Нормальные тропические $(0, -1)$-матрицы и их ортогональные множества

Б. Р. БАХАДЛЫ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: bahad1@mail.ru

А. Э. ГУТЕРМАН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Московский центр
фундаментальной и прикладной математики
e-mail: guterman@list.ru

М. Х. ДЕ ЛА ПУЭНТЕ
Мадридский университет Комплутенсе, Испания
e-mail: mpuente@mat.ucm.es

УДК 512.643

Ключевые слова: ортогональность, тропическое полукольцо, тропическая нормальная матрица.

Аннотация

Квадратные матрицы A, B называются ортогональными, если $A \odot B = Z = B \odot A$, где Z — матрица, все элементы которой равны 0, а $\odot$ — тропическое умножение матриц. Исследуется отношение ортогональности на множестве нормальных тропических $(0, -1)$-матриц, для этого изучается ортогональное множество фиксированной матрицы A, т. е. множество всех матриц, ортогональных матрице A. В частности, описано семейство минимальных элементов внутри ортогонального множества, которое называется базисом. Вычисляются ортогональные множества и базисы для различных матриц и матричных множеств. Охарактеризованы матрицы с одноэлементными базисами. Ортогональность и минимальная ортогональность описаны на языке графов. Рассматривается геометрическая интерпретация полученных результатов.

Abstract

B. Bakhadly, A. Guterman, M. J. de la Puente, Normal tropical $(0, -1)$*-matrices and their orthogonal sets*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2022), no. 1, pp. 5—30.

Square matrices A and B are orthogonal if $A \odot B = Z = B \odot A$, where Z is the matrix with all entries equal to 0, and $\odot$ is the tropical matrix multiplication. We study orthogonality for normal matrices over the set $\{0, -1\}$, endowed with tropical addition and multiplication. To do this, we investigate the orthogonal set of a matrix A, i.e., the set of all matrices orthogonal to A. In particular, we study the family of minimal elements inside the orthogonal set, called a basis. Orthogonal sets and bases are computed for various matrices and matrix sets. Matrices whose bases are singletons are characterized. Orthogonality and minimal orthogonality are described in the language of graphs. The geometric interpretation of the results obtained is discussed.

Фундаментальная и прикладная математика, 2022, том 24, № 1, с. 5—30.

Александру Васильевичу Михалёву с восхищением

1. Введение

Тропическая сумма $\oplus$ вещественных чисел определяется как их максимум (в ряде работ вместо максимума используется минимум), а тропическое произведение $\odot$ — это обычная сумма вещественных чисел. Тропическая арифметика поднимается на матрицы, если определить сумму и произведение матриц с тропическими коэффициентами стандартным образом, где элементы матриц складываются и перемножаются по тропическим правилам. Тропическая линейная алгебра — это современная активно развивающаяся наука, содержащая много глубоких и интересных математических проблем, а также имеющая целый ряд приложений (см., например, [5]).

В этой статье мы продолжаем исследовать отношение ортогональности на тропических матрицах. Квадратные матрицы A, B называются ортогональными, если $A \odot B = Z = B \odot A$, где Z — матрица, все элементы которой равны 0, а $\odot$ — тропическое умножение матриц. В центре нашего внимания взаимно ортогональные пары нормальных матриц. Понятие нормальной матрицы было введено М. Йоэли в 1961 году и оказалось полезным в тропической линейной алгебре и приложениях (см. [5, 14—16]). Отношение взаимной ортогональности, рассмотренное на множестве нормальных матриц, имеет много интересных и нетривиальных свойств (см., например, [2]).

Цель настоящей работы — определить и исследовать ортогональное множество для подмножества $\mathcal{S}$, состоящего из нормальных матриц, т. е. множество $\mathrm{or}(\mathcal{S})$ всех матриц, ортогональных матрицам из $\mathcal{S}$, и его базис, т. е. множество $\mathrm{b}(\mathcal{S})$ минимальных элементов в множестве $\mathrm{or}(\mathcal{S})$. В частности, получена характеризация матриц A, для которых $|\,\mathrm{b}(A)| = 1$, вычислены ортогональные множества и базисы для различных матриц и матричных множеств. Ортогональность и минимальная ортогональность описаны на языке графов, и найдена геометрическая интерпретация полученных результатов.

Для простоты мы работаем над бинарным тропическим полукольцом $\mathbb{K} := \{0, -1\}$. Это множество также является булевой алгеброй. Более того, множество всех нормальных матриц порядка n над $\mathbb{K}$, обозначаемое M_n^N, имеет структуру решётки, где отрицание — естественная инволюция (см. определение 2.2 и обозначение 2.4). Подробную и полную информацию о решётках и их приложениях читатель может найти в [1, 3].

Наша статья организована следующим образом. В разделе 2 мы вводим основные понятия, которые используются в работе, такие, как нормальная матрица, отрицание нормальной матрицы $\neg A$, решётка, операторы $\top$ и $\perp$, атомы, элементарные матрицы E_{ij}, U_{ij}, U_{ij}^{kl}, R_i, C_j, отношение ортогональности (взятое из [2]), ортогональное множество и базис. В разделе 3 мы вводим ключевое понятие контролируемой матрицы $F(A)$ для данной матрицы A и доказываем неравенство $F(A) \leqslant \neg A$. В разделе 4 вычисляются множества $\mathrm{or}(S)$ и $\mathrm{b}(S)$

для элементарных матриц S. Для некоторых случаев вычисляются дополнения к ортогональным множествам. В разделе 5 мы исследуем графы, ассоциированные с отношениями ортогональности и самоортогональности, и переводим ортогональность и минимальную ортогональность на язык графов с множеством вершин M_n^N. Оказывается, что возникающие графы сильно связны и имеют диаметр, равный 1 или 2 (см. следствие 5.7). В разделе 6 мы изучаем связь между базисами и ортогональными множествами. Мы доказываем, что равенство $|\,\mathrm{b}(A)| = 1$ эквивалентно условию $\mathrm{b}(A) = \{F(A)\}$ (см. следствие 6.10, прямое следствие теоремы 6.9). В разделе 7 мы работаем над семейством подмножеств $\mathcal{P}(M_n^N)$, вычисляя ортогональные множества для подмножеств матриц и исследуя их базисы. В разделе 8 мы устанавливаем связь между двумя различными понятиями минимальности для отношения ортогональности: понятием (a), когда пара матриц (A, B) является минимальной (ортогональной) парой (определение взято из [2]), и понятием (b), состоящим в одновременном выполнении двух включений: $A \in \mathrm{b}(B)$ и $B \in \mathrm{b}(A)$. Доказано, что первое понятие минимальности является более сильным, чем второе (см. лемму 8.3). В разделе 9 рассматривается геометрическая интерпретация полученных результатов.

2. Основные понятия

Для $n \in \mathbb{N}$ множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначается через $[n]$, а множество $[n] \setminus \{1\}$ — через $[n]'$. Диагональное множество в декартовом квадрате $[n] \times [n]$ обозначается Δ. Заглавные буквы $A, B, \ldots$ обозначают матрицы, строчные буквы $a, b, \ldots$ обозначают векторы. Предполагается, что все векторы являются векторами-столбцами. Для всех $i = 1, \ldots, n$ через e_i обозначен вектор-столбец с 1 на позиции с номером i и с 0 на всех остальных позициях. Обозначим

$$e := -e_1 - \ldots - e_n = [-1, \ldots, -1]^{\mathrm{T}}.$$

Множества обозначаются заглавными каллиграфическими буквами: $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}, \ldots$. *Дополнение* к множеству $\mathcal{S}$ обозначается $\mathcal{S}^{\complement}$.

Определение 2.1 (тропические операции). Пусть $\mathbb{K}$ равняется $\{0, -1\}$. Рассмотрим *макс-плюс полукольцо* или *тропическое полукольцо* $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$, где

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \odot b = a + b.$$

Операции $\oplus$, $\odot$ называются *тропической суммой* и *тропическим умножением* соответственно. Определим

$$(-1) \odot a = -1 = a \odot (-1)$$

для $a \in \{0, -1\}$. В частности,

$$(-1) \odot (-1) = (-1) \oplus (-1) = -1.$$

Нейтральным элементом для тропического умножения является 0. Нейтральным элементом для тропического сложения является -1.

Множество квадратных $(n\times n)$-матриц с элементами из $\mathbb{K}$ обозначается M_n. Операции $\oplus$ и $\odot$ распространяются на векторы и матрицы обычным образом. Полукольца тропических матриц интересны тем, что обладают отношением порядка $\leqslant$, которое совместимо с операциями полукольца. Скажем, что $A \leqslant B$, если и только если $A\oplus B = B$, и $A < B$, когда $A \leqslant B$ и $A \neq B$.

Мы используем следующее соглашение: AB обозначает $A\odot B$. Мы будем часто использовать классическое сложение матриц $A + B$.

Далее предполагаем, что $n \geqslant 2$.

Определение 2.2 (нормальная матрица, М. Йоэли, 1961 [15]). Тропическая матрица $A = [a_{ij}] \in M_n$ называется *нормальной*, если $a_{ij} \leqslant 0$ и все диагональные элементы равны 0. Множество нормальных матриц порядка n обозначается M_n^N. Нормальная матрица $A = [a_{ij}]$ является *строго нормальной*, если $a_{ij} < 0$ для всех $i \neq j$.

Обозначение 2.3 (отрицание вектора). Для вектора $a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^{\mathrm{T}}$ обозначим

$$\neg a = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^{\mathrm{T}}, \quad \text{где} \quad b_i = \begin{cases} -1, & \text{если } a_i = 0,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Ниже вводится отрицание в M_n^N. Его не следует путать с обычным отрицанием матрицы A, обозначаемым $\neg A$, поэтому используется другое обозначение.

Обозначение 2.4 (отрицание нормальной матрицы). Для матрицы $A = [a_{ij}] \in M_n^N$ обозначим

$$\urcorner A = [b_{ij}] \in M_n^N, \quad \text{где} \quad b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j \text{ или } a_{ij} = -1,\\ -1 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Обозначение 2.5 (нулевая матрица и тождественная матрица). Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующие $(n\times n)$-матрицы:

1) матрица Z_n, все элементы которой равны 0;
2) матрица U_n, на диагонали которой стоят 0, а все недиагональные элементы равны -1.

Мы используем запись Z и U, когда n понятно из контекста. Отметим, что обе матрицы являются нормальными.

Заметим, что матрица Z — *абсорбирующий* элемент M_n^N, т. е. $AZ = Z = ZA$, $A \in M_n^N$. Кроме того, матрица U — это единица для тропической суммы и умножения в M_n^N, т. е. $A\oplus U = A = U\oplus A$ и $AU = A = UA$, $A \in M_n^N$. Отметим уникальность ситуации, когда один и тот же элемент является нейтральным и для сложения, и для умножения.

Множество M_n^N представляет собой конечную ограниченную *верхнюю полурешётку* (поскольку $\oplus$ ассоциативна, коммутативна и идемпотентна) с *верхним элементом* Z и *нижним элементом* U. Так как $\mathbb{K} = \{0, -1\}$, то $\min\{A, B\} = A + B$, и множество M_n^N является *булевой алгеброй* с операциями $(\max, \min, \urcorner) = (\oplus, +, \urcorner)$, поэтому M_n^N является *частично упорядоченным* *множеством* и, следовательно, *решёткой*. Более подробная информация может быть найдена в [6].

Обозначение 2.6. Определим операторы

$$\top(A) := \{B \in M_n^N : B \geqslant A\}, \quad \bot(A) := \{B \in M_n^N : B \leqslant A\}.$$

Эти множества являются подрешётками.

Обозначение 2.7. Пусть $i, j \in [n]$, $i \neq j$.

1. E_{ij} — матрица с элементом -1 на позиции (i,j) и 0 на всех остальных позициях.
2. $U_{ij} := \invneg E_{ij}$.
3. $U_{ij}^{kl} = U_{kl}^{ij} := \invneg(E_{ij} + E_{kl})$.

Замечание 2.8 (атомы). Матрицы U_{ij} — минимальные элементы (атомы) в M_n^N. Матрицы E_{ij} — максимальные элементы в M_n^N. Каждая ненулевая матрица представляет собой классическую сумму матриц E_{ij}. Ясно, что

$$M_n^N = \bigcup_{i \neq j} \bot(E_{ij}).$$

Обозначение 2.9. Обозначим через $\mathrm{row}(i, A)$ i-ю *строку* матрицы A.

Обозначение 2.10. Для вектора $v \in \mathbb{K}^n$ и индекса $j \in [n]$ обозначим через $L_j(v)$ матрицу с v в j-м столбце и 0 в остальных местах. Обозначим через $L_j(v^{\mathrm{T}})$ матрицу с v в j-й строке и 0 в остальных местах.

Обозначение 2.11.

1. Для индекса $i \in [n]$ рассмотрим матрицу

$$R_i := \sum_{i \neq j} E_{ij}.$$

Учитывая обозначение 2.10, имеем $R_i = L_i(e^{\mathrm{T}} + e_i^{\mathrm{T}})$.

2. Для индекса $j \in [n]$ рассмотрим матрицу

$$C_j := \sum_{i \neq j} E_{ij}.$$

Получаем $C_j = L_j(e + e_j)$.

Лемма 2.12.

1. $R_i E_{ij} = E_{ij} = E_{ij} C_j$,
2. $E_{ij} E_{kl} = Z$ *для* $n \geqslant 3$ *и всех индексов* $i, j, k, l \in [n]$, $i \neq j$, $k \neq l$.

Доказательство. Непосредственная проверка. □

Напомним следующие определения, лемму и её следствие из [2].

Определение 2.13 (отношение ортогональности). Пусть $A, B \in M_n^N$. Если $AB = Z = BA$, то матрицы A и B называются *взаимно ортогональными*. Если $A^2 = Z$, то матрица A называется *самоортогональной*.

Определение 2.14 (индикаторная матрица пары [2, определение 3.3]). Для матриц $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]\in M_n^N$ рассмотрим матрицы $AB=[l_{ij}]$, $BA==[r_{ij}]\in M_n^N$. Матрица $C:=[c_{ij}]\in M_n^N$, определённая как $c_{ij}=0$, если $l_{ij}=r_{ij}=0$, и $c_{ij}=-1$ иначе, называется *индикаторной матрицей* пары (A,B).

Очевидно, что матрицы A, B взаимно ортогональны тогда и только тогда, когда индикаторная матрица C нулевая.

Лемма 2.15 (о распространении нулей [2, лемма 3.4]). *Пусть $A,B\in M_n^N$, матрицы AB, BA такие, как указано выше, и $p,q\in[n]$. Если $a_{pq}=0$, то $l_{pq}==r_{pq}=c_{pq}=0$.*

Следствие 2.16 (ортогональность при распространении нулей [2, следствие 3.5]). *Пусть $A,B\in M_n^N$ и C — индикаторная матрица пары (A,B). Если $A\oplus B=Z$, то $C=Z$.*

Замечание 2.17. Пусть $A,B\in M_n^N$. Из леммы 2.15 следует, что $A\leqslant AB$ и $B\leqslant AB$, откуда получаем $A\oplus B\leqslant AB$. Аналогично получаем $A\oplus B\leqslant BA$, и мы можем сделать вывод, что $A\oplus B\leqslant \min\{AB,BA\}$. Более того, $C==\min\{AB,BA\}$ — *индикаторная матрица* пары (A,B).

Обозначение 2.18 (ортогональное множество и его итерации). Для подмножества $\mathfrak{S}\subseteq M_n^N$ и матрицы $A\in M_n^N$ определим *ортогональное множество* матрицы A в $\mathfrak{S}$ как $\mathrm{or}(A)_{\mathfrak{S}}=\{B\in\mathfrak{S}\colon AB=Z=BA\}$. Аналогично *ортогональное множество* для подмножества $\mathcal{S}\subseteq M_n^N$ в $\mathfrak{S}$ — это

$$\mathrm{or}(\mathcal{S})_{\mathfrak{S}}=\bigcap_{A\in\mathcal{S}}\mathrm{or}(A)_{\mathfrak{S}}.$$

Мы опускаем нижний индекс $\mathfrak{S}$, если $\mathfrak{S}=M_n^N$.

Определим $\mathrm{or}^j(A)=\mathrm{or}\big(\mathrm{or}^{j-1}(A)\big)$ для $j>1$.

Следствие 2.19. $1\leqslant|\mathrm{or}(A)|\leqslant|M_n^N|=2^{n^2-n}$ *для матрицы $A\in M_n^N$.*

Лемма 2.20 (монотонность or). *Если матрицы $A,A'\in M_n^N$ и $A\leqslant A'$, то $\mathrm{or}(A)\subseteq\mathrm{or}(A')$.*

Доказательство. Монотонность $\oplus$ и $\odot$ влечёт $A'B\leqslant AB\leqslant ZB=Z$ и $BA'\leqslant BA\leqslant BZ=Z$. Если $A'B=Z=BA'$, то $AB=Z=BA$. Лемма доказана. □

Следствие 2.21. *Пусть матрица $A\in M_n^N$. Тогда $\mathrm{or}\big(\top(A)\big)=\mathrm{or}(A)$.*

Доказательство. По обозначению 2.18 и лемме 2.20 получаем

$$\mathrm{or}\big(\top(A)\big)=\bigcap_{A'\in\top(A)}\mathrm{or}(A')=\mathrm{or}(A).$$ □

Следствие 2.22. *Пусть $A,B\in M_n^N$. Если $A\in\mathrm{or}(B)$, то $\top(A)\subseteq\mathrm{or}(B)$.*

Доказательство. Пусть $A'\in\top(A)$, т. е. $A\leqslant A'$. По лемме 2.20 получаем $B\in\mathrm{or}(A')$, следовательно, $A'\in\mathrm{or}(B)$. □

Определение 2.23 (базис). Для подмножества $\mathcal{S} \subseteq M_n^N$ множество матриц, минимальных в множестве $\mathrm{or}(\mathcal{S})$, обозначается $\mathrm{b}(\mathcal{S})$. Будем говорить, что каждая матрица из $\mathrm{b}(\mathcal{S})$ *минимально ортогональна* каждой матрице из $\mathcal{S}$. Будем использовать запись $\mathrm{b}(A)$, если $\mathcal{S} = \{A\}$.

Пример 2.24. Заметим, что базис b не монотонен. Действительно, следствие 4.4 влечёт $U_{1n} < U_{1n}^{2,n-1}$, но $\mathrm{b}(U_{1n}) \not\subset \mathrm{b}(U_{1n}^{2,n-1})$.

Следствие 2.25. *Пусть* $\mathcal{S} \subseteq M_n^N$. *Тогда*

$$\mathrm{or}(\mathcal{S}) = \bigcup_{B \in \mathrm{b}(\mathcal{S})} \top(B).$$

Доказательство. Утверждение следует из определения 2.23 и следствия 2.22. $\square$

Лемма 2.26. *Пусть* $\mathcal{S} \subseteq M_n^N$. *Если*

$$\mathcal{S}' = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \top(S),$$

то $\mathrm{or}(\mathcal{S}) = \mathrm{or}(\mathcal{S}')$ *и* $\mathrm{b}(\mathcal{S}) = \mathrm{b}(\mathcal{S}')$.

Доказательство. Из обозначения 2.18 и следствия 2.21 следует

$$\mathrm{or}(\mathcal{S}') = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{or}\big(\top(S)\big) = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{or}(S) = \mathrm{or}(\mathcal{S}),$$

и очевидно $\mathrm{b}(\mathcal{S}) = \mathrm{b}(\mathcal{S}')$. $\square$

Лемма 2.27. *Если* $A, X \in M_n^N$ *и* $X \in \mathrm{or}(A)$, *то любой минимальный элемент в* $\perp(X) \cap \mathrm{or}(A)$ *принадлежит базису* $\mathrm{b}(A)$.

Доказательство. Если матрица $Y \in \perp(X) \cap \mathrm{or}(A)$ — минимальный элемент и $Y \notin \mathrm{b}(A)$, то существует матрица Y', $Y' < Y \leqslant X$, такая что $Y' \in \mathrm{or}(A)$, противоречие. $\square$

Обозначение 2.28 (решётка подмножеств). Пусть $\mathcal{P}(M_n^N)$ обозначает семейство подмножеств M_n^N. Тогда $(\mathcal{P}(M_n^N), \cup, \cap)$ является решёткой с одной бинарной операцией $\oplus$ и тремя отображениями, действующими на $\mathcal{P}(M_n^N)$: or, Min и композицией $\mathrm{b} := \mathrm{Min} \circ \mathrm{or}$. Здесь через Min обозначено множество минимальных элементов, а не операция взятия минимума.

3. Почти ненулевые строки и столбцы. Контролируемая матрица

Определение 3.1 (почти ненулевые строки и столбцы). Строка или столбец матрицы называются *почти ненулевыми*, если все недиагональные элементы отличны от 0.

Пример 3.2. Все строки (столбцы) матриц R_i (соответственно C_j), заданных в обозначении 2.11, являются или нулевыми, или почти ненулевыми.

Обозначение 3.3 (подсчёт нулей в определённых строках и столбцах). Пусть $i \in [n]$, $\mathcal{J} \subseteq [n]$, $A = [a_{ij}] \in M_n^N$. Обозначим

$$\mathrm{nr}(A, i, \mathcal{J}) := |\{j \colon a_{ij} = 0,\ i \neq j \text{ и } j \notin \mathcal{J}\}|.$$

Аналогично для столбцов:

$$\mathrm{nc}(A, i, \mathcal{J}) := |\{j \colon a_{ji} = 0,\ i \neq j \text{ и } j \notin \mathcal{J}\}|.$$

Заметим, что $\mathrm{nr}(A, i, \varnothing) \geqslant 1$, если и только если строка $\mathrm{row}(i, A)$ не является почти ненулевой. Аналогичное утверждение справедливо для столбцов.

В следующей лемме мы видим, как строки и столбцы в матрицах U и Z связаны друг с другом при выполнении условий ортогональности и минимальной ортогональности.

Лемма 3.4 (контролируемая инициализация). *Пусть $A \in M_n^N$, $i \in [n]$.*

1. *Если строка $\mathrm{row}(i, A)$ почти ненулевая и $B \in \mathrm{or}(A)$, то строка $\mathrm{row}(i, B)$ нулевая.*
2. *Если строка $\mathrm{row}(i, A)$ нулевая, то существует такая матрица $B \in \mathrm{b}(A)$, что строка $\mathrm{row}(i, B)$ почти ненулевая.*

Аналогичные утверждения выполняются и для столбцов.

Доказательство.

1. Для всех матриц $B \in \mathrm{or}(A)$ имеем $0 = (AB)_{ij} = (UB)_{ij} = B_{ij}$ для всех индексов $j \in [n]$.

2. Напомним, что i-я строка матрицы R_i почти ненулевая. Из условия и следствия 2.16 следует, что $R_i \in \mathrm{or}(A)$. Теперь выберем матрицу B, минимальную в $\mathrm{or}(A) \cap \perp(R_i)$.

Аналогичные рассуждения проводятся для столбцов. □

Определение 3.5 (контролируемая матрица). Пусть $A \in M_n^N$ и подмножества индексов $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq [n]$ соответствуют почти ненулевым строкам и столбцам матрицы A соответственно. Тогда матрица $F(A) := [f_{ij}] \in M_n^N$, где $f_{ij} = 0$, если $i \in \mathcal{I}$, или $j \in \mathcal{J}$, или $i = j$, и $f_{ij} = -1$ иначе, называется *контролируемой матрицей* для матрицы A.

Возможны случаи, когда $F(A) \notin \mathrm{or}(A)$, например, это верно для матрицы $A = U_{1n}^{2,n-1}$. Однако $F(A) \in \mathrm{or}(A)$ характеризует $\mathrm{b}(A) = \{F(A)\}$, а значит, $|\,\mathrm{b}(A)| = 1$, что является интересным, потому что тогда множество $\mathrm{or}(A) = \top\big(F(A)\big)$ является подрешёткой. Следующая лемма предоставляет доказательство этого факта. В следствии 6.10 содержится обратное утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть $A \in M_n^N$ и $F(A) \in M_n^N$ — контролируемая матрица для матрицы A. Тогда*

1) $\mathrm{or}(A) \subseteq \top\big(F(A)\big)$, *в частности* $\mathrm{b}(A) \subseteq \top\big(F(A)\big)$;
2) $F(A) \in \mathrm{or}(A)$, *если и только если* $\mathrm{b}(A) = \{F(A)\}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. По пункту 1 леммы 3.4 если строка $\mathrm{row}(i,A)$ почти ненулевая, то строка $\mathrm{row}(i,B)$ нулевая для всех матриц $B \in \mathrm{or}(A)$. Аналогичные рассуждения проводятся для столбцов. Следовательно, $B \in \top\big(F(A)\big)$ для всех матриц $B \in \mathrm{or}(A)$, т. е. $\mathrm{or}(A) \subseteq \top\big(F(A)\big)$.

Докажем второе утверждение. Если $F(A) \in \mathrm{or}(A)$, то по следствию 2.22 $\top\big(F(A)\big) \subseteq \mathrm{or}(A)$. Используя пункт 1), получаем $\mathrm{or}(A) = \top\big(F(A)\big)$. Достаточность очевидна. □

Лемма 3.7. *$F(A) \leqslant \ulcorner A$ для каждой матрицы $A \in M_n^N$.*

Доказательство. Положим $F(A) = [f_{ij}]$ и $\ulcorner A = [b_{ij}]$. Пусть подмножества индексов $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq [n]$ соответствуют почти ненулевым строкам и столбцам матрицы A соответственно. Рассмотрим индексы $i, j \in [n]$.

1. Если $a_{ij} = -1$, то $b_{ij} = 0$ и $f_{ij} \leqslant b_{ij}$.
2. Если $a_{ij} = 0$ и $i = j$, то $f_{ij} = 0 = b_{ij}$.
3. Если $a_{ij} = 0$ и $i \neq j$, то $i \notin \mathcal{I}$ и $j \notin \mathcal{J}$, откуда получаем $f_{ij} = -1 = b_{ij}$. □

4. Ортогональное множество и базис для элементарных матриц

Определение 4.1 (элементарные матрицы). Матрицы E_{ij}, U_{ij}, U_{ij}^{kl}, R_i, C_j, введённые в обозначениях 2.7 и 2.11 называются *элементарными матрицами*.

Определение 4.2 (независимость). Для множества $\mathcal{K} \subseteq [n] \times [n] \setminus \Delta$ (см. с. 7) скажем, что множество $\mathcal{K}$ *независимо*, если у любых двух различных элементов множества $\mathcal{K}$ первые компоненты различны и у любых двух различных элементов множества $\mathcal{K}$ вторые компоненты различны. Множество $\mathcal{S} = \{E_{ij} \colon (i,j) \in \mathcal{K}\}$ называется *независимым*, если множество $\mathcal{K}$ независимо.

Лемма 4.3 (ортогональное множество для E_{ij}). *Пусть $i, j, k, l \in [n]$, $i \neq j$ и $k \neq l$.*

1. $\mathrm{or}(E_{ij}) = \{X \in M_n^N \colon \mathrm{nr}(X, i, \varnothing) \geqslant 1$ *и* $\mathrm{nc}(X, j, \varnothing) \geqslant 1\}$, *т. е. хотя бы один недиагональный элемент i-й строки матрицы X равняется 0 и хотя бы один недиагональный элемент j-й строки матрицы X равняется 0.*
2. $\mathrm{or}(E_{ij} + E_{kl}) = \mathrm{or}(E_{ij}) \cap \mathrm{or}(E_{kl})$, *если $i \neq k$ и $j \neq l$.*
3. $\mathrm{or}(E_{ij} + E_{il}) = \{X \in M_n^N \colon \mathrm{nr}(X, i, \varnothing) \geqslant 1,\ \mathrm{nc}(X, j, \{l\}) \geqslant 1,\ \mathrm{nc}(X, l, \{j\}) \geqslant 1\}$, *если $j \neq l$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Непосредственная проверка показывает, что $E_{ij} \leqslant XE_{ij}$ и $E_{ij} \leqslant E_{ij}X$ для всех матриц $X \in M_n^N$. Отсюда следует, что $X \in \mathrm{or}(E_{ij})$ тогда и только тогда, когда $(E_{ij}X)_{ij} = 0 = (XE_{ij})_{ij}$. Так как

$$(XE_{ij})_{ij} = \Big(\max_{k \neq i} x_{ik}\Big) \oplus (-1),$$

получаем, что $(XE_{ij})_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда существует индекс $k \in [n]$, $k \neq i$, для которого выполняется $x_{ik} = 0$, т. е. $\mathrm{nr}(X, i, \varnothing) \geqslant 1$. Аналогично получаем $\mathrm{nc}(X, j, \varnothing) \geqslant 1$.

Пункты 2, 3 проверяются аналогично. □

Следствие 4.4 (базис для E_{ij}, U_{ij} и U_{ij}^{kl}).

1. $\mathrm{b}(E_{ij}) = \{U_{kj}^{il} \colon k, l \notin \{i, j\}\} \cup \{U_{ij}\}$ *и* $|\mathrm{b}(E_{ij})| = (n-2)^2 + 1$.
2. $\mathrm{b}(U_{ij}) = \{E_{ij}\}$.
3. $\mathrm{b}(U_{ij}^{kl}) = \Big\{ \sum\limits_{s \in \{i,k\},\ t \in \{j,l\},\ s \neq t} E_{st} \Big\}$, *если* $i \neq k$ *и* $j \neq l$.

Доказательство. Пункт 1 следует из пункта 1 леммы 4.3. Пункты 2 и 3 следуют из леммы 2.15 и пункта 2 следствия 3.6. □

Следующая лемма показывает, что дополнение к ортогональному множеству некоторых матриц является конечным объединением подрешёток.

Лемма 4.5 (дополнение к некоторым ортогональным множествам). *Для индексов* $i, j, k, l \in [n]$ *при* $i \neq j$, $k \neq l$ *и* $(i, j) \neq (k, l)$

1) $R_i, C_j \notin \mathrm{or}(E_{ij})$ *и* $A \in \mathrm{or}(E_{ij})$ *для всех матриц* $A \in \top(R_i) \cup \top(C_j)$, $R_i \neq A \neq C_j$;
2) $\mathrm{or}(E_{ij})^{\complement} = \perp(R_i) \cup \perp(C_j)$;
3) $\mathrm{or}(E_{ij} + E_{kl})^{\complement} = \mathrm{or}(E_{ij})^{\complement} \cup \mathrm{or}(E_{kl})^{\complement}$, *если* $i \neq k$ *и* $j \neq l$;
4) *если матрица* A *является конечной суммой независимых матриц* E_{ij}, *то множество* $\mathrm{or}(A)^{\complement}$ *является конечным объединением решёток вида* $\perp(R_i)$ *и* $\perp(C_j)$.

Доказательство. Пункт 1) следует из пункта 1 леммы 4.3 и пункта 1 леммы 2.12. Фактически пункт 2) эквивалентен пункту 1 леммы 4.3. Пункт 3) следует из пункта 2 леммы 4.3. Пункт 4) следует из пунктов 2) и 3). □

Пример 4.6. Условия $i \neq k$ и $j \neq l$ для матриц E_{ij}, E_{kl} в пункте 3) леммы 4.5 являются существенными. Действительно, пусть $n = 3$. Тогда $\mathrm{or}(E_{12} + E_{13})^{\complement} \nsubseteq \mathrm{or}(E_{12})^{\complement} \cup \mathrm{or}(E_{13})^{\complement}$, потому что $E_{13} \in \mathrm{or}(E_{12} + E_{13})^{\complement}$, но $E_{13} \notin \mathrm{or}(E_{12})^{\complement} \cup \mathrm{or}(E_{13})^{\complement}$.

Пример 4.7. Обобщение пункта 3) предыдущей леммы на большее число слагаемых не всегда возможно из-за зависимости матриц E_{ij}. Действительно, пусть $n = 4$. Тогда $\mathrm{or}(E_{12} + E_{13} + E_{14})^{\complement} \nsubseteq \mathrm{or}(E_{12})^{\complement} \cup \mathrm{or}(E_{13})^{\complement} \cup \mathrm{or}(E_{14})^{\complement}$, потому что $E_{14} \in \mathrm{or}(E_{12} + E_{13} + E_{14})^{\complement}$, но $E_{14} \notin \mathrm{or}(E_{12})^{\complement} \cup \mathrm{or}(E_{13})^{\complement} \cup \mathrm{or}(E_{14})^{\complement}$.

Замечание 4.8. Множество $\mathrm{or}(U)^{\complement} = M_n^N \setminus \{Z\}$ не может быть объединением решёток вида $\perp(R_i)$ и $\perp(C_j)$.

5. Ортогональность на языке графов

Мы также можем изучить ортогональность с помощью теории графов. Сначала напомним результат из [2], который будет использован позже. P^{1i} обозначает матрицу перестановки.

Следствие 5.1 [2, следствие 5.4]. *Пусть $A \in M_n^N$ и существует индекс $i \in [n]$, такой что i-я строка и i-й столбец матрицы A почти ненулевые. Если*

$$P^{1i}AP^{1i} = \begin{bmatrix} 0 & v^t \\ w & X \end{bmatrix},$$

где векторы v и w почти ненулевые, то

$$\mathrm{or}(P^{1i}AP^{1i}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0_{1\times n-1} \\ 0_{n-1\times 1} & Y \end{bmatrix},\ Y \in \mathrm{or}(X) \right\}.$$

Последнее равенство позволяет заключить, что $|\,\mathrm{or}(A)| = |\,\mathrm{or}(X)|$.

Определение 5.2. С каждой матрицей $A = [a_{ij}] \in M_n^N$ мы можем связать ориентированный граф $\Gamma(A)$ с множеством вершин $\mathrm{V}\big(\Gamma(A)\big) = [n]$, и вершины i, j соединены направленным ребром $(i,j) \in \mathrm{E}\big(\Gamma(A)\big)$, если и только если $i \neq j$ и $a_{ij} = 0$.

Замечание 5.3. Наше определение запрещает петли в графах. В терминах графов следствие 5.1 означает, что число входящих и исходящих рёбер для каждой вершины i, выбранной в следствии 5.1, равняется 0, т. е. вершина является изолированной. Отсюда следует, что при изучении ортогональности можно вместо графа $\Gamma(A)$ рассматривать урезанный граф $\Gamma'(A)$, из которого исключены все изолированные вершины.

Определение 5.4. Объединённый граф $\Gamma(A,B)$ для графов $\Gamma(A)$ и $\Gamma(B)$, где $A, B \in M_n^N$, — это ориентированный двухцветный граф с множеством вершин $\mathrm{V}\big(\Gamma(A,B)\big) = [n]$ и множеством рёбер $\mathrm{E}\big(\Gamma(A,B)\big) = \mathrm{E}\big(\Gamma(A)\big) \cup \mathrm{E}\big(\Gamma(B)\big)$. Другими словами, можно считать, что рёбра из $\mathrm{E}\big(\Gamma(A)\big)$ и $\mathrm{E}\big(\Gamma(B)\big)$ окрашены в красный и чёрный цвета соответственно. Далее красные и чёрные рёбра обозначаются через $(i,j)_r$ и $(i,j)_b$ соответственно. Условие $(i,j) \in \mathrm{E}\big(\Gamma(A,B)\big)$ означает, что хотя бы одно из рёбер $(i,j)_r$ и $(i,j)_b$ содержится в $\mathrm{E}\big(\Gamma(A,B)\big)$.

Определение 5.5. Объединённый граф $\Gamma(A,B)$, где $A, B \in M_n^N$, называется *ортогонально полным*, если $B \in \mathrm{or}(A)$, что по определению 2.13 эквивалентно $A \in \mathrm{or}(B)$.

Лемма 5.6. *Объединённый граф $\Gamma(A,B)$, где $A, B \in M_n^N$, ортогонально полон тогда и только тогда, когда для каждой пары (i,j) либо $(i,j) \in \mathrm{E}\big(\Gamma(A,B)\big)$, либо существуют индексы k, m, такие что $(i,k)_r, (k,j)_b \in \mathrm{E}\big(\Gamma(A,B)\big)$ и $(i,m)_b, (m,j)_r \in \mathrm{E}\big(\Gamma(A,B)\big)$.*

Доказательство. Утверждение леммы есть в точности определение тропического умножения нормальных матриц в терминах объединённых графов. □

Следствие 5.7. *Ортогонально полный граф $\Gamma(A,B)$, где $A,B\in M_n^N$, сильно связен и $\operatorname{diam}\bigl(\Gamma(A,B)\bigr)\in\{1,2\}$.*

Следствие 5.8. *Объединённый граф $\Gamma(A,A)$ является ортогонально полным тогда и только тогда, когда для каждой пары (i,j) либо $(i,j)\in E\bigl(\Gamma(A)\bigr)$, либо существует индекс k, такой что $(i,k)\in E\bigl(\Gamma(A)\bigr)$ и $(k,j)\in E\bigl(\Gamma(A)\bigr)$.*

Доказательство. Граф $\Gamma(A,A)$ представляет собой двухцветную копию графа $\Gamma(A)$, значит, $(i,k)_b\in\Gamma(A)$ тогда и только тогда, когда $(i,k)_r\in\Gamma(A)$. □

Следствие 5.9 (самоортогональность). *Матрица A самоортогональна тогда и только тогда, когда граф $\Gamma(A)$ сильно связен и $\operatorname{diam}\Gamma(A)\in\{1,2\}$.* □

Пусть $A\in M_n^N$. Рассмотрим такое множество индексов $\mathcal{I}=\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$, что для каждого индекса $i_l\in\mathcal{I}$ строка и столбец с номером i_l матрицы A почти ненулевые. Тогда, применяя следствие 5.1, можно свести изучение нормальных матриц порядка n, ортогональных матрице A, к изучению нормальных матриц порядка $n-k$, ортогональных матрице A', полученной из матрицы A удалением строк и столбцов с номерами из множества $\mathcal{I}$. Ниже мы интерпретируем уменьшение порядка матрицы в терминах теории графов.

Определение 5.10. Пусть вершины $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$, $k\leqslant n$, графа $\Gamma(A)$, где $A\in M_n^N$, являются изолированными. Тогда урезанный объединённый граф $\Gamma'(A,B)$ для графов $\Gamma(A)$ и $\Gamma(B)$, где $B\in M_n^N$, — это ориентированный двухцветный граф, полученный из графа $\Gamma(A,B)$ удалением вершин $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$ вместе с их рёбрами.

Замечание 5.11. Пусть $B\in\operatorname{or}(A)$. Тогда по следствию 5.1 в графе $\Gamma(A,B)$ число входящих и исходящих рёбер каждой из вершин $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$ равняется $n-1$, кроме того, все эти рёбра чёрные.

Лемма 5.12. *Объединённый граф $\Gamma(A,B)$, где $A,B\in M_n^N$, является ортогонально полным тогда и только тогда, когда урезанный объединённый граф $\Gamma'(A,B)$ является ортогонально полным.*

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из следствия 5.1. □

Определение 5.13. Граф $\Gamma(B)$, где $B\in M_n^N$, называется *минимальным покрытием* графа $\Gamma(A)$, где $A\in M_n^N$, если граф $\Gamma(A,B)$ ортогонально полный и не существует собственного ортогонально полного подграфа $\Gamma(A,X)$, где $X\in M_n^N$.

Оказывается, что множество минимальных покрытий соответствует множеству минимально ортогональных матриц.

Лемма 5.14. *Граф $\Gamma(B)$, где $B\in M_n^N$, является минимальным покрытием графа $\Gamma(A)$, где $A\in M_n^N$, тогда и только тогда, когда $B\in\mathrm{b}(A)$.*

Доказательство. Утверждение следует из определения 2.23. □

6. От базиса к ортогональному множеству матрицы

Для матрицы $A \in M_n^N$ множество $\mathrm{b}(A)$ матриц, минимально ортогональных матрице A, актуально, поскольку по следствию 2.25

$$\mathrm{or}(A) = \bigcup_{B \in \mathrm{b}(A)} \top(B).$$

Заметим, что базис $\mathrm{b}(A)$ может содержать более одного элемента, как показано в следующем примере.

Пример 6.1. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

все элементы множества $\mathrm{b}(A)$ перечислены ниже:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для подмножества $\mathcal{S} \subseteq M_n^N$ множество $\mathrm{b}(\mathcal{S})$ помогает нам найти $|\mathrm{or}(\mathcal{S})|$.

Лемма 6.2. *Пусть* $\mathcal{S} \subseteq M_n^N$ *и* $\mathrm{b}(\mathcal{S}) = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$. *Если положить* $T_i = \top(B_i)$, *то*

1) $|\mathrm{or}(\mathcal{S})| = \sum\limits_{i=1}^{m} |T_i| - \sum\limits_{i<j} |T_i \cap T_j| + \sum\limits_{i<j<k} |T_i \cap T_j \cap T_k| - \ldots + (-1)^{m-1} |T_1 \cap T_2 \cap \cap \ldots \cap T_m|$;
2) $T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_l} = \top(B)$, *где* $B = B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_l}$.

Доказательство. По следствию 2.25

$$\mathrm{or}(\mathcal{S}) = \bigcup_{i=1}^{m} T_i.$$

Тогда первое утверждение — это просто формула включения-исключения для объединения m множеств. Второй пункт непосредственно следует из определения тропической суммы, которая является максимумом. □

Обозначим число недиагональных нулей в матрице A через $\nu(A)$.

Замечание 6.3. $|\top(A)| = 2^{n^2 - n - \nu(A)}$ для матрицы $A \in M_n^N$.

Мы можем описать связь между ортогональными множествами нормальных матриц, используя множества минимально ортогональных матриц.

Следствие 6.4. *Пусть* $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subseteq M_n^N$ *и* $\mathrm{b}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{b}(\mathcal{S}')$. *Тогда* $\mathrm{or}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{or}(\mathcal{S}')$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 2.25. □

Лемма 6.5 (связь or и b). *Пусть* $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subseteq M_n^N$. *Тогда* $\mathrm{or}(\mathcal{S}) = \mathrm{or}(\mathcal{S}')$, *если и только если* $\mathrm{b}(\mathcal{S}) = \mathrm{b}(\mathcal{S}')$.

Доказательство. Достаточность вытекает из следствия 6.4. Теперь предположим, что $\mathrm{b}(\mathcal{S}) \neq \mathrm{b}(\mathcal{S}')$. Тогда без ограничения общности существует матрица $A \in \mathrm{b}(\mathcal{S})$, такая что $A \notin \mathrm{b}(\mathcal{S}')$. Если существует матрица $B \in \mathrm{b}(\mathcal{S}')$, такая что $B < A$, то $B \notin \mathrm{or}(\mathcal{S})$, следовательно, $\mathrm{or}(\mathcal{S}) \neq \mathrm{or}(\mathcal{S}')$. Используя $A \notin \mathrm{b}(\mathcal{S}')$, получаем, что если не существует матрицы $B \in \mathrm{b}(\mathcal{S}')$, такой что $B < A$, то $A \notin \mathrm{or}(\mathcal{S}')$, следовательно, $\mathrm{or}(\mathcal{S}) \neq \mathrm{or}(\mathcal{S}')$. □

Лемма 6.6. *Пусть* $A, B \in M_n^N$ *и матрица* $C \in M_n^N$ *является индикаторной матрицей пары* (A, B). *Тогда выполняются следующие соотношения:*

1) $\mathrm{b}(A) \cup \mathrm{b}(B) \subseteq \mathrm{or}(A \oplus B)$;
2) $\mathrm{b}(A) \cup \mathrm{b}(B) \subseteq \mathrm{or}(AB)$, $\mathrm{b}(A) \cup \mathrm{b}(B) \subseteq \mathrm{or}(BA)$ *и* $\mathrm{b}(A) \cup \mathrm{b}(B) \subseteq \mathrm{or}(C)$;
3) $\bigcup\limits_i \mathrm{b}(A_i) \subseteq \mathrm{or}(A)$, *где* $A = \bigoplus\limits_i A_i$;
4) $\bigcup\limits_i \mathrm{b}(A_i) \subseteq \mathrm{or}(A)$, *где* $A = \bigodot\limits_i A_i$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2.20 и того, что $A, B \leqslant A \oplus B \leqslant AB, BA$. □

Замечание 6.7. В лемме 6.6 мы не можем заменить or на b, как показано в следующем примере.

Пример 6.8.

1. Положим $A = Z$ и $B = U$. Тогда $\mathrm{b}(A) = \{U\}$, $\mathrm{b}(B) = \{Z\}$, $\mathrm{b}(A \oplus B) = \mathrm{b}(Z) = \{U\}$.
2. Положим $A = B = N \neq Z \in M_n^N$, $N^2 = Z$. Тогда $U \notin \mathrm{b}(N) = \mathrm{b}(A) = \mathrm{b}(B)$, $\mathrm{b}(AB) = \mathrm{b}(Z) = \{U\}$.

Интересен случай, когда $|\,\mathrm{b}(A)| = 1$, поскольку в этом случае множество $\mathrm{or}(A) = \top(B)$ является подрешёткой, где $\mathrm{b}(A) = \{B\}$.

Теорема 6.9. *Пусть* $A = [a_{ij}] \in M_n^N$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $|\,\mathrm{b}(A)| = 1$, *т. е. существует матрица* $B \in M_n^N$, *такая что* $\mathrm{or}(A) = \top(B)$;
2) *существует единственное минимальное покрытие графа* $\Gamma(A)$;
3) *для каждой позиции* (i, j) *выполняется хотя бы одно из следующих условий:*
   a) $(i, j) \in \mathrm{E}\big(\Gamma(A)\big)$,
   b) *число исходящих из вершины* i *рёбер графа* $\Gamma(A)$ *равняется* 0,
   c) *число входящих в вершину* j *рёбер графа* $\Gamma(A)$ *равняется* 0,
   d) *существуют вершины* k, m, *такие что* $(i, k), (m, j) \in \mathrm{E}\big(\Gamma(A)\big)$, *число исходящих из вершины* k *рёбер и число входящих в вершину* m *рёбер графа* $\Gamma(A)$ *равняются* 0;

4) *для каждой позиции* (i,j) *выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

   a) $a_{ij}=0$,
   b) i*-я строка матрицы* A *почти ненулевая*,
   c) j*-й столбец матрицы* A *почти ненулевой*,
   d) *существуют индексы* $k,m\in[n]$, *такие что* $a_{ik}=a_{mj}=0$, *и* k*-я строка и* m*-й столбец матрицы* A *почти ненулевые*.

Доказательство. Заметим, что утверждение 1) эквивалентно утверждению 2) по лемме 5.14 и утверждение 3) эквивалентно утверждению 4) по определению 5.2. Достаточно доказать, что утверждение 1) эквивалентно утверждению 4).

Предположим, что утверждение 4) выполняется для матрицы A. По пункту 2) следствия 3.6 достаточно доказать, что $F(A)=(f_{ij})\in\operatorname{or}(A)$. Пусть $C=[c_{ij}]\in M_n^N$ — индикаторная матрица пары $\big(A,F(A)\big)$. Покажем, что для всех позиций (i,j) выполняется $c_{ij}=0$, т. е. $C=Z$. Зафиксируем позицию (i,j). По условию 4) хотя бы одно из условий a), b), c), d) выполняется для позиции (i,j).

Случай a). Если $a_{ij}=0$, то по лемме 2.15 $c_{ij}=0$.

Случай b). Если i-я строка матрицы A почти ненулевая, то $f_{ij}=0$, следовательно, по лемме 2.15 $c_{ij}=0$.

Случай c). Аналогично если j-й столбец матрицы A почти ненулевой, то $c_{ij}=0$.

Случай d). Если существуют индексы $k,m\in[n]$, такие что $a_{ik}=a_{mj}=0$ и k-я строка и m-й столбец матрицы A почти ненулевые, то $f_{kj}=f_{im}=0$, откуда по определению тропического умножения получаем $c_{ij}=0$.

Таким образом, $\mathrm{b}(A)=\{F(A)\}$ и $|\,\mathrm{b}(A)|=1$.

Теперь докажем обратное. Предположим, что существует позиция (i,j), такая что ни одно из условий a), b), c), d) из условия 4) не выполняется. Из отрицания a), b), c) получаем $a_{ij}\neq 0$, $\operatorname{nr}(A,i,\varnothing)\geqslant 1$, $\operatorname{nc}(A,j,\varnothing)\geqslant 1$. Так как $a_{ij}\neq 0$, то $i\neq j$, поскольку матрица A нормальная. Без ограничения общности из отрицания d) получаем, что для всех индексов $k\in[n]$, таких что $a_{ik}=0$, k-я строка не является почти ненулевой, т. е. $\operatorname{nr}(A,k,\varnothing)\geqslant 1$. Предъявим как минимум два элемента из множества $\mathrm{b}(A)$.

I. По пункту 1 леммы 4.3 матрица A ортогональна матрице E_{ij}. Выберем матрицу $B=[b_{pq}]$, чтобы она была минимальной в $\operatorname{or}(A)\cap\perp(E_{ij})$. Тогда $B\in\mathrm{b}(A)$ по лемме 2.27.

II. Так как $(AB)_{ij}=0$, то существует индекс $k\in[n]$, такой что $a_{ik}=b_{kj}=0$, но $a_{ij},b_{ij}\neq 0$, следовательно, $k\neq i,j$. Так как $a_{ik}=0$, то из отрицания d) получаем $\operatorname{nr}(A,k,\varnothing)\geqslant 1$. Тогда по пункту 1 леммы 4.3 матрица A ортогональна матрице E_{kj}. Выберем матрицу $B'=[b'_{pq}]$, чтобы она была минимальной в $\operatorname{or}(A)\cap\perp(E_{kj})$. Тогда $B'\in\mathrm{b}(A)$ по лемме 2.27. Так как $b_{kj}=0$ и $b'_{kj}\neq 0$, то $B\neq B'$ и $|\,\mathrm{b}(A)|>1$, что завершает доказательство. $\square$

Следствие 6.10. *Пусть $A \in M_n^N$. Тогда $|\,\mathrm{b}(A)| = 1$, если и только если* $\mathrm{b}(A) = \{F(A)\}$. □

Определение 6.11. Пусть $A \in M_n^N$, $i, j \in [n]$. Позиция (i,j) называется *нечёткой*, если ни одно из условий a), b), c), d) из пункта 4) теоремы 6.9 не выполняется.

Нечёткие позиции являются источником существования более одной минимально ортогональной матрицы к матрице A. Оценим мощность множества $\mathrm{b}(A)$.

Следствие 6.12. *Пусть матрица $A \in M_n^N$. Тогда*

$$|\,\mathrm{b}(A)| \leqslant \prod_{(i,j)^*} \big(1 + \mathrm{nr}(A, i, \varnothing)\,\mathrm{nc}(A, j, \varnothing)\big),$$

где $(i,j)^*$ — нечёткие позиции.

Пример 6.13 (отсутствие взаимности для $\mathrm{b}(S)$). Пусть $n \geqslant 4$. По пункту 3 следствия 4.4 имеем

$$\mathrm{b}(U_{1n}^{2,n-1}) = \{E_{1\,n-1} + E_{1\,n} + E_{2\,n-1} + E_{2\,n}\}.$$

С другой стороны, по пункту 1 следствия 4.4 получаем $U_{1n}^{2,n-1} \in \mathrm{b}(E_{2n})$, но $E_{2n} \notin \mathrm{b}(U_{1n}^{2,n-1})$.

Замечание 6.14. Заметим, что пункт 2 леммы 3.4 выполняется не для всех матриц $B \in \mathrm{b}(A)$. Действительно, согласно примеру 6.13 $U_{1n}^{2,n-1} \in \mathrm{b}(E_{2n})$, но $\mathrm{row}(1, U_{1n}^{2,n-1}) \neq \mathrm{row}(1, U)$.

Лемма 6.15. *Для матрицы $A \in M_n^N$*

1) $\ulcorner A \in \mathrm{or}(A)$ *и* $\top(\ulcorner A) \subseteq \mathrm{or}(A)$;
2) *существует матрица $B \in \mathrm{b}(A)$, такая что $B \in \perp(\ulcorner A)$. В частности, если $|\,\mathrm{b}(A)| = 1$, то $\mathrm{b}(A) \subseteq \perp(\ulcorner A)$.*

Доказательство. Пункт 1) вытекает из следствий 2.16, 2.22. Теперь докажем пункт 2). Из пункта 1 мы знаем, что $\ulcorner A \in \mathrm{or}(A)$. Выберем матрицу B, чтобы она была минимальной в $\mathrm{or}(A) \cap \perp(\ulcorner A)$. Тогда $B \in \mathrm{b}(A)$ по лемме 2.27. □

Лемма 6.16 (базис для R_i и C_j). $\mathrm{b}(R_i) = \{\ulcorner R_i\}$ *и* $\mathrm{b}(C_j) = \{\ulcorner C_j\}$.

Доказательство. Утверждение следует из пункта 1 леммы 6.15 и пункта 2 следствия 3.6. □

Следствие 6.17. *Для матриц R_i, C_j, U_{ij} и U_{ij}^{kl} (где $i \neq k$ и $j \neq l$) базис состоит из одного элемента.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 6.16 и пунктов 2, 3 следствия 4.4. □

7. Ортогональное множество и базис для матричных подмножеств

Мы работаем в $(\mathcal{P}(M_n^N), \cup, \cap)$, где $\oplus$, or, Min и $\mathrm{b} = \mathrm{Min} \circ \mathrm{or}$ имеют смысл (см. обозначение 2.28).

Обозначение 7.1. Для подмножеств $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subseteq M_n^N$ введём тропическую сумму

$$\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}' := \{A \oplus B \mid A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{S}'\}.$$

Лемма 7.2. *Для матриц $A, B \in M_n^N$ справедливо*

$$\mathrm{Min}\big(\mathrm{or}(A) \cap \mathrm{or}(B)\big) = \mathrm{b}(\{A, B\}) = \mathrm{Min}\big(\mathrm{b}(A) \oplus \mathrm{b}(B)\big).$$

Доказательство. По следствию 2.25 получаем

$$\mathrm{or}(A) \cap \mathrm{or}(B) = \Big(\bigcup_{A_i \in \mathrm{b}(A)} \top(A_i)\Big) \cap \Big(\bigcup_{B_i \in \mathrm{b}(B)} \top(B_i)\Big) = \\ = \bigcup_{\substack{A_i \in \mathrm{b}(A) \\ B_j \in \mathrm{b}(B)}} \top(A_i) \cap \top(B_j) = \bigcup_{i,j} \top(A_i \oplus B_j).$$

Следовательно,

$$\mathrm{Min}\big(\mathrm{or}(A) \cap \mathrm{or}(B)\big) = \mathrm{Min}(\{A_i \oplus B_j \mid A_i \in \mathrm{b}(A),\ B_j \in \mathrm{b}(B)\}). \qquad \square$$

Следствие 7.3. *Справедливо*

$$\mathrm{Min}\Big(\bigcap_i \mathrm{or}(A_i)\Big) = \mathrm{b}(\{A_i\}_i) = \mathrm{Min}\Big(\bigoplus_i \mathrm{b}(A_i)\Big).$$

Теперь мы можем получить некоторую информацию об итерациях ортогональных множеств матрицы.

Следствие 7.4. *Для матрицы $A \in M_n^N$ и степени $j \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\mathrm{b}\big(\mathrm{or}^j(A)\big) = \mathrm{Min}\Big(\bigoplus_{B \in \mathrm{or}^{j-1}(A)} \mathrm{b}(B)\Big).$$

Доказательство. По определению

$$\mathrm{or}^j(A) = \mathrm{or}\big(\mathrm{or}^{j-1}(A)\big) = \bigcap_{B \in \mathrm{or}^{j-1}(A)} \mathrm{or}(B). \qquad \square$$

8. Сравнение двух понятий минимальности

Напомним определение и следствие из [2].

Определение 8.1 [2, определение 4.1]. Пусть Θ_n — минимальное число недиагональных нулевых элементов среди всех пар ортогональных матриц в M_n^N, т. е.

$$\Theta_n = \min_{A,B \in M_n^N} \{\nu(A) + \nu(B) \colon AB = Z = BA\}.$$

Пусть матрицы $A, B \in M_n^N$. Пара (A, B) называется *минимальной*, если на ней достигается значение Θ_n, т. е. если $\nu(A) + \nu(B) = \Theta_n$ и $AB = Z = BA$.

Следствие 8.2 [2, следствие 4.31]. *Если $n \geqslant 2$, $n \neq 4$, то $\Theta_n = 4n - 6$. Кроме того, $\Theta_4 = 8$.*

Возникает вопрос: какова связь между тем, что (A, B) — минимальная пара и одновременным выполнением условий $A \in \mathrm{b}(B)$ и $B \in \mathrm{b}(A)$? У нас есть два понятия минимальности, совпадают ли они?

Лемма 8.3. *Если (A, B) — минимальная пара, то $A \in \mathrm{b}(B)$ и $B \in \mathrm{b}(A)$.*

Доказательство. Предположим, что пара (A, B) минимальная и $A \notin \mathrm{b}(B)$. Тогда существует матрица $A' < A$, такая что $A'B = Z = BA'$, и, очевидно, $\nu(A') + \nu(B) < \nu(A) + \nu(B)$, противоречие. Аналогично с $B \notin \mathrm{b}(A)$. □

Следующий пример показывает, что обратное неверно.

Пример 8.4. Пусть $n = 6$,

$$A = R_1 + R_2 + R_3, \quad B = R_4 + R_5 + R_6.$$

Тогда по пункту 1) леммы 6.15 и пункту 2) следствия 3.6 $A \in \mathrm{b}(B)$ и $B \in \mathrm{b}(A)$. Но пара (A, B) не является минимальной по следствию 8.2, так как

$$\nu(A) + \nu(B) = n^2 - n > 4n - 6.$$

Если C — индикаторная матрица пары (A, B), то может оказаться, что $\mathrm{b}(A) \cap \mathrm{b}(B) \nsubseteq \mathrm{b}(C)$, как показывает пункт 2 примера 6.8. Некоторые другие свойства пересечений для ортогональных множеств представлены ниже.

Пример 8.5. Следующие матрицы размера 5×5 были рассмотрены ранее в [2]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что

1) $\{A_3\} = \mathrm{b}(B_1)$, $\{B_1\} = \mathrm{b}(A_3)$, (A_3, B_1) является минимальной парой и $\nu(A_3) = \nu(B_1) = 2n-3$,
2) $A_1, A_5 \in \mathrm{b}(B_4)$, $\{B_4\} = \mathrm{b}(A_1)$, $|\,\mathrm{b}(B_4)| > 1$, (A_1, B_4) является минимальной парой и $\nu(A_1) = 2n-2$, $\nu(B_4) = 2n-4$,
3) $A_2 \in \mathrm{b}(B_2)$, $B_2, B_3 \in \mathrm{b}(A_2)$, $|\,\mathrm{b}(A_2)| > 1$, $|\,\mathrm{b}(B_2)| > 1$, (A_2, B_2) является минимальной парой и $\nu(A_2) = \nu(B_2) = 2n-3$.

Непосредственная проверка показывает, что $\mathrm{or}(A_4) \subset \mathrm{or}(A_3) \subset \mathrm{or}(A_1)$ и $\mathrm{or}(A_4) \subset \mathrm{or}(A_2) \subset \mathrm{or}(A_1)$. Тогда $\mathrm{or}(A_2) \cap \mathrm{or}(A_3) \neq \varnothing$, но не имеет места ни включение $\mathrm{or}(A_2) \subset \mathrm{or}(A_3)$, ни включение $\mathrm{or}(A_3) \subset \mathrm{or}(A_2)$. Более того, $\nu(B_1) = 2n-3$, $|\,\mathrm{or}(A_3)| = 2^{n^2-n-\nu(B_1)} = 2^{n^2-3n+3}$ и $|\,\mathrm{or}(A_2)| > 2^{n^2-3n+3}$, поскольку $B_2, B_3 \in \mathrm{b}(A_2)$. Также $A_2 \notin \mathrm{b}(B_3)$.

9. Геометрическая интерпретация нормальных матриц

Почему нам важны нормальные матрицы? Одно из недавних приложений нормальных матриц в задачах классической выпуклой геометрии можно сформулировать следующим образом: выпуклые альковные многогранники в n-мерном евклидовом пространстве могут быть представлены единственным, с точностью до трансляций, способом при помощи идемпотентных (относительно тропического умножения) нормальных матриц (см. [9, 10, 13]). Альковные многогранники в $\mathbb{R}^n$ — это многогранники только с двумя типами уравнений на грани: $x_i = \mathrm{constant}$ или $x_i - x_j = \mathrm{constant}$, $i, j \in [n]$, $i \neq j$. Несколько более общими классами матриц являются звезды Клини. Они используются для исследования макс-конусов (см. [11, 12]).

Читатель должен заметить, что основные вопросы ортогональности матрицы

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}] \in M_n^N(\mathbb{R}_{\leqslant 0} \cup \{-\infty\})$$

могут быть изучены с помощью её образа

$$A = [a_{ij}] \in M_n^N(\{0, -1\}),$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{a}_{ij} = 0, \\ -1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Известно, что произвольная нормальная матрица $\mathbf{A}$ в общем случае задаёт комплекс $\text{t-conv}(\mathbf{A})$ выпуклых альковных многогранников нечистой размерности (см. [7]). По определению множество $\text{t-conv}(\mathbf{A})$ — это подмножество $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех тропических линейных комбинаций столбцов матрицы $\mathbf{A}$. Рассмотрим две нормальные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ одинакового размера n. Произведение $\mathbf{AB}$ нормально, однако в общем случае отлично от $\mathbf{BA}$, поэтому рассматриваются два комплекса: $\text{t-conv}(\mathbf{AB})$ и $\text{t-conv}(\mathbf{BA})$. Как и в классической линейной алгебре, матрица $\mathbf{A}$ представляет отображение $f_{\mathbf{A}}$ (см. [4, 8]). Комплекс $\text{t-conv}(\mathbf{AB})$ — это не что иное, как образ $f_{\mathbf{A}}\big(\text{t-conv}(\mathbf{B})\big)$. Тем самым вопрос о том, аннулируют ли матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ друг друга, т. е. справедливость $\mathbf{AB} = Z = \mathbf{BA}$, эквивалентен выполнению $f_{\mathbf{A}}\big(\text{t-conv}(\mathbf{B})\big) = \{0\} = f_{\mathbf{B}}\big(\text{t-conv}(\mathbf{A})\big)$.

Ниже мы представляем этот геометрический взгляд на трёх примерах при $n = 3$. Заметим, что рисунки двумерные, потому что мы представляем только пересечение множеств с плоскостью $\{z = 0\}$. Последнее справедливо из-за того, что множество $\text{t-conv}(\mathbf{A})$ замкнуто относительно тропического умножения на скаляры и, значит, пересечение $\text{t-conv}(\mathbf{A})$ с $\{z = 0\}$ определяет всё множество $\text{t-conv}(\mathbf{A})$. Для изображения рисунков в $\{z = 0\}$ мы используем матрицу $\mathbf{A}_0$ (с приписыванием нулевого нижнего индекса), у которой последняя строка нулевая и которая получена из данной матрицы $\mathbf{A}$ скалярным умножением столбцов, поэтому $\text{t-conv}(\mathbf{A}_0) = \text{t-conv}(\mathbf{A})$. Хорошо известно (и это видно на рисунках), что если матрица $\mathbf{A}$ нормальная, то множество $\text{t-conv}(\mathbf{A})$ выпуклое, если и только если матрица $\mathbf{A}$ идемпотентная.

Пояснение к рисункам: квадрат обозначает начало координат в $\mathbb{R}^2 = \{z = 0\}$; круглые точки обозначают образующие для множеств $\text{t-conv}(\mathbf{A})$ и $\text{t-conv}(\mathbf{B})$, т. е. столбцы матриц $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{B}_0$. Три тропические прямые отмечены штриховыми, пунктирными и штрихпунктирными линиями. Множества $\text{t-conv}(\mathbf{A}) \cap \{z = 0\}$, $\text{t-conv}(\mathbf{B}) \cap \{z = 0\}$ изображены сплошным чёрным цветом. Перекрывающиеся лучи разных тропических прямых отмечены ромбами.

Пример 9.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = Z$, то матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ взаимно ортогональны по следствию 2.16.

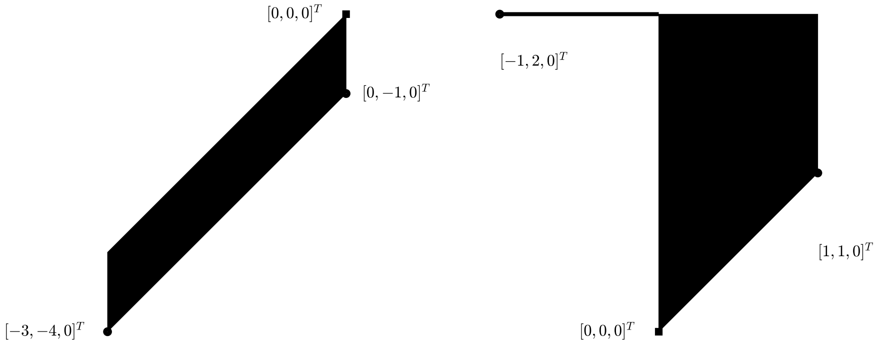

Рис. 1. Пример 9.1: множества $\text{t-conv}(\mathbf{A}) \cap \{z=0\}$ (слева) и $\text{t-conv}(\mathbf{B}) \cap \{z=0\}$ (справа)

Множество $\text{t-conv}(\mathbf{A})$ — это образ отображения $f_{\mathbf{A}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, определённого как

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max\{x, y, z-3\} \\ \max\{x-1, y, z-4\} \\ \max\{x, y, z\} \end{bmatrix}.$$

Мы рассматриваем пересечение множества $\text{t-conv}(\mathbf{A})$ с $\{z=0\}$ (рис. 1) и изучаем отображение (которое также будем обозначать $f_{\mathbf{A}}$), индуцированное отображением $f_{\mathbf{A}}$ на $\{z=0\}$, определённое следующим образом (рис. 2):

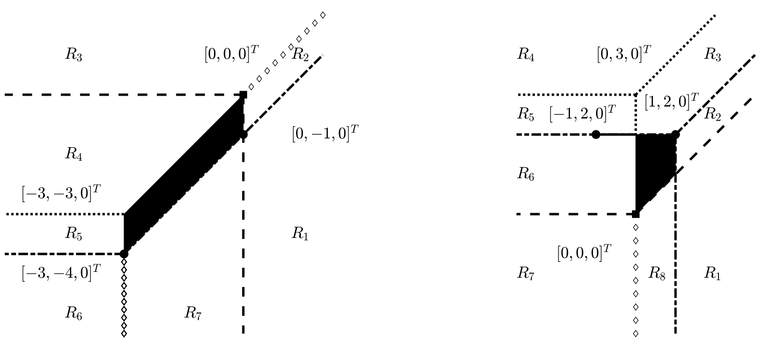

Рис. 2. Пример 9.1: области, связанные с $f_{\mathbf{A}}$ (слева) и $f_{\mathbf{B}}$ (справа). Область R_8 — чёрный сегмент (слева) и область R_9 — чёрный сегмент (справа)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \max\{x,y,-3\} - \max\{x,y,0\} \\ \max\{x-1,y,-4\} - \max\{x,y,0\} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\max\{x,y,0\} \\ -\max\{x,y,0\} \\ -\max\{x,y,0\} \end{bmatrix} = (-\max\{x,y,0\})\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Образ точки $[x,y,0]^{\mathrm{T}}$ при отображении $f_{\mathbf{A}}$ зависит от значений, достигаемых

$$\begin{aligned} &\max\{x,y,-3\} = x \oplus y \oplus (-3), \\ &\max\{x-1,y,-4\} = (-1) \odot x \oplus y \oplus (-4), \\ &\max\{x,y,0\} = x \oplus y \oplus 0. \end{aligned}$$

Эти выражения представляют собой три тропические прямые. Эти прямые разделяют $\{z=0\}$ на области $R_1, R_2, \ldots, R_s$, где $s \leqslant 10$ (см. рис. 2). Тропическая прямая — это объединение трёх лучей. Очевидно, что существует десять областей тогда и только тогда, когда (a) никакие две прямые не имеют перекрывающихся лучей и (b) $\dim \text{t-conv}(\mathbf{A} \cap \{z=0\}) = 2$. Образ точки $[x,y,0]^{\mathrm{T}}$ зависит от области R_j, которой она принадлежит. Имеем

$$[x,y,0]^{\mathrm{T}} \mapsto \begin{cases} [0,-1,0]^{\mathrm{T}}, & \text{если } 0 \leqslant x \text{ и } y \leqslant x-1 \quad \text{область } R_1; \\ [0,y-x,0]^{\mathrm{T}}, & \text{если } 0 \leqslant x \text{ и } x-1 \leqslant y \leqslant x \quad \text{область } R_2; \\ [0,0,0]^{\mathrm{T}}, & \text{если } x \leqslant y \text{ и } 0 \leqslant y \quad \text{область } R_3; \\ [y,y,0]^{\mathrm{T}}, & \text{если } -3 \leqslant y \leqslant 0 \text{ и } x \leqslant y \quad \text{область } R_4; \\ [-3,y,0]^{\mathrm{T}}, & \text{если } -4 \leqslant y \leqslant -3 \text{ и } x \leqslant -3 \quad \text{область } R_5; \\ [-3,-4,0]^{\mathrm{T}}, & \text{если } x \leqslant -3 \text{ и } y \leqslant -4 \quad \text{область } R_6; \\ [x,x,0]^{\mathrm{T}}, & \text{если } -3 \leqslant x \leqslant 0 \text{ и } y \leqslant x-1 \quad \text{область } R_7; \\ [x,y,0]^{\mathrm{T}}, & \text{если } -3 \leqslant x \leqslant 0 \text{ и } x-1 \leqslant y \leqslant x \quad \text{область} \\ & \qquad R_8 = \text{t-conv}(\mathbf{A}) \cap \{z=0\}. \end{cases}$$

Аналогичные вычисления мы можем проделать для матрицы $\mathbf{B}$ и отображения $f_{\mathbf{B}}$ (см. рис. 1 и 2). Для изображения пересечения $\text{t-conv}(\mathbf{B}) \cap \{z=0\}$ мы используем матрицу

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

поскольку $\text{t-conv}(\mathbf{B}_0) = \text{t-conv}(\mathbf{B})$. Заметим, что $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$.

Так как пересечение $\text{t-conv}(\mathbf{B}) \cap \{z=0\}$ содержится в области R_3, указанной выше, то $f_{\mathbf{A}}(\text{t-conv}(\mathbf{B}) \cap \{z=0\}) = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$. Так как пересечение $\text{t-conv}(\mathbf{A}) \cap \{z=0\}$ содержится в области R_7 на рис. 2 (справа) и $f_{\mathbf{B}}$ отображает каждую точку из области R_7 в начало координат, то $f_{\mathbf{B}}(\text{t-conv}(\mathbf{A}) \cap \{z=0\}) = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$. См. рис. 3 для $\mathbf{AB} = Z = \mathbf{BA}$.

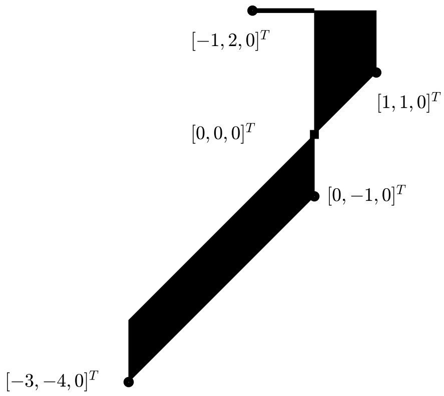

Рис. 3. Пример 9.1: множества $\text{t-conv}(\mathbf{A}) \cap \{z=0\}$ и $\text{t-conv}(\mathbf{B}) \cap \{z=0\}$ вместе

Пример 9.2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

где $a_{32} \leqslant 0$, $b_{23} \leqslant 0$.

Получаем $\mathbf{BA} = [r_{ij}]$, где

$$r_{ij} = \begin{cases} \max\{-3, b_{23}\}, & \text{если } (i,j) = (2,3), \\ \max\{-1, a_{32}\}, & \text{если } (i,j) = (3,2), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если выбрать $a_{32} < 0$ или $b_{23} < 0$, то $\mathbf{BA} \neq Z$. Например, возьмём $a_{32} < 0$ и матрицу $\mathbf{B}$, как в примере 9.1. Тогда пересечение $\text{t-conv}(\mathbf{A}) \cap \{z = 0\}$ не содержится в области R_7 на рис. 2 (справа), поскольку пересечение $\text{t-conv}(\mathbf{A}) \cap \{z=0\}$ содержит сегмент, соединяющий начало координат с точкой $[-a_{32}, -a_{32}, 0]^{\mathrm{T}}$. См. рис. 4 для объединённого графа $\Gamma(A,B)$. Читатель может получить изображение пересечения $\text{t-conv}(\mathbf{A} \cap \{z=0\})$ с помощью матрицы $\mathbf{A}_0$ для этого примера.

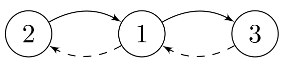

Рис. 4. Пример 9.2: объединённый граф $\Gamma(A,B)$, $A, B \in M_3^N$, $a_{32} = -1 = b_{23}$. Красные рёбра графа изображены штрихованными линиями

Пример 9.3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

где $b_{23} \leqslant 0$. По следствию 2.16 матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ взаимно ортогональны, так как $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = Z$.

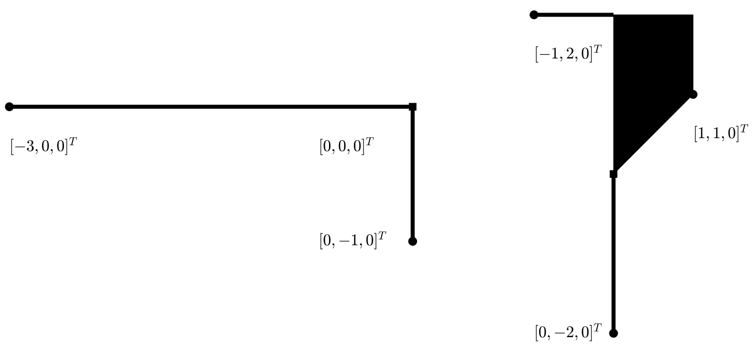

Рис. 5. Пример 9.3: множества t-conv$(\mathbf{A}) \cap \{z = 0\}$ (слева) и t-conv$(\mathbf{B}) \cap \{z = 0\}$ (справа)

Заметим, что пересечение t-conv$(\mathbf{A}) \cap \{z = 0\}$ содержится в $R_6 \cup (R_8 \cap R_9)$ и f_B отображает его в начало координат (рис. 6). Также пересечение t-conv$(\mathbf{B}) \cap \{z = 0\}$ содержится в $R_3 \cup (R_6 \cap R_7)$, и f_A отображает его в начало координат (см. рис. 6). В результате получаем, что $\mathbf{AB} = Z = \mathbf{BA}$, как представлено на рис. 7.

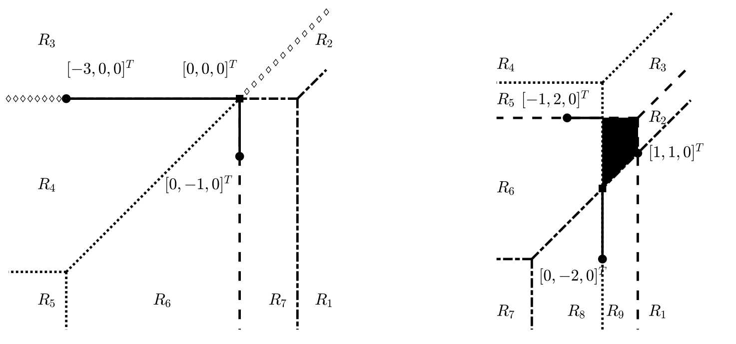

Рис. 6. Пример 9.3: области, связанные с $f_{\mathbf{A}}$ (слева) и $f_{\mathbf{B}}$ (справа). Область R_{10} — чёрный сегмент (справа)

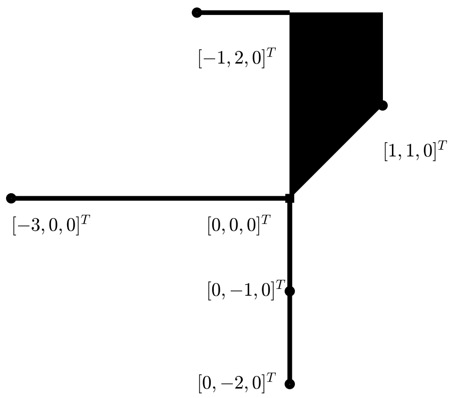

Рис. 7. Пример 9.3: множества $\text{t-conv}(\mathbf{A}) \cap \{z=0\}$ и $\text{t-conv}(\mathbf{B}) \cap \{z=0\}$ вместе

Работа третьего автора выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства экономики и конкуренции, проект I+D MTM2016-76808-P, Министерства науки и инноваций, проект PID-2019-10770 GB-I00 и исследовательской группы 910444 Мадридского университета Комплутенсе.

Литература

[1] Кожухов И. Б., Михалёв А. В. Полигоны над полугруппами: избранные вопросы структурной теории // Фундамент. и прикл. матем. — 2020. — Т. 23, вып. 3. — С. 141—199.

[2] Bakhadly B., Guterman A., de la Puente M. J. Orthogonality для $(0,-1)$ tropical normal matrices // Special Matrices. — 2020. — Vol. 8. — P. 40—60.

[3] Birkhoff G. Lattice Theory. — Providence: Rhode Island, 1967.

[4] Butkovič P. Simple image set of $(\max,+)$ linear mappings // Discrete Appl. Math. — 2000. — Vol. 105. — P. 73—86.

[5] Butkovič P. Max-Plus Linear Systems: Theory and Algorithms. — Berlin: Springer, 2010.

[6] Crawley P., Dilworth R. P. Algebraic Theory of Lattices. — Prentice Hall, 1973.

[7] Develin M. and Sturmfels B. Tropical convexity // Doc. Math. — 2004. — Vol. 9. — P. 1—27; Erratum // Doc. Math. — 2004. — Vol. 9. — P. 205—206.

[8] De la Puente M. J. Tropical linear maps on the plane // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 435, no. 7. — P. 1681—1710.

[9] De la Puente M. J. On tropical Kleene star matrices and alcoved polytopes // Kybernetika. — 2013. — Vol. 49, no. 6. — P. 897—910.

[10] De la Puente M. J. Quasi-Euclidean classification of alcoved convex polyhedra // Linear Multilinear Algebra. — 2019. — Vol. 67.

[11] Sergeev S. Multiorder, Kleene stars and cyclic projectors in the geometry of max cones // Tropical and Idempotent Mathematics / Litvinov G. L., Sergeev S. N., eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 2009. — (Contemp. Math., Vol. 495). — P. 317—342.

[12] Sergeev S., Scheneider H., Butkovič P. On visualization, subeigenvectors and Kleene stars in max algebra // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 431. — P. 2395—2406.

[13] Tran N. M. Enumerating polytropes // J. Combin. Theory Ser. A. — 2017. — Vol. 151. — P. 1—22.

[14] Tropical and Idempotent Mathematics / Litvinov G. L., Sergeev S. N., eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 2009. — (Contemp. Math., Vol. 495).

[15] Yoeli M. A note on a generalization of Boolean matrix theory // Amer. Math. Mon. — 1961. — Vol. 68, no. 6. — P. 552—557.

[16] Yu B., Zhao X., Zeng L. A congruence on the semiring of normal tropical matrices // Linear Algebra Appl. — 2018. — Vol. 555. — P. 321—335.