Вещественные алгебры с делением размерности 4

У. ФАИЗ
Университет Хасана II, Марокко
e-mail: fayz.oussama@hotmail.com

Е. НАПЕДЕНИНА
Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева
e-mail: katernap@gmail.com

А. РОЧДИ
Университет Хасана II, Марокко
e-mail: abdellatifro@yahoo.fr

М. ТВАЛАВАДЗЕ
Торонтский университет, Канада
e-mail: marina.tvalavadze@utoronto.ca

УДК 512.554.1

Ключевые слова: вещественные алгебры с делением, дифференцирование в алгебрах, автоморфизмы, изотопия.

Аннотация

В целях решения задачи описания всех вещественных алгебр с делением $\mathcal{A}$ размерности 4 мы рассматриваем новую процедуру удвоения, сохраняющую единицу. Эта процедура вместе с изотопией позволит нам получить все вещественные алгебры с делением размерности 4 в случае, когда $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \neq \{0\}$, и частично в случае, когда $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$. В последнем случае мы получим 8-параметрическое семейство $\mathbb{C}$-ассоциативных UG-алгебр и 8-параметрическое семейство $\mathbb{C}$-ассоциативных алгебр, для которых группа автоморфизмов содержит только единицу и некоторые инволютивные автоморфизмы. Для алгебр $\mathbb{H}_{f,f}$ показано, что группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_{f,f})$ содержит инволютивный автоморфизм. Кроме того, изучаются алгебры $\mathcal{A}$, для которых $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Abstract

O. Fayz, E. Napedenina, A. Rochdi, M. Tvalavadze, Four-dimensional real division algebras with few derivations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2021), no. 4, pp. 177—207.

In order to advance in the determination of all four-dimensional real division algebras $\mathcal{A}$, we introduce a new duplication process preserving the unit. This duplication process accompanied by an isotopy allow us to obtain all of these algebras in case $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \neq \{0\}$ and partially in case $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$. In the last case, we provide an 8-parameter family of ugly $\mathbb{C}$-associative algebras and an 8-parameter family of $\mathbb{C}$-associative algebras whose group of automorphisms contains only the identity and some reflections. For non-ugly algebras $\mathbb{H}_{f,f}$, the group $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_{f,f})$ contains a reflection. Also algebras $\mathcal{A}$ with $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}_2$ or $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ are studied.

Фундаментальная и прикладная математика, 2021, том 23, № 4, с. 177—207.

1. Введение

Для изучения вещественных алгебр $\mathcal{A}$ с делением Дж. М. Бенкарт и Дж. М. Осборн предложили подход, основанный на дифференцировании. Используя $\{1, 2, 4, 8\}$-теорему [12, 24], они перечислили все возможные алгебры Ли дифференцирований $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ [11].

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — вещественная алгебра с делением.*

1. *Если* $\dim \mathcal{A} = 1$ *или* $\dim \mathcal{A} = 2$, *то* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$.
2. *Если* $\dim \mathcal{A} = 4$, *то либо* $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ *— это* $\mathfrak{su}_2$, *либо* $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ *имеет размерность не больше* 1.
3. *Если* $\dim \mathcal{A} = 8$, *то* $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ *— одна из следующих алгебр Ли*:

   а) *компакт* $\mathfrak{g}_2$;
   б) $\mathfrak{su}_3$;
   в) $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2$;
   г) $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{N}$ *— абелев идеал и* $\dim \mathcal{N} = 0$ *или* $\dim \mathcal{N} = 1$;
   д) $\mathcal{N}$, *где* $\mathcal{N}$ *— абелев идеал и* $\dim \mathcal{N} = 0$, $\dim \mathcal{N} = 1$ *или* $\dim \mathcal{N} = 2$.

Для всех случаев, перечисленных в 1—3, *существуют соответствующие примеры алгебр.*

Кроме того, полностью описаны все вещественные алгебры с делением $\mathcal{A}$ размерности 4 с $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \mathfrak{su}_2$ и все алгебры размерности 8 с $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$, совпадающими с $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{su}_3$ или $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2$ [10]. Также построены примеры алгебр конечной размерности для оставшихся случаев алгебр Ли дифференцирований.

Используя результаты [11], несложно показать, что все вещественные алгебры с делением размерности $n \geqslant 4$ с нетривиальным дифференцированием допускают инволютивный автоморфизм.

Вещественные алгебры с делением размерности n широко изучались для $n = 4$ [4—8, 13, 19, 27, 32, 33] и $n = 8$ [2, 21, 25, 29, 30].

Среди прочего в этих работах авторами описаны различные классы алгебр размерности 4, для которых алгебра Ли дифференцирований имеет размерность не более 1. Кроме того, недавняя работа [17] проливает свет на свойства алгебр $\mathcal{A}$ размерности 4 с $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \neq \{0\}$. В частности, показано, что каждая вещественная алгебра с делением размерности $n \geqslant 4$ с нетривиальным дифференцированием ∂ изотопна алгебре с единицей и дифференцированием ∂ [17, лемма 3].

Несмотря на перечисленные результаты, описание вещественных алгебр с делением остаётся открытым вопросом для тех алгебр размерности 4, чьи алгебры Ли дифференцирований имеют размерность не больше 1, и для тех алгебр размерности 8, чьи алгебры Ли дифференцирований имеют один из следующих видов:

1) $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — абелев идеал размерности не больше 1,
2) $\mathcal{N}$ — абелев идеал размерности не больше 2.

Целью настоящей работы является дальнейшее изучение вещественных алгебр с делением $\mathcal{A}$ размерности 4 с $\dim\bigl(\mathrm{Der}(\mathcal{A})\bigr) \leqslant 1$. Мы ограничимся изучением только алгебр с единицей.

В разделе 2 будут приведены необходимые определения и обозначения. В разделе 3 мы напомним важные результаты об инволютивных автоморфизмах и рассмотрим случай алгебр размерности 2, допускающих такие автоморфизмы.

В разделе 4 мы представим процесс удвоения, обобщающий известный метод удвоения Кэли—Диксона и сохраняющий единицу (определение 1). Этот процесс позволит получить все алгебры размерности 4, которые удовлетворяют условиям $\mathbb{C}$-ассоциативности [7, 8], а также алгебры размерности 4 с нетривиальными дифференцированиями [17] (замечание 2).

В разделе 5 мы приведём новую, слегка улучшенную версию теоремы 2 из [17] (теорема 4). Этот раздел также содержит различные примеры алгебр $\mathcal{A}$ размерности 4 с $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \leqslant 1$, которые уже приводились в более ранних работах (пример 2).

Обозначим через $\mathcal{TD}_4$ класс вещественных алгебр с делением размерности 4 с тривиальной алгеброй дифференцирований. Существуют BF-алгебры (beautiful algebras) с делением размерности 4 с ненулевыми дифференцированиями [11, следствие 22 (c)]. Подкласс таких алгебр обозначим $\mathcal{BTD}_4$. В свою очередь, класс $\mathcal{BTD}_4$ содержит подкласс $\mathcal{RTD}_4$ алгебр с инволютивным автоморфизмом

$$\mathcal{RTD}_4 \subseteq \mathcal{BTD}_4 \subset \mathcal{TD}_4.$$

На сегодня не существует примера BF-алгебры размерности 4, не имеющей инволютивных автоморфизмов, что показало бы строгость включения $\mathcal{RTD}_4 \subseteq \mathcal{BTD}_4$. Однако существуют алгебры размерности 4, для которых группа автоморфизмов тривиальна [21, теорема 1.1]. Таким образом, включение $\mathcal{BTD}_4 \subset \mathcal{TD}_4$ строгое.

В разделе 6.1 мы изучаем и описываем группы автоморфизмов $\mathbb{C}$-ассоциативных алгебр, удовлетворяющих некоторым условиям. Мы показываем, что эта группа либо тривиальна, либо состоит лишь из единицы и инволютивных автоморфизмов. Это позволяет получить семейство 8-параметрических UG-алгебр (следствие 6).

В разделе 6.2 мы изучаем изотопы $\mathbb{H}_{f,g}$ алгебры $\mathbb{H}$. Мы показываем, что если $\mathbb{H}_{f,g}$ допускает нетривиальный автоморфизм, оставляющий на месте некоторый ненулевой идемпотент e, то $\mathbb{H}_{f,g}$ должен иметь инволютивный автоморфизм, оставляющий e на месте (теорема 7). В частности, если $\mathbb{H}_{f,f}$ является BF-алгеброй, то группа автоморфизмов должна содержать инволютивный автоморфизм (следствие 7). Это наводит на мысль о том, что включение $\mathcal{RTD}_4 \subseteq \mathcal{BTD}_4$, возможно, является равенством.

Раздел 7 посвящён алгебрам, у которых группа автоморфизмов совпадает с $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Такие группы соответствуют алгебрам, рассмотренным в [6, теорема 9; 32, теорема 11]. Мы покажем, что алгебры размерности 4 с единицей с двумя коммутирующими инволютивными автоморфизмами образуют 6-параметрическое семейство и являются в точности алгебрами, представленными в [13, теорема 12, с. 179]. Этот класс совпадает с классом алгебр, описанных в [5]. Группы автоморфизмов таких алгебр содержат группу Клейна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Это свойство выполняется в классе $\mathcal{TD}_4$, так же как и в классе $\mathcal{D}_4$ всех алгебр с делением размерности 4 с нетривиальными дифференцированиями (пункт 1 примера 2).

В разделе 8 мы делаем вывод о «широте» класса $\mathcal{TD}_4$. Оказывается, что класс $\mathcal{D}_4$ весьма мал по сравнению с $\mathcal{TD}_4$, если говорить о числе параметров, необходимых для общего описания элементов этих алгебр. Этот факт проиллюстрирован таблицами умножения (T_U), (T_R), (T_L), (T_M), (T_D), соответствующими алгебрам с единицей.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная неассоциативная алгебра с единицей $1_{\mathbb{K}}$ над полем $\mathbb{K}$. Обозначим через $L_a, R_a\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ операторы левого и правого умножения, заданные по формуле $L_a(x) = ax$, $R_a(x) = xa$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Если операторы L_a, R_a биективны для каждого элемента $a \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ будем называть *алгеброй с делением*. Как обычно, $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ и $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ будут обозначать тождественный оператор и группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ соответственно.

Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда λ-мутацией алгебры $\mathcal{A}$ назовём векторное пространство $\mathcal{A}$, снабжённое новым умножением $x \overset{\lambda}{\bullet} y = \lambda xy + (1_{\mathbb{K}} - \lambda)yx$. Обозначим получившуюся алгебру $\mathcal{A}^{(\lambda)}$. Множество всех собственных векторов, соответствующих автоморфизму $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ и его собственному значению λ, будем обозначать $E_\lambda(\Phi)$. Автоморфизм $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ называется *инволютивным*, если его порядок в группе автоморфизмов равен 2.

Если группа автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ нетривиальна, то алгебру $\mathcal{A}$ будем называть *BF-алгеброй*. В противном случае алгебру $\mathcal{A}$ будем называть *UG-алгеброй*. Алгебру $\mathcal{A}$ будем называть *SM-алгеброй*, если спектр каждого нетождественного автоморфизма не пуст.

Рассмотрим произвольные биективные операторы $f, g\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Напомним, что (f, g)-изотопом Альберта называется векторное пространство $\mathcal{A}$, на котором определено умножение $x \overset{f,g}{\cdot} y = f(x)g(y)$. Изотопия позволяет строить новые алгебры из имеющихся с сохранением свойств деления. В частности, если a — ненулевой элемент алгебры $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}_{R_a^{-1}, L_a^{-1}}$ также является алгеброй с делением и единицей $e = a^2$ [1, с. 497].

В соответствии с известной теоремой [12] размерность любой конечномерной вещественной алгебры с делением может равняться только 1, 2, 4 или 8. Для каждой из этих размерностей существует пример UG-алгебры с делением. Действительно, $\mathbb{R}$ является единственной одномерной вещественной алгеброй с деления, которая при этом является UG-алгеброй. Ниже мы приведём пример (пример 1) двумерной вещественной UG-алгебры с делением. В [18, теорема 1;

22, с. 14; 27, с. 178] построены примеры вещественных UG-алгебр с делением, обладающих мультипликативной нормой. Наконец, теорема 4.7 из [15] утверждает, что любая восьмимерная вещественная квадратичная и эластичная алгебра с делением должна содержать четырёхмерную подалгебру. Среди таких алгебр всегда найдутся UG-алгебры [29, с. 870, 871].

В дальнейшем $\mathbb{A}$ будет обозначать одну из основных вещественных алгебр с делением, т. е. алгебру комплексных чисел $\mathbb{C}$, алгебру кватернионов $\mathbb{H}$ или алгебру октонионов $\mathbb{O}$. Также обозначим через $S_{\mathbb{A}}$ множество всех векторов евклидова пространства $\mathbb{A}$, имеющих единичную норму.

3. Предварительные результаты

3.1. Инволютивные автоморфизмы. Обзор результатов

Этот раздел мы начнём с обзора основных результатов, справедливых в любой конечномерной алгебре $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{K}$.

Предложение 1. *Если размерность алгебры $\mathcal{A}$ равна $2n \geqslant 2$, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *содержит инволютивный автоморфизм;*
2) *алгебра $\mathcal{A}$ является прямой суммой подпространств $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$, где $\mathcal{B}$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{A}$ размерности n, при этом $\mathcal{BC} = \mathcal{CB} = \mathcal{C}$ и $\mathcal{CC} = \mathcal{B}$.*

Предположим, что характеристика поля $\mathbb{K}$ отлична от 2. Доказательство следующих результатов можно найти в [18, леммы 1, 2].

Лемма 1. *Предположим, что Φ — автоморфизм алгебры $\mathcal{A}$. Тогда подпространства $E_1(\Phi)$, $E_1(\Phi) + E_{-1}(\Phi)$, $E_1(\Phi^2)$ являются её подалгебрами и справедливы соотношения*

$$E_1(\Phi) \subseteq E_1(\Phi) + E_{-1}(\Phi) \subseteq E_1(\Phi^2).$$

К тому же если $\Phi \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$, то следующие утверждения эквивалентны:

1) *автоморфизм Φ алгебры $\mathcal{A}$ является инволютивным*;
2) *автоморфизм Φ является диагонализируемым*;
3) $\mathcal{A} = E_1(\Phi) \oplus E_{-1}(\Phi)$.

Предположим, что поле $\mathbb{K}$ является подполем поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2 [18, лемма 2]. *Спектр $\mathrm{sp}(\Phi)$ автоморфизма Φ алгебры $\mathcal{A}$ является подмножеством множества комплексных чисел, модуль которых равен единице. В частности, $\mathrm{sp}(\Phi) \subseteq \{1, -1\}$, если $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$.*

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — вещественная алгебра с делением размерности 4. Если автоморфизм $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}\}$ обладает двумя линейно независимыми собственными векторами, то в алгебре $\mathcal{A}$ существует Φ-инвариантная подалгебра размерности 2.*

Принимая во внимание предложение 2 и предыдущие леммы, мы можем получить следствие.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая четырёхмерная вещественная алгебра с делением, которая не содержит двумерных подалгебр. Тогда* $\mathrm{sp}(f) \subseteq \{1\}$ *для любого* $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$.

Проблема 1. Пусть $\mathcal{A}$ — четырёхмерная вещественная BF-алгебра с делением.

1. Допустим, что $\mathcal{A}$ обладает двумерной подалгеброй, инвариантной относительно некоторого автоморфизма $\Phi \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$. Следует ли из этого, что спектр $\mathrm{sp}(\Phi)$ является непустым множеством?
2. Допустим, что $\mathcal{A}$ является квадратичной алгеброй. Следует ли из этого, что алгебра $\mathcal{A}$ обладает инволютивным автоморфизмом?

3.2. Исследование алгебр размерности 2

В дальнейшем нам понадобится следующий результат, доказательство которого аналогично доказательству леммы 6.2 из [14], справедливой для алгебр с мультипликативной нормой.

Лемма 3. *Рассмотрим конечномерную вещественную алгебру с делением $\mathcal{A}$ и e — ненулевой идемпотент в $\mathcal{A}$. Тогда*

$$\{\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})\colon \Phi(e) = e\} = \mathrm{Aut}\big(\mathcal{A}_{R_e^{-1},\ L_e^{-1}}\big) \cap \mathcal{C}(R_e,\ L_e),$$

где подпространство $\mathcal{C}(R_e, L_e)$ — централизатор множества $\{R_e, L_e\}$ в $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$.

Следующий результат непосредственно вытекает из предыдущей леммы.

Следствие 2. *Пусть $f, g\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ — линейные биективные операторы, такие что $f(1) = g(1) = 1$. Обозначим через $\mathcal{C}(f, g)$ централизатор множества $\{f, g\}$ в* $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$. *Тогда*

$$\{\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}_{f,g})\colon \Phi(1) = 1\} = \mathrm{Aut}(\mathbb{A}) \cap \mathcal{C}(f, g).$$

В частности, любой автоморфизм алгебры $\mathbb{A}_{f,g}$, сохраняющий 1, является изометрией евклидова пространства $\mathbb{A}$.

Следствие 3. *Пусть $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ – линейная биекция, такая что $f(1) = 1$. Обозначим через $\mathcal{C}(f)$ централизатор множества $\{f\}$ в группе автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$. *Тогда* $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_{f,f}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{A}) \cap \mathcal{C}(f)$. *В частности, группа автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_{f,f})$ *состоит из изометрий евклидова пространства $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Сначала заметим, что 1 является идемпотентом алгебры $\mathbb{A}_{f,f} = (\mathbb{A}, \diamond)$. Более того, 1 и -1 являются единственными центральными элементами в алгебре $\mathbb{A}_{f,f}$, норма которых равна 1. В самом деле, допустим, что элемент e является центральным в алгебре $\mathbb{A}$ и удовлетворяет условию $f(e) = e$.

Следовательно,

$$e \diamond x = x \diamond e \text{ для всех } x \in \mathbb{A} \Longleftrightarrow f(e)f(x) = f(x)f(e) \text{ для всех } x \in \mathbb{A} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow f(e) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow e \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, элемент 1 является единственным центральным идемпотентом в алгебре $\mathbb{A}_{f,f}$. Учитывая тот факт, что любой автоморфизм алгебры $\mathbb{A}_{f,f}$ сохраняет 1, требуемое утверждение вытекает из следствия 2. □

Далее мы детально охарактеризуем двумерные вещественные алгебры с делением, которые являются BF-алгебрами.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — двумерная вещественная алгебра с делением. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *$\mathcal{A}$ — BF-алгебра.*
2. *Алгебра $\mathcal{A}$ обладает инволютивным автоморфизмом.*
3. *Алгебра $\mathcal{A}$ обладает базисом $\{e, u\}$, в котором таблица умножения (T) имеет вид*

	e	u
e	e	αu
u	βu	γe

,

где параметры α, β, γ — действительные числа, удовлетворяющие условию $\alpha\beta\gamma < 0$.

Доказательство. Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2$. Согласно [20] если группа автоморфизмов произвольной двумерной вещественной алгебры с делением нетривиальна, то она изоморфна либо циклической группе $\mathbb{Z}_2$, либо симметрической группе S_3. Следовательно, если группа $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ нетривиальна, то она содержит элемент порядка 2.

Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 3$. Допустим, что Φ является инволютивным автоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$. Согласно лемме 1 пространство $\mathcal{A}$ можно разложить в прямую сумму двух одномерных подпространств $E_1(\Phi) \oplus E_{-1}(\Phi)$. Пусть $E_1(\Phi) := \mathbb{R}e$, $E_{-1}(\Phi) := \mathbb{R}u$. Так как справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &E_1(\Phi)E_1(\Phi) \subseteq E_1(\Phi), \\ &E_1(\Phi)E_{-1}(\Phi) \subseteq E_{-1}(\Phi), \\ &E_{-1}(\Phi)E_1(\Phi) \subseteq E_{-1}(\Phi), \\ &E_{-1}(\Phi)E_{-1}(\Phi) \subseteq E_1(\Phi), \end{aligned}$$

то без ограничения общности мы можем предположить, что элемент e является идемпотентом и существуют параметры $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, такие что $eu = \alpha u$, $ue = \beta u$ и $u^2 = \gamma e$. Следовательно, таблица умножения алгебры $\mathcal{A}$ имеет вид (T). Так как алгебра $\mathcal{A}$ является алгеброй с делением, то параметры удовлетворяют соотношению $\alpha\beta\gamma < 0$ [9, теорема 3].

Докажем импликацию $3 \Longrightarrow 1$. Очевидно, что отображение $ae+bu \mapsto ae-bu$ является инволютивным автоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{A}$ — BF-алгебра. □

В заключение мы приведём примеры алгебр с пустыми спектрами нетривиальных автоморфизмов и с тривиальной группой автоморфизмов, каждая из которых является коммутативной.

Пример 1.

1. Рассмотрим пространство комплексных чисел $\mathbb{C}$ с определённым на нём новым умножением $x \diamond y = \bar{x}\bar{y}$, где $x \mapsto \bar{x}$ — комплексное сопряжение. Полученную алгебру с делением обозначим $\overset{*}{\mathbb{C}}$. Тогда отображение $\Phi\colon \overset{*}{\mathbb{C}} \to \overset{*}{\mathbb{C}}$, $z \mapsto \xi z$, где $\xi = (-1+i\sqrt{3})/2$ (примитивный корень степени 3 из единицы), является автоморфизмом алгебры $\overset{*}{\mathbb{C}}$ с пустым спектром.
2. Пусть $\alpha \in (-1,1)\setminus\{0\}$. Рассмотрим линейную биекцию $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, матрица которой в базисе $\{1, i\}$ имеет вид
$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Согласно [9, с. 629; 16, лемма 2.4] элемент 1 является единственным ненулевым идемпотентом алгебры $\mathbb{C}_{f,f}$. Таким образом, каждый автоморфизм Φ алгебры $\mathbb{C}_{f,f}$ сохраняет единицу и коммутирует с f. Более того, согласно следствию 3 Φ является изометрией и, следовательно, действует на пространстве $1^{\perp} = \mathbb{R}i$ инвариантно. В результате $i \in E_{\lambda}(\Phi)$ при $\lambda \in \{1, -1\}$. Кроме того, $f(i) \in E_{\lambda}(\Phi)$. Так как $\alpha \neq 0$, то векторы $f(i)$ и i линейно независимы. Таким образом, размерность пространства $E_{\lambda}(\Phi)$ равна 2 и $\lambda = 1$, т. е. $\Phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Значит, группа автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}_{f,f}$ тривиальна.

4. Обобщённый процесс удвоения

Как уже отмечалось, любая алгебра с делением изотопна алгебре с единицей, поэтому мы ограничимся изучением только таких алгебр. С другой стороны, алгебры $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ получаются из $\mathbb{R}$ с помощью классического процесса удвоения Кэли—Диксона. На самом деле существуют менее известные алгебры с делением и единицей, которые могут быть получены удвоением [6; 15, определение 3.1; 17, определение 1; 28, с. 1]. Желательно построить процесс удвоения, который включал бы в себя известные приёмы и позволял бы получать новые семейства алгебр с делением и единицей. С этой целью представим следующий метод.

Определение 1. Рассмотрим вещественную алгебру $\mathcal{B}$ с единичным элементом e. Пусть α обозначает некоторое действительное число и отображения $\rho, \sigma, \kappa, \vartheta, \chi, \pi, \varphi, \psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ являются линейными операторами, такими что

$\vartheta(e) = \chi(e) = e$. *Унитальный процесс удвоения* — это процедура построения новой алгебры, обозначаемой $\mathrm{UDP}_{\mathcal{B}}(\alpha, \rho, \sigma, \kappa, \vartheta, \chi, \pi, \varphi, \psi)$, из имеющейся алгебры $\mathcal{B}$ с помощью отображений ρ, σ, κ, ϑ, χ, π, φ, ψ. Более точно, на векторном пространстве $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ определим умножение

$$(x, y) \diamond (x', y') = \Big(x \overset{\alpha}{\bullet} x' + \rho\big(\sigma(y')\kappa(y)\big), y\vartheta(x') + y'\chi(x) + \pi\big(\varphi(y)\psi(y')\big)\Big),$$

где $x \overset{\alpha}{\bullet} y$ обозначает умножение в алгебре $\mathcal{B}^{(\alpha)}$, которая является α-мутацией алгебры $\mathcal{B}$. Если алгебра $\mathcal{B}$ является коммутативной, то новую алгебру будем обозначать $\mathrm{UDP}_{\mathcal{B}}(\rho, \sigma, \kappa, \vartheta, \chi, \pi, \varphi, \psi)$. Если же вдобавок к этому отображение π нулевое, то новая алгебра будет обозначаться $\mathrm{UDP}_{\mathcal{B}}(\rho, \sigma, \kappa, \vartheta, \chi)$.

Замечание 1. Заметим, что элемент $(e, 0)$ является единицей алгебры $\mathrm{UDP}_{\mathcal{B}}(\alpha, \rho, \sigma, \kappa, \vartheta, \chi, \pi, \varphi, \psi)$. Помимо этого, отображение алгебры $\mathcal{B}^{(\alpha)}$ в алгебру $\mathrm{UDP}_{\mathcal{B}}(\alpha, \rho, \sigma, \kappa, \vartheta, \chi, \pi, \varphi, \psi)$, заданное по формуле $x \mapsto (x, 0)$, является мономорфизмом. Следовательно, подпространство $\mathcal{B}^{(\alpha)} \times \{0\}$ является подалгеброй $\mathrm{UDP}_{\mathcal{B}}(\alpha, \rho, \sigma, \kappa, \vartheta, \chi, \pi, \varphi, \psi)$, которая изоморфна $\mathcal{B}^{(\alpha)}$.

В отличие от процедуры Кэли—Диксона, отображение $(x, y) \mapsto (x, -y)$ не является в общем случае автоморфизмом новой алгебры, полученной в результате унитального процесса удвоения.

Используя унитальный процесс удвоения, можно легко получить таблицы умножения многих известных вещественных алгебр с делением.

Пусть $\sigma_{\mathbb{C}} \colon x \mapsto \bar{x}$ обозначает комплексное сопряжение в алгебре $\mathbb{C}$.

Рассмотрим операторы $\rho, \pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, матрицы которых в базисе $\{1, i\}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} a & -f \\ b & -g \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c & h \\ d & k \end{pmatrix}.$$

Обозначим векторы канонического базиса $(1,0)$, $(i,0)$, $(0,1)$, $(0,i)$ векторного пространства $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ через 1, i, j, ij соответственно. Тогда таблица умножения алгебры $\mathrm{UDP}_{\mathbb{C}}(\rho, \sigma_{\mathbb{C}}, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, \sigma_{\mathbb{C}}, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, \pi, \sigma_{\mathbb{C}}, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}})$ в этом базисе совпадает с таблицей умножения хорошо известной $\mathbb{C}$-ассоциативной алгебры (для удобства назовём её MD-алгеброй (middle algebra)) [8, теорема 1.9]

Таблица (T_m)

	1	i	j	ij
1	1	i	j	ij
i	i	-1	ij	$-j$
j	j	$-ij$	$a + bi + cj + dij$	$f + gi + hj + kij$
ij	ij	j	$-f - gi - hj - kij$	$a + bi + cj + dij$

Теперь предположим, что матрицы операторов $\sigma, \psi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ в базисе $\{1, i\}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} a & f \\ b & g \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c & h \\ d & k \end{pmatrix}.$$

Тогда таблица умножения алгебры $\mathrm{UDP}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, \sigma, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, \sigma_{\mathbb{C}}, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, \psi)$ в каноническом базисе совпадает со стандартной таблицей умножения левой $\mathbb{C}$-ассоциативной алгебры [7, теорема 1.4]

Таблица (T_l)

	1	i	j	ij
1	1	i	j	ij
i	i	-1	ij	$-j$
j	j	$-ij$	$a+bi+cj+dij$	$f+gi+hj+kij$
ij	ij	j	$-b+ai-dj+cij$	$-g+fi-kj+hij$

.

5. Алгебры $\mathcal{A}$ с $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}) = 1$

Рассмотрим произвольную алгебру $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{K}$. Линейное отображение $\partial\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ назовём *дифференцированием алгебры* $\mathcal{A}$, если выполняется условие $\partial(xy) = (\partial x)y + x(\partial y)$ для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Пусть $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ обозначает алгебру Ли всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$.

Согласно теореме 1 алгебра Ли дифференцирований $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$, ассоциированная с вещественной четырёхмерной алгеброй с делением либо изоморфна $\mathfrak{su}_2$, либо имеет размерность $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \leqslant 1$. В случае $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \mathfrak{su}_2$ Дж. М. Бенкарт и Дж. М. Осборн доказали следующую теорему [10, теорема 6.3].

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{A}$ — четырёхмерная алгебра с делением. Тогда* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \mathfrak{su}_2$ *в том и только в том случае, когда существует базис e, e_1, e_2, e_3, в котором таблица умножения алгебры $\mathcal{A}$ имеет вид*

Таблица ($T_{\mathfrak{su}_2}$)

	e	e_1	e_2	e_3
e	e	ηe_1	ηe_2	ηe_3
e_1	ζe_1	$-\beta e$	e_3	$-e_2$
e_2	ζe_2	$-e_3$	$-\beta e$	e_1
e_3	ζe_3	e_2	$-e_1$	$-\beta e$

для некоторых вещественных чисел β, η, ζ, таких что $\beta\eta\zeta > 0$.

Заметим, что ядро ненулевого дифференцирования произвольной четырёхмерной вещественной алгебры с делением является двумерной подалгеброй этой алгебры [11, следствие 10, лемма 11]. Доказательство следующей леммы можно найти в [17, лемма 3].

Лемма 4. *Пусть четырёхмерная вещественная алгебра с делением $\mathcal{A}$ обладает ненулевым дифференцированием ∂ и a — произвольный элемент из ядра ∂. Тогда дифференцирование ∂ коммутирует с операторами L_a, R_a и является* *дифференцированием изотопа Альберта* $\mathcal{A}_{R_a^{-1},\ L_a^{-1}}$, *который, в свою очередь, является алгеброй с делением, обладающей единицей* $e = a^2$.

Далее сформулируем основной результат этого раздела.

Теорема 4. *Пусть* $\mathcal{A}$ — *четырёхмерная вещественная алгебра с делением с единичным элементом* e. *Тогда* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \neq \{0\}$ *в том и только в том случае, когда элемент* e *может быть дополнен до базиса* e, u, x_1, x_2 *алгебры* $\mathcal{A}$, *и существуют параметры* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \omega, \theta \in \mathbb{R}$, *такие что таблица умножения имеет вид*

Таблица (T_D)

	e	u	x_1	x_2
e	e	u	x_1	x_2
u	u	$-e$	$\alpha x_1 + \beta x_2$	$-\beta x_1 + \alpha x_2$
x_1	x_1	$\gamma x_1 + \delta x_2$	$\lambda e + \mu u$	$\omega e + \theta u$
x_2	x_2	$-\delta x_1 + \gamma x_2$	$-\omega e - \theta u$	$\lambda e + \mu u$

.

С другой стороны, вещественная алгебра с умножением, определённым таблицей (T_D), *является алгеброй с делением в том и только в том случае, когда*

$$\delta(\lambda\theta - \omega\mu) \neq 0$$

и

$$Q(\alpha_1, \alpha_2)^2 < 4\delta(\lambda\theta - \omega\mu)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\big((\alpha_1 + \alpha\alpha_2)^2 + \beta^2\alpha_2^2\big)$$

для всех $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *где* $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ — *квадратичная форма вида*

$$Q(\alpha_1, \alpha_2) = \Gamma{\alpha_1}^2 + \Lambda\alpha_1\alpha_2 + \Omega{\alpha_2}^2$$

при

$$\begin{aligned}
&\Gamma = -(\gamma\mu + \delta\theta + \lambda),\\
&\Lambda = -\alpha(\gamma\mu + \delta\theta + \lambda) + \beta(\gamma\theta - \delta\mu + \omega) + \gamma\lambda + \delta\omega - \mu,\\
&\Omega = \alpha(\gamma\lambda + \delta\omega - \mu) + \beta(\delta\lambda - \gamma\omega + \theta).
\end{aligned}$$

Более того, при выполнении вышеперечисленных условий эквивалентны следующие утверждения:

1) $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \mathfrak{su}_2$;
2) $\mathcal{A}$ — *квадратичная и эластичная алгебра, изоморфная* $\mathbb{H}^{(\nu)}$ *для некоторого вещественного* $\nu > 1/2$;
3) $\alpha = \gamma = \mu = \omega = 0$, $\lambda < 0$, $\delta = -\beta \neq 0$ *и* $\theta = -\beta\lambda \neq 0$.

Доказательство. Доказательство первого утверждения можно найти в [17, теорема 2]. Заметим, что матрица оператора левого умножения на элемент

$$\alpha_1 e + \alpha_2 u + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_2$$

в базисе e, u, x_1, x_2 имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & \lambda\alpha_3 - \omega\alpha_4 & \omega\alpha_3 + \lambda\alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \mu\alpha_3 - \theta\alpha_4 & \theta\alpha_3 + \mu\alpha_4 \\ \alpha_3 & \gamma\alpha_3 - \delta\alpha_4 & \alpha_1 + \alpha\alpha_2 & -\beta\alpha_2 \\ \alpha_4 & \delta\alpha_3 + \gamma\alpha_4 & \beta\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\det M = \delta(\lambda\theta - \omega\mu)(\alpha_3^2 + \alpha_4^2)^2 + Q(\alpha_1, \alpha_2)(\alpha_3^2 + \alpha_4^2) + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\big((\alpha_1 + \alpha\alpha_2)^2 + \beta^2\alpha_2^2\big),$$

где $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ — квадратичная форма из утверждения теоремы. Легко видеть, что если $\delta(\lambda\theta - \omega\mu) = 0$, то $\det M = 0$ для всех $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и произвольных действительных α_3, α_4. Таким образом, условие $\delta(\lambda\theta - \omega\mu) \neq 0$ является необходимым для того, чтобы $\det M$ был отличен от нуля для всех $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$.

Рассмотрим $\det M$ как квадратный трёхчлен относительно переменной $X = \alpha_3^2 + \alpha_4^2$. Дискриминант этого трёхчлена равен

$$\Delta = Q(\alpha_1, \alpha_2)^2 - 4\delta(\lambda\theta - \omega\mu)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\big((\alpha_1 + \alpha\alpha_2)^2 + \beta^2\alpha_2^2\big).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \text{ — алгебра с делением} \iff \\ &\quad \iff \det M \neq 0 \text{ для всех } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\} \iff \\ &\quad \iff \delta(\lambda\theta - \omega\mu) \neq 0 \text{ и } \Delta < 0 \text{ для всех ненулевых } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4). \end{aligned}$$

Таким образом, второе утверждение теоремы доказано.

Для завершения доказательства нам осталось установить эквивалентность утверждений 1)—3).

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Допустим, что $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \mathfrak{su}_2$. Заметим, что e — единственный ненулевой идемпотент в алгебре $\mathcal{A}$. Тогда из теоремы 3 вытекает, что таблица умножения алгебры $\mathcal{A}$ имеет вид $(T_{\mathfrak{su}_2})$, где $\eta = \zeta = 1$ и $\beta > 0$. Положим

$$e_1' = \frac{e_1}{\sqrt{\beta}}, \quad e_2' = \frac{e_2}{\sqrt{\beta}}, \quad e_3' = \frac{e_3}{\sqrt{\beta}}.$$

Тогда таблица умножения алгебры $\mathcal{A}$ в базисе e, e_1', e_2', e_3' совпадает с таблицей умножения квадратичной и эластичной алгебры $\mathbb{H}^{(\frac{1+\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\beta}})}$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Теперь предположим, что алгебра $\mathcal{A}$ квадратичная и эластичная. Тогда мы получим, что

$$x_1^2 \in \mathrm{span}\{e, x_1\}, \quad (u + x_1)^2 \in \mathrm{span}\{e, u + x_1\}.$$

Следовательно,

$$\mu = 0 \quad \text{и} \quad \alpha + \gamma = \beta + \delta = 0. \tag{1}$$

Более того,

$$\beta \neq 0, \tag{2}$$

так как $\mathcal{A}$ — алгебра с делением. Из условия $\mu = 0$ вытекает, что

$$\lambda < 0 \quad \text{и} \quad \theta \neq 0. \tag{3}$$

С другой стороны, равенства

$$\begin{aligned}
&(x_1x_2)x_1 = x_1(x_2x_1),\\
&(x_1u)x_1 = x_1(ux_1),\\
&\big((x_1+u)x_2\big)(x_1+u) = (x_1+u)\big(x_2(x_1+u)\big)
\end{aligned}$$

означают, что

$$2\omega + (\alpha+\gamma)\theta = 0, \tag{4}$$

$$(\gamma-\alpha)\lambda - (\beta+\delta)\omega = 0, \tag{5}$$

$$\theta = -\beta\lambda. \tag{6}$$

Из равенств (1)—(6) вытекает, что

$$\alpha = \gamma = \mu = \omega = 0, \quad \lambda < 0 \quad \text{и} \quad \delta = -\beta, \quad \theta = -\beta\lambda \neq 0.$$

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Учитывая условия $\alpha = \gamma = \mu = \omega = 0$, $\lambda < 0$, $\delta = -\beta$, $\theta = -\beta\lambda \neq 0$, получаем, что таблица (T_D) приобретает вид

Таблица (T'_D)

	e	u	x_1	x_2
e	e	u	x_1	x_2
u	u	$-e$	βx_2	$-\beta x_1$
x_1	x_1	$-\beta x_2$	λe	$-\beta\lambda u$
x_2	x_2	βx_1	$\beta\lambda u$	λe

.

Положим

$$u' = \beta^{-1}u, \quad x'_1 = \beta^{-1}(-\lambda)^{-\frac{1}{2}}x_1, \quad x'_2 = \beta^{-1}(-\lambda)^{-\frac{1}{2}}x_2.$$

Тогда в новом базисе таблица умножения имеет вид

Таблица (T''_D)

	e	u'	x'_1	x'_2
e	e	u'	x'_1	x'_2
u'	u	$-\beta^{-2}e$	x'_2	$-x'_1$
x'_1	x'_1	$-x'_2$	$-\beta^{-2}e$	u'
x'_2	x'_2	x'_1	$-u'$	$-\beta^{-2}e$

.

Требуемый результат вытекает из теоремы 3. $\square$

Замечание 2. Очевидно, что алгебра, таблица умножения которой совпадает с (T_D), может быть получена с помощью унитального процесса удвоения $\mathrm{UDP}_{\mathbb{C}}(\rho, \sigma_{\mathbb{C}}, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, \vartheta, \chi, \pi, \sigma_{\mathbb{C}}, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}})$, где π — нулевое отображение. Этот факт был уже отмечен в [17, теорема 2].

Следствие 4. *Каждая четырёхмерная вещественная алгебра с делением $\mathcal{A}$, обладающая единицей и ненулевым дифференцированием, может быть получена из $\mathbb{C}$ с помощью унитального процесса удвоения.*

Проблема 2. Ясно, что любая четырёхмерная вещественная квадратичная алгебра, обладающая инволютивным автоморфизмом, имеет таблицу умножения вида (T_D). Является ли любая четырёхмерная вещественная квадратичная алгебра с делением BF-алгеброй?

Пример 2. Рассмотрим различные примеры алгебр с делением, для которых ассоциированная алгебра Ли дифференцирований имеет размерность 1.

1. В [13, с. 179, (15.7)] было построено 6-параметрическое семейство четырёхмерных вещественных алгебр, таблица умножения которых имеет вид

$$\begin{array}{c|cc|cc|}
\cline{2-5}
 & 1 & i & j & k \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{1} & 1 & i & j & k \\
\multicolumn{1}{|c|}{i} & i & -1 & \gamma k & -\beta' j \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{j} & j & -\gamma' k & -1 & \alpha i \\
\multicolumn{1}{|c|}{k} & k & \beta j & -a' i & -1 \\
\hline
\end{array}\,,$$

где α, β, γ, α', β', γ' — ненулевые действительные числа. Полученную алгебру обозначим $\mathbb{H}_{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')}$. Для того чтобы алгебра $\mathbb{H}_{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')}$ являлась алгеброй с делением, необходимо, чтобы все шесть ненулевых действительных числа α, β, γ, α', β', γ' имели один знак. Без ограничения общности мы можем предположить, что все числа положительны. Тогда достаточным условием того, что данная алгебра — алгебра с делением, является соотношение

$$\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' - \alpha'\beta'\gamma'$$

(см. [13, теорема 15A]). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$\mathrm{Der}\big(\mathbb{H}_{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')}\big) \neq \{0\}$$

тогда и только тогда, когда $(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')(\gamma-\gamma') = 0$. Кроме того,

$$\mathrm{Der}\big(\mathbb{H}_{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')}\big) = \mathfrak{su}_2$$

тогда и только тогда, когда все шесть чисел равны между собой. Из этого следует, что

$$\dim \mathrm{Der}\big(\mathbb{H}_{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')}\big)\big) = 1$$

в том и только том случае, когда $(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')(\gamma-\gamma') = 0$ и α, β, γ, α', β', γ' не все равны между собой.

2. Предположим, что умножение в алгебре $\mathcal{A}$ задано таблицей (T_m) [8, теорема 4.4 (iv)] при $c = d = h = k = 0$ и $(a+g, b, f) \neq (0,0,0)$. Тогда $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}) = 1$.

Для полностью $\mathbb{C}$-ассоциативной алгебры мы имеем равенства $j^2 = (ij)^2 = p + qi$. Следовательно [3, следствие 22 (d); 4, теорема 12 (a)],

$$\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}) = 1 \Longleftrightarrow q \neq 0.$$

Алгебры, определённые в [3, с. 342; 19, (43)], также удовлетворяют вышеперечисленным условиям.

3. Известно, что неассоциативная алгебра кватернионов $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию делимости [33, следствие] и, более того, $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}) = 1$ [33, теорема 3].

4. Рассмотрим так называемую масштабированную кватернионную алгебру вращений $\mathcal{A}$ с умножением, определённым таблицей

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	qe_1	re_2	ue_3	ue_4
e_2	se_2	te_1	ve_4	$-ve_3$
e_3	we_3	xe_4	ye_1	ze_2
e_4	we_4	$-xe_3$	$-ze_2$	ye_1

,

где $q, r, u, s, t, v, w, x, y, z \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{A}$ является алгеброй с делением в том и только в том случае, когда

$$svwz > 0, \quad ruxz < 0, \quad tvxy < 0, \quad quwy < 0$$

(см. [5, теорема 1]). Если $r \neq u$, $s \neq w$, $v+x \neq 0$ или $vy \neq tz$, то $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}) = 1$. В противном случае

$$\mathrm{Der}\,\mathcal{A} = \mathfrak{su}_2$$

(см. [5, следствие 8]).

5. Если вещественная алгебра $\mathcal{A}$ является четырёхмерной алгеброй с делением, то $\mathcal{A}$ имеет тривиальную алгебру Ли дифференцирований в следующих случаях:

а) если она удовлетворяет в точности двум условиям $\mathbb{C}$-ассоциативности [4, теорема 13],

б) если она является строго левой $\mathbb{C}$-ассоциативной алгеброй [7, теорема 4.1],

в) если она совпадает с одной из алгебр из [8, теорема 4.4 (v)] с таблицей умножения (T_m), такой что $(c, d, h, k) \neq (0, 0, 0, 0)$.

6. Автоморфизмы алгебр с тривиальной алгеброй Ли дифференцирований

6.1. Автоморфизмы строго $\mathbb{C}$-ассоциативных алгебр

Семейство $\mathcal{TD}_4$ четырёхмерных вещественных алгебр с делением, алгебра Ли дифференцирований которых тривиальна, содержит различные подсемейства алгебр. Мы начнём с наиболее известного из них — множества всех алгебр, удовлетворяющих условию $\mathbb{C}$-ассоциативности. Напомним следующий полезный результат из [7, 8].

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{A}$ — некоммутативная четырёхмерная вещественная алгебра, которая является бимодулем над $\mathcal{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i \cong \mathbb{C}$. Алгебра $\mathcal{A}$ является строго $\mathbb{C}$-ассоциативной по отношению к $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда существует базис 1, i, j, ij алгебры $\mathcal{A}$ и набор действительных чисел a, b, c, d, f, g, h, k, такой что в этом базисе умножение в алгебре $\mathcal{A}$ задано либо таблицей (T_m), либо таблицей (T_l). Кроме того, $\mathcal{A}$ является алгеброй с делением в том и только в том случае, когда многочлен*

$$P(u) = (u^2 + Bu + A)^2 - u\big((Cu + D)^2 + (Fu + G)^2\big),$$

где

$$\begin{aligned} &A = bf - ag > 0,\\ &C = c + k,\\ &F = d - h,\\ &B = g - a + ck - dh,\\ &D = cg - bh + df - ak,\\ &G = ah - cf + dg - bk, \end{aligned}$$

не имеет положительных корней.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{A}$ является $\mathbb{C}$-ассоциативной и некоммутативной MD-алгеброй с умножением, заданным таблицей (T_m).*

1. *Если $(a + g, b, c, d, f, h, k) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, то $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}) = 1$.*
2. *Если $(c, d, h, k) \neq (0, 0, 0, 0)$, то $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$.*

Лемма 5. *Допустим, что четырёхмерная вещественная алгебра $\mathcal{A}$ является строго $\mathbb{C}$-ассоциативной с умножением, заданным таблицей (T_l) или (T_m). Тогда матрица каждого автоморфизма Φ алгебры $\mathcal{A}$ в базисе 1, i, j, ij имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\varepsilon\delta \\ 0 & 0 & \delta & \varepsilon\gamma \end{pmatrix}$$

для некоторых вещественных чисел ε, γ, δ, где $\varepsilon = \pm 1$ и $\gamma^2 + \delta^2 = 1$. Более того,

1) *если $\varepsilon = 1$ и $(c, d, h, k) \neq (0, 0, 0, 0)$, то $\Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$;*
2) *если $\varepsilon = -1$, то Φ является инволютивным автоморфизмом.*

Доказательство. Предположим, что $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$. Тогда $\Phi(1) = 1$ и $\Phi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, где $\mathcal{C} = \mathrm{span}\{1, i\}$ [7, предложение 3.2; 8, лемма 3.2]. Таким образом, $\Phi(i) = \varepsilon i$, где $\varepsilon = \pm 1$. Пусть

$$\Phi(j) = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij. \tag{7}$$

Очевидно, что $(\gamma, \delta) \neq (0,0)$. В противном случае Φ отобразит трёхмерное пространство $\mathcal{C} + \mathbb{R}j$ на двумерное $\mathcal{C}$, что невозможно, так как автоморфизм Φ является биективным. Из соотношения $\Phi(ij) = \Phi(i)\Phi(j)$ следует, что

$$\Phi(ij) = \varepsilon(-\beta + \alpha i - \delta j + \gamma ij). \tag{8}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij = \Phi(j) = \Phi\big((ij)i\big) \ (\text{так как } (ij)i = j) = \Phi(ij)\Phi(i) =\\ = \varepsilon(-\beta + \alpha i - \delta j + \gamma ij)(\varepsilon i) = (-\beta + \alpha i - \delta j + \gamma ij)i = -\alpha - \beta i + \gamma j + \delta ij.\end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha = \beta = 0$ и

$$\Phi\big(j(ij)\big) = \Phi(f + gi + hj + kij) = f + \varepsilon gi + (h\gamma - \varepsilon k\delta)j + (h\delta + \varepsilon k\gamma)ij.$$

С другой стороны,

$$\Phi\big(j(ij)\big) = \Phi(j)\Phi(ij) = \varepsilon(\gamma j + \delta ij)(-\delta j + \gamma ij).$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Допустим, $\mathcal{A}$ — левая $\mathbb{C}$-ассоциативная алгебра. Тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon\Phi\big(j(ij)\big) &= -\gamma\delta j^2 + \gamma\delta(ij)^2 + \gamma^2 j(ij) - \delta^2(ij)j =\\ &= -\gamma\delta(a + bi + cj + dij) + \gamma\delta(-g + fi - kj + hij) +\\ &+ \gamma^2(f + gi + hj + kij) - \delta^2(-b + ai - dj + cij) =\\ &= f\gamma^2 + b\delta^2 - (a+g)\gamma\delta + (g\gamma^2 - a\delta^2 + (f-b)\gamma\delta)i +\\ &+ (h\gamma^2 + d\delta^2 - (c+k)\gamma\delta)j + (k\gamma^2 - c\delta^2 + (h-d)\gamma\delta)ij.\end{aligned}$$

Следовательно, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}\varepsilon f = f\gamma^2 + b\delta^2 - (a+g)\gamma\delta, & (L_1)\\ g = g\gamma^2 - a\delta^2 + (f-b)\gamma\delta, & (L_2)\\ \varepsilon h\gamma - k\delta = h\gamma^2 + d\delta^2 - (c+k)\gamma\delta, & (L_3)\\ \varepsilon h\delta + k\gamma = k\gamma^2 - c\delta^2 + (h-d)\gamma\delta. & (L_4)\end{cases}$$

Перепишем соотношение $\Phi\big((ij)j\big) = \Phi(ij)\Phi(j)$ следующим образом:

$$\begin{cases}-\varepsilon b = -b\gamma^2 - f\delta^2 - (a+g)\gamma\delta, & (L_5)\\ a = a\gamma^2 - g\delta^2 + (f-b)\gamma\delta, & (L_6)\\ -\varepsilon d\gamma - c\delta = -d\gamma^2 - h\delta^2 - (c+k)\gamma\delta, & (L_7)\\ -\varepsilon d\delta + c\gamma = c\gamma^2 - k\delta^2 + (h-d)\gamma\delta. & (L_8)\end{cases}$$

Из соотношений (L_1), (L_5) и (L_2), (L_6) получаем

$$\begin{cases}\varepsilon(f+b) = (f+b)(\gamma^2 + \delta^2), & (L_1')\\ g - a = (g-a)(\gamma^2 + \delta^2). & (L_2')\end{cases}$$

Заметим, что $(f,g) \neq (-b,a)$, так как в противном случае $A = bf - ag = -b^2 - a^2 \leqslant 0$, что противоречит тому, что $\mathcal{A}$ — алгебра с делением. Из соотношений (L_1'), (L_2') следует, что $\gamma^2 + \delta^2 = 1$, и значит, матрица автоморфизма Φ имеет требуемый вид.

Из соотношений (L_3), (L_7) и (L_4), (L_8) получаем

$$\begin{cases} \varepsilon(d+h)\gamma + (c-k)\delta = d+h, & (L_3') \\ \varepsilon(d+h)\delta + (k-c)\gamma = k-c. & (L_4') \end{cases} \qquad (S_L)$$

Операторы левого умножения на элементы j, ij, $\Phi(j)$, $\Phi(ij)$ имеют вид

$$L_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & b & g \\ 1 & 0 & c & h \\ 0 & -1 & d & k \end{pmatrix}, \quad L_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b & -g \\ 0 & 0 & a & f \\ 0 & 1 & -d & -k \\ 1 & 0 & c & h \end{pmatrix},$$

$$L_{\Phi(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a\gamma - b\delta & f\gamma - g\delta \\ 0 & 0 & b\gamma + a\delta & g\gamma + f\delta \\ \gamma & \delta & c\gamma - d\delta & h\gamma - k\delta \\ \delta & -\gamma & d\gamma + c\delta & k\gamma + h\delta \end{pmatrix},$$

$$L_{\Phi(ij)} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a\delta - b\gamma & -f\delta - g\gamma \\ 0 & 0 & -b\delta + a\gamma & -g\delta + f\gamma \\ -\delta & \gamma & -c\delta - d\gamma & -h\delta - k\gamma \\ \gamma & \delta & -d\delta + c\gamma & -k\delta + h\gamma \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{tr}\bigl(L_{\Phi(j)}\bigr) = \operatorname{tr}(L_j)$, $\operatorname{tr}\bigl(L_{\Phi(ij)}\bigr) = \operatorname{tr}(L_{ij})$, то получаем равенства

$$\begin{cases} (c+k)\gamma + (h-d)\delta = c+k, \\ \varepsilon(h-d)\gamma - \varepsilon(c+k)\delta = h-d. \end{cases} \qquad (S_L')$$

Предположим, что $\varepsilon = 1$, и рассмотрим следующие возможные варианты.

1. Если $(h,k) \neq (-d,c)$, то из равенств (S_L) получаем

$$\bigl((c-k)^2 + (d+h)^2\bigr)\delta = 0.$$

Таким образом, $\delta = 0$ и $\gamma = 1$, т. е. $\Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.

2. Если $(h,k) = (-d,c) \neq (0,0)$, то из (S_L') получаем

$$\begin{cases} c\gamma - d\delta = c, \\ d\gamma + c\delta = d. \end{cases} \qquad (S_L'')$$

Тогда определитель матрицы, соответствующей системе (S_L'') относительно неизвестных γ, δ, равен $c^2 + d^2 \neq 0$, и следовательно, $(\gamma,\delta) = (1,0)$.

Случай 2. Если $\mathcal{A}$ — $\mathbb{C}$-ассоциативная MD-алгебра, то

$$\Phi\bigl(j(ij)\bigr) = \Phi(f + gi + hj + kij) = f + \varepsilon gi + (h\gamma - \varepsilon k\delta)j + (h\delta + \varepsilon k\gamma)ij.$$

С другой стороны,

$$\Phi\bigl(j(ij)\bigr) = \Phi(j)\Phi(ij) = \varepsilon(\gamma j + \delta ij)(-\delta j + \gamma ij) = \varepsilon(\gamma^2 + \delta^2)(f + gi + hj + kij).$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} f\bigl(1-\varepsilon(\gamma^2+\delta^2)\bigr)=0, & (M_1)\\ g\bigl(1-(\gamma^2+\delta^2)\bigr)=0, & (M_2)\\ \gamma h-\varepsilon\delta k=\varepsilon h(\gamma^2+\delta^2), & (M_3)\\ \delta h+\varepsilon\gamma k=\varepsilon k(\gamma^2+\delta^2). & (M_4)\end{cases}$$

Заметим, что $(f,g)\neq(0,0)$, иначе оператор правого умножения R_j отобразил бы трёхмерное подпространство $\mathbb{R}+\mathbb{R}i+\mathbb{R}ij$ на двумерное подпространство $\mathbb{R}j+\mathbb{R}ij$, что противоречило бы биективности R_j. Следовательно, из уравнений (M_1), (M_2) вытекает условие $\gamma^2+\delta^2=1$, и мы получаем требуемую матрицу.

Рассмотрим систему, образованную уравнениями (M_3) и (M_4):

$$\begin{cases} \gamma h-\varepsilon\delta k=\varepsilon h, & (M_3)\\ \delta h+\varepsilon\gamma k=\varepsilon k. & (M_4)\end{cases} \qquad (S_M)$$

Тогда операторы L_j, L_{ij}, $L_{\Phi(j)}$, $L_{\Phi(ij)}$ имеют соответственно следующие матрицы:

$$L_j=\begin{pmatrix}0&0&a&f\\0&0&b&g\\1&0&c&h\\0&-1&d&k\end{pmatrix},\quad L_{ij}=\begin{pmatrix}0&0&-f&a\\0&0&-g&b\\0&1&-h&c\\1&0&-k&d\end{pmatrix},$$

$$L_{\Phi(j)}=\begin{pmatrix}0&0&a\gamma-f\delta&f\gamma+a\delta\\0&0&b\gamma-g\delta&g\gamma+b\delta\\\gamma&\delta&c\gamma-h\delta&h\gamma+c\delta\\\delta&-\gamma&d\gamma-k\delta&k\gamma+d\delta\end{pmatrix},$$

$$L_{\Phi(ij)}=\varepsilon\begin{pmatrix}0&0&-f\gamma-a\delta&a\gamma-f\delta\\0&0&-g\gamma-b\delta&b\gamma-g\delta\\-\delta&\gamma&-h\gamma-c\delta&c\gamma-h\delta\\\gamma&\delta&-k\gamma-d\delta&d\gamma-k\delta\end{pmatrix}.$$

Так как $\mathrm{Tr}\bigl(L_{\Phi(j)}\bigr)=\mathrm{Tr}(L_j)$, $\mathrm{Tr}\bigl(L_{\Phi(ij)}\bigr)=\mathrm{Tr}(L_{ij})$, получаем

$$\begin{cases}(c+k)\gamma+(d-h)\delta=c+k,\\ \varepsilon(d-h)\gamma-\varepsilon(c+k)\delta=d-h.\end{cases}\qquad (S'_M)$$

Теперь предположим, что $\varepsilon=1$ и рассмотрим следующие случаи.

1. Если $(h,k)\neq(0,0)$, то определитель матрицы, соответствующей системе (S_M) относительно переменных γ, δ равен $h^2+k^2\neq0$, и следовательно, $(\gamma,\delta)=(1,0)$.

2. Если $(h,k)=(0,0)$ и $(c,d)\neq(0,0)$, то система (S'_M) принимает вид

$$\begin{cases}c\gamma+d\delta=c,\\ d\gamma-c\delta=d.\end{cases}\qquad (S''_M)$$

Определитель матрицы, соответствующей системе, равен $-c^2-d^2\neq 0$, и следовательно, $(\gamma,\delta)=(1,0)$.

Для завершения доказательства рассмотрим случай $\varepsilon=-1$. Имеем

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\varepsilon&0&0\\0&0&\gamma&-\varepsilon\delta\\0&0&\delta&\varepsilon\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\varepsilon&0&0\\0&0&\gamma&-\varepsilon\delta\\0&0&\delta&\varepsilon\gamma\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\gamma^2-\varepsilon\delta^2&-\varepsilon\gamma\delta-\gamma\delta\\0&0&\gamma\delta+\varepsilon\gamma\delta&-\varepsilon\delta^2+\gamma^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\Phi^2=\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$. □

Следствие 5. *Допустим, что четырёхмерная строго* $\mathbb{C}$*-ассоциативная алгебра с делением* $\mathcal{A}$ *имеет таблицу умножения вида* (T_l) *или* (T_m)*, где* $(c,d,h,k)\neq(0,0,0,0)$*. Тогда группа автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *содержит только тривиальный и инволютивные автоморфизмы.*

Из предыдущего следствия и уравнения (L_1') вытекает следствие.

Следствие 6. *Пусть четырёхмерная строго* $\mathbb{C}$*-ассоциативная алгебра с делением* $\mathcal{A}$ *имеет таблицу умножения вида* (T_l) *или* (T_m)*, где* $(c,d,h,k)\neq(0,0,0,0)$ *и* $f\neq -b$*. Тогда* $\mathcal{A}$ *является UG-алгеброй.*

6.2. Автоморфизмы алгебры $\mathbb{H}_{f,g}$

Как обычно, под подпространством $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ будем понимать множество всех чисто векторных кватернионов в алгебре $\mathbb{H}$. Для дальнейшего нам потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 6. *Пусть* $a=\alpha+u$, $b=\beta+v$ *— два ненулевых кватерниона в алгебре* $\mathbb{H}=\mathbb{R}\oplus\mathrm{Im}(\mathbb{H})$*. Тогда*

1) $ab=ba$ *в том и только в том случае, когда* b *принадлежит подпространству* $\mathbb{R}+\mathbb{R}a$;
2) $ab=-ba$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha=\beta=0$ *и* $(u\mid v)=0$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Справедливы следующие равенства:

$$ab-ba=(\alpha+u)(\beta+v)-(\beta+v)(\alpha+u)=$$
$$=(\alpha\beta+\alpha v+\beta u+(u\mid v)+u\wedge v)-(\beta\alpha+\beta u+\alpha v+(v\mid u)+v\wedge u)=2u\wedge v.$$

Таким образом,

$$ab=ba\iff u,\ v\ \text{линейно зависимы}\iff b\in\mathbb{R}+\mathbb{R}a.$$

Докажем второе утверждение.

$$\begin{aligned}0 &= ab + ba = (\alpha + u)(\beta + v) + (\beta + v)(\alpha + u) = \\ &= (\alpha\beta + \alpha v + \beta u + (u \mid v) + u \wedge v) + (\beta\alpha + \beta u + \alpha v + (v \mid u) + v \wedge u) = \\ &= 2\big(\alpha\beta + (u \mid v)\big) + 2(\alpha v + \beta u).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \alpha\beta + (u \mid v) = 0, & (1) \\ \alpha v + \beta u = 0. & (2) \end{cases}$$

Если $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, то согласно равенству (2) векторы u, v коллинеарны, и следовательно, a и b должны коммутировать, что невозможно. Таким образом, $\alpha = \beta = 0$ и $(u \mid v) = 0$. Обратное утверждение очевидно. □

Докажем основной результат этого раздела.

Теорема 7. *Пусть $f, g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ — линейные биекции, сохраняющие 1, т. е. $f(1) = g(1) = 1$. Соответствующий изотоп обозначим $\mathbb{H}_{f,g} := (\mathbb{H}, \diamond)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Существует нетривиальный автоморфизм Φ алгебры $\mathbb{H}_{f,g}$, такой что $f(1) = g(1) = 1$.*
2. *Изотоп $\mathbb{H}_{f,g}$ обладает двумерной подалгеброй $\mathcal{B}$, которая содержит 1, и оба подпространства $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^\perp$ инвариантны относительно $\{f, g\}$.*
3. *Изотоп $\mathbb{H}_{f,g}$ обладает инволютивным автоморфизмом, который сохраняет 1.*
4. *-1 является элементом спектра некоторого автоморфизма $H_{f,g}$, который сохраняет 1.*

Доказательство. Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2$. Учитывая, что $\Phi(1) = 1$, и применяя следствие 2, получаем, что автоморфизм Φ принадлежит группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ и коммутирует с операторами f и g. Так как подалгебра $\mathcal{B} := E_1(\Phi)$ алгебры $\mathbb{H}$ является инвариантной относительно множества $\{f, g\}$, то она является подалгеброй $\mathbb{H}_{f,g}$. Её размерность не превышает 2, так как $\Phi \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{H}}$. С другой стороны, существует элемент $a \in \mathbb{H}$ с нормой, равной 1, такой что $\Phi = L_a \circ R_{\bar{a}}$ [23, с. 215], и подалгебра $\mathcal{B}$ содержит $\mathbb{R} + \mathbb{R}a$. С другой стороны, $a \neq \pm 1$. Следовательно, $\mathbb{R} + \mathbb{R}a$ имеет размерность 2 и совпадает с множеством $\mathcal{B}$. Более того, существует элемент $u \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ с нормой, равной 1, такой что $\mathbb{R} + \mathbb{R}a = \mathbb{R} + \mathbb{R}u$.

Автоморфизм Φ является изометрией [23, с. 215] и действует инвариантно на пространстве $\mathcal{B}^\perp$. Допустим, что v принадлежит пространству $\mathcal{B}^\perp$ и имеет единичную норму. Тогда $\{v, uv\}$ является ортогональным базисом $\mathcal{B}^\perp$ и может быть расширен до ортонормированного базиса $\mathcal{E} = \{1, u, v, uv\}$ алгебры $\mathbb{H}$.

В заключение покажем, что операторы f и g действуют инвариантно на пространстве $\mathcal{B}^\perp$. Мы докажем этот факт только для f, так как доказательство для g аналогично. В самом деле, существуют действительные числа α, β, такие что $\alpha^2+\beta^2=1$ и $\Phi(v)=\alpha v+\beta\ uv$. Следовательно,

$$\Phi(uv)=\Phi(u)\Phi(v)=u(\alpha v+\beta uv)=-\beta v+\alpha uv.$$

Такие образом, ограничение оператора Φ на подпространство $\mathcal{B}^\perp$ является вращением и матрица M_Φ оператора Φ в базисе $\mathcal{E}$ имеет вид

$$M_\Phi=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&&\\0&1&&\\\hline&&\alpha&-\beta\\&&\beta&\alpha\end{array}\right).$$

Матрица M_f оператора f в базисе $\mathcal{E}$ имеет вид

$$M_f=\left(\begin{array}{cc|cc}1&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\\hline&&a_{33}&a_{34}\\&&a_{43}&a_{44}\end{array}\right)$$

для некоторых вещественных a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{33}, a_{34}, a_{43}, a_{44}.

Если $\beta=0$, то $\alpha=\pm1$ и подпространство $\mathcal{B}^\perp$ (которое совпадает с $E_{-1}(\Phi)$ при $\alpha=-1$) инвариантно относительно f. Пусть $\beta\neq0$. Заметим, что операторы Φ, f коммутируют тогда и только тогда, когда соответствующие им матрицы тоже коммутируют. Имеем

$$M_\Phi M_f=\left(\begin{array}{cc|cc}1&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\\hline&&\alpha a_{33}-\beta a_{43}&\alpha a_{34}-\beta a_{44}\\&&\beta a_{33}+\alpha a_{43}&\beta a_{34}+\alpha a_{44}\end{array}\right),$$

$$M_f M_\Phi=\left(\begin{array}{cc|cc}1&a_{12}&\alpha a_{13}+\beta a_{14}&-\beta a_{13}+\alpha a_{14}\\0&a_{22}&\alpha a_{23}+\beta a_{24}&-\beta a_{23}+\alpha a_{24}\\\hline&&\alpha a_{33}+\beta a_{34}&-\beta a_{33}+\alpha a_{34}\\&&\alpha a_{43}+\beta a_{44}&-\beta a_{43}+\alpha a_{44}\end{array}\right).$$

Таким образом,

$$M_\Phi M_f=M_f M_\Phi\Longleftrightarrow\begin{cases}(\alpha-1)a_{13}+\beta a_{14}=0, & (1)\\-\beta a_{13}+(\alpha-1)a_{14}=0, & (2)\\(\alpha-1)a_{23}+\beta a_{24}=0, & (3)\\-\beta a_{23}+(\alpha-1)a_{24}=0, & (4)\\\beta(a_{34}+a_{43})=0, & (5)\\\beta(a_{33}-a_{44})=0. & (6)\end{cases}$$

Системы, составленные из уравнений (1), (2) и уравнений (3), (4), имеют один и тот же определитель Δ, равный

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha-1&\beta\\-\beta&\alpha-1\end{vmatrix}=2(1-\alpha).$$

Тогда $\alpha \neq 1$, так как $\alpha^2+\beta^2=1$ и $\beta \neq 0$. Таким образом, $\Delta \neq 0$ и $a_{13}=a_{14}=a_{23}=a_{24}=0$. Следовательно, оператор f действует инвариантно на пространстве $\mathcal{B}^\perp$. Заметим, что из уравнений (5), (6) вытекает, что $(a_{43},a_{44})=(-a_{34},a_{33})$, так как $\beta \neq 0$. Следовательно, ограничение f на подпространство $\mathcal{B}^\perp$ является вращением с точностью до умножения на скаляр.

Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 3$. Подпространство $\mathcal{B}$ является инвариантным относительно $\{f^{-1},g^{-1}\}$. Таким образом, $xy=f^{-1}(x)\diamond g^{-1}(y)\in\mathcal{B}$ для всех $x,y\in\mathcal{B}$. Следовательно, $\mathcal{B}$ является подалгеброй $\mathbb{H}$, и мы имеем $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp=\mathcal{B}^\perp\mathcal{B}=\mathcal{B}^\perp$ и $\mathcal{B}^\perp\mathcal{B}^\perp\subseteq\mathcal{B}$ [14, лемма 6.3]. Так как $\mathcal{B}^\perp$ инвариантно относительно $\{f,g\}$, получаем $\mathcal{B}\diamond\mathcal{B}^\perp=\mathcal{B}^\perp\diamond\mathcal{B}=\mathcal{B}^\perp$ и $\mathcal{B}^\perp\diamond\mathcal{B}^\perp\subseteq\mathcal{B}$. Поскольку $1\in\mathcal{B}$, используя предложение 1, мы получаем требуемое утверждение.

В заключение отметим, что импликации $3 \Longrightarrow 4$ и $4 \Longrightarrow 1$ очевидны. □

Следствие 7. *Пусть $f\colon\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ — линейная биекция, сохраняющая 1. Тогда 1 является единственным ненулевым центральным идемпотентом в алгебре $\mathbb{H}_{f,f}$, который сохраняется любым автоморфизмом алгебры $\mathbb{H}_{f,f}$. Более того, следующие утверждения эквивалентны.*

1. *$\mathbb{H}_{f,f}$ — BF-алгебра.*
2. *В алгебре $\mathbb{H}_{f,f}$ существует двумерная подалгебра $\mathcal{B}$, содержащая 1, при этом подпространства $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^\perp$ инвариантны относительно f.*
3. *Алгебра $\mathbb{H}_{f,f}$ обладает инволютивным автоморфизмом.*
4. *-1 принадлежит спектру некоторого автоморфизма алгебры $\mathbb{H}_{f,f}$.*

7. Алгебры $\mathcal{A}$ с $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})=\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

7.1. Пример на основе слияния двух алгебр

В [6] авторы строят вещественную алгебру с делением размерности 4 путём слияния двух алгебр с делением размерности 2, удовлетворяющих некоторым условиям, с помощью видоизменённого процесса удвоения Кэли—Диксона. При этом $(x,y)\mapsto(x,-y)$ является инволютивным автоморфизмом. Такие алгебры являются BF-алгебрами.

Рассмотрим семейство подалгебр $\mathcal{F}_\alpha$ ($\alpha\in\mathbb{R}$) со следующей таблицей умножения.

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	αe_2	e_3	αe_4
e_2	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	$-e_4$	$-e_3-e_4$	e_2	e_1+e_2

Алгебра $\mathcal{F}_\alpha$ получена путём слияния двух алгебр $\mathcal{A}_\alpha$ и $\mathcal{B}$ со следующими таблицами умножения:

$$\begin{array}{|c|cc|}\hline & u & v \\ \hline u & u & \alpha v \\ v & -v & u \\ \hline\end{array}\ , \qquad \begin{array}{|c|cc|}\hline & u & v \\ \hline u & u & -v \\ v & -v & -u-v \\ \hline\end{array}\ .$$

Теорема 8. *$\mathcal{F}_\alpha$ является вещественной алгеброй с делением тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$.*

Доказательство. Согласно [9, теорема 3] $\mathcal{B}$ является алгеброй с делением, и $\mathcal{A}_\alpha$ — алгебра с делением в том и только в том случае, когда $\alpha > 0$. Это означает, что $\mathcal{F}_\alpha$ — алгебра с делением тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$ [6, теорема 3]. □

В дальнейшем будем считать, что $\alpha > 0$.

Лемма 7. *Единственными решениями уравнений $R_x^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_\alpha}$, $x^2 = -e_1$ являются элементы $\pm e_1$ и $\pm e_3$ соответственно.*

Доказательство. Пусть $x = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ — произвольный элемент алгебры $\mathcal{F}_\alpha$. Тогда матрицы операторов R_x, R_x^2 в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} a & b & -c & d \\ b\alpha & -a & d & c+d \\ c & d & a & -b \\ d\alpha & -c & -b & -a-b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Delta & -2cd & -2ac & * \\ (\alpha+1)cd+\alpha d^2 & * & * & * \\ * & 2bc & * & b^2+2cd+d^2 \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

где $\Delta = a^2+\alpha b^2-c^2+\alpha d^2$. Легко видеть, что единственным решением уравнения $R_x^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_\alpha}$ является $x = \pm e_1$. Непосредственной проверкой доказывается второе утверждение. □

Лемма 8. *Пусть $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F}_\alpha)$. Тогда $\Phi(e_1) = e_1$ и $\Phi(e_3) = \pm e_3$. В частности, автоморфизм Φ имеет непустой спектр.*

Доказательство. Этот результат вытекает из леммы 7 и того факта, что $-e_1$ не является идемпотентом. □

Теорема 9. *Алгебра $\mathcal{F}_\alpha$ является BF-алгеброй с группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_\alpha) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{F}_\alpha}, \Phi\}$, где Φ — инволютивный автоморфизм. В частности, $\mathrm{Der}(\mathcal{F}_\alpha) = \{0\}$.*

Доказательство. Предположим, что $\Phi \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_\alpha}$. Тогда $\Phi(e_1) = e_1$, $\Phi(e_3) = \varepsilon e_3$, где $\varepsilon = \pm 1$. С другой стороны, очевидно, что $\Phi(e_2)$ принадлежит подпространству $E_\alpha(L_{e_1}) = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_4$ и, более того, $\Phi(e_2)^2 = \Phi(e_2^2) = \Phi(e_1) = e_1$. Таким образом, $\Phi(e_2)$ принадлежит подпространству $\mathbb{R}e_2$ и $\Phi(e_2) = \varepsilon' e_2$, где $\varepsilon' = \pm 1$. В результате $\Phi(e_4) = \Phi(-e_2e_3) = -\varepsilon\varepsilon' e_2e_3 = \varepsilon\varepsilon' e_4$, и следовательно, $\Phi^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_\alpha}$. При этом $\Phi(e_2)$ не может равняться $-e_2$, так как иначе справедливы равенства

$$e_1 - e_2 = \Phi(e_1 + e_2) = \Phi(e_4^2) = \big(\Phi(e_4)\big)^2 = e_4^2,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, существует только один инволютивный автоморфизм. □

7.2. Однопараметрическое семейство алгебр $\mathcal{A}_\alpha$

В [32] было изучено однопараметрическое семейство четырёхмерных вещественных алгебр $\mathcal{A}_\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) со следующей таблицей умножения в базисе e_1, e_2, e_3, e_4:

Таблица (T_α)

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	αe_1	αe_2	αe_3	αe_4
e_2	$-\alpha e_2$	αe_1	αe_4	$-\alpha e_3$
e_3	$-\alpha e_3$	$-\alpha e_4$	αe_1	αe_2
e_4	$-e_3 - e_4$	$e_3 - e_4$	$e_1 - e_2$	$e_1 + e_2$

Известно, что если $\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$, то $\mathcal{A}_\alpha$ является алгеброй с делением [32, с. 7], алгебра дифференцирований которой тривиальна [32, предложение 2]. Здесь мы улучшим полученный результат. Для этого нам понадобится следующая очевидная лемма.

Лемма 9. $E_{-\alpha}(R_{e_1}) = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$.

Теорема 10. *$\mathcal{A}_\alpha$ является алгеброй с делением тогда и только тогда, когда $\alpha \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \neq 0$, рассмотрим линейную биекцию $\varphi\colon \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, матрица которой в базисе 1, i, j, k имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & & & \\ & -\alpha^2 & & \\ & & -\alpha^2 & \alpha \\ & & & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда таблица умножения алгебры с делением $\mathbb{H}_{\varphi,\,\mathrm{Id}_{\mathbb{H}}}$ в базисе $e_1 = \alpha^{-1} \cdot 1$, $e_2 = \alpha^{-1} i$, $e_3 = \alpha^{-1} j$, $e_4 = -\alpha^{-1} k$ совпадает с таблицей (T_α). Следовательно, $\mathcal{A}_\alpha$ также является алгеброй с делением. Обратное утверждение очевидно. □

Теорема 11. *Если $\alpha \neq 0, -1$, то $\mathcal{A}_\alpha$ — BF-алгебра с группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_\alpha) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\alpha}, \Phi\}$, Φ — инволютивный автоморфизм. В частности, $\mathrm{Der}(\mathcal{A}_\alpha) = \{0\}$.*

Доказательство. Рассмотрим автоморфизм Φ алгебры $\mathcal{A}_\alpha$. Тогда $\Phi(\alpha^{-1}e_1) = \alpha^{-1}e_1$, так как $\alpha^{-1}e_1$ — левая единица. Таким образом, $\Phi(e_1) = e_1$. Так как $e_2, e_3 \in E_{-\alpha}(R_{e_1}) = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$ и $\Phi(e_1) = e_1$, получаем, что $\Phi(e_2), \Phi(e_3) \in \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$. Рассмотрим $\Phi(e_2) = ae_2 + be_3$, $\Phi(e_3) = a'e_2 + b'e_3$. Тогда равенства $\Phi(e_2)^2 = \Phi(e_3)^2 = \Phi(\alpha e_1)$ означают, что $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = 1$, так как $\alpha \neq 0$.

Пусть $\Phi(e_4) = a''e_1 + b''e_2 + c''e_3 + d''e_4$. Так как матрица Φ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 обратима, то $d'' \neq 0$. Из равенства $\Phi(e_4)e_1 = \Phi(e_4e_1) = \Phi(-e_3 - e_4)$ вытекает, что $a'' = 0$, так как $\alpha \neq -1$. Из равенства $\Phi(e_4)^2 = \Phi(e_1 + e_2)$ получаем, что $b'' = 0$, так как $d'' \neq 0$, и, значит, $b = 0$ и $a \neq 0$. Наконец, $\alpha\Phi(e_4) = \Phi(e_2e_3) = ae_2(a'e_2 + b'e_3) = aa'\alpha e_1 + ab'\alpha e_4$. Следовательно, $\Phi(e_4) = aa'e_1 + ab'e_4$ и $aa' = 0$, $a' = 0$.

В результате матрица Φ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab' \end{pmatrix}$$

для некоторых вещественных чисел a, b', таких что $a^2 = b'^2 = 1$.

Если $a = -1$, рассмотрим два случая.

1. Если $b' = 1$, то $E_1(\Phi) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3$ и $e_4 \in E_{-1}(\Phi)$. Таким образом, $e_4^2 \in E_1(\Phi)$, что приводит к противоречию.
2. Если $b' = -1$, то $E_1(\Phi) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_4$, и снова $e_4^2 \in E_1(\Phi)$.

Следовательно, $a = 1$ и автоморфизм Φ является либо тождественным $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\alpha}$, либо инволютивным $\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \lambda_3e_3 + \lambda_4e_4 \mapsto \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 - \lambda_3e_3 - \lambda_4e_4$. $\square$

7.3. Алгебры с двумя перестановочными инволютивными автоморфизмами

Будем пользоваться следующим фактом из теории групп.

Лемма 10. *Для конечной группы G равносильны следующие утверждения*:
1) $G = \langle g_1, \ldots, g_n\rangle$, $\operatorname{ord} g_i = 2$;
2) $|G| = 2^n$ *и* $G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{n \text{ раз}}$.

Предложение 3. *Пусть вещественная четырёхмерная алгебра с делением $\mathcal{A}$ обладает двумя различными перестановочными инволютивными автоморфизмами f, g. Пусть $\mathcal{B} = E_1(f) \cap E_1(g)$.*

1. *$\mathcal{B}$ имеет размерность 1 и порождается ненулевым идемпотентом e.*
2. *$\mathcal{B}$ — подалгебра, e — единица, операторы f, g — инволютивные автоморфизмами изотопа $\mathcal{A}_{R_e^{-1},\, L_e^{-1}}$.*

Доказательство. 1. Согласно лемме 1 операторы f, g диагонализируемы в одном и том же базисе, так как f, g коммутируют. Таким образом, f и g обладают общим собственным вектором e с собственным значением 1, иначе выполнялось бы соотношение $g = -f$, и следовательно, $g(xy) \neq g(x)g(y)$. Значит, $\mathcal{B}$ содержит элемент e и $\dim\mathcal{B} \geqslant 1$. Так как $f \neq g$, то $E_1(f) \neq E_1(g)$, и следовательно, $E_1(f) \cap E_1(g)$ имеет размерность не больше 1. Таким образом, $\dim\mathcal{B} = 1$ и алгебра $\mathcal{B}$ порождается элементом e, а тогда и элементом e^2. Следовательно, элемент e является идемпотентом.

2. Отметим, что f коммутирует с обоими операторами R_e, L_e, так как $e \in E_1(f)$. Следовательно, оба оператора R_e^{-1}, L_e^{-1} коммутируют с f и g. Таким образом f, g — инволютивные автоморфизмы алгебры $\mathcal{A}_{R_e^{-1},\ L_e^{-1}}$ с единицей, равной $e^2 = e$. В заключение отметим, что $\mathcal{B}$ инвариантна относительно R_e^{-1}, L_e^{-1} и, следовательно, является подалгеброй $\mathcal{A}_{R_e^{-1},\ L_e^{-1}}$. □

Назовём алгебру $\mathbb{H}_{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')}$ из примера 2 *алгеброй Брука* и докажем основной результат этого раздела.

Теорема 12. *Пусть $\mathcal{A}$ — вещественная четырёхмерная алгебра с делением. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *$\mathcal{A}$ обладает двумя перестановочными инволютивными автоморфизмами*;
2) *существует ненулевой идемпотент $e \in \mathcal{A}$, такой что соответствующий изотоп $\mathcal{A}_{R_e^{-1},\ L_e^{-1}}$ изоморфен алгебре Брука*;
3) $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *содержит группу Клейна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Рассмотрим $\mathcal{A}_{R_e^{-1},\ L_e^{-1}} := (\mathcal{A}, \diamond)$ из предложения 3. Покажем, что существуют числа $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$, такие что алгебра $\mathcal{A}_{R_e^{-1},\ L_e^{-1}}$ изоморфна алгебре $\mathbb{H}_{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')} = (\mathbb{H}, *)$. Так как e — единица в $\mathcal{A}_{R_e^{-1},\ L_e^{-1}}$, то $f(e) = g(e) = e$. Следовательно, $\{e\}$ может быть дополнен до базиса $\{e, u, v, w\}$ в алгебре $\mathcal{A}$, в котором матрица оператора f имеет вид
$$M_1 = \mathrm{diag}\{1, 1, -1, -1\}.$$

Так как $fg = gf$, собственные подпространства $E_1(f)$, $E_{-1}(f)$ инвариантны относительно g. Поскольку $g \neq f$, матрица оператора g в базисе $\{e, u, v, w\}$ имеет один из следующих видов:
$$M_2 = \mathrm{diag}\{1, -1, 1, -1\},$$
$$M_3 = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, 1\}.$$

Матрицы M_2, M_3 соответствуют линейным отображениям
$$\mathcal{A} = \mathrm{span}\{e, v\} \oplus \mathrm{span}\{u, w\} \to \mathcal{A}, \quad x + y \mapsto x - y,$$
$$\mathcal{A} = \mathrm{span}\{e, w\} \oplus \mathrm{span}\{u, v\} \to \mathcal{A}, \quad x + y \mapsto x - y,$$
являющимся инволютивными автоморфизмами в $\mathcal{A}$. Далее,
$$u \diamond u,\ v \diamond v,\ w \diamond w \in E_1(f) \cap E_1(g) = \mathbb{R}e,$$
$$v \diamond w,\ w \diamond v \in E_1(f) \cap E_{-1}(g) = \mathbb{R}u,$$
$$u \diamond w,\ w \diamond u \in E_{-1}(f) \cap E_1(g) = \mathbb{R}v,$$
$$u \diamond v,\ v \diamond u \in E_{-1}(f) \cap E_{-1}(g) = \mathbb{R}w.$$

Очевидно, что $\mathrm{span}\{e, u\}$, $\mathrm{span}\{e, v\}$, $\mathrm{span}\{e, w\}$ — подалгебры алгебры $(\mathcal{A}, \diamond)$, изоморфные $\mathbb{C}$ [26, 34]. Значит, мы можем выбрать u, v, w так, что $u \diamond u = v \diamond v = w \diamond w = -e$. Тогда существуют числа $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$, такие что умножение в алгебре $(\mathcal{A}, \diamond)$ в базисе e, u, v, w совпадает с умножением в $(\mathbb{H}, *)$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Очевидно, что два отображения

$$a + bi + cj + dk \mapsto a + bi - cj - dk,$$
$$a + bi + cj + dk \mapsto a - bi + cj - dk$$

являются коммутирующими инволютивными автоморфизмами, и требуемый результат вытекает из предложения 3.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) является следствием леммы 10. □

8. Заключение

В разделах 6, 7 мы построили несколько семейств n-параметрических ($n = 1, 6, 8$) алгебр с делением размерности 4, группа автоморфизмов которых невелика. Это показывает, что класс $\mathcal{TD}_4$ всех вещественных алгебр с делением размерности 4 с тривиальной алгеброй дифференцирований весьма велик, что можно проиллюстрировать приведёнными ниже таблицами умножения (T_U), (T_R), (T_L), (T_M), (T_D), соответствующими алгебрам с единицей.

1. UG-алгебры, заданные таблицами с 32 параметрами.

Таблица (T_U)

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	$\ast\ \ast\ \ast\ \ast$	$\ast\ \ast\ \ast\ \ast$
e_3	e_3	$\ast\ \ast\ \ast\ \ast$	$\ast\ \ast\ \ast\ \ast$	$\ast\ \ast\ \ast\ \ast$
e_4	e_4	$\ast\ \ast\ \ast\ \ast$	$\ast\ \ast\ \ast\ \ast$	$\ast\ \ast\ \ast\ \ast$

2. Алгебры, допускающие инволютивный автоморфизм (16 параметров).

Таблица (T_R)

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	$\alpha e_3 + \beta e_4$	$\gamma e_3 + \delta e_4$
e_3	e_3	$\lambda e_3 + \mu e_4$	$\eta e_1 + \theta e_2$	$\zeta e_1 + \xi e_2$
e_4	e_4	$\nu e_3 + \pi e_4$	$\iota e_1 + \rho e_2$	$\omega e_1 + \sigma e_2$

3. Левые строго $\mathbb{C}$-ассоциативные алгебры (8 параметров).

Таблица (T_L)

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$	$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 + \pi e_4$
e_4	e_4	e_3	$-\beta e_1 + \alpha e_2 - \delta e_3 + \gamma e_4$	$-\mu e_1 + \lambda e_2 - \pi e_3 + \nu e_4$

4. Строго $\mathbb{C}$-ассоциативная MD-алгебра (8 параметров).

Таблица (T_M)

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$	$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 + \pi e_4$
e_4	e_4	e_3	$-\lambda e_1 - \mu e_2 - \nu e_3 - \pi e_4$	$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$

5. Алгебры с ненулевыми дифференцированиями (8 параметров).

Таблица (T_D)

	e	u	x_1	x_2
e	e	u	x_1	x_2
u	u	$-e$	$\alpha x_1 + \beta x_2$	$-\beta x_1 + \alpha x_2$
x_1	x_1	$\gamma x_1 + \delta x_2$	$\lambda e + \mu u$	$\omega e + \theta u$
x_2	x_2	$-\delta x_1 + \gamma x_2$	$-\omega e - \theta u$	$\lambda e + \mu u$

Литература

[1] Albert A. A. Absolute valued real algebras // Ann. Math. — 1947. — Vol. 48. — P. 495—501.

[2] Alsaody S. Classification of the finite-dimensional real division composition algebras having a non-Abelian derivation algebra // J. Algebra. — 2016. — Vol. 445. — P. 35—77.

[3] Althoen S. C., Hansen K. D., Kugler L. D. $\mathbb{C}$-associative algebras of dimension 4 over $\mathbb{R}$ // Algebras Groups Geom. — 1986. — Vol. 3. — P. 329—360.

[4] Althoen S. C., Hansen K. D., Kugler L. D. Four-dimensional real algebras satisfying two $\mathbb{C}$-associative conditions // Algebras Groups Geom. — 1987. — Vol. 4. — P. 395—419.

[5] Althoen S. C., Hansen K. D., Kugler L. D. Rotational scaled quaternion division algebras // J. Algebra. — 1992. — Vol. 146. — P. 124—143.

[6] Althoen S. C., Hansen K. D., Kugler L. D. Fused four-dimensional real division algebras // J. Algebra. — 1994. — Vol. 170. — P. 649—660.

[7] Althoen S. C., Hansen K. D., Kugler L. D. Four-dimensional real algebras satisfying left or right $\mathbb{C}$-associativity // Commun. Algebra. — 1998. — Vol. 26, no. 2. — P. 565—587.

[8] Althoen S. C., Hansen K. D., Kugler L. D. Four-dimensional real algebras satisfying middle $\mathbb{C}$-associativity // Algebras Groups Geom. — 2000. — Vol. 17. — P. 123—148.

[9] Althoen S. C., Kugler L. D. When is $\mathbb{R}^2$ a division algebra? // Am. Math. Mon. — 1983. — Vol. 90. — P. 625—635.

[10] Benkart G. M., Osborn J. M. An investigation of real division algebras using derivations // Pacific J. Math. — 1981. — Vol. 96. — P. 265—300.

[11] Benkart G. M., Osborn J. M. The derivation algebra of a real division algebra // Amer. J. Math. — 1981. — Vol. 103. — P. 1135—1150.

[12] Bott R., Milnor J. On the parallelizability of the spheres // Bull. Amer. Math. Soc. — 1958. — Vol. 64. — P. 87—89.

[13] Bruck R. H. Some results in the theory of linear non-associative algebras // Trans. Am. Math. Soc. — 1944. — Vol. 56. — P. 141—199.

[14] Calderón A., Kaïdi A., Martín C., Morales A., Ramírez M., Rochdi A. Finite-dimensional absolute valued algebras // Israël J. Math. — 2011. — Vol. 184. — P. 193—220.

[15] Cuenca J. A., de los Santos Villodres R., Kaïdi A., Rochdi A. Real quadratic flexible division algebras // Linear Algebra Appl. — 1999. — Vol. 290. — P. 1—22.

[16] Darpö E. On the classification of the real flexible division algebras // Colloq. Math. — 2006. — Vol. 105, no. 1. — P. 1—17.

[17] Diabang A. S., Diankha O., Ly M., Rochdi A. A note on the real division algebras with non-trivial derivations // Int. J. Algebra. — 2016. — Vol. 10, no. 1. — P. 1—11.

[18] Diabang A. S., Diankha O., Rochdi A. On the automorphisms of absolute-valued algebras // Int. J. Algebra. — 2016. — Vol. 10, no. 3. — P. 113—123.

[19] Dickson L. E. Linear algebras with associativity not assumed // Duke Math. J. — 1935. — Vol. 1. — P. 113—125.

[20] Dieterich E. Classification, automorphism groups and categorical structure of the two-dimensional real division algebras // J. Algebra Its Appl. — 2005. — Vol. 4. — P. 517—538.

[21] Dokovic D. Z., Zhao K. Real division algebras with large automorphism group // J. Algebra. — 2004. — Vol. 282. — P. 758—796.

[22] Forsberg L. Four-dimensional absolute valued algebras. — Masters Thesis. — Uppsala Univ., 2009. —

[23] Hirzebruch F., Koecher M., Remmert R. Numbers. — New York: Springer, 1990. — (Grad. Texts Math.; Vol. 123).

[24] Kervaire M. Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$ // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1958. — Vol. 44. — P. 280—283.

[25] Pérez-Izquierdo J. M. Division composition algebras through their derivation algebras // J. Algebra. — 2006. — Vol. 303, no. 1. — P. 1—29.

[26] Petro J. Real division algebras of dimension > 1 contain $\mathbb{C}$ // Am. Math. Mon. — 1987. — Vol. 94. — P. 445—449.

[27] Ramírez M. I. On four dimensional absolute valued algebras // Proc. of the Int. Conf. on Jordan Structures (Málaga, June 1997) / A. Castellón, J. A. Cuenca, A. Fernández, C. Martín, eds. — Málaga, 1999. — P. 169—173.

[28] Rees D. The nuclei of non-associative division algebras // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1950. — Vol. 46. — P. 1—18.

[29] Rochdi A. Étude des algèbres réelles de Jordan non commutatives, de division, de dimension 8, dont l'algèbre de Lie des dérivations n'est pas triviale // J. Algebra. — 1995. — Vol. 178. — P. 843—871.

[30] Rochdi A. Eight-dimensional real absolute valued algebras with left unit whose automorphism group is trivial // Int. J. Math. Math. Sci. — 2003. — Vol. 70. — P. 4447—4454.

[31] Segre B. La teoria delle algebre ed alcune questione di realta // Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat., Rend. Mat. E Appl. Ser. 5. — 1954. — Vol. 13. — P. 157—188.

[32] Tvalavadze M., Vickery P. A note on division algebras of dimension four // J. Algebra Appl. — 2017. — Vol. 16. — 1750095.

[33] Waterhouse W. C. Nonassociative quaternion algebras // Algebras Groups Geom. — 1987. — Vol. 4. — P. 365—378.

[34] Yang C. T. Division algebras and fibrations of spheres by great spheres // J. Differential Geom. — 1981. — Vol. 16. — P. 577—593.