{z} = -x + iy$. Заметив, что модули комплексных чисел $z = x + iy$ и $\tilde{z} = -x + iy$ равны, покажем, что $z \in \gamma(f_p)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{z} \in \gamma(f_p)$. Покажем сначала, что справедливо равенство

$$\{f_p^{(n)}(\tilde{z})\}_{n=1}^{\infty} = \widetilde{\{f_p^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty}}.$$

Итак, пусть p нечётно. Применим вновь индукцию по n , где n — номер итерации. Положим $z = \rho e^{i\theta}$. Тогда $\tilde{z} = \rho e^{i(\pi-\theta)}$, и мы получим

$$f_p^{(1)}(z) = (\rho e^{i\theta})^p + \rho e^{i\theta} = \rho^p \cos(p\theta) + \rho \cos(\theta) + i(\rho^p \sin(p\theta) + \rho \sin(\theta)).$$

Далее будем иметь

$$\begin{aligned} f_p^{(1)}(\tilde{z}) &= (\rho e^{i(\pi-\theta)})^p + \rho e^{i(\pi-\theta)} = \\ &= \rho^p \cos(\pi p - p\theta) + \rho \cos(\pi - \theta) + i(\rho^p \sin(\pi p - p\theta) + \rho \sin(\pi - \theta)) = \\ &= -(\rho^p \cos(p\theta) + \rho \cos(\theta)) + i(\rho^p \sin(p\theta) + \rho \sin(\theta)), \end{aligned}$$

поскольку p — число нечётное. Следовательно,

$$\widetilde{f_p^{(1)}}(z) = f_p^{(1)}(\tilde{z}).$$

Таким образом, при $n = 1$ равенство справедливо. Предположим, что равенство справедливо при $n = k$, т. е.

$$\{f_p^{(k)}(\tilde{z})\}_{n=1}^{\infty} = \{\widetilde{f_p^{(k)}}(z)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Покажем тогда, что

$$\{f_p^{(k+1)}(\tilde{z})\}_{n=1}^{\infty} = \{\widetilde{f_p^{(k+1)}}(z)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Положим $f_p^{(k)}(z) = y$, где $y = y_1 + iy_2$. Далее, используя бином Ньютона и определение $k + 1$ итерации функции $f(z) = z^p + c$, получим равенство (3):

$$\begin{aligned} f_p^{(k+1)}(z) &= f_p(f_p^{(k)}(z)) = (y_1 + iy_2)^p + y_1 + iy_2 = C_p^0 y_1^p y_2^0 i^0 + \\ &+ C_p^1 y_1^{p-1} y_2^1 i^1 + C_p^2 y_1^{p-2} y_2^2 i^2 + C_p^3 y_1^{p-3} y_2^3 i^3 + \dots + C_p^{p-3} y_1^3 y_2^{p-3} i^{p-3} + \\ &+ C_p^{p-2} y_1^2 y_2^{p-2} i^{p-2} + C_p^{p-1} y_1 y_2^{p-1} i^{p-1} + C_p^p y_1^0 y_2^p i^p + y_1 + iy_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку $f_p^{(k)}(\tilde{z}) = \widetilde{f_p^{(k)}}(z)$, будем иметь

$$\begin{aligned} f_p^{(k+1)}(\tilde{z}) &= f_p(f_p^{(k)}(\tilde{z})) = (-y_1 + iy_2)^p - y_1 + iy_2 = C_p^0 (-y_1)^p y_2^0 i^0 + \\ &+ C_p^1 (-y_1)^{p-1} y_2^1 i^1 + C_p^2 (-y_1)^{p-2} y_2^2 i^2 + \dots + C_p^{p-3} (-y_1)^3 y_2^{p-3} i^{p-3} + \\ &+ C_p^{p-2} (-y_1)^2 y_2^{p-2} i^{p-2} + C_p^{p-1} (-y_1)^1 y_2^{p-1} i^{p-1} y_1 + C_p^p (-y_1)^0 y_2^p i^p - y_1 + iy_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Замечаем, что на чётных местах в (1) и (2) стоят одночлены, не имеющие в своём составе мнимой единицы i . Занумеруем данные одночлены слева направо. Получим выражения (3):

$$\begin{aligned} a_0 &= C_p^0 y_1^p y_2^0 i^0, \quad b_0 = C_p^0 (-y_1)^p y_2^0 i^0; \quad a_2 = C_p^2 y_1^{p-2} y_2^2 i^2, \quad b_2 = C_p^2 (-y_1)^{p-2} y_2^2 i^2; \dots; \\ a_{p-1} &= C_p^{p-1} y_1 y_2^{p-1} i^{p-1}, \quad b_{p-1} = C_p^{p-1} (-y_1)^1 y_2^{p-1} i^{p-1}; \quad a_{p+1} = iy_2, \quad b_{p+1} = -y_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассматривая (3), замечаем, что одночлены, стоящие на чётных местах, имеют противоположные знаки. Рассуждая аналогично, нетрудно убедиться, что на нечётных местах стоят одинаковые одночлены. Следовательно, мы имеем для каждого натурального числа n

$$\{f_p^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty} = \{\widetilde{f_p^{(n)}}(\tilde{z})\}_{n=1}^{\infty}. \quad (**)$$

Предположим теперь, что точка z принадлежит множеству Жюлиа $\gamma(f_p)$. Тогда орбита точки z — последовательность $\{f_p^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ — ограничена. В силу равенства (**) тогда будут ограничены последовательности $\{\widetilde{f_p^{(n)}}(\tilde{z})\}_{n=1}^{\infty}$ и

$\{f_p^{(n)}(\tilde{z})\}_{n=1}^{\infty}$ Поскольку последовательность $\{f_p^{(n)}(\tilde{z})\}_{n=1}^{\infty}$ — орбита точки \tilde{z} , то данная точка \tilde{z} также принадлежит множеству Жюлиа $\gamma(f_p)$, и утверждение в) доказано. \square

Следует отметить, что существуют заполняющие множества Жюлиа, например функции $f_4(z)$ — кролик Дуади, рис. 4, которые не являются симметричными относительно вещественной и мнимой осей.

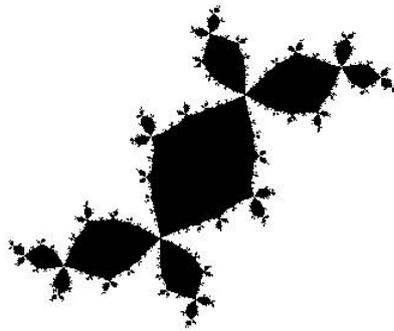


Рис. 4. Множество Жюлиа для функции $f_4(z) = z^2 - 0,1244 + 0,756i$ (кролик Дуади)

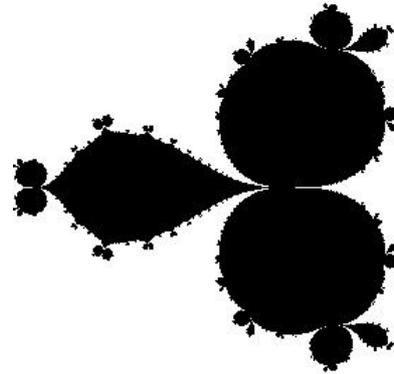


Рис. 5. Множества Жюлиа для функции $f_5(z) = z^4 + z^3 + z$

Рассмотрим функцию $f_5(z) = z^4 + z^3 + z$, которая имеет как притягивающую неподвижную точку, так и параболическую неподвижную точку.

Неподвижными точками для данной функции будут точки $z_1 = 0$ и $z_2 = -1$, причём точка $z_2 = -1$ притягивающая, а точка $z_1 = 0$ нейтральная (параболическая), поскольку $f_5'(z_1) = 1$, $f_5'(z_2) = 0$. Тот факт, что точка $z_2 = -1$ притягивающая, иллюстрируется левой половиной рис. 5 (растянутая чёрная область, где орбиты точек из некоторой окрестности точки z_2 сходятся к ней), а тот факт, что точка $z_1 = 0$ является нейтральной (параболической) точкой иллюстрируется правой частью рис. 5. Области непосредственного притяжения для двух притягивающих направлений напоминают воздушные шары, соединённые вместе в параболической точке и разделённые отталкивающими направлениями, образуя цветок Ло [3, 4].

Опишем блок компьютерной программы построения множеств Жюлиа следующих функций (рис. 1–5):

рис. 1: $f_1(z) = z * z - 0,75;$

рис. 2: $f_2(z) = z * z * z + z;$

рис. 3: $f_3(z) = z * z * z * z + z;$

рис. 4: $f_4(z) = z * z - 0,1244 + 0,756i;$

рис. 5: $f_5(z) = z * z * z * z + z * z * z + z.$

Для каждой функции $f_i(z)$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5$, определяем

```
function fx(z: complex): complex; begin fx := f_i (z); end;
```

Затем во вложенном цикле рассматриваются 100 итераций функции $f_i(z)$. Если сумма квадратов вещественной и мнимой частей сотой итерации функции $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, меньше 4, то точку z мы закрашиваем в чёрный цвет. В противном случае точку z мы пропускаем и рассматриваем следующую точку комплексной плоскости, с которой проводим те же операции, что и с точкой z . Данный процесс продолжается до тех пор, пока мы не рассмотрим все точки комплексной плоскости, которую имитирует монитор компьютера.

```
for i := 1 to width do
  for j := 1 to height do begin
    c := (x_min + i * dx , y_min + j * dy);
    try
      for k := 1 to iter do c := fx(c);
      kef := power(c.re, 2) + power(c.im, 2);
      if(abs(kef) < 4) then
        setpixel(i, j, clblack);
      except
```

Пусть $z \in \bar{\mathbb{C}}$. Рассмотрим семейство функций комплексной переменной $f_\theta(\omega) = \omega - e^{i\theta}/\omega$, где $\theta \in [0; 2\pi]$.

Неподвижной точкой каждой функции будет точка $z_\theta = \infty$, причём $|f'_\theta(z_\theta)| = 1$. Таким образом, точка $z_\theta = \infty$ является нейтральной (параболической) точкой для функции $f_\theta(z)$.

Рассмотрим сначала функцию $f_0(z) = z - 1/z$. Выявим её свойства и покажем, что её множеством Жюлиа будет $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Пусть $z_1 = x + iy$, $z_2 = -x + iy$, $z_3 = x - iy$, $z_4 = -x - iy$. Покажем, что последовательности комплексных чисел $\{f_0^{(n)}(z_1)\}$, $\{f_0^{(n)}(z_2)\}$, $\{f_0^{(n)}(z_3)\}$, $\{f_0^{(n)}(z_4)\}$ одновременно ограничены или не ограничены, что будет вытекать из равенств

$$|f_0^{(n)}(z_1)| = |f_0^{(n)}(z_2)| = |f_0^{(n)}(z_3)| = |f_0^{(n)}(z_4)|, \quad n \in \mathbb{N},$$

выполнение которых мы докажем.

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} f_0(z_1) &= x - \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(y + \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \\ f_0(z_2) &= -x + iy - \frac{1}{-x + iy} = -x + iy - \frac{-x - iy}{x^2 + y^2} = \\ &= -x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(y + \frac{y}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

Из двух последних равенств находим, что $\operatorname{Re} f_0(z_1) = -\operatorname{Re} f_0(z_2)$ и $\operatorname{Im} f(z_1) = \operatorname{Im} f(z_2)$. Следовательно, $|f_0(z_1)| = |f_0(z_2)|$. Положим

$$x_1 = x - \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = y + \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_0^{(2)}(z_1) &= f_0(x_1 + iy_1) = x_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} + i \left(y_1 + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right), \\ f_0^{(2)}(z_2) &= f_0(-x_1 + iy_1) = -x_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} + i \left(y_1 + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, $|f_0^{(2)}(z_1)| = |f_0^{(2)}(z_2)|$. Рассуждая аналогично с использованием метода математической индукции, получим $|f_0^{(n)}(z_1)| = |f_0^{(n)}(z_2)|$ для каждого натурального числа n .

Аналогично можно показать, что $|f_0^{(n)}(z_1)| = |f_0^{(n)}(z_3)| = |f_0^{(n)}(z_4)|$, $n \in \mathbb{N}$, где $z_3 = x - iy$ и $z_4 = -x - iy$. Следовательно, для нахождения множества Жюлиа функции $f(z)$ достаточно исследовать орбиту точки z , находящуюся в первом квадранте, поскольку орбиты точек $\{z_i\}$, где $i = 1, 2, 3, 4$, одновременно ограничены или не ограничены, если $\operatorname{re} z \geq 0$, $\operatorname{im} z > 0$.

Прежде чем исследовать дискретную динамическую систему, порождённую функцией $f_\theta(\omega) = \omega - e^{i\theta}/\omega$, докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть φ_0 — сюръективное непрерывное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y и u_0 — непрерывное отображение X в X . Пусть $z \in X$. Тогда существует $\omega \in Y$, такое что $z = \varphi_0^{-1}(\omega)$. Положим $v_0(\omega) = \varphi_0(u_0(\varphi_0^{-1}(\omega)))$. Тогда $v_0^{(n)}(\omega) = \varphi_0(u_0^{(n)}(\varphi_0^{-1}(\omega)))$ для каждого натурального числа n .

Доказательство. Докажем данную лемму, используя метод математической индукции по n , т. е. покажем, что $v_0^{(n)}(\omega) = \varphi_0(u_0^{(n)}(\varphi_0^{-1}(\omega)))$. При $n = 1$ наше утверждение справедливо. Предположим, что оно справедливо при $n = k$, т. е. что $v_0^{(k)}(\omega) = \varphi_0(u_0^{(k)}(\varphi_0^{-1}(\omega)))$. Покажем, что $v_0^{(k+1)}(\omega) = \varphi_0(u_0^{(k+1)}(\varphi_0^{-1}(\omega)))$. Имеем

$$\begin{aligned} v_0^{(k+1)}(\omega) &= v_0(v_0^{(k)}(\omega)) = v_0\left(\varphi_0\left(u_0^{(k)}(\varphi_0^{-1}(\omega))\right)\right) = \\ &= \varphi_0\left(u_0\left(\varphi_0^{-1}\left(\varphi_0\left(u_0^{(k)}(\varphi_0^{-1}(\omega))\right)\right)\right)\right) = \\ &= \varphi_0\left(u_0\left(u_0^{(k)}(\varphi_0^{-1}(\omega))\right)\right) = \varphi_0\left(u_0^{(k+1)}(\varphi_0^{-1}(\omega))\right). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство $v_0^{(n)}(\omega) = \varphi_0(u_0^{(n)}(\varphi_0^{-1}(\omega)))$ справедливо при каждом натуральном n . \square

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Множество Жюлиа для функции

$$f_\theta(\omega) = \omega - \frac{e^{i\theta}}{\omega},$$

где $\theta \in [0; 2\pi]$, есть прямая линия $L \cup \{\infty\}$, где

$$L = \{\omega \in \mathbb{C}: \omega = r \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}, r \in \mathbb{R}\}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что множеством Жюлиа для функции $f_0(z) = z - 1/z$ будет вещественная прямая комплексной плоскости $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Достаточно рассмотреть точку z , лежащую в первом квадранте, у которой $\text{Im}(z) > 0$. Пусть $z = x + iy$, $\text{Im}(z) > 0$, $\text{Re}(z) \geq 0$.

Покажем сначала, что орбита точки z стремится к бесконечности. Рассмотрим две функции

$$\alpha(x, y) = x - \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \beta(x, y) = y + \frac{y}{x^2 + y^2},$$

являющиеся вещественной и мнимой частями функции $f(z) = z - 1/z$. Положим

$$x_1 = \alpha(x, y) = x - \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \beta(x, y) = y + \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$x_2 = \alpha^{(2)}(x, y) = x_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_2 = \beta^{(2)}(x, y) = y_1 + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}, \dots,$$

$$x_{n+1} = \alpha^{(n)}(x, y) = x_n - \frac{x_n}{x_n^2 + y_n^2}, \quad y_{n+1} = \beta^{(n)}(x, y) = y_n + \frac{y_n}{x_n^2 + y_n^2}, \dots$$

Поскольку последовательность вещественных чисел $\{y_n\}$ монотонно возрастает, то она имеет конечный или бесконечный предел. Если данный предел бесконечен, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = \infty$. Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ — вещественное число, то рассмотрим выражение

$$y_{n+1} = y_n + \frac{y_n}{x_n^2 + y_n^2}. \quad (4)$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ — вещественное число, то можно положить $y_n/(x_n^2 + y_n^2) = \alpha_n$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Имеем $y_n = \alpha_n x_n^2 + \alpha_n y_n^2$. Из последнего равенства получим $x_n^2 = y_n/(\alpha_n - y_n^2)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \infty$. Следовательно, и в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = \infty$. Положим $F1(x) = x - 1/x$, где $x \in \mathbb{R}$ (рис. 6). Покажем, что $|F1(x)|$ не стремится к бесконечности. Действительно, если точка имеет достаточно большую по модулю абсциссу, то её итерации $\{x_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, будут приближаться к началу координат до тех пор, пока не попадут в интервал $(-1; 1)$. Как только абсцисса x_n некоторой итерации вновь окажется больше единицы (меньше -1), то орбита точки также начнёт приближаться к началу координат и не будет стремиться к бесконечности. Поскольку бассейном притяжения точки $z = \infty$ являются верхняя и нижняя полуплоскости, то согласно [4] множеством Жюлиа для функции $f_0(z) = z - 1/z$ будет граница бассейнов притяжения — множество Жюлиа, совпадающая с вещественной осью $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ на комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$.

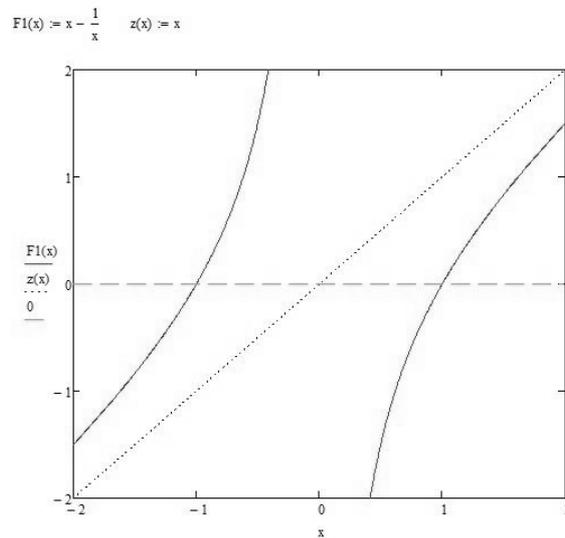


Рис. 6. График функции $F1(x)$

Пусть $\omega = \varphi(z) = e^{i\frac{\theta}{2}}z$. Тогда

$$z = \varphi^{-1}(\omega) = \frac{\omega}{e^{i\frac{\theta}{2}}}, \quad f_0(\varphi^{-1}(\omega)) = \frac{\omega^2 - e^{i\theta}}{\omega \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}}.$$

Имеем

$$\varphi(f_0(\varphi^{-1}(\omega))) = \omega - \frac{e^{i\theta}}{\omega}.$$

Положим

$$f_\theta(\omega) = \varphi(f_0(\varphi^{-1}(\omega))) = \omega - \frac{e^{i\theta}}{\omega}.$$

Покажем, что $f_\theta^{(n)}(\omega) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, если $\omega \notin L$. Пусть $\omega \notin L$. Тогда $z = \varphi^{-1}(\omega) \notin \mathbb{R}$. Следовательно, $f_0^{(n)}(\varphi^{-1}(\omega)) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку

$$f_\theta^{(n)}(\omega) = \varphi(f_0^{(n)}(\varphi^{-1}(\omega))) = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot (f_0^{(n)}(\varphi^{-1}(\omega))),$$

то $f_\theta^{(n)}(\omega) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Если же отличное от нуля число $\omega \in L$, то $z = \varphi^{-1}(\omega) \in \mathbb{R}$ также отлично от нуля. Выше мы установили, что последовательность $f_0^{(n)}(\varphi^{-1}(\omega))$ при $n \rightarrow \infty$ не будет стремиться к ∞ . А тогда не будет стремиться к бесконечности и последовательность $f_\theta^{(n)}(\omega)$ при $n \rightarrow \infty$. Согласно [4] множеством Жюлиа для функции $f_\theta(\omega)$ будет прямая L , как граница бассейна притяжения её параболической точки на бесконечности.

В [11] показано, что множествами Жюлиа для рациональных функций

$$f(z) = z - \frac{z^2 - e^{i\theta}}{2z} = \frac{z^2 + e^{i\theta}}{2z} = \frac{z}{2} + \frac{e^{i\theta}}{2z} \quad (z \in \bar{\mathbb{C}}, \theta \in [0, 2\pi]).$$

являются прямые линии $\mu(z) = re^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})}$, $r \in \mathbb{R}$, $z = r$, проходящие через начало координат. Однако каждая из данных функций имеет две притягивающие неподвижные точки, находящиеся по разные стороны от прямой $\mu(z) = re^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})}$, $r \in \mathbb{R}$, $z = r$, причём орбита каждой точки z будет стремиться к той неподвижной притягивающей точке, которая находится с ней по одну сторону от прямой линии $\mu(z) = re^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})}$, $r \in \mathbb{R}$, $z = r$. В нашем случае притягивающие неподвижные точки для семейства функций $f_\theta^{(n)}(z) = z - \frac{e^{i\theta}}{z}$, где $\theta \in [0; 2\pi]$ отсутствуют. Имеется только одна нейтральная (параболическая) неподвижная точка $z_0 = \infty$, что накладывает на бассейны притяжения свою специфику, связанную с образованием двух лепестков Ло. Однако множествами Жюлиа для каждой функции нашего семейства также будет прямая линия. \square

Теорема 3. Множество Жюлиа для функции

$$l_\theta(\omega) = \omega + \frac{e^{i\theta}}{4\omega} + e^{i\frac{\theta}{2}},$$

$\theta \in [0; 2\pi]$, есть луч $P \cup \{\infty\}$, где

$$P = \{z \in \bar{\mathbb{C}}: z = r \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}, r \in \mathbb{R}, r \geq 0\}.$$

Доказательство. Положим $\omega = \varphi_1(z) = -e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot (z^2/2)$. Пусть $z \in \bar{\mathbb{C}}$. Тогда существует такое комплексное число ω , что

$$\varphi_1^{-1}(\omega) = \sqrt{\frac{-2\omega}{e^{i\frac{\theta}{2}}}}.$$

Имеем

$$f_0(\varphi_1^{-1}(\omega)) = \sqrt{\frac{-2\omega}{e^{i\frac{\theta}{2}}}} - \frac{1}{\frac{-2\omega}{e^{i\frac{\theta}{2}}}},$$

$$\varphi_1(f_0(\varphi_1^{-1}(\omega))) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{-2\omega}{e^{i\frac{\theta}{2}}} - 1\right)^2}{\frac{-2\omega}{e^{i\frac{\theta}{2}}}} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} = \omega + \frac{e^{i\theta}}{4\omega} + e^{i\frac{\theta}{2}} = l_\theta(\omega).$$

Согласно лемме $l_\theta^{(n)}(\omega) = \varphi_1(f_0(\varphi_1^{-1}(\omega)))$. Покажем теперь, что $l_\theta^{(n)}(\omega) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, если $\omega \notin P$. Действительно, если $\omega \notin P$, то $z = \varphi_1^{-1}(\omega) \notin \mathbb{R}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f_0^{(n)}(z) = \infty$. Имеем

$$f_0^{(n)}(\varphi_1^{-1}(\omega)) = \sqrt{\frac{-2l_\theta^{(n)}(\omega)}{e^{i\frac{\theta}{2}}}} \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$ (мы выбираем ту ветвь корня, которая принимает значение $f_0^{(n)}(\varphi_1^{-1}(\omega))$, при каждом $n = 1, 2, \dots$). Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_0^{(n)}(z) = \infty$. Если $\omega \in P$, то $z = \varphi_1^{-1}(\omega) \in \mathbb{R}$. Выше мы установили, что последовательность $f_0^{(n)}(\varphi_1^{-1}(\omega))$ при $n \rightarrow \infty$ не будет стремиться к ∞ . Тогда в силу равенства

$$f_0^{(n)}(\varphi_1^{-1}(\omega)) = \sqrt{\frac{-2l_\theta^{(n)}(\omega)}{e^{i\frac{\theta}{2}}}}$$

не будет стремиться к бесконечности и последовательность $l_\theta^{(n)}(\omega)$ при $n \rightarrow \infty$. Согласно [4] множеством Жюлиа для функции $l_\theta(\omega)$ будет луч $P \cup \{\infty\}$, как граница бассейнов притяжения параболической точки на бесконечности. В [4] указаны две функции с неподвижными параболическими точками на бесконечности, множествами Жюлиа которых в плоскости \mathbb{C} являются прямая линия $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и отрезок $[0; \infty]$. В данной работе построен спектр прямых линий — множеств Жюлиа для семейства функций $f_\theta(z) = z - e^{i\theta}/z$, соответственно спектр отрезков для семейства функций $l_\theta(z) = z + e^{i\theta}/(4z) + e^{i\frac{\theta}{2}}$, $\theta \in [0; 2\pi]$. \square

Следует отметить, что построение множеств Жюлиа функций, имеющих неподвижную нейтральную (параболическую) точку на бесконечности, значительно осложняется, поскольку процессы сходимости орбит точек сильно замедляются. Выявление аналитическими методами структуры множеств Жюлиа таких функций значительно облегчает визуализацию множеств Жюлиа.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 16-18-10304).

Литература

- [1] Гринченко В. Т., Маципура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. — М.: ЛКИ, 2007.
- [2] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. — М.: Постмаркет, 2000.
- [3] Любич М. Ю. Динамика рациональных преобразований. Топологическая картина // УМН. — 1986. — Т. 41, № 4 (250). — С. 35—95.
- [4] Милнор Дж. Голоморфная динамика. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
- [5] Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: Мир, 1993.
- [6] Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств. — М.: ЛИБЕРКОМ, 2013.
- [7] Секованов В. С. Гладкие множества Жюлиа // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 4. — С. 133—150.
- [8] Секованов В. С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 3. — С. 185—199.

- [9] Секованов В. С. Что такое фрактальная геометрия? — М.: Ленанд, 2016.
- [10] Секованов В. С., Бабенко А. С., Селезнёва Е. М., Смирнова А. О. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Дискретные динамические системы» как средство формирования креативности студентов // Вестн. Костром. гос. унив. — 2016. — Т. 22, № 2. — С. 213—217.
- [11] Секованов В. С., Ивков В. А. Элементы теории дискретных динамических систем. — СПб.: Лань, 2017.
- [12] Секованов В. С., Фатеев А. С., Белоусова Н. В. Развитие гибкости мышления студентов при разработке алгоритма построения дерева Фейгенбаума в различных средах // Вестн. Костром. гос. унив. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 143—147.
- [13] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — New York: Wiley, 1990.