Регулярность полугрупп отображений, сохраняющих заданное бинарное отношение

В. А. ЯРОШЕВИЧ
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»,
ООО «Авайя СНГ»
e-mail: v-yaroshevich@ya.ru

УДК 512.534.3

Ключевые слова: полное отображение, частичное отображение, многозначное отображение, регулярность, частичный порядок, квазипорядок, эквивалентность, бинарное отношение, полугруппа, цепь, антицепь.

Аннотация

Рассматриваются полугруппы полных, частичных и многозначных отображений множества X в X, сохраняющих заданное на X бинарное отношение σ. Предложены несколько вариантов определений сохранения σ для частичных и многозначных отображений. Приведён обзор результатов, характеризующих регулярность упомянутых выше полугрупп в случае, когда σ является частичным порядком, квазипорядком, эквивалентностью и ещё некоторыми частными случаями бинарных отношений. Также рассмотрен вопрос регулярности полугруппы полных отображений, сохраняющих одновременно частичный порядок и эквивалентность.

Abstract

V. A. Yaroshevich, On regularity of semigroups of maps that preserve a binary relation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2021), no. 4, pp. 225—240.

We consider semigroups of full transformations, partial maps, and multi-value maps from a set X to X, where every map preserves a binary relation σ defined on X. We suggest several definitions for the preservation of σ for partial maps and for multi-value maps. We review results about regularity of the semigroups mentioned above in the cases where σ is a partial order, a quasi-order, an equivalence, or one of some special kinds of binary relations. Also we consider the question about regularity of the semigroup of full transformations that preserve a partial order and an equivalence simultaneously.

1. Введение

Основные сведения из теории полугрупп можно найти в [8]. Сформулируем необходимые в дальнейшем определения. Элемент a полугруппы S называется *регулярным*, если существует такой элемент $b \in S$, что $a = aba$. Полугруппа называется *регулярной*, если все её элементы регулярны.

Фундаментальная и прикладная математика, 2021, том 23, № 4, с. 225—240.

Пусть X — произвольное множество. Обозначим через $T(X)$ полугруппу преобразований множества X, т. е. отображений $\alpha\colon X \to X$ с операцией умножения, определённой равенством $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ при $x \in X$, $\alpha, \beta \in T(X)$. Хорошо известно, что $T(X)$ — регулярная полугруппа.

Наряду с преобразованиями множества X рассмотрим частичные и многозначные отображения из X в X. Обозначим их соответственно через $PT(X)$ и $B(X)$. Несложно показать, что $T(X)$ — это подполугруппа полугруппы $PT(X)$, а $PT(X)$ — это подполугруппа полугруппы $B(X)$.

Бинарное отношение σ на множестве X — это подмножество $X \times X$. Каждому бинарному отношению можно поставить в соответствие некоторую булеву матрицу. Умножению бинарных отношений соответствует умножение булевых матриц, осуществляемое по правилу

$$(\sigma\tau)_{ij} = \bigvee_k \sigma_{ik}\tau_{kj},$$

где $\bigvee$ — дизъюнкция. При этом матрицы необязательно конечные, их произведение существует всегда, так как $\{0,1\}$ — полная решётка. Множество бинарных отношений с операцией умножения образует полугруппу.

Существует изоморфизм между полугруппой многозначных отображений и полугруппой бинарных отношений:

$$y \in x\alpha \Longleftrightarrow (x, y) \in \sigma.$$

Через $\operatorname{dom}\alpha$ будем обозначать область определения отображения α:

$$\operatorname{dom}\alpha = \{x \mid \exists\, y\colon (x, y) \in \alpha\}.$$

Бинарное отношение $\sigma \subseteq X \times X$ называется *частичным порядком*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Бинарное отношение σ называется *квазипорядком*, если оно рефлексивно и транзитивно. При этом пара (X, σ) называется *частично упорядоченным множеством* или *квазиупорядоченным множеством* соответственно. Если понятно, о каком бинарном отношении идёт речь, пишут X вместо (X, σ). Частично упорядоченное множество X называется *цепью* (или *линейно упорядоченным множеством*), если любые два элемента сравнимы друг с другом, и *антицепью*, если никакие два различные элемента не сравнимы:

$$X \text{ — цепь} \Longleftrightarrow \text{для каждых } x, y \in X \ x \leqslant y \text{ или } y \leqslant x,$$
$$X \text{ — антицепь} \Longleftrightarrow \text{для каждых } x, y \in X \ x \leqslant y \text{ влечёт } x = y.$$

Бинарное отношение σ называется *эквивалентностью*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если множество X наделено некоторой структурой, то естественно рассматривать такие преобразования $X \to X$, которые сохраняют эту структуру. В [10] дана характеристика полугруппы (частичных) отображений $X \to X$, сохраняющих некоторую совокупность отношений на множестве X. Будем говорить, что преобразование $\alpha \in T(X)$ *сохраняет* σ, если из того, что $(a, b) \in \sigma$, следует, что

$(a\alpha, b\alpha) \in \sigma$. Множество таких α образует подполугруппу (обозначение $T_\sigma(X)$) полугруппы $T(X)$.

Далее для нас будут представлять интерес условия регулярности полных, частичных и многозначных отображений из X в X, сохраняющих заданное на X бинарное отношение σ, а также условия регулярности полугрупп соответствующих отображений.

2. Условия регулярности полугруппы $T_\sigma(X)$

Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Свойства полугруппы $T_\leqslant(X)$ изучались многими авторами. Л. М. Глускин [3] доказал, что полугруппа $T_\leqslant(X)$ определяет квазиупорядоченное множество X с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма. А. Я. Айзенштат [1] получила представление полугруппы $T_\leqslant(X)$ образующими элементами и определяющими соотношениями в случае, когда X — цепь из n элементов, причём найденное множество $2n$ образующих неприводимо. В [2] А. Я. Айзенштат получила описание частично упорядоченных множеств X, у которых полугруппа $T_\leqslant(X)$ регулярна. В случае счётной цепи X условия регулярности, более прозрачные, чем в [2], получили В. И. Ким и И. Б. Кожухов [6]. Комбинаторным аспектам полугруппы $T_\leqslant(X)$ посвящены работы А. Лараджи и А. Умара [20].

Теорема 1 [13, предложение 1]. *Отображение α сохраняет отношение σ в том и только том случае, если*

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma \quad \text{(в смысле произведения бинарных отношений).}$$

Ввиду теоремы 1

$$T_\sigma(X) = \{\alpha \in T(X) \mid \alpha \text{ сохраняет } \sigma\} = \{\alpha \in T(X) \mid \sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma\}. \tag{1}$$

Обозначим через I, Y и Z произвольные множества, причём $I, Y, Z \neq \varnothing$ и $Y \cap Z = \varnothing$. Будем рассматривать следующие частично упорядоченные множества (рис. 1):

- $F_{Y,Z} = Y \cup Z$, где $y < z$ для всех $y \in Y$, $z \in Z$, а другие пары несравнимы;
- $G_{Y,Z} = Y \cup Z$, $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$, где $y_0 < z$, $y < z_0$ для всех $y \in Y$, $z \in Z$, а другие пары несравнимы;
- $C_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, где $1 < 4$, $1 < 5$, $2 < 5$, $2 < 6$, $3 < 6$, $3 < 4$;
- $L_I = \{a, c\} \cup \{b_i \mid i \in I\}$, где $a < b_i < c$ для всех $i \in I$.

Далее мы будем пользоваться понятием *квазиполной* цепи. За определением отсылаем читателя к [7].

Теорема 2 (А. Я. Айзенштат, М. Адамс, М. Гоулд [2,16]). *Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Тогда полугруппа $T_\leqslant(X)$ регулярна в том и только том случае, если X — квазиполная цепь, или X — антицепь, или X изоморфно какому-либо из множеств L_I, $F_{Y,Z}$, $G_{Y,Z}$, C_6.*

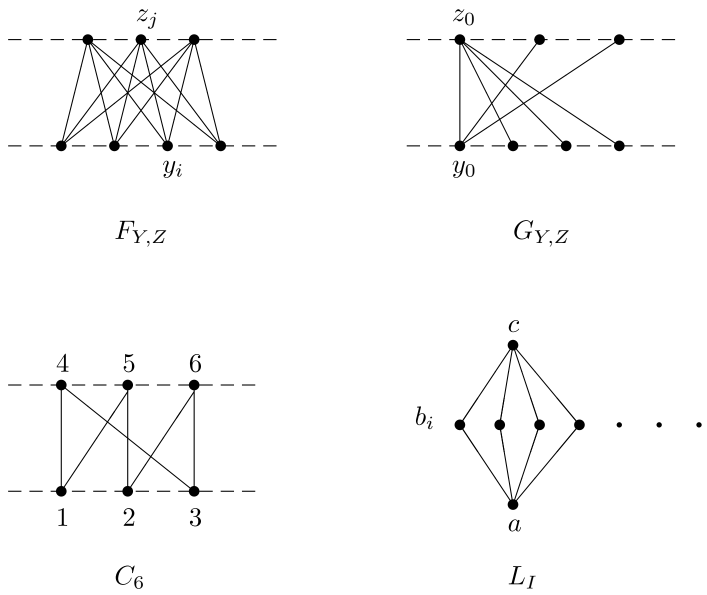

Рис. 1

Элемент a полугруппы S называется *слабо регулярным справа* (*слева*), если $a \in aSaS$ (соответственно $a \in SaSa$). Полугруппа S называется *слабо регулярной справа* (*слева*), если все её элементы слабо регулярны справа (слева). Полугруппу, которая слабо регулярна слева и справа, естественно назвать *слабо регулярной*. Мы рассмотрим более широкий класс полугрупп. А именно, будем говорить, что полугруппа S *слабо регулярна в широком смысле*, если каждый её элемент слабо регулярен слева или справа. Другими словами, $a \in SaSa \cup aSaS$ для всех $a \in S$. Понятно, что в любой полугруппе регулярный элемент является регулярным слева и справа, все регулярные полугруппы слабо регулярны слева и справа и тем более слабо регулярны в широком смысле. Примером слабо регулярной, но не регулярной полугруппы может служить простая справа полугруппа без идемпотентов. В конечной полугруппе понятия регулярного, слабо регулярного слева и слабо регулярного справа элемента совпадают (это нетрудно доказать, рассматривая главные факторы полугруппы). Поэтому для конечной полугруппы слабая регулярность в широком смысле равносильна регулярности.

Теорема 2 остаётся справедливой, если в ней условие регулярности заменить на условие слабой регулярности в широком смысле [7, теорема 1].

Теорема 3 [7, теорема 2]. *Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — квазиупорядоченное множество. Полугруппа $T_{\preccurlyeq}(X)$ слабо регулярна в широком смысле в том и только том* *случае, если выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) $x \preccurlyeq y$ *для любых* $x, y \in X$;
2) X — *частично упорядоченное множество, являющееся квазиполной цепью или антицепью или изоморфное какому-либо из множеств* L_I, $F_{Y,Z}$, $G_{Y,Z}$, C_6.

Следствие 1 [7, следствие из теоремы 2]. *Пусть* $(X, \preccurlyeq)$ — *квазиупорядоченное множество. Полугруппа* $T_{\preccurlyeq}(X)$ *регулярна в том и только том случае, если выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) $x \preccurlyeq y$ *для любых* $x, y \in X$;
2) X — *частично упорядоченное множество, являющееся квазиполной цепью или антицепью или изоморфное какому-либо из множеств* L_I, $F_{Y,Z}$, $G_{Y,Z}$, C_6.

Рассмотрим теперь особый класс бинарных отношений на множестве $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. А именно, пусть Ξ — множество бинарных отношений ξ на множестве X, удовлетворяющее следующим условиям:

1) ξ рефлексивно;
2) $(y, y+1) \in \xi$ при $y = 1, 2, \ldots, n-1$;
3) для каждых $x, y \in X$ $(x, y) \in \xi$ влечёт $x \leqslant y$.

Очевидно, что транзитивное замыкание отношения $\xi \in \Xi$ есть цепь. Таким образом, Ξ — класс бинарных отношений, «предшествующих» линейному порядку.

Пусть

$$|\xi| = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}.$$

Здесь $\|\xi_{ij}\|$ — булева матрица, соответствующая отношению ξ, т. е.

$$\xi_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } (i,j) \in \xi, \\ 0 & \text{при } (i,j) \notin \xi. \end{cases}$$

Тогда

$$2n - 1 \leqslant |\xi| \leqslant \frac{n^2 + n}{2}.$$

Через $\lceil x \rceil$ обозначим наименьшее целое число k, такое что $k \geqslant x$.

Теорема 4 [14, теоремы 1—3]. *Пусть* $\xi \in \Xi$. *Тогда*

1) *если* $n \geqslant 4$ *и* $T_\xi(X)$ — *регулярная полугруппа, то* $(1, n) \in \xi$;
2) *если* $|\xi| = 2n$, *причём* $(1, n) \in \xi$, *то полугруппа* $T_\xi(X)$ *регулярна*;
3) *если* $|\xi| = 2n + 1$ *и* n *нечётно, то* $T_\xi(X)$ *нерегулярна*;
4) *если* $|\xi| = 2n+1$ *и* n *чётно, то* $T_\xi(X)$ *регулярна тогда и только тогда, когда существует такое* i, *что*

$$\xi = \left\{(1,1), \ldots, (n,n), (1,n), \left(i, i + \frac{n}{2}\right)\right\};$$

5) *пусть*

$$\xi = \left\{(1,1), \ldots, (n,n), \left(1, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right), \left(2, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2\right), \ldots\right\},$$

тогда $T_\xi(X)$ — *регулярная полугруппа при* $n \geqslant 6$.

Наряду с полугруппой $T_\sigma(X)$, сохраняющей одно бинарное отношение, закономерно рассматривать полугруппы преобразований, сохраняющих два бинарных отношения одновременно.

Будем считать, что $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, а ε — отношение эквивалентности на X. Следуя [18], введём следующие определения:

$$\begin{aligned}
&O_\varepsilon(X) = T_\varepsilon(X) \cap T_\leqslant(X),\\
&T_{\varepsilon^*}(X) = \{\alpha \in T(X) \mid \text{для любых } x, y \in X\\
&\quad (x,y) \in \varepsilon \text{ тогда и только тогда, когда } (x\alpha, y\alpha) \in \varepsilon\},\\
&O_{\varepsilon^*}(X) = T_{\varepsilon^*}(X) \cap T_\leqslant(X).
\end{aligned}$$

В [19] рассматривался случай цепи, когда отношение эквивалентности ε состоит из m классов по n последовательных элементов цепи. Авторы исследовали регулярные элементы в $O_\varepsilon(X)$. В [21] рассмотрено множество с двумя отношениями эквивалентности ε и ζ, где $\varepsilon \subseteq \zeta$. Авторы исследовали регулярные элементы в $T_\varepsilon(X) \cap T_\zeta(X)$. В [18] доказано, что в случае конечной цепи полугруппа $O_{\varepsilon^*}(X)$ регулярна всегда. Продолжим изучать конечную цепь, а также антицепь и выясним условия регулярности полугрупп O_ε и O_{ε^*}.

Будем называть *выпуклым подмножеством* частично упорядоченного множества подмножество, содержащее вместе с любыми двумя элементами a и b весь интервал $[a, b]$.

Теорема 5 [15, теорема 2]. *Пусть* $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ — *конечная цепь,* ε — *нетривиальное отношение эквивалентности на* X (*т. е. отличное от* $\{(a,a) \mid a \in X\}$ *и* $\{(a,b) \mid a, b \in X\}$). *Если* ε*-класс хотя бы одного из элементов* 1 *или* n *выпуклый, то полугруппа* $O_\varepsilon(X)$ *нерегулярна.*

Теорема 6 [15, теорема 3]. *Пусть* $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ — *конечная цепь,* $\varepsilon = \{(1,n), (2,n-1), \ldots\}$ — *отношение эквивалентности на* X. *Тогда полугруппа* $O_\varepsilon(X)$ *регулярна.*

Теорема 7 [15, теорема 4]. *Пусть множество* $(X, \leqslant)$ — *антицепь. Полугруппа* $O_{\varepsilon*}(X)$ *регулярна тогда и только тогда, когда* $|X/E| < \infty$.

Таким образом, вопрос регулярности полугруппы $O_{\varepsilon*}(X)$ для случая более общего отношения частичного порядка и более общего отношения эквивалентности остаётся открытым.

3. Условия регулярности полугруппы $PT_\sigma(X)$

Для частичного отображения $\alpha \in PT(X)$ множества X равенство (1) неверно, и можно определить двумя неэквивалентными способами, что означает фраза «$\alpha \in PT(X)$ сохраняет $\sigma \subseteq X \times X$».

Определение 1. $\alpha \in PT(X)$ *допустимо* для $\sigma \subseteq X \times X$, если

$$\text{для каждых } x, y \in \operatorname{dom}\alpha \text{ из } (x, y) \in \sigma \text{ следует } (x\alpha, y\alpha) \in \sigma. \tag{2}$$

Определение 2. $\alpha \in PT(X)$ *согласуется* с $\sigma \subseteq X \times X$, если

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma. \tag{3}$$

Рассмотрим множества

$$PT_\sigma(X) = \{\alpha \in PT(X) \mid \alpha \text{ допустимо для } \sigma\},$$
$$\widetilde{PT}_\sigma(X) = \{\alpha \in PT(X) \mid \alpha \text{ согласуется с } \sigma \subseteq X \times X\}.$$

Очевидно, $PT_\sigma(X)$ и $\widetilde{PT}_\sigma(X)$ — моноиды, являющиеся подмоноидами моноида $PT(X)$. В [13, предложение 2] доказано, что $\widetilde{PT}_\sigma(X) \subseteq PT_\sigma(X)$.

Приведём пример, подтверждающий, что $\widetilde{PT}_\sigma(X) \not\supseteq PT_\sigma(X)$. Пусть $X = \{1, 2\}$, σ — обычное отношение порядка и

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & 2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что условие (2) здесь выполняется. Условие (3) не выполнено, так как $\sigma\alpha = \{(1, 2), (2, 2)\}$, $\alpha\sigma = \{(2, 2)\}$.

Теорема 8 [13, следствие из предложения 3].

$$\widetilde{PT}_\sigma(X) = \{\alpha \in PT_\sigma(X) \mid \textit{для каждых } x, y \in X \\ \textit{из того, что } (x, y) \in \sigma \textit{ и } y \in \operatorname{dom}\alpha, \textit{ следует, что } x \in \operatorname{dom}\alpha\}.$$

Нетрудно видеть, что определение 1 симметрично в том смысле, что если α допустимо для σ, то α допустимо и для обратного отношения σ^{-1}. Это не так для определения 2. А именно, как показывает теорема 8, если α согласуется с σ, то оно может не согласоваться с σ^{-1}. Читатель легко приведёт пример отношения порядка $\leqslant$ и частичного отображения α, которое согласуется с отношением $\leqslant$, но не согласуется с отношением $\geqslant$.

Следующее утверждение даёт полный ответ на вопрос о регулярности полугруппы $PT_\leqslant(X)$.

Теорема 9 [13, предложение 4 и теорема 1]. *Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное [квазиупорядоченное] множество. Полугруппа $PT_\leqslant(X)$ регулярна в том и только том случае, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *X — антицепь;*

2) X — *цепь*;

[3) $x \leqslant y$ *при всех* x, y].

Обозначим через Δ отношение равенства на множестве X. Для $\sigma \subseteq X \times X$ транзитивное замыкание отношения σ будем обозначать через σ^t. Наконец, обозначим через ω какой-нибудь линейный порядок на множестве X. Для отношения σ, удовлетворяющего условиям $\Delta \subseteq \sigma \subseteq \omega$, $\sigma^t = \omega$, вопрос о регулярности полугруппы $PT_\sigma(X)$ решается следующей теоремой.

Теорема 10 [9, предложение 4]. *Пусть* σ — *бинарное отношение на* X, $\Delta \subseteq \sigma \subseteq \omega$, *где* ω — *линейный порядок и* $\sigma^t = \omega$. *Если полугруппа* $PT_\sigma(X)$ *регулярна, то* $\sigma = \omega$.

Для произвольного множества I определим множество

$$G_I = \{x_0\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$$

с отношением порядка, таким что $x_0 < x_i$ (рис. 2).

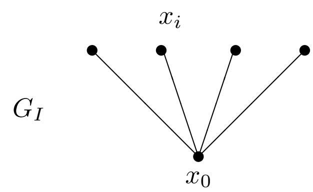

Рис. 2

Теорема 11 [12, предложение 2, теорема 1]. *Пусть* $(X, \leqslant)$ — *частично упорядоченное* [*квазиупорядоченное*] *множество, не являющееся цепью. Полугруппа* $\widetilde{PT}_\leqslant(X)$ *регулярна в том и только том случае, если выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) X — *антицепь*;

2) $X \cong G_I$ *при некотором* I;

[3) $x \leqslant y$ *для любых* $x, y \in X$].

4. Условия регулярности полугруппы $B_\sigma(X)$

Перейдём теперь к полугруппе бинарных отношений $B(X)$. Выше упоминалось, что элементы полугруппы $B(X)$ можно трактовать как многозначные отображения.

Пусть σ — бинарное отношение на множестве X.

Как и в случае частичных отображений, у нас есть простор для формулировки определения сохранения σ при многозначном отображении. Предложим три варианта.

Определение 3. Элемент $\alpha \in B(X)$ *сохраняет* σ *в узком смысле*, если

для любых $x, y \in X$ и любых $u, v \in X$

из того, что $u \in x\alpha$, $v \in y\alpha$ и $(x, y) \in \sigma$, следует, что $(u, v) \in \sigma$.

Определение 4. Элемент $\alpha \in B(X)$ *сохраняет* σ *в широком смысле*, если

для любых $x, y \in X$ из того, что $(x, y) \in \sigma$,

следует, что найдутся $u \in x\alpha$ и $v \in y\alpha$, для которых $(u, v) \in \sigma$.

Определение 5. Бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ согласуется с σ, если

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma.$$

Заметим, что задание на множестве X бинарного отношения σ равносильно заданию графа с множеством вершин X. Отображение $\alpha\colon X \to X$, сохраняющее отношение σ, — это эндоморфизм этого графа. Здесь уместно упомянуть, что в [17] авторы предлагают ряд определений, обобщающих понятие эндоморфизма. При этом множество отображений для каждого определения не всегда образует полугруппу. Обзор работ по полугруппам эндоморфизмов графов можно найти в [22].

Положим

$$\begin{aligned}
B_\sigma(X) &= \{\alpha \in B(X) \mid \alpha \text{ сохраняет } \sigma \text{ в узком смысле}\},\\
B'_\sigma(X) &= \{\alpha \in B(X) \mid \alpha \text{ сохраняет } \sigma \text{ в широком смысле}\},\\
B''_\sigma(X) &= \{\alpha \in B(X) \mid \alpha \text{ согласуется с } \sigma\}.
\end{aligned}$$

В [9] показано, что $\alpha \in B_\sigma(X)$ тогда и только тогда, когда $\alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma$, и $\alpha \in B'_\sigma(X)$ тогда и только тогда, когда $\alpha\sigma\alpha^{-1} \supseteq \sigma$. Кроме того, по определению $\alpha \in B''_\sigma(X)$ тогда и только тогда, когда $\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$. Отсюда очевидно вытекает, что $B_\sigma(X)$, $B'_\sigma(X)$ и $B''_\sigma(X)$ — подполугруппы полугруппы $B(X)$. В таблице приведены примеры того, что в общем случае ни одна из этих трёх полугрупп не содержится ни в одной другой.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

α	$B_\sigma(X)$	$B'_\sigma(X)$	$B''_\sigma(X)$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$+$	$-$	$-$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$-$	$+$	$-$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$-$	$-$	$+$

К. А. Зарецким [5] были найдены все регулярные элементы полугруппы бинарных отношений. Оказалось, что при $|X| \geqslant 3$ полугруппа $B(X)$ нерегулярна. Я. И. Диасамидзе [4] и его последователи изучали полугруппы бинарных отношений и их наиболее важных классов при помощи полных полурешёток объединений подмножеств X.

Докажем нерегулярность некоторых элементов полугруппы $B(X)$. Результаты ниже из [11] получены совместно с А. В. Твороговым. Далее для удобства прочтения вместо $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ будем писать $X = \{1, 2, \dots\}$, но сами числа при этом могут не быть связанными естественным отношением частичного порядка.

Лемма 1 [11]. *Пусть $X = \{1, 2, 3\}$. Бинарное отношение*

$$\alpha = \{(1,1)(1,2),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,3)\}$$

не является регулярным элементом полугруппы $B(X)$.

Доказательство. Предположим, что α — регулярный элемент. Тогда существует $\beta \in B(X)$, такой что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Отсюда следует, что должна существовать пара $(b_1, b_2) \in \beta$, такая что $(2, b_1)_{\in\alpha}(b_1, b_2)(b_2, 2)_{\in\alpha} = (2, 2)$. Из структуры α видно, что $b_1 \in \{2, 3\}$ и $b_2 \in \{1, 2\}$. Пусть $(b_1, b_2) = (2, 2)$. Тогда

$$(1,2)_{\in\alpha}(2,2)(2,3)_{\in\alpha} = (1,3) \notin \alpha.$$

Пусть $(b_1, b_2) = (2, 1)$. Тогда

$$(2,2)_{\in\alpha}(2,1)(1,1)_{\in\alpha} = (2,1) \notin \alpha.$$

Пусть $(b_1, b_2) = (3, 1)$. Тогда

$$(3,3)_{\in\alpha}(3,1)(1,1)_{\in\alpha} = (3,1) \notin \alpha.$$

Наконец, пусть $(b_1, b_2) = (3, 2)$. Тогда

$$(3,3)_{\in\alpha}(3,2)(2,2)_{\in\alpha} = (3,2) \notin \alpha.$$

Таким образом, не существует пары $(b_1, b_2) \in \beta$, удовлетворяющей нашему условию. Следовательно, не существует бинарного отношения β, такого что $\alpha\beta\alpha = \alpha$, т. е. α не является регулярным. $\square$

Лемма 2 [11]. *Пусть X — множество, $|X| \geqslant 3$ и $n \leqslant |X|$. Тогда бинарное отношение*

$$\alpha = \{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2), \dots, (n-1,n),\ (n,n-1),\ (n,n)\}$$

не является регулярным элементом в полугруппе всех бинарных отношений $B(X)$.

Доказательство. Предположим, что данное бинарное отношение является регулярным. Тогда существует $\beta \in B_n(X)$, такое что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Следовательно, существует такая пара $(b_1, b_2) \in \beta$, что $(n, b_1)_{\in\alpha}(b_1, b_2)_{\in\beta}(b_2, n)_{\in\alpha} = (n, n)$. Из строения α видно, что $b_1, b_2 \in \{n-1, n\}$.

Предположим, что $(b_1, b_2) = (n, n)$. Тогда

$$(n-1, n)_{\in\alpha}(n, n)_{\in\beta}(n, n-1)_{\in\alpha} = (n-1, n-1) \notin \alpha.$$

Пусть $(b_1, b_2) = (n-1, n)$. Тогда

$$(n-2, n-1)_{\in\alpha}(n-1, n)_{\in\beta}(n, n)_{\in\alpha} = (n-2, n) \notin \alpha.$$

Пусть $(b_1, b_2) = (n, n-1)$. Тогда

$$(n, n)_{\in\alpha}(n, n-1)_{\in\beta}(n-1, n-2)_{\in\alpha} = (n, n-2) \notin \alpha.$$

Наконец, пусть $(b_1, b_2) = (n-1, n-1)$. Тогда

$$(n-2, n-1)_{\in\alpha}(n-1, n-1)_{\in\beta}(n-1, n)_{\in\alpha} = (n-2, n) \notin \alpha.$$

Получаем, что не существует такого элемента β, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Следовательно, элемент α не является регулярным элементом. $\square$

Лемма 3 [11]. *Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда*

$$\alpha = \{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,4),\ (4,3),\ (4,1),\ (1,4),\ (4,4)\}$$

является нерегулярным элементом полугруппы $B(X)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

4.1. Условия регулярности полугруппы $B_\sigma(X)$

Если $|X| = 1$, то полугруппа $B_\sigma(X)$, очевидно, регулярна. Можно проверить, что если $|X| = 2$, то $B_\sigma(X)$ регулярна тогда только тогда, когда σ принимает одно из следующих значений:

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда $|X| \geqslant 3$. Вначале пусть отношение σ рефлексивно и антисимметрично.

Теорема 12 [9, предложение 8]. *Если σ — рефлексивное антисимметричное отношение на множестве X, то $B_\sigma(X) \subseteq PT(X)$, а значит, $B_\sigma(X) = PT_\sigma(X)$.*

Из теорем 9 и 12 непосредственно следует теорема 13.

Теорема 13 [9, предложение 9]. *Если $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, то полугруппа $B_\sigma(X)$ регулярна в том и только том случае, когда X — цепь или антицепь.*

Теорема 14 [11]. *Пусть $|X| \geqslant 3$, а $\sigma \subseteq X \times X$ — отношение эквивалентности. Полугруппа $B_\sigma(X)$ регулярна в том и только том случае, когда σ — отношение равенства на множестве X.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что это не так. Тогда существует класс эквивалентности, содержащий два или более элементов. Возможны два случая.

Случай 1. Существует только один класс эквивалентности. Тогда $B_\sigma(X) = B(X)$, но известно, что полугруппа всех бинарных отношений $B(X)$ нерегулярна при $|X| \geqslant 3$. Получаем противоречие с регулярностью полугруппы $B_\sigma(X)$.

Случай 2. Существует больше одного класса эквивалентности. Предположим, что элементы 1, 2 принадлежат классу эквивалентности K_1, а элемент y принадлежит классу эквивалентности K_2. Рассмотрим отображение

$$\alpha = \{(y,1),(2,2)\}.$$

Нетрудно установить, что $\alpha \in B_\sigma(X)$. В силу нашего предположения о регулярности полугруппы $B_\sigma(X)$ элемент α должен быть регулярным. Тогда существует $\beta \in B_\sigma(X)$, такой что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Следовательно, существует пара элементов $(b_1,b_2) \in \beta$, такая что $(y,b_1)_{\in\alpha}(b_1,b_2)_{\in\beta}(b_2,1)_{\in\alpha} = (y,1)$. Из строения отображения α следует, что $(b_1,b_2) = (1,y)$. Аналогично можно получить, что $(2,2) \in \beta$. Но в таком случае $\beta \notin B_\sigma(X)$, так как $(1,2) \in \sigma$, $(1,y) \in \beta$, $(2,2) \in \beta$, но $(y,2) \notin \sigma$. Отсюда получаем, что α — нерегулярный элемент полугруппы $B_\sigma(X)$.

Достаточность. Пусть σ — тривиальное отношение эквивалентности на множестве X. Тогда X — антицепь. Из определения сохранения бинарного отношения σ в узком смысле следует, что при $\alpha \in B_\sigma(X)$ выполняется $|x\alpha| = 1$. Отсюда получаем, что $B_\sigma(X) = PT_\sigma(X)$, а регулярность полугруппы $PT_\sigma(X)$ в случае, когда X — антицепь, была доказана в теореме 9. □

4.2. Условия регулярности полугруппы $B'_\sigma(X)$

Для случая, когда $|X| \leqslant 2$, полугруппа $B'_\sigma(X)$ регулярна при тех же σ, при которых регулярна полугруппа $B_\sigma(X)$. Будем теперь рассматривать случай $|X| \geqslant 3$.

Теорема 15 [11]. *Пусть X — множество с заданным на нём бинарным отношением σ и $|X| \geqslant 3$. Тогда полугруппа $B'_\sigma(X)$ нерегулярна.*

Доказательство. Возьмём любые три элемента 1, 2, 3 и построим отображение $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$, где $\alpha_1 = \{(1,1)(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ и $\alpha_2 = \{(y,y) | y \in X \setminus \{1,2,3\}\}$. Принадлежность $\alpha \in B'_\sigma(X)$ автоматически следует из того, что если для некоторых p и q пара $(p,q) \in \sigma$, то $(p\alpha, q\alpha) \in \sigma$. Следовательно, $\alpha \in B'_\sigma(X)$.

Теперь докажем, что элемент α не является регулярным. Предположим, что это не так и найдётся такой элемент $\beta \in B'_\sigma(X)$, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Запишем β в виде $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$, $\beta_1 \in B'_\sigma(\{1,2,3\})$, $\beta_2 \in B'_\sigma(\{X \setminus \{1,2,3\})$. Нетрудно видеть, что $\alpha_1\beta_2\alpha_1 = \varnothing$ и $\alpha_2\beta_1\alpha_2 = \varnothing$. Тогда из равенства $\alpha\beta\alpha = \alpha$ следует, что $\alpha_1\beta_1\alpha_1 = \alpha_1$. В лемме 1 было показано, что такого элемента β_1 не существует, так как α_1 — нерегулярный элемент полугруппы $B(\{1,2,3\})$. Следовательно, элемент α — нерегулярный элемент полугруппы $B'_\sigma(X)$ и сама $B'_\sigma(X)$ нерегулярна. □

4.3. Условия регулярности полугруппы $B''_\sigma(X)$

Если $|X| = 1$, то полугруппа $B''_\sigma(X)$, очевидно, регулярна. Если $|X| = 2$, то $B''_\sigma(X)$ регулярна тогда и только тогда, когда σ принимает одно из следующих значений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда $|X| \geqslant 3$.

Лемма 4 [11]. *Пусть (X, σ) — цепь из двух элементов. Тогда $B''_\sigma(X)$ не является регулярной полугруппой.*

Доказательство. Пусть $X = \{1, 2\}$. Отношение линейного порядка σ можно задать следующим образом:

$$\sigma = \{(1,1),\, (1,2),\, (2,2)\}.$$

Покажем, что элемент $\alpha = \{(1,1),\, (1,2),\, (2,1)\}$ является нерегулярным элементом в $B''_\sigma(X)$. Для начала покажем, что $\alpha \in B''_\sigma(X)$. Имеем

$$\sigma\alpha = \{(1,1),\, (1,2),\, (2,1)\}, \quad \alpha\sigma = \{(1,1),\, (1,2),\, (2,1),\, (2,2)\}.$$

Отсюда видно, что $\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$. Предположим, что α — регулярный элемент. Тогда существует элемент $\beta \in B''_\sigma(X)$, такой что $\alpha\beta\alpha = \alpha$.

Имеем $(1,1) \notin \beta$, так как в противном случае $(2,1) \in \alpha$, $(1,1) \in \beta$, $(1,2) \in \alpha$, но $(2,2) \notin \alpha$, а значит, $\alpha\beta\alpha \neq \alpha$.

Также β должен содержать такую пару (b_1, b_2), что $(1, b_1) \in \alpha$, $(b_1, b_2) \in \beta$, $(b_2, 2) \in \alpha$ и $(1,2) \in \alpha\beta\alpha = \alpha$, т. е. в качестве (b_1, b_2) возможны лишь пары $(1,1)$ и $(2,1)$. Но, как было показано выше, $(1,1) \notin \beta$. Таким образом, $(2,1) \in \beta$. Аналогично из того, что β должен содержать такой элемент (b_1, b_2), что $(2, b_1) \in \alpha$, $(b_1, b_2) \in \beta$, $(b_2, 1) \in \alpha$ и $(2,1) \in \alpha$, получаем, что $(1,2) \in \beta$.

В итоге $\{(2,1), (1,2)\} \subseteq \beta$. Тогда $(1,1) \in \sigma\beta$, но $(1,1) \notin \beta\sigma$. Следовательно, α не является регулярным, т. е. $B''_\sigma(X)$ не является регулярной полугруппой. □

Теорема 16 [11]. *Пусть X — цепь и $|X| \geqslant 2$. Тогда полугруппа $B''_\sigma(X)$ не является регулярной.*

Доказательство. Для цепи из двух элементов это утверждение было доказано в лемме 4. Далее считаем, что $|X| \geqslant 3$. Пусть элементы $1, 2, 3 \in X$ таковы, что $1 < 2 < 3$. Построим отображение α следующим образом: $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$, где $\alpha_1 = \{(1,1)(1,2),\, (2,2),\, (2,3),\, (3,3)\}$ и $\alpha_2 = \big\{(y,y) \mid y \in X \setminus \{1,2,3\}\big\}$.

Обозначим через Δ отношение равенства на множестве X. Ясно, что $\Delta \subseteq \alpha$, тогда $\alpha = \alpha \cup \Delta$. Так как $\sigma\alpha \subseteq \sigma$ и $\alpha\sigma \subseteq \sigma$, то $\sigma\alpha = \sigma(\alpha \cup \Delta) = \sigma\alpha \cup \sigma = \sigma$ и аналогично $\alpha\sigma = (\alpha \cup \Delta)\sigma = \alpha\sigma \cup \sigma = \sigma$. Отсюда следует, что $\sigma\alpha = \alpha\sigma$, т. е. $\alpha \in B''_\sigma(X)$.

Теперь докажем, что элемент α не является регулярным. Предположим, что это не так и найдётся такой элемент $\beta \in B''_\sigma(X)$, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Запишем β в виде $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$, $\beta_1 \in B''_\sigma(\{1,2,3\})$, $\beta_2 \in B''_\sigma(\{X \setminus \{1,2,3\})$. Нетрудно видеть, что $\alpha_1\beta_2\alpha_1 = \varnothing$ и $\alpha_2\beta_1\alpha_2 = \varnothing$. Тогда из равенства $\alpha\beta\alpha = \alpha$ следует, что

$\alpha_1\beta_1\alpha_1 = \alpha_1$. В лемме 1 было показано, что такого элемента β_1 не существует, так как α_1 — нерегулярный элемент полугруппы $B(\{1, 2, 3\})$. Следовательно, α — нерегулярный элемент полугруппы $B''_\sigma(X)$ и сама $B''_\sigma(X)$ нерегулярна. □

Теорема 17 [11]. *Для любого отношения эквивалентности σ, заданного на множестве X, таком, что $|X| \geqslant 3$, полугруппа $B''_\sigma(X)$ не является регулярной.*

Доказательство. Возможны четыре различных варианта отношений эквивалентности.

Случай 1. Отношение эквивалентности σ имеет класс эквивалентности K, такой что $|K| = n \geqslant 3$. Ясно, что $\sigma = (K \times K) \cup \sigma'$, где $\sigma' \subseteq \big((X \setminus K) \times (X \setminus K)\big)$. Рассмотрим отображение

$$\alpha = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), \ldots, (n-1, n), (n, n-1), (n, n)\}.$$

Нетрудно видеть, что $\alpha \cdot (K \times K) = K \times K$. Окончательно получаем, что

$$\sigma\alpha = (K \times K) \cdot \alpha = K \times K = \alpha \cdot (K \times K) = \alpha\sigma.$$

Отсюда следует, что $\alpha \in B''_\sigma(X)$.

Теперь предположим, что α — регулярный элемент. Тогда должен существовать такой элемент $\beta \in B''_\sigma(X)$, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Но нетрудно заметить, что $\alpha\beta\alpha = \varnothing$ при $\beta \notin B''_\sigma(\{1, 2, \ldots, n\})$. Тогда $\beta \in B''_\sigma(\{1, 2, \ldots, n\})$. Но в лемме 2 было показано, что не существует такого элемента $\beta \in B(X)$, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$, следовательно, α — нерегулярный элемент в полугруппе $B''_\sigma(X)$.

Случай 2. Отношение эквивалентности имеет три и более одноэлементных класса. Рассмотрим отображение

$$\alpha = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Очевидно, $\sigma\alpha = \alpha = \alpha\sigma$. Аналогично случаю 1 устанавливаем, что отображение α не является регулярным элементом полугруппы $B''_\sigma(X)$.

Случай 3. Отношение эквивалентности σ имеет лишь двухэлементные и, возможно, одноэлементные классы, но одноэлементных не более двух. Рассмотрим некоторые двухэлементные классы $K_1 = \{1, 2\}$ и $K_2 = \{3, 4\}$ и отображение

$$\alpha = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 1), (1, 4), (4, 4)\}.$$

Имеем $\sigma = \sigma_4 \cup \sigma'$, где

$$\sigma_4 = (K_1 \times K_1) \cup (K_2 \times K_2)$$

и $\sigma' \subseteq (X \setminus \{1, 2, 3, 4\}) \times (X \setminus \{1, 2, 3, 4\})$. Нетрудно видеть, что $\sigma\alpha = \sigma_4\alpha = \alpha\sigma_4 = \alpha\sigma$. Отсюда получаем, что $\alpha \in B''_\sigma(X)$.

Теперь докажем, что α — нерегулярный элемент. Допустим обратное. Тогда существует $\beta \in B''_\sigma(X)$, такой что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Заметим, что $\alpha \cdot (x, y) \cdot \alpha = \varnothing$ при $(x, y) \notin B(\{1, 2, 3, 4\})$. Поэтому мы можем считать, что $\beta \in B(\{1, 2, 3, 4\})$. Но в лемме 3 было показано, что такого элемента не существует, а следовательно, α — нерегулярный элемент в полугруппе $B''_\sigma(X)$.

Случай 4. Отношение эквивалентности содержит ровно три класса эквивалентности: $K_1 = \{1\}$, $K_2 = \{2\}$ и $K_3 = \{3,4\}$. Рассмотрим отображение $\alpha = \{(1,4), (2,3)\}$. Непосредственной проверкой можно установить, что $\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$, т. е. $\alpha \in B''_\sigma(X)$. Если α регулярно, то существует такое $\beta \in B''_\sigma(X)$, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. В отображение β должны входить пары (b_1, b_2) и (b_3, b_4), такие что

$$(1,4) \in \alpha,\ (b_1, b_2) \in \beta,\ (1,4) \in \alpha \text{ и } (1,4) \in \alpha,$$
$$(2,3) \in \alpha,\ (b_3, b_4) \in \beta,\ (2,3) \in \alpha \text{ и } (2,3) \in \alpha.$$

Ясно, что $(b_1, b_2) = (4,1)$ и $(b_3, b_4) = (3,2)$. Заметим, что $(3,1) \notin \beta$, так как иначе $(2,3) \in \alpha$, $(3,1) \in \beta$, $(1,4) \in \alpha$, но $(2,4) \notin \alpha$. В результате $(3,1) = (3,4)_{\in\sigma}(4,1)_{\in\beta} \in \sigma\beta$, но $(3,1) = (3,1)_{\notin\beta}(1,1)_{\in\sigma} \notin \beta\sigma$. Другими словами, $\beta \notin B''_\sigma(X)$, и поэтому α — нерегулярный элемент полугруппы $B''_\sigma(X)$.

Во всех случаях существует нерегулярный элемент. Следовательно, полугруппа $B''_\sigma(X)$ нерегулярная. □

Литература

[1] Айзенштат А. Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейного упорядоченного множества // Сиб. матем. журн. — 1962. — Т. 3, № 2. — С. 161—169.

[2] Айзенштат А. Я. Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. — 1968. — Т. 387. — С. 3—11.

[3] Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований // УМН. — 1961. — Т. 16, № 5. — С. 157—162.

[4] Диасамидзе Я. И. Полные полугруппы бинарных отношений. — Батуми: Аджара, 2000.

[5] Зарецкий К. А. Полугруппа бинарных отношений // Матем. сб. — 1963. — Т. 61, № 3 (103). — С. 291—305.

[6] Ким В. И., Кожухов И. Б. Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счётных цепей // Фундам. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 97—104.

[7] Ким В. И., Кожухов И. Б., Ярошевич В. А. Слабо регулярные полугруппы изотонных преобразований // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 145—165.

[8] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1972.

[9] Кожухов И. Б., Ярошевич В. А. Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 129—135.

[10] Ляпин Е. С. Абстрактная характеристика класса полугрупп эндоморфизмов систем общего вида // Матем. сб. — 1966. — Т. 70, № 2 (112). — С. 173—179.

[11] Творогов А. В., Ярошевич В. А. О регулярности полугруппы многозначных преобразований, сохраняющих заданное бинарное отношение // Алгебра, теория чисел

и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Междунар. конф. Тула, 2015. — С. 135—137.

[12] Ярошевич В. А. Отображения, согласующиеся с бинарными отношениями // Матем. вестн. педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. — 2009. — Вып. 11. — С. 135—142.

[13] Ярошевич В. А. О свойствах полугрупп частичных изотонных преобразований квазиупорядоченных множеств // Вестн. Московской гос. акад. дел. админ. Сер. Философ., соц. и естеств. науки. — 2011. — № 3. — С. 139—144.

[14] Ярошевич В. А. Регулярные полугруппы изотонных преобразований частично упорядоченных множеств специального вида // Информационно-управляющие вычислительные системы: алгоритмы, аппаратные и программные средства. — М.: МИЭТ, 2011. — С. 84—97.

[15] Ярошевич В. А. Регулярные отношения, сохраняющие одновременно частичный порядок и отношение эквивалентности // Сб. научн. тр. МИЭТ. — М.: МИЭТ, 2016. — С. 121—126.

[16] Adams M. E., Gould M. Posets whose monoids of order-preserving maps are regular // Order. — 1989. — No. 6. — P. 195—201.

[17] Bötcher M., Knauer U. Endomorphism spectra of graphs // Discrete Math. — 1992. — Vol. 109. — P. 45—57.

[18] Deng Lun-Zhi, Zeng Ji-Wen, You Tai-Jie. Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve order and a double direction equivalence // Semigroup Forum. — 2012 — Vol. 84 — P. 59—68.

[19] Huisheng Pei, Dingyu Zou. Green's equivalences on semigroups of transformations preserving order and an equivalence relation // Semigroup Forum. — 2005. — Vol. 71. — P. 241—251.

[20] Laradji A., Umar A. Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations. — King Fahd Univ. of Petroleum and Minerals (Saudi Arabia), Dept. Math. Sci. Technical Report Ser. — 2004.

[21] Lei Sun, Hui Sheng Pei. Green's relations on semigroups of transformations preserving two equivalence relations // J. Math. Res. Expos. — 2009. — Vol. 29, no. 3. — P. 415—422.

[22] Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27. — P. 155—199.