Влияние теоремы Бэра—Капланского на развитие теории групп, колец и модулей

Е. А. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
e-mail: blagoveschenskaya@pgups.ru, kblag2002@yahoo.com

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.54+512.55

Ключевые слова: теорема Бэра—Капланского, абелева группа, кольцо эндоморфизмов, булева алгебра.

Аннотация

В обзорной статье представлен анализ результатов теории абелевых групп, а также колец и модулей, которые касаются определяемости алгебраических структур их кольцами эндоморфизмов и другими производными структурами. В систематизации результатов наибольшее внимание уделяется абелевым группам без кручения, представляющим особый интерес в связи с наличием в этом классе неизоморфных прямых разложений. Это значительно расширяет представления об общих, в том числе современных, тенденциях развития алгебры в русле проблематики, связанной с теоремой Бэра—Капланского.

Отражение свойств алгебраических объектов некоторого класса в их кольцах эндоморфизмов является естественной структурной связью, изучение которой представляет собой отдельное направление исследований. Ярким вступлением в эту тему явилась теорема Бэра—Капланского для периодических абелевых групп, относящаяся к середине прошлого века и утверждающая, что всякий изоморфизм колец эндоморфизмов двух групп из этого класса неминуемо индуцируется некоторым изоморфизмом самих групп. Разумеется, отсюда следует, что если две периодические абелевы группы имеют изоморфные кольца эндоморфизмов, то и сами они изоморфны. Этот лаконичный результат вдохновил математиков на получение результатов в той же форме, касающихся других классов объектов. Естественным является переход от абелевых групп, которые можно рассматривать как модули над кольцом целых чисел, к теории колец и модулей. Но и в самой теории абелевых групп были обнаружены другие классы, для которых справедлив аналог теоремы Бэра—Капланского. Несмотря на принципиальное различие определений вполне разложимых абелевых групп — прямых сумм групп без кручения ранга 1 — и периодических абелевых групп, представляющих собой прямые суммы циклических групп, имеется одна очень важная общая характеристика этих классов: эти разложения на не разложимые далее слагаемые определяются однозначно с точностью до изоморфизма. Данным свойством не обладают абелевы группы без кручения в целом, проблема определяемости которых их кольцами эндоморфизмов находится в фокусе нашего внимания.

Фундаментальная и прикладная математика, 2022, том 24, № 1, с. 31—123.

Abstract

E. A. Blagoveshchenskaya, A. V. Mikhalev, Influence of the Baer–Kaplansky theorem on the development of the theory of groups, rings, and modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2022), no. 1, pp. 31—123.

The review presents an analysis of results of the Abelian group theory, as well as rings and modules, which concern the definability of algebraic structures by their endomorphism rings and related structures. In the systematization of the results, the greatest attention is paid to torsion-free Abelian groups, which are of particular interest due to the presence of non-isomorphic direct decompositions in this class. This significantly expands the understanding of general, including modern, trends of the development of algebra in the context related to the Baer–Kaplansky theorem.

The reflection of the properties of algebraic objects of a certain class in their endomorphism rings is a natural structural connection, the study of which is a separate investigation direction. A striking introduction to this topic was the Baer–Kaplansky theorem for torsion Abelian groups, which dates back to the middle of the last century and states that any isomorphism of endomorphism rings of two groups from this class is inevitably induced by some isomorphism of the groups themselves. Of course, it follows that if two torsion Abelian groups have isomorphic endomorphism rings, then they are isomorphic. This profound result inspired mathematicians to obtain results in the same form concerning other classes of objects. But even in the theory of Abelian groups itself, other classes were discovered for which the analogue of the Baer–Kaplansky theorem is valid. Despite the fundamental difference between the definitions of completely decomposable Abelian groups, which are direct sums of rank-one torsion-free groups, and torsion Abelian groups considered, which are direct sums of finite order cyclic groups, there is one very important common characteristic of these classes: their decompositions into indecomposable summands are determined uniquely up to isomorphism. This property is not possessed by torsion-free Abelian groups in general, whose definability by their endomorphism rings is in the focus of our attention.

Введение

Отражение свойств алгебраических объектов некоторого класса в их кольцах эндоморфизмов является естественной структурной связью, изучение которой представляет собой отдельное направление теории групп, колец и модулей (см. [28]). Ярким вступлением в эту тему явилась теорема Бэра—Капланского для периодических абелевых групп, относящаяся к середине прошлого века и утверждающая, что всякий изоморфизм колец эндоморфизмов двух групп из этого класса неминуемо индуцируется некоторым изоморфизмом самих групп. Разумеется, отсюда следует (в более слабой формулировке), что если две периодические абелевы группы имеют изоморфные кольца эндоморфизмов, то и сами они изоморфны. Этот лаконичный глубокий результат вдохновил математиков на получение результатов в той же форме, касающихся других классов объектов. Естественным является переход от абелевых групп, которые можно рассматривать как модули над кольцом целых чисел, к теории колец и модулей. Но и в самой теории абелевых групп были обнаружены другие классы, для которых справедлив аналог теоремы Бэра—Капланского. На противоположном полюсе по отношению к классу периодических абелевых групп находится класс групп без кручения, в котором исчерпывающее описание с точностью до изоморфизма имеют вполне разложимые группы. При некоторых ограничениях для них в конце прошлого века тоже была доказана определяемость кольцами эндоморфизмов (см. [39]).

Несмотря на принципиальное различие определений вполне разложимых абелевых групп — прямых сумм групп без кручения ранга 1 — и рассматриваемых периодических абелевых групп, представляющих собой прямые суммы циклических групп, имеется одна очень важная общая характеристика этих классов: эти разложения на неразложимые далее слагаемые определяются однозначно с точностью до изоморфизма. Данным свойством не обладают абелевы группы без кручения в целом, и на примере почти вполне разложимых групп выяснилось, что его наличие не является принципиальным ограничением для определяемости групп их кольцами эндоморфизмов. Первым результатом в этом русле оказалась теорема в форме Бэра—Капланского для класса почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором, которая была доказана Е. А. Благовещенской, Г. Ивановым, Ф. Шультцем (см. [61]). Особенностью этого утверждения является то, что в нём установлена определяемость групп кольцами эндоморфизмов с точностью до так называемого «почти изоморфизма», который, являясь некоторым ослаблением изоморфизма, тем не менее сохраняет свойства прямых разложений и представляет собой мощный инструмент классификации в теории абелевых групп без кручения. Таким образом, данная проблематика стимулирует развитие классификационной теории в её различных вариантах (см., например, [17]). Её влияние прослеживается в теории колец и модулей, так как одним из значимых направлений является усиление формулировок соответствующих теорем установлением определяемости групп (модулей) не кольцами эндоморфизмов, а подструктурами колец, в частности радикалами Джекобсона или группами автоморфизмов, которые нуждаются в самостоятельном изучении. Направление исследований, возникшее в фундаментальной алгебре в связи с теоремой Бэра—Капланского, и сегодня продолжает наполняться новыми красивыми результатами, формулируемыми аналогично данной, теперь уже классической, теореме. Попутно возникают открытия, имеющие самостоятельное значение для различных областей алгебры, связанных с рассмотрением производных структур. Высвечивание и анализ этих составляющих является задачей данного обзора, который призван охватить и проанализировать во взаимосвязи результаты теории абелевых групп, а также колец и модулей, раскрывающие возможности определяемости алгебраических структур их кольцами эндоморфизмов. Значительное внимание в этой связи уделяется абелевым группам без кручения, а именно классу почти вполне разложимых групп, так как в нём впервые доказана определяемость групп их кольцами эндоморфизмов в ситуации наличия неизоморфных разложений исходных объектов (так называемых crq-групп). Кроме того, прослеживание связей почти вполне разложимых групп с их кольцами эндоморфизмов наглядно иллюстрирует основные концепции данной тематики в динамике развития.

1. Общие тенденции развития алгебры, обусловленные влиянием теоремы Бэра—Капланского

1.1. Общие закономерности установления связей между алгебраическими объектами и их кольцами эндоморфизмов

Определяемость свойств алгебраических структур надстроечными (производными от них) структурами, к которым относятся их кольца эндоморфизмов, имеет не только самостоятельную ценность, но и образует множество ответвлений в смежные области. Сам процесс установления связей между группами определённых классов и их кольцами эндоморфизмов изобилует постановкой различных задач. Многие из них относятся непосредственно к теории колец. В основополагающей работе Р. Бэра [50] первостепенным объектом изучения являются кольца, которые могут служить кольцами операторов (кольцами эндоморфизмов) для примарной абелевой группы. Их свойства связаны со свойствами самих примарных абелевых групп, что приводит к фундаментальному результату статьи, утверждающему, что при наложении некоторых условий на порядки её элементов, которые предполагаются ограниченными в совокупности, все автоморфизмы кольца эндоморфизмов такой группы являются внутренними. Отметим, что данное условие на примарную абелеву группу быть ограниченной впоследствии снято И. Капланским [99].

Таким образом, если E — кольцо эндоморфизмов абелевой p-группы X (порядки элементов которой — степени простого числа p), то для любого автоморфизма F кольца E существует автоморфизм ϕ группы X, такой что $\alpha F = \phi^{-1}\alpha\phi$ для произвольного элемента $\alpha \in E$.

Из этого утверждения непосредственно следует определяемость периодических абелевых групп их кольцами эндоморфизмов как прямых сумм p-групп для различных простых чисел p. Из-за лаконичности и красоты формулировки данной «теоремы изоморфизма» (которая утверждает, что изоморфизм периодических абелевых групп следует из изоморфизма их колец эндоморфизмов) именно эту теорему часто называют теоремой Бэра—Капланского. Естественное стремление получить аналогичные результаты для других классов объектов приводит к изучению алгебраических структур совместно с их кольцами эндоморфизмов, что представляет собой отдельное важное направление алгебры (см. [15, 28]). При этом в упомянутой работе Р. Бэра содержатся истоки большого числа новых направлений исследований. Возможно, это связано с тем, что, в силу естественной хронологии, ему не могли быть известны результаты Л. Я. Куликова о прямых суммах циклических групп и существовании базисных подгрупп примарных групп (см. [31, 32]). Это привело к необходимости использования комбинации оригинальных методов таким образом, что, рассмотренный отдельно, такой метод создаёт новый ракурс видения в алгебре. Отметим некоторые из них.

I. Абелева группа с операторами из некоторого кольца естественно является модулем над этим кольцом, что переводит обсуждение связей групп с их кольцами эндоморфизмов в область теории колец и модулей (см. [77, 79]).

II. Используются различные формы эквивалентности, более слабые, чем изоморфизм. В [50] доказано утверждение, касающееся примарных абелевых групп, которые, при наложении некоторых ограничений на их кольца операторов, являются изоморфными. Очевидным образом этот результат связан с определяемостью абелевых групп их кольцами эндоморфизмов. Разнообразие вариантов здесь достаточно велико. Это относится к рассмотрению не всего кольца эндоморфизмов, а его подструктур, таких, как мультипликативная группа автоморфизмов, радикал Джекобсона, аддитивная группа эндоморфизмов (см. [79—81, 93, 105, 107, 118]).

Данный подход в определённых ситуациях делает возможным обоснование определяемости алгебраических структур их кольцами эндоморфизмов с некоторой точностью. Заметим, что это приводит к более сильному результату, чем теорема изоморфизма в принятой форме, если ослабление изоморфизма относится к кольцам эндоморфизмов, и, наоборот, к более слабой формулировке, если оно применяется к исходным объектам.

Такая ситуация имеет место в «теореме почти изоморфизма» для определённого класса абелевых групп конечного ранга без кручения, а именно для класса почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором, которые определяются своими кольцами эндоморфизмов с точностью до почти изоморфизма (см. [61]). Сложность построений здесь связана с необходимостью доказательства того факта, что если рассматриваемые абелевы группы без кручения почти изоморфны, то их кольца эндоморфизмов изоморфны (для сравнения, при классическом подходе к проблеме определяемости групп изоморфизм колец эндоморфизмов обеспечивается изоморфизмом самих групп, т. е. доказательства являются односторонними).

Двусторонние доказательства также необходимы в следующих результатах, которые вносят значительный вклад в современную теорию алгебраических структур. Они связывают p-группы с их кольцами эндоморфизмов в терминах теории моделей. Точнее, при некоторых условиях доказана эквивалентность в логике второго порядка абелевых p-групп, если их кольца эндоморфизмов элементарно эквивалентны (см. [17]). Усилением результатов этой статьи явилась работа [18], в которой при некоторых ограничениях доказана эквивалентность в логике второго порядка абелевых p-групп при условии, что их группы автоморфизмов элементарно эквивалентны. Отметим, что обе эти статьи являются ёмкими не только по объёму, но, главное, по содержанию, так как в них реализуется новый взгляд на возможные связи абелевых p-групп с их кольцами эндоморфизмов и их подструктурами (группами автоморфизмов). Эти результаты, очевидно, относятся к тематике определяемости абелевых групп их кольцами эндоморфизмов, но слово «изоморфизм» в их формулировке отсутствует. Это существенно отличается от подхода к проблеме определяемости алгебраических структур, предложенного в классической теореме Бэра—Капланского. Поэтому, учитывая на данном этапе разветвлённость методов и подходов к вопросам определяемости структур, мы будем будем называть результаты, относящиеся к данной тематике, теоремами определяемости, и они не всегда являются теоремами изоморфизма.

Мы также видим, что установление определяемости алгебраических структур некоторых классов производными структурами стимулирует развитие классификационной теории. Это в полной мере относится к классу абелевых групп без кручения, в котором понятие почти изоморфизма, используемое в предположении конечности ранга, было распространено на случай групп бесконечных рангов. Это позволило доказать теорему определяемости с точностью до почти изоморфизма для абелевых групп счётного ранга, все сервантные подгруппы которых конечного ранга являются почти вполне разложимыми группами с циклическим регуляторным фактором (см. [14, 65]).

III. В [50] прослеживается связь между определяемостью групп их кольцами эндоморфизмов и проблемой реализации колец в качестве колец эндоморфизмов групп некоторых классов, поскольку в ней сформулированы условия, которым должны удовлетворять кольца эндоморфизмов абелевых p-групп. Эта связь обусловлена обстоятельством, что если найден класс групп A, кольца эндоморфизмов которых с точностью до изоморфизма составляют заранее выбранный класс колец B, то теорема об изоморфизме может существовать для подкласса A' в A только в том случае, если никакие две группы из A' не обладают изоморфными кольцами эндоморфизмов. Для примера роль подкласса A' играют почти вполне разложимые абелевы группы с циклическим регуляторным фактором в классе A всех почти вполне разложимых групп (см. [10, 57]).

IV. Наряду с изоморфизмом в [50] рассматривается антиизоморфизм колец, которые, в случае их реализации в смысле III, могут обеспечивать изоморфизм соответствующих групп или некоторую двойственность между ними (см. [2, 3, 114]).

Многие аспекты данной проблематики затронуты в недавних обзорах [87] и [30]. В последнем высвечена роль топологических изоморфизмов колец, которые, в отличие от обычных изоморфизмов, призваны нести больше информации о группах, если они реализуются как их кольца эндоморфизмов. Это продемонстрировано на примере теоремы об изоморфизме для однородных вполне транзитивных абелевых групп без кручения (см. [25]).

В целом абелевы группы без кручения, являясь трудно поддающимися классификации объектами и обладая большим разнообразием неизоморфных прямых разложений, таят в себе особые сложности в плане установления связей с их кольцами эндоморфизмов. Они подлежат подробному рассмотрению далее.

1.2. Взаимосвязи абелевых групп без кручения и их колец эндоморфизмов

Базисом для исследования взаимосвязей абелевых групп без кручения и их колец эндоморфизмов является тот факт, что аддитивная группа эндоморфизмов в данном случае представляет собой группу из этого же класса. Аналогичное утверждение верно и для подкласса, состоящего из вполне разложимых групп.

Класс почти вполне разложимых групп X является наиболее близким к классу вполне разложимых групп конечного ранга, так как состоит из групп, содержащих вполне разложимую группу A в качестве подгруппы конечного индекса. Таким образом, его представители определяются вполне разложимой группой без кручения A и конечной (значит, периодической) группой X/A. И периодические группы, и вполне разложимые группы без кручения кольцевого типа в своих классах определяются кольцами эндоморфизмов, что во многом определило доказательность теоремы в форме Бэра—Капланского с точностью до почти изоморфизма в классе почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором (см. [61]). При этом расширение класса применимости этого результата до класса всех почти вполне разложимых групп оказалось невозможным в силу того, что существуют почти вполне разложимые группы с кольцом эндоморфизмов, изоморфным кольцу эндоморфизмов некоторой группы с циклическим регуляторным фактором, которые сами таковыми не являются (см. [57]).

В отличие от вполне разложимых групп и периодических групп, однозначно с точностью до изоморфизма представимых в виде прямых сумм неразложимых слагаемых ранга 1, участвующих в определении почти вполне разложимых групп, для последних, как оказалось, реализуется всё многообразие неизоморфных прямых разложений, выраженное в терминах рангов слагаемых, которое существует в абелевых группах без кручения конечного ранга (см. [5,6,53,63]).

В последние десятилетия теория *почти вполне разложимых* абелевых групп выделилась в самостоятельную ветвь общей теории абелевых групп. Её истоки следует искать в давних результатах, в которых было открыто существование абелевых групп без кручения, не являющихся прямыми суммами групп ранга 1. В то время А. Г. Курош в своей знаменитой книге «Теория групп» [34] писал: «Мы увидим позже, что вполне разложимыми группами далеко не исчерпываются все абелевы группы без кручения».

К первым известным примерам групп с неизоморфными прямыми разложениями относятся группы, построенные Б. Йонсоном [97, 98] в конце 1960-х годов. Таким образом была отвергнута возможность изоморфных продолжений для любых двух прямых разложений произвольной абелевой группы без кручения конечного ранга, которая до этого являлась предметом обсуждения, что видно из работы Л. Я. Куликова [32]. Возникло новое направление исследований — изучение прямых разложений абелевых групп без кручения конечного ранга, и в связи с этим появилось большое число примеров неизоморфных разложений, которые часто именовались патологическими разложениями.

Характерным для большинства примеров являлось то, что в них, часто не будучи так названными, рассматривались именно почти вполне разложимые группы. Значимость этого класса групп конечного ранга отражена в обзоре А. В. Михалёва, А. П. Мишиной «Бесконечные абелевы группы: методы и результаты» [38], в котором также прослеживаются связи между различными понятиями эквивалентности и большое внимание уделено проблеме классификации абелевых групп без кручения и их прямых разложений. Невозможность их классификации с точностью до изоморфизма привела к понятию «почти изоморфизма»в работах Л. Леди [103, 104], а затем к его развитию в новых эквивалентных формулировках в книге Д. М. Арнольда [44]. В отличие от квазиизоморфизма (см. [82, 97, 98]), который стирает границы между разложимыми и неразложимыми группами (если последние не являются *сильно неразложимыми*) и потому не подходит для исследования прямых разложений, почти изоморфизм является удобным инструментом для их классификации.

С точностью до почти изоморфизма почти вполне разложимые группы с циклическим регуляторным фактором определяются своими кольцами эндоморфизмов, что показано в работе Е. А. Благовещенской, Г. Иванова, Ф. Шультца [61]. Эта теорема вошла в монографии Л. Фукса «Абелевы группы» [88] и П. А. Крылова, А. В. Михалёва и А. А. Туганбаева «Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов» [28, теорема 25.12], в которых предлагается специальный ракурс для рассмотрения абелевых групп. В этих работах даётся широкий охват результатов, относящихся ко всем ветвям теории абелевых групп, в том числе абелевых групп без кручения, и представлены они в тесной взаимосвязи с их кольцами эндоморфизмов. Основой взаимопроникновения теории групп и теории колец в данном случае служит то обстоятельство, что кольца эндоморфизмов групп без кручения по отношению к операции сложения также являются абелевыми группами без кручения. Аналогичный факт оказался верным и для класса почти вполне разложимых групп. Эти группы являются частным случаем так называемых батлеровских групп, являющихся эпиморфными образами вполне разложимых групп конечного ранга, и они на протяжении уже ряда десятилетий приковывают внимание многих математиков (см. [70, 108, 115]).

Определённый уровень развития теории почти вполне разложимых групп зафиксирован в книге А. Мадера, которая так и называется: «Почти вполне разложимые группы» [109]. В частности, в неё вошла теория прямых разложений почти вполне разложимых групп специального вида, с циклическим регуляторным фактором [109, гл. 13], построенная в [58, 62, 63].

Применённый графический подход распространён на класс *локально почти вполне разложимых групп*, состоящий из групп счётного ранга, все вполне характеристические сервантные подгруппы конечного ранга которых принадлежат классу почти вполне разложимых групп. Отметим, что локально почти вполне разложимые группы специального вида, не будучи так названными, обсуждались в упомянутой работе А. Корнера [71] (1969 г.) в связи с их неизоморфными прямыми разложениями. Важное для классификации почти вполне разложимых групп понятие почти изоморфизма, распространённое на случай групп счётного ранга, позволило доказать для них теорему в форме Бэра—Капланского для случая вполне характеристических сервантных crq-подгрупп, что явилось логичным обобщением подхода из [71]. Уточнением этих результатов является неочевидный факт, что почти изоморфные группы обладают почти изоморфными кольцами эндоморфизмов по отношению к операции сложения. При этом выяснилось, что для почти вполне разложимых групп и определённых на их основе групп бесконечных рангов автоморфизмы колец эндоморфизмов не обязаны быть внутренними; тем самым был снят вопрос о существовании для них строгой формы теоремы Бэра—Капланского (т. е. доказано, что изоморфизм колец эндоморфизмов не индуцируется соответствующими отображениями между почти изоморфными группами даже в частном случае, когда последние изоморфны в классическом понимании).

Почти вполне разложимые группы входят в более широкий класс батлеровских групп, допускающих неизоморфные прямые разложения (см. [5, 6, 16, 54, 63, 71, 76, 116]). Они тоже в большинстве случаях классифицируются только с точностью до почти изоморфизма, одним из достоинств которого является отражение свойств прямых разложений в следующем смысле.

Теорема 1.1 (Д. Арнольд [44, 12.9 (b), с. 144]). *Если X и Y — почти изоморфные абелевы группы без кручения конечного ранга и $X = X_1 \oplus X_2$, то $Y = Y_1 \oplus Y_2$ для некоторых групп $Y_1 \cong_{\mathrm{nr}} X_1$, $Y_2 \cong_{\mathrm{nr}} X_2$.*

Построение эпиморфных образов почти вполне разложимых групп из определённых классов с сохранением в том или ином виде свойств их прообразов приводит к новым классам абелевых групп без кручения конечного ранга и представляет значительный интерес, так как позволяет расширять условия применимости результатов, полученных ранее для классов их прообразов. В частности, расширение возможностей классификации прямых разложений абелевых групп без кручения, в силу отсутствия изоморфизма между ними, заслуживает распространения методов, полученных для класса почти вполне разложимых абелевых групп конечного ранга, на новые классы групп не только конечного, но и счётного рангов, а также на их эпиморфные образы специального вида (см. [59, 60, 64]). Однако кольца эндоморфизмов последних настолько бедны, что вопрос об определяемости ими самих групп не ставится.

2. Общие сведения о почти вполне разложимых абелевых группах

2.1. Основные определения и обозначения

Рассматриваемые группы являются абелевыми группами с групповой коммутативной операцией сложения элементов, если не оговорено противное. Все приведённые ниже базовые понятия и результаты содержатся в [15, 34, 86, 88, 109].

Напомним некоторые общеизвестные обозначения. Как обычно, $\mathbb{Z}$ — это множество (группа, кольцо) всех целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Q}$ — множество (аддитивная группа, поле) всех рациональных чисел, $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

Для аддитивной абелевой группы X, порождённой некоторым подмножеством её элементов S, мы используем обозначение $X = \langle S \rangle$, что означает

$$X = \{n_1a_1 + \ldots + n_ka_k \mid a_i \in S,\ n_i \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Для подгруппы V группы X считаем возможным равенство $V = X$. Если $V \subset X$ и $V \neq X$, то

$$V_*^X = \{g \in X\colon \text{существует } n \in \mathbb{N}, \text{ для которого } ng \in V\}$$

обозначает *сервантную оболочку подгруппы V в группе X* (разрешается обозначение V_*, если это не приводит к путанице). Подгруппа V называется *сервантной подгруппой в X*, если $V_*^X = V$, и записывается это как $V \subset_* X$.

Кольцо эндоморфизмов произвольной абелевой группы X обозначается как $\operatorname{End} X$, множество всех его обратимых элементов образует группу автоморфизмов $\operatorname{Aut} X$. В общем случае обозначение E^+ соответствует аддитивной группе кольца E, и мы используем $E^\times$ для его мультипликативной группы (т. е. для группы обратимых элементов). В частности, $\operatorname{End} X^+$ обозначает аддитивную группу кольца эндоморфизмов абелевой группы X и $\operatorname{Aut} X$ — мультипликативную группу её обратимых элементов.

Символы отображений будут записываться справа. Подгруппа V группы X называется *вполне характеристической подгруппой в X*, если $Vf \subset V$ для любого $f \in \operatorname{End} X$.

Индексом подгруппы V в абелевой группе X (обозначение $[X : V]$) называется мощность множества элементов фактор-группы X/V или, что то же самое, её порядок $|X/V|$. Если при этом X/V является ограниченной группой, то экспонентой фактор-группы X/V является наименьшее натуральное число e, такое что $e(X/V) = 0$ (обозначение $e = \exp(X/V)$). В этом случае порядком произвольного элемента a в группе X/V называется наименьшее натуральное число e_a, такое что $e_a a = 0$, которое будет записываться в виде $e_a = |a|$. Очевидно, что $e_a \mid e$ (e_a является делителем числа e).

Абелева группа X называется *группой без кручения*, если она не содержит элементов конечного порядка (т. е. из равенства $na = 0$, где a — ненулевой элемент в X, $n \in \mathbb{Z}$, непременно следует, что $n = 0$). Именно класс абелевых групп без кручения является основным обсуждаемым классом. Самыми простыми примерами групп из этого класса являются группы ранга 1, изоморфные подгруппам аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и называемые *рациональными группами*. Расширением этого подхода является рассмотрение произвольной абелевой группы без кручения X как подгруппы прямой суммы конечного или бесконечного числа групп, изоморфных $\mathbb{Q}$. Минимально возможное число (или минимальная мощность множества) этих слагаемых определяется как *ранг абелевой группы без кручения X* (обозначение $\operatorname{rk} X$). Если это конечное число, то и ранг группы конечен и совпадает с максимальным числом её линейно независимых элементов.

Погружением абелевой группы X без кручения (*не обязательно конечного ранга*) *в её делимую оболочку* $\mathbb{Q}X$ называется включение

$$X \subset \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q} \oplus \ldots,$$

если пересечение X с каждым прямым слагаемым в правой части нетривиально (тогда количество этих слагаемых, изоморфных $\mathbb{Q}$, равно $\operatorname{rk} X$). Это согласуется со следующим определением.

Определение 2.1. Абелева группа D называется p-делимой, если $pD = D$ для простого числа p. Если группа D p-делима для всех простых чисел $p \in \mathbb{P}$, она называется делимой.

В классе абелевых групп без кручения только прямые суммы слагаемых, изоморфных $\mathbb{Q}$, являются делимыми группами.

Максимальная делимая подгруппа D абелевой группы X (не обязательно группы без кручения) всегда выделяется прямым слагаемым, $X = D \oplus V$, где V — *редуцированная*, т. е. не содержащая делимых подгрупп, группа, что позволяет сводить наше рассмотрение к случаю редуцированных групп. Поэтому в дальнейшем все рассматриваемые абелевы группы считаются редуцированными.

Абелева группа X называется *p-редуцированной*, если она не содержит p-делимых подгрупп.

Нам понадобятся определённые классы абелевых групп без кручения. Прямая сумма абелевых групп без кручения ранга 1 называется *вполне разложимой группой. Почти вполне разложимая группа X* (кратко «acd-группа» от almost completely decomposable group (англ.)) представляет собой абелеву группу без кручения конечного ранга, которая содержит некоторую вполне разложимую подгруппу A, причём фактор-группа X/A является конечной группой. Очевидно, что $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} X$. Отметим, что любая acd-группа принадлежит классу батлеровских групп, которые определяются как эпиморфные образы вполне разложимых групп конечного ранга (см. [109, определение 2.4.18]).

Любая acd-группа X содержит особую однозначно определённую вполне разложимую подгруппу $R(X)$ конечного индекса, изоморфную A или даже с ней совпадающую, которая является вполне характеристической подгруппой X и называется *регулятором группы X* (в [69] и в [109, определение 4.1.5, теорема 4.2.13 (3)] показано, что регулятор acd-группы можно рассматривать как пересечение всех её вполне разложимых подгрупп наименьшего индекса).

В связи с понятием регулятора acd-группы X вводятся следующие числа: *регуляторный индекс acd-группы X*, равный $[X : R(X)]$, т. е. индексу подгруппы $R(X)$ в X, и *регуляторная экспонента acd-группы X*, равная $\exp\bigl(X/R(X)\bigr)$; сама фактор-группа $X/R(X)$ называется *регуляторным фактором acd-группы X*. Если $X/R(X)$ является циклической группой, то X называется *acd-группой с циклическим регуляторным фактором* или, что более употребимо, *crq-группой* (от англ. cyclic regulator quotient). Для crq-группы имеет место равенство $[X : R(X)] = \exp\bigl(X/R(X)\bigr)$, т. е. регуляторный индекс и регуляторная экспонента совпадают.

Для удобства в большинстве случаев A будет обозначать регулятор $R(X)$ acd-группы X.

В абелевой группе без кручения X *тип ненулевого элемента* $g \in X$ определяется как класс изоморфизма рациональной группы $\langle g\rangle_*^X$ и обозначается $\mathrm{tp}^X g$. Если все ненулевые элементы группы X имеют один и тот же тип τ, то он принимается за тип самой группы X (обозначение $\mathrm{tp}\, X$). В этом случае X называется *однородной группой* или *τ-однородной группой* (см. [88, гл. 12, с. 411 (D)].

Множество (решётка) всех возможных типов элементов абелевых групп без кручения обозначается $\mathbb{T}$, о вводимом в нём отношении ($\leqslant$) частичного порядка можно прочитать в [86, т. 2, § 85], [88, гл. 12, с. 409, 410] в терминах характеристик элементов групп без кручения.

Следуя стандартным определениям, для любого $\tau \in \mathbb{T}$ введём следующие подгруппы в абелевой группе без кручения X:

$$X(\tau) = \{g \in X\colon\ \mathrm{tp}^X(g) \geqslant \tau\}, \quad X^*(\tau) = \sum_{\sigma > \tau} X(\sigma),$$

$$X^\sharp(\tau) \text{ — сервантная оболочка подгруппы } X^*(\tau) \text{ в } X.$$

Заметим, что $X^*(\tau) \subset X^\sharp(\tau) \subset X(\tau)$, где $X^*(\tau) = \langle x \in X \mid \mathrm{tp}^X x > \tau\rangle$, и все элементы этой цепи являются вполне характеристическими подгруппами в X (см. [88, гл. 12, с. 411 (D); 109, лемма 2.3.9]).

Тип τ называется *критическим* для группы без кручения X и является элементом множества критических типов $T_{\mathrm{cr}}(X)$, если $X(\tau)/X^\sharp(\tau) \neq 0$ (см. [109, с. 37, определение 2.4.6]). Множество всех типов ненулевых элементов группы X обозначается $\mathrm{Tst}(X)$.

Известно, что в acd-группе X для каждого её критического типа τ существует *батлеровское разложение*

$$X(\tau) = A_\tau \oplus X^\sharp(\tau), \tag{1}$$

где A_τ — вполне разложимая τ-однородная группа (см. [109, лемма 4.1.2.]). Однозначно (с точностью до изоморфизма) определённое *каноническое* разложение регулятора $A = R(X)$ на ненулевые однородные компоненты выглядит следующим образом:

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)} A_\tau,$$

при этом $T_{\mathrm{cr}}(X) = T_{\mathrm{cr}}(A)$.

Большинство представленных результатов доказывается при условии, что рассматриваемые абелевы группы без кручения X являются группами *кольцевого* типа, для которых множество критических типов $T_{\mathrm{cr}}(X)$ состоит из *идемпотентных типов* τ, т. е. типов, являющихся типами групп ранга 1, содержащих $\mathbb{Z}$, причём для любого простого p число 1 либо делится на любую его степень, либо вообще не делится на p. Для конкретного простого числа p это записывается в виде $\tau(p) = \infty$ или $p\tau = \tau$ (тогда тип τ называется p-делимым), для альтернативного случая мы используем обозначения $\tau(p) \neq \infty$ или $p\tau \neq \tau$.

Удобно отождествлять каждый идемпотентный тип с некоторой однозначно определённой группой τ ранга 1, удовлетворяющей условию

$$\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}. \tag{2}$$

Тогда $\tau \leqslant \sigma$ или $\tau < \sigma$ в точности означает $\tau \subseteq \sigma$ или $\tau \subset \sigma$ соответственно для соответствующих групп.

Группа G ранга 1 идемпотентного типа τ, в которой элемент $a \in G$ делится только на любые степени чисел p, удовлетворяющих условию $\tau(p) = \infty$, будет записываться в виде $G = \tau a$. Ясно, что $\tau = \operatorname{tp} G$. Чтобы различать группы $A_1, \ldots, A_s$ ранга 1 одного и того же идемпотентного типа, мы будем записывать их в виде $A_i = \tau a_i$, подразумевая, что $a_i \in A_i$. Кольцо эндоморфизмов их прямой суммы $\operatorname{End}(A_1 \oplus \ldots \oplus A_s)$ изоморфно кольцу $M(\tau)$ квадратных матриц порядка s, состоящему из $(s \times s)$-матриц с элементами из τ. Подобные обозначения используются для любых встречающихся в тексте квадратных матриц и образуемых ими матричных структур.

Говорят, что абелева группа без кручения X является *блочно-жёсткой группой*, если множество $T_{\mathrm{cr}}(X)$ представляет собой антицепь, т. е. состоит из попарно несравнимых типов (см. [109, определение 2.4.6]).

Для блочно-жёсткой acd-группы X её регулятор

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau$$

тоже блочно-жёсткая группа, так как $T_{\mathrm{cr}}(A) = T_{\mathrm{cr}}(X)$. При этом τ-однородная подгруппа $A(\tau) = A_\tau$ однозначно определена и сервантна в X (см. [109, предложения 2.4.11, 4.1.10]). Это связано с тем, что в случае блочно-жёсткой acd-группы для любого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)$ разложение (1) содержит только одно ненулевое слагаемое, а именно A_τ.

Ранг подгруппы A_τ называется *τ-рангом* вполне разложимой группы группы A, которая однозначно представляется в виде прямой суммы своих однородных компонент A_τ, $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$. Если при этом $\operatorname{rk} A_\tau = 1$ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)$, то группы A и X называются *жёсткими* группами.

Для завершения согласования системы обозначений, добавим некоторые обозначения из общей теории алгебраических структур.

В любой периодической (конечной) группе C её p-примарная компонента обозначается $(C)_p$. Если $p^n(C)_p = 0$, то говорим, что группа $(C)_p$ является p^n-ограниченной.

Обозначение L^+ используется для аддитивной группы кольца L, а $L^\times$ соответствует его мультипликативной группе. В частности, нам понадобится обозначение $(\operatorname{End} X)^+$ для аддитивной группы кольца эндоморфизмов acd-группы X.

Традиционно групповые характеристики, применённые к кольцу L, относятся к его аддитивной группе L^+.

Мультипликативную группу автоморфизмов группы X обозначаем $\mathrm{Aut}(X)$ (скобки могут опускаться). Группа внутренних автоморфизмов кольца L обозначается через $\mathrm{Aut}_{\mathrm{inn}}(L)$.

Следуя [35, гл. 1, предложение 3], мы можем представлять кольцо эндоморфизмов блочно-жёсткой вполне разложимой группы, заданной своим однозначно определённым разложением на однородные компоненты

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau,$$

как в виде прямой суммы идеалов,

$$\mathrm{End}\, A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} K_\tau,$$

так и в виде прямого произведения колец,

$$\mathrm{End}\, A \cong \prod_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} K'_\tau,$$

где $K_\tau \cong K'_\tau = \mathrm{End}\, A_\tau$. Символ I будет использоваться для обозначения тождественного отображения.

Коммутативное подкольцо $C \subset L$, содержащее единицу I кольца L и характеризуемое тем, что $lc = cl$ для любых $l \in L$, $c \in C$, называется центром кольца L.

Если L — кольцо с единицей I и

$$I = \sum_{i \in \mathcal{I}} \varepsilon_i$$

является суммой конечного числа ненулевых элементов $\varepsilon_i \in L$, таких что $\varepsilon_i \varepsilon_i = \varepsilon_i$ и $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ для любых $j \neq i$, то множество $\{\varepsilon_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ называется *полной ортогональной системой идемпотентов* кольца L. Идемпотент ε_i *примитивен* в L, если он не представляется в виде суммы двух других ненулевых ортогональных идемпотентов кольца L. Если при этом $L = \mathrm{End}\, X$, то группа X обладает разложением

$$X = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} X_i,$$

где $X_i = X\varepsilon_i$, и отображение ε_i называется проекцией $X \to X_i$.

Нам понадобится обозначение $\mathrm{Mon}(X, Y)$ для множества мономорфизмов $X \to Y$. При этом если

$$X = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} X_i, \quad Y = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} Y_i$$

и для $\phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$ выполняется включение $(X_i)\phi \subset Y_i$, то мы будем писать $\phi = (\phi_i)_{i \in I}$ или $(\ldots, \phi_i, \ldots)_{i \in \mathcal{I}}$, где $\phi_i = \phi|_{X_i}$.

Мы рассматриваем кольца $\mathrm{M}_n(K)$, состоящие из квадратных матриц порядка n с элементами из кольца (поля) K. Если матрица B принадлежит некоторому множеству матриц определённой формы, данной в скобках, мы будем писать

$$B \in \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Поскольку для любого элемента a абелевой группы X без кручения и любого натурального числа q существует не более одного элемента $b \in X$, для которого $qb = a$, мы можем обозначать b как $\frac{a}{q}$. Если такой элемент $\frac{a}{q}$ существует, то говорим, что a делится на q в X и пишем $q \mid a$. Наибольшее целое число $k \geqslant 0$, для которого существует $\frac{a}{p^k}$, где p — простое число, называется *p-высотой* элемента a в X и обозначается $h_p^X(a)$, если же $p\langle a\rangle_*^X = \langle a\rangle_*^X$, то полагаем $h_p^X(a) = \infty$ (см. [109, 2.1]).

Распространим это обозначение на случай всей группы X с помощью *тензорного* произведения (см. [86, т. 1, гл. 10, § 59]). Поместим группу X в её в делимую оболочку $\mathbb{Q}X = \mathbb{Q} \otimes X$ и запишем Y в виде $\frac{X}{q}$, если $qY = X$. Заметим, что размерность линейного пространства $\mathbb{Q}X$ совпадает с рангом $\operatorname{rk} X$ группы X. Этот подход открывает широкие возможности для применения методов линейной алгебры (см., например, [1]), которые оказываются особенно эффективными в сочетании с теоретико-числовыми конструкциями. В этой связи упомянем вариант китайской теоремы об остатках, который будет неоднократно использован.

Теорема 2.2. *Пусть $m_1, m_2, \dots, m_n$ — попарно взаимно простые целые числа. Тогда для любых целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ существует такое целое x, что $x \equiv a_i \bmod m_i$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.*

При рассмотрении колец эндоморфизмов acd-групп с циклическими регуляторными факторами нам понадобятся числовые инварианты почти изоморфизма. Уместно подчеркнуть, что почти изоморфизм групп (записываемый как $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$) означает эквивалентность, более слабую, чем изоморфизм ($X \cong Y$), которая, тем не менее, достаточно точно отражает свойства прямых разложений, что показано в теореме Арнольда (см. теорему 1.1). Это фундаментальное понятие (определение 2.6) традиционно используется при решении проблем классификации в теории почти вполне разложимых групп.

В целом принятая здесь система обозначений и основные определения согласуются с данными в [28, 86, 88, 109].

2.2. Предварительные сведения

Мы рассматриваем класс $\mathcal{A}$ почти вполне разложимых групп X кольцевого типа с регулятором

$$A = \bigoplus_{\tau \in T} A_\tau \cong \bigoplus_{\tau \in T} n_\tau \tau, \quad T = T_{\rm cr}(A), \tag{3}$$

где n_τ — ранг τ-однородной компоненты A_τ, прямой суммы n_τ экземпляров группы τ (см. [109, определение 4.1.5] и (2)). Пусть $P(X)$ — конечный набор различных простых чисел и $T_p^X \neq 0$ — p-примарная компонента, имеющая экспоненту $e_p = p^{n_p(X)} = \exp(T_p^X)$ из канонического разложения конечной группы

$$X/A = \bigoplus_{p \in P(X)} T_p^X$$

для каждого $p \in P(X)$.

Хорошо известно (см. [15]), что

$$X = \sum_{p \in P(X)} X_{(p)}, \quad \text{где} \quad X_{(p)} = X \cap \frac{A}{p^{n_p(X)}} \, — \tag{4}$$

однозначно определённые вполне характеристические подгруппы $X_{(p)} \in \mathcal{A}$ с p-примарными факторами $X_{(p)}/A \cong T_p^X$. Положим

$$e = \prod_{p \in P(X)} e_p.$$

Определение 2.3. Представление acd-группы в виде (4) называется её примарно-факторным представлением.

Поскольку регулятор A является вполне характеристической подгруппой группы X, для любого $\phi \in \operatorname{End} X$ верно, что $\phi|_A \in \operatorname{End} A$. Кроме того, X содержится в делимой оболочке $\mathbb{Q}A$ регулятора A. Это позволяет рассматривать $\operatorname{End} X$ как подкольцо кольца $\operatorname{End} A$. Аналогично $\operatorname{End} X_{(p)} \subset \operatorname{End} A$ для любого p.

В [109, предложение 5.1.5] установлена связь между кольцами эндоморфизмов слагаемых примарно-факторного представления и кольцом эндоморфизмов самой acd-группы в предположении, что $\tau(p) \neq \infty$ для любого $\tau \in T = T_{\rm cr}(A)$, $p \in P(X)$, а именно

$$\operatorname{End} X = \bigcap_{p \in P} \Bigl(\operatorname{End}\bigl(X_{(p)}\bigr)\Bigr) \subset \operatorname{End} A. \tag{5}$$

Определим канонические эпиморфизмы

$$\overline{}\colon A \to \bar{A} = A/eA, \quad \overline{}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$$

и индуцированные гомоморфизмы

$$\overline{}\colon\ \operatorname{End} A \to \operatorname{End} \bar{A}, \quad \overline{}\colon\ \operatorname{Aut} A \to \operatorname{Aut} \bar{A}.$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.4 (о поднятии идемпотентов [109, лемма 10.1.4]). *Пусть A_τ — τ-однородная группа конечного ранга n_τ, e — положительное целое число, такое что $p\tau \neq \tau$ для любого его простого делителя p, и $\overline{A_\tau} = A_\tau/eA_\tau$. Если*

$\{\phi_i\colon i \in \mathcal{I}\}$ — *полная ортогональная система идемпотентов кольца* $\operatorname{End}\overline{A_\tau}$, *для которых* $\overline{A_\tau}\phi_i$ — *свободный* $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$*-подмодуль в* $\overline{A_\tau}$, *то существует полная ортогональная система идемпотентов* $\psi_i \in \operatorname{End} A_\tau$, *такая что* $\bar{\psi}_i = \phi_i$, $i \in \mathcal{I}$. *(Здесь* $\bar{A}$ *рассматривается как свободный* $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$*-модуль, прямая сумма* n_τ *экземпляров* $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$.*)*

Определение 2.5 [109, определение 2.5.9]. Пусть A — вполне разложимая группа, e — положительное целое число. Мультипликативная группа $\operatorname{TypAut}\bar{A}$ — это подгруппа всех автоморфизмов ψ группы $\bar{A} = A/eA$, удовлетворяющих условию $\overline{A(\tau)}\psi \subset \overline{A(\tau)}$ для каждого критического типа $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$.

Из различных эквивалентных определений *почти изоморфизма* наиболее удобным в применении оказывается следующее (см. [44, теорема 7.16; 109, определение 9.1.2, теоремы 9.1.4, 9.1.5]).

Определение 2.6. Группы конечного ранга без кручения G и H *почти изоморфны* (обозначение $G \cong_{\mathrm{nr}} H$) тогда и только тогда, когда для каждого простого q существует мономорфизм $\phi_q\colon G \to H$, для которого индекс $[H : G\phi_q]$ конечен и q не делит $[H : G\phi_q]$.

Существует симметричная форма определения почти изоморфизма, используемая далее для обобщения этого отношения эквивалентности на абелевы группы бесконечных рангов.

Для построения мономорфизмов в классе acd-групп будет использоваться следующее утверждение.

Предложение 2.7 [109, леммы 8.1.5, 9.2.1, 9.2.2]. *Пусть* X *и* X' — *acd-группы, которые содержат вполне разложимую группу* A. *Пусть* e — *целое число, для которого* $eX \subset A$ *и* $eX' \subset A$. *Если* $\eta \in \operatorname{Mon}(A, A)$ *удовлетворяет условию, что* $\overline{eX}\bar{\eta} = \overline{eX'}$ *для* $\bar{\eta} \in \operatorname{TypAut}\bar{A}$ *и* $\bar{A} = A/eA$, *то существует* $\psi \in \operatorname{Mon}(X, X')$, *для которого* $\psi = \eta$ *на* A. *Более того,*

$$[X' : X\psi] = [A : A\eta]. \tag{6}$$

Из определения 2.6 легко видеть, что любые две почти изоморфные acd-группы X и X' имеют изоморфные регуляторы, что отражено в [109, лемма 9.1.10 (4)], т. е. $R(X) \cong R(X')$, и мы можем принять, что одна и та же вполне разложимая группа A является регулятором для обеих групп (или для их изоморфных копий).

Почти изоморфизм для acd-групп совпадает с эквивалентностью, которую мы будем называть *слабым изоморфизмом* (см. [109, теорема 9.2.4]), и для рассматриваемых групп с одним и тем же регулятором его может описать следующее определение.

Определение 2.8 [109, определения 8.1.14, 9.2.3]. Пусть $X, X' \in \mathcal{A}$. X и X' называются *слабо изоморфными* (обозначение $X \cong_{\mathrm{tp}} X'$) тогда и только тогда, когда существует $\rho \in \operatorname{TypAut}\bar{A}$, для которого $\overline{eX}\rho = \overline{eX'}$ в $\bar{A} = A/eA$ при некотором целом e, удовлетворяющем условию $eX, eX' \subset A$.

Очевидно, что существование ρ для какого-либо e, удовлетворяющего условию $eX, eX' \subset A$, обеспечивает существование автоморфизма из $\mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ с тем же свойством для любого другого числа e', если $e'X, e'X' \subset A$.

Нам потребуется результат из [109, теорема 9.2.4].

Теорема 2.9. *Пусть X и X' — acd-группы с одним и тем же регулятором A. Тогда $X \cong_{\mathrm{tp}} X'$, если и только если $X \cong_{\mathrm{nr}} X'$. Условие $X/A \cong X'/A$ необходимо для того, чтобы группы X и X' были слабо (почти) изоморфны.*

Это значит, что если $X, X' \in \mathcal{A}$ и $X \cong_{\mathrm{nr}} X'$, то X/A и X'/A изоморфны и $P(X) = P(X')$; тогда эти множества могут быть обозначены P.

Известно, что любая вполне разложимая подгруппа конечного индекса в acd-группе изоморфна её регулятору. Традиционно определение слабо изоморфных групп X и X' включает в себя условие, что A — регулятор обеих групп (см. определение 2.8). Изучая их кольца эндоморфизмов $E \cong \mathrm{End}\,X$ и $E' \cong \mathrm{End}\,X'$ как абелевы группы, мы будем нуждаться в обобщении этого понятия на вполне разложимую подгруппу конечного индекса в E^+ и E'^+.

Определение 2.10. Пусть acd-группы S и S' содержат вполне разложимую подгруппу E_0 и $eS \subset E_0$, $eS' \subset E_0$ для некоторого целого положительного числа e, и пусть $\bar{E}_0 = E_0/eE_0$.

Группы S, S' называются слабо изоморфными относительно E_0 (обозначение $S \cong_{\mathrm{tp}(E_0)} S'$), если и только если существует $\rho \in \mathrm{TypAut}\,\bar{E}_0$, для которого $\overline{eS}\rho = \overline{eS'}$.

В случае если группы E и E' определены формулами $E = eS$, $E' = eS'$ и $S \cong_{\mathrm{tp}(E_0)} S'$, мы скажем, что E и E' слабо изоморфны относительно eE_0.

Замечание 2.11. Пусть S, S' — слабо изоморфные acd-группы относительно вполне разложимой группы E_0, содержащейся как в S, так и в S', так что $eS \subset E_0$, $eS' \subset E_0$. Пусть $\rho \in \mathrm{TypAut}\,\bar{E}_0$ удовлетворяет условию $\overline{eS}\rho = \overline{eS'} \subset \overline{E_0} = E_0/eE_0$, и пусть P — множество простых делителей числа e (см. определение 2.10).

Учитывая, что ρ — автоморфизм на $\bar{E}_0$, из канонических разложений на примарные слагаемые

$$\overline{eS} = \bigoplus_{p\in P} (\overline{eS})_p \cong S/E_0 \cong S'/E_0 \cong \overline{eS'} = \bigoplus_{p\in P} (\overline{eS}\,')_p,$$

для каждого $p \in P$ мы видим, что

$$(\overline{eS})_p\rho = (\overline{eS}\,')_p,$$

потому что порядки элементов $(\overline{eS})_p$ и $(\overline{eS}\,')_p$ в $\bar{E}_0$ могут делиться на единственное простое число p и, значит, попарно взаимно просты для разных p.

Вернёмся к группе $X \in \mathcal{A}$, для которой перечислим элементы множества критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(A) = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$, где $k = |T|$, n_i — ранг τ_i-однородной компоненты A. Тогда

$$A = (\tau_1 a_1 \oplus \ldots \oplus \tau_1 a_{n_1}) \oplus (\tau_2 a_{n_1+1} \oplus \ldots \oplus \tau_2 a_{n_1+n_2}) \oplus \ldots \oplus \\ \oplus (\tau_k a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \oplus \ldots \oplus \tau_k a_n) — \quad (7)$$

разложение группы A на слагаемые ранга 1. Мы будем пользоваться тем, что для каждого $j = 1, \ldots, n$ сервантная оболочка группы $\langle a_j \rangle$ в A изоморфна одной из групп ранга 1, входящих в $T = T_{\mathrm{cr}}(A) = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$. Тогда

$$A = \bigoplus_{j=1}^{n} \langle a_j \rangle_*. \quad (8)$$

Ясно, что $n = \mathrm{rk}\, A = n_1 + \ldots + n_k$ и группа X вкладывается в делимую оболочку своего регулятора

$$D = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Q} a_j, \quad (9)$$

которая изоморфна аддитивной группе прямой суммы $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}$ из $n = \mathrm{rk}\, A$ слагаемых, т. е. линейному пространству размерности n над $\mathbb{Q}$.

Тогда кольцо эндоморфизмов регулятора $\mathrm{End}(A)$ изоморфно кольцу M квадратных $(n \times n)$-матриц вида

$$F = \big(f_{ij} \in \mathbb{Q} \colon f_{ij} \in \mathrm{Hom}(\langle a_j \rangle_*, \langle a_i \rangle_*)\big), \quad (10)$$

где $\mathrm{Hom}(\langle a_j \rangle_*, \langle a_i \rangle_*) \cong \langle a_i \rangle_*$ при условии $\mathrm{tp}^A\, a_j \leqslant \mathrm{tp}^A\, a_i$ и $\mathrm{Hom}(\langle a_j \rangle_*, \langle a_i \rangle_*) = 0$, если это условие не выполнено.

Ясно, что $(\mathrm{End}\, A)^+$ — вполне разложимая группа. В [61] показано, что, если X — acd-группа, то $\mathrm{End}\, X$ также является acd-группой как аддитивная структура.

Предложение 2.12. *Пусть X — acd-группа кольцевого типа с регулятором*

$$A = \bigoplus_{\tau \in T} A_\tau,$$

регуляторным показателем?e, множеством критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(X)$ и $n_\tau = \mathrm{rk}\, A_\tau$. Тогда

1) *имеют место включения $e\, \mathrm{End}\, A \subseteq \mathrm{End}\, X \subseteq \mathrm{End}\, A$;*
2) *$(\mathrm{End}\, X)^+$ является acd-группой с множеством критических типов T и регулятором $R\big((\mathrm{End}\, X)^+\big) \cong (\mathrm{End}\, A)^+$, при этом для всех $\tau \in T$ его τ-ранг равен*

$$\sum_{\sigma \leqslant \tau} n_\sigma n_\tau.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. В [110, лемма 3.1] показано, что, поскольку A — вполне характеристическая подгруппа в X и $X \subset \mathbb{Q}A$, любое отображение $f \in \mathrm{End}(X)$ определяется действием на элементах группы A. Далее, $Xf \subset X$ равносильно тому, что $eXf \subset eX$, где $eX \subset A$. Следовательно,

$$\mathrm{End}\, X = \{f \in \mathrm{End}\, A \colon (eX)f \subset eX\}.$$

Пусть $f \in \mathrm{End}(A)$. Тогда $(eX)ef \subset eAf \subset eA \subset eX$, т. е. $ef \in \mathrm{End}(X)$.

Докажем второе утверждение. Мы показали, что существует цепь

$$e\,\mathrm{End}(A)^{+} \subset \mathrm{End}(X)^{+} \subset \mathrm{End}(A)^{+},$$

в которой $e\,\mathrm{End}(A)^{+}$ и $\mathrm{End}(A)^{+}$ — вполне разложимые изоморфные группы. Следовательно, $\mathrm{End}(X)^{+}$ содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса, т. е. $\mathrm{End}(X)^{+}$ — acd-группа.

Так как все вполне разложимые подгруппы конечного индекса группы $\mathrm{End}(X)^{+}$ изоморфны между собой, то $R(\mathrm{End}(X)^{+}) \cong \mathrm{End}(A)^{+}$, и τ-ранг группы $\mathrm{End}(A)^{+}$ равен

$$\sum_{\sigma \leqslant \tau} n_\sigma n_\tau. \qquad \square$$

Пусть $X, X' \in \mathcal{A}$ и

$$X = \sum_{p \in P} X_{(p)}, \quad X' = \sum_{p \in P} X'_{(p)} -$$

примарно-факторные представления, где $X_{(p)}/A$ и $X'_{(p)}/A$ — p-примарные конечные группы (см. (4)). Если $X \cong_{\mathrm{tp}} X'$, то по замечанию 2.11 $X_{(p)} \cong_{\mathrm{tp}} X'_{(p)}$ для каждого простого $p \in P$. Более того, это условие является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы группы X, X' были слабо изоморфными.

Лемма 2.13 [109, теорема 8.1.15]. *Пусть $X, X' \in \mathcal{A}$ и*

$$X = \sum_{p \in P} X_{(p)}, \quad X' = \sum_{p \in P} X'_{(p)} -$$

примарно-факторные представления с p-примарными конечными группами $X_{(p)}/A$ и $X'_{(p)}/A$. Тогда $X \cong_{\mathrm{tp}} X'$, если и только если $X_{(p)} \cong_{\mathrm{tp}} X'_{(p)}$ для каждого простого $p \in P$.

По теореме 2.9 изучение условий почти изоморфизма сводится к условиям для групп с примарным регуляторным индексом, так как верна следующая теорема.

Теорема 2.1 [109, теорема 9.2.8]. *Пусть X, X' — почти вполне разложимые группы из класса $\mathcal{A}$ и*

$$X = \sum_{p \in P} X_{(p)}, \quad X' = \sum_{p \in P} X'_{(p)} -$$

их примарно-факторные представления. Тогда $X \cong_{\mathrm{nr}} X'$, если и только если $X_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}} X'_{(p)}$ для каждого простого $p \in P$.

То, что почти изоморфные acd-группы имеют изоморфные регуляторы, фактически сводит их рассмотрение к классу $\mathcal{A}$ групп с одним и тем же регулятором A, о котором всегда предполагается, что это вполне разложимая группа кольцевого типа. Когда это необходимо, A считается блочно-жёсткой группой, и это оговаривается отдельно. При этом сами группы $X \in \mathcal{A}$ подвергаются ограничениям на регуляторный фактор X/A, который предполагается примарным в разделе 3, циклическим в разделе 4 и произвольным в разделе 5, являющемся последним перед исследованием групп счётного ранга.

3. Почти вполне разложимые абелевы группы с примарным регуляторным фактором и их кольца эндоморфизмов

3.1. Кольца эндоморфизмов почти изоморфных абелевых acd-групп с примарным регуляторным фактором

Пусть X — группа из класса $\mathcal{A}$ с регулятором A произвольного вида ранга n и p-примарным регуляторным фактором X/A экспоненты $e = p^l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, при этом множество $T = T_{\mathrm{cr}}(A) = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$ состоит из идемпотентных типов, поскольку рассматриваемые группы считаются группами кольцевого типа (см. (3)).

В соответствии с (7) фиксируем разложение регулятора A на слагаемые ранга 1:

$$A = (\tau_1 a_1 \oplus \ldots \oplus \tau_1 a_{n_1}) \oplus (\tau_2 a_{n_1+1} \oplus \ldots \oplus \tau_2 a_{n_1+n_2}) \oplus \ldots \oplus \\ \oplus (\tau_k a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \oplus \ldots \oplus \tau_k a_n).$$

Используя (8)—(10), введём мультипликативную полугруппу M_e, состоящую из матриц $F \in M \cong \mathrm{End}(A)$ с целыми элементами, которые удовлетворяют условию

$$F = (f_{ij} \in \mathbb{Z}\colon\ \det F \neq 0,\ \gcd(\det F, e) = 1). \tag{11}$$

Каждой матрице $F \in M_e$ поставим в соответствие матрицу

$$\bar{F} = \{\overline{f_{ij}}\colon \overline{f_{ij}} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}\}. \tag{12}$$

Ясно, что $\det \bar{F} \neq \bar{0}$, и все такие матрицы $\bar{F}$ образуют структуру $\overline{M_e}$, которая изоморфна подгруппе $\mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ в $\mathrm{Aut}\,\bar{A}$ (см. определение 2.5), при этом M_e вкладывается в $\mathrm{Mon}(A, A)$ с точностью до изоморфизма.

Нам потребуется известная теорема, различные версии которой были доказаны в [54, теорема 2.3] и [76, лемма 3.2].

Теорема 3.1. *Пусть A — вполне разложимая группа, X и X' — acd-группы с p-примарным фактором, где p — некоторое простое число. Тогда группы X и X' почти изоморфны, если и только если существует инъективное отображение $\Psi \in \mathrm{Hom}(X, X')$, удовлетворяющее условию*

$$\gcd(p, [X : X\Psi]) = 1. \tag{13}$$

Доказательство. По условию X/A и X'/A — p-примарные конечные группы. Пусть $e = p^l = \exp X/A$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда цепь $eX \subset A \subset X'$ индуцирует вложение $eX \cong X$ в X', которое тривиально удовлетворяет условию определения 2.6 для любого простого $q \neq p$. Поэтому существование $\Psi \in \mathrm{Hom}(X, X')$, удовлетворяющего условию, связанному с p, является достаточным условием для того, чтобы группы X и X' были почти изоморфными.

Обратное утверждение тривиально. □

Нас интересуют связи между кольцами эндоморфизмов почти (слабо) изоморфных acd-групп. Будет использоваться следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть $G = \tau_1 g_1 \oplus \ldots \oplus \tau_n g_n$ — вполне разложимая группа кольцевого типа с $\tau_i \in T_{\mathrm{cr}}(G)$, $n \geqslant |T_{\mathrm{cr}}(G)|$, а*

$$H = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n = \mathrm{rk}\, G} \text{ —}$$

её подгруппа. Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Mon}(G, G)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\mathcal{F}|_H, \mathcal{G}|_H \in \mathrm{Mon}(H, H)$;
2) $\mathcal{F}\mathcal{G} = r1_G$ *при некотором* $r \in \mathbb{N}$.

Тогда имеется цепь $rG \subset G\mathcal{F} \subset G$.

Доказательство. Нужно доказать только первое включение. Для каждого $i \leqslant n$ образ

$$g_i' = g_i \mathcal{F} = \sum_{j=1}^{n} f_{ji} g_j$$

определяется набором целых чисел $\{f_{ji}\}$, которые образуют матрицу $\tilde{F}$, $\det \tilde{F} \neq 0$, представляющую $\mathcal{F}|_H$, а также $\mathcal{F}$, потому что $G \subset D_H$, где последнее — делимая оболочка H. Заметим, что $[G : G\mathcal{F}]$ конечно по [109, предложение 2.1.3], а тогда для каждого i выполнено, что $\mathrm{tp}^G(g_i) = \mathrm{tp}^G(g_i\mathcal{F})$. Это означает, что $\tau_i = \mathrm{tp}^G(g_i') = \mathrm{tp}^{G'}(g_i')$ для $G' = G\mathcal{F}$. Итак, $G' = \tau_1 g_1' \oplus \ldots \oplus \tau_n g_n'$.

Аналогично $\mathcal{G}$ определяется матрицей $\tilde{F}^* = \{f_{ji}' \colon f_{ji}' \in \mathbb{Z}\}$ с

$$r g_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ji}' g_j'.$$

Это влечёт, что $rg_i \in \langle g_1', \ldots, g_n' \rangle \subset G'$ для любого $i \leqslant n$, и тот факт, что $\tau_i = \mathrm{tp}^G(rg_i) = \mathrm{tp}^{G'}(rg_i)$, завершает доказательство. □

Линейное преобразование $\mathcal{F}$ делимой оболочки D абелевой группы конечного ранга без кручения и ограничение $\mathcal{F}$ на некоторое $D' \subset D$ будут очень часто обозначаться одним и тем же символом $\mathcal{F}$, когда это не приводит к путанице. Аналогично эндоморфизм η acd-группы X можно рассматривать как эндоморфизм её регулятора или вполне разложимой подгруппы A, если $A\eta \subset A$. Во избежание громоздких обозначений мы будем, как правило, писать $E \cong \mathrm{End}\, X$, даже если мы рассматриваем только аддитивную структуру E^+ кольца E.

Пусть $\mathbb{Z}_p$ — кольцо рациональных чисел со знаменателями, не делящимися на простое число p, и для любого кольца (или группы) Y с аддитивной структурой без кручения мы определим $Y_p = \mathbb{Z}_p \otimes Y$. Отождествим Y с подмножеством Y_p посредством вложения $y \to 1 \otimes y$, $y \in Y$. Развивая подход Т. Фатикони и П. Шульца [76, с. 234], мы обобщим это на конечное множество N простых чисел: введём $\mathbb{Z}_N$, кольцо рациональных чисел со знаменателями, не делящимися на все простые $p \in N$, и рассмотрим $Y_N = \mathbb{Z}_N \otimes Y$ для кольца (группы) Y.

Теорема 3.3. *Пусть $X, X' \in \mathcal{A}$ и X/A, X'/A — p-примарные конечные группы для некоторого простого числа p. Если группа X почти изоморфна группе X', то кольца $\mathrm{End}(X)$ и $\mathrm{End}(X')$ почти изоморфны как абелевы группы.*

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что A — p-редуцированная группа (иначе если $p\tau = \tau$ для некоторого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$, то по теореме 1.1 группа, изоморфная группе A_τ, выделится прямым слагаемым как из X, так и из X', что приведёт к рассмотрению почти изоморфных p-редуцированных групп).

Пусть e — натуральное число, для которого $eX, eX' \subset A$. Согласно теореме 2.9 мы имеем дело со слабо изоморфными группами X и X', и по определению 2.8 существует $\rho \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$, для которого $\overline{eX}\rho = \overline{eX'}$, при этом ρ задаётся матрицей $\bar{F} \in \overline{M_e}$. Итак, ρ действует на группе

$$\bar{A} = A/eA = \langle\overline{a_1}\rangle \oplus \ldots \oplus \langle\overline{a_n}\rangle \cong \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$$

умножением (слева) столбцов, представляющих её элементы, на соответствующую матрицу $\bar{F} \in \overline{M_e}$ (см. (7), (8), (11), (12)).

Рассмотрим прообраз F матрицы $\bar{F}$ в M_e. Он представляет элемент из $\mathrm{Mon}(A, A)$, скажем η, для которого $\bar{\eta} = \rho$. По предложению 2.7 имеется мономорфизм ψ из X в X', также представляемый матрицей F, для которого $\psi = \eta$ на A. Более того, из (6) мы заключаем, что число $[X' : X\psi] = [A : A\eta]$ взаимно просто с e по условию на $\det F$. Среди линейных преобразований D (см. (9)) рассмотрим матрицу F^{-1} с рациональными элементами $g_{ij} = \frac{b_{ij}}{\det F}$, где $b_{ij} \in \mathbb{Z}$, которые можно рассматривать как дроби с одним и тем же знаменателем $\det F$.

Рассмотрим матрицу $\overline{F^{-1}}$, состоящую из элементов $\overline{g_{ij}} = \overline{b_{ij}}(\overline{\det F}\,)^{-1} \in \bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ которые корректно определены, так как $\gcd(\det F, e) = 1$. Обозначим через r наименьшее натуральное число, для которого $\bar{r} = (\overline{\det F}\,)^{-1}$ в $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, и для $d = \det F$ определим $F' = rdF^{-1}$ — матрицу с целыми элементами. По построению $\overline{F^{-1}} = \bar{F}^{-1} = \overline{F'}$ представляет $\rho^{-1} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$, так что F' соответствует некоторому $\eta' \in \mathrm{Mon}(A, A)$. То же предложение 2.7 влечёт существование мономорфизма ϕ из X' в X, представляемого F' и совпадающего с η' на A, откуда следует, что $[X : X'\phi] = [A : A\eta']$ взаимно просто с e.

Теперь мы воспользуемся тем фактом, что матрицы F и F' соответствуют паре мономорфизмов $\psi\colon X \to X'$ и $\phi\colon X' \to X$, для которых $\psi|_A = \eta$, $\phi|_A = \eta'$ и $\eta, \eta' \in \mathrm{Mon}(A, A)$, так что можно сказать, что матрицы F и F' представляют некоторые инъективные эндоморфизмы группы A.

Напомним, что $M \cong \mathrm{End}(A)$ (см. (10)). Пусть $E \cong \mathrm{End}(X)$ и $E' \cong$ $\cong \mathrm{End}(X')$ — кольца матриц. Из предложения 2.12 получаем, что

$$eM \subseteq E \subseteq M \quad \text{и} \quad eM \subseteq E' \subseteq M \quad \text{для всех } e, \text{ таких что } \ eX, eX' \subset A. \tag{14}$$

Обозначим множество всех простых делителей числа e через N и введём E_N и E'_N, как показано выше. Легко видеть, что отображение $\mathcal{F}_0$, заданное формулой $\beta\mathcal{F}_0 = F^{-1}\beta F$, $\beta \in E'_N$, является изоморфным отображением из E'_N в E_N, так как если $k\beta \in E'$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, $\gcd(k, e) = 1$, и $\alpha = F^{-1}\beta F$, то $(krd)\alpha = F'(k\beta)F \in E$ и $\gcd(krd, e) = 1$, т. е. $\alpha \in E_N$. Далее, $\mathcal{F}_0$ тривиальным образом обратимо. Тогда $E_N = F^{-1}E'_N F$. Из того, что $\overline{E_N} = \bar{E}$ и $\overline{E'_N} = \overline{E'}$ в $\bar{M} = M/eM$, следуют равенства

$$\bar{E} = \overline{F'}\,\overline{E'}\,\bar{F} = \bar{F}^{-1}\,\overline{E'}\bar{F}. \tag{15}$$

Кольцо M — вполне разложимая группа конечного ранга относительно операции сложения (см. предложение 2.12). Нам потребуется ввести его подкольцо M_Z, состоящее из всех матриц кольца M, имеющих целые элементы. Имеется цепь $M_e \subset M_Z \subset M$ (см. (11)).

Пусть D_M — делимая оболочка абелевой группы без кручения M (совпадающая с делимой оболочкой её подгруппы M_Z). Рассмотрим линейное преобразование $\mathcal{F}$ пространства D_M, заданное формулой

$$\gamma\mathcal{F} = F'\gamma F, \quad \gamma \in D_M, \tag{16}$$

которое индуцирует изоморфизм колец

$$\bar{\mathcal{F}} \colon \overline{E'} \to \bar{E}. \tag{17}$$

Ясно, что $\mathcal{F}|_{M_Z} \in \mathrm{End}\, M_Z$, потому что матрицы F и F' состоят из целых чисел. Поскольку $M \cong \mathrm{End}(A)$ и матрицы F, F' соответствуют некоторым элементам из $\mathrm{Mon}(A, A)$, мы получаем, что $M\mathcal{F} = F'MF \subset M$. Аналогично, вводя $\mathcal{G}$ по формуле $\gamma\mathcal{G} = F\gamma F'$, мы заключаем, что $M\mathcal{G} = FMF' \subset M$. Далее,

$$M\mathcal{F}\mathcal{G} = FF'MFF' = F(drF^{-1})MF(drF^{-1}) = d^2r^2M.$$

Из $\mathcal{F} = rd\mathcal{F}_0$ и

$$\mathcal{F} \colon D_M \to D_M, \quad \mathrm{Ker}\,\mathcal{F} = \mathrm{Ker}\,\mathcal{F}_0 = 0 \tag{18}$$

мы непосредственно получаем, что $\mathcal{F} \in \mathrm{Mon}(M, M)$ и $M\mathcal{F} \cong M$ (а также что $\mathcal{G} \in \mathrm{Mon}(M, M)$). Ясно, что $d^2r^2M_Z \subset M_Z\mathcal{F} \subset M_Z$, потому что отображение $\mathcal{F}$ можно рассматривать как элемент из $\mathrm{Mon}({M_Z}^+, {M_Z}^+)$, где

$${M_Z}^+ \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{\mathrm{rk}\, M^+}.$$

Лемма 3.2 обеспечивает включения $d^2r^2M \subset M\mathcal{F} \subset M$ и равенство

$$\gcd([M : M\mathcal{F}], e) = 1, \tag{19}$$

потому что $\gcd(rd, e) = 1$ по построению.

Пусть e_p — делитель числа e, заданный формулой $e_p = \exp X/A = \exp X'/A$. По условию e_p — степень простого числа p. Следуя теории acd-групп, мы можем рассмотреть две acd-группы $S \cong E^+$ и $S' \cong E'^+$, которые содержат M и вложены в D_M. Определим их условиями $e_pS = E^+$ и $e_pS' = E'^+$. Из (14) для $e = e_p$ мы непосредственно получаем, что $e_pS \subset M^+$ и $e_pS' \subset M^+$.

В доказательстве формулы (15) мы уже использовали тот факт, что $\mathcal{F} \in \mathrm{Hom}(E', E)$, точнее, что $\mathcal{F} \in \mathrm{Mon}(E', E)$ (см. (18)). Было показано, что $\mathcal{F}$ также принадлежит $\mathrm{Mon}(M, M)$. Из (6) и (19) мы выводим, что $[E : E'\mathcal{F}] = [S : S'\mathcal{F}] = [M : M'\mathcal{F}]$ взаимно просто с p, так как $p \mid e$. На основании теоремы 3.1 мы приходим к заключению, что группы S и S' почти изоморфны, то же верно для групп $E^+ \cong \mathrm{End}(X)^+$ и $E'^+ \cong \mathrm{End}(X')^+$, как и требовалось. □

Следствие 3.4. *Пусть $X, X' \in \mathcal{A}$ и X/A, X'/A — p-примарные конечные группы для некоторого простого числа p, имеющие одинаковые экспоненты $e_p = \exp X/A = \exp X'/A$. Если группы X и X' почти изоморфны, то $\mathrm{End}(X)^+$ и $\mathrm{End}(X')^+$ слабо изоморфны как абелевы группы относительно вполне разложимой подгруппы $e_p \mathrm{End}(A)^+$ в $\mathrm{End}(X)^+$ и $\mathrm{End}(X')^+$. Более того, для колец $\mathcal{E} = \mathrm{End}(X)$, $\mathcal{E}' = \mathrm{End}(X')$, $E_A = \mathrm{End}(A)$ и любого целого e, делящегося на e_p, существует $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{TypAut}\,\overline{E_A}$, где $\overline{E_A} = E_A/eE_A$, для которого $\tilde{\mathcal{F}}\colon \overline{\mathcal{E}'} \to \bar{\mathcal{E}}$ — изоморфизм колец.*

Доказательство. Из матричных представлений $E^+ \cong \mathrm{End}(X)^+$ и $E'^+ \cong \mathrm{End}(X')^+$ мы видим, что требуемый автоморфизм $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{TypAut}\,\overline{E_A}$ можно отождествить с $\bar{\mathcal{F}} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{M}$, так как $M \cong \mathrm{End}\,A$ (см. (16), (17)). Если e совпадает с e_p, то (15) означает, что группы $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}'^+$ слабо изоморфны относительно e_pE_A в смысле определения 2.10. По построению $\bar{\mathcal{F}}$ сохраняет структуру кольца. □

3.2. Регулятор группы $(\mathrm{End}\,X)^+$ блочно-жёсткой абелевой acd-группы X с примарным регуляторным фактором

Здесь мы рассматриваем группы из класса $\mathcal{A}$ с одним и тем же регулятором A ранга n, который предполагается блочно-жёстким.

Таким образом, класс $\mathcal{A}$ содержит блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы X кольцевого типа с регулятором

$$A = \bigoplus_{\tau\in T} A_\tau \cong \bigoplus_{\tau\in T} n_\tau \tau, \qquad (20)$$

где $T = T_{\mathrm{cr}}(X) = T_{\mathrm{cr}}(A)$ состоит из попарно несравнимых идемпотентных типов и n_τ обозначает ранг τ-однородной компоненты $A_\tau = A(\tau)$ группы A, прямой суммы n_τ экземпляров группы τ, где $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$ и

$$n = \sum_{\tau\in T} n_\tau.$$

Пусть $e = \exp X/A = p^l = \exp X/A$ для некоторого простого p.

Мы рассматриваем $\operatorname{End} X$ как подкольцо кольца $\operatorname{End} A$. Следующая характеристика кольца эндоморфизмов acd-группы является частью [109, лемма 8.1.5] и основывается на том факте, что регулятор A является вполне характеристической подгруппой группы X и, следовательно, для любого $\phi \in \operatorname{End} X$ верно, что $\phi|_A \in \operatorname{End} A$. Кроме того, X содержится в делимой оболочке $\mathbb{Q}A$ регулятора A, что позволяет рассматривать $\operatorname{End} X$ как подкольцо кольца $\operatorname{End} A$.

Лемма 3.5. *Пусть $X \in \mathcal{A}$ и для целого положительного числа e выполняется включение $eX \subset A$. Тогда*

$$\operatorname{End} X = \{\phi \in \operatorname{End} A \colon (eX)\phi \subset eX\},$$

или, в эквивалентной форме,

$$\operatorname{End} X = \{\phi \in \operatorname{End} A \colon (\overline{eX})\bar{\phi} \subset \overline{eX}\}.$$

Мы используем условия изоморфизма групп, которые тесно связаны с предыдущим описанием и даются в [109, лемма 8.1.6] в следующей форме.

Лемма 3.6. *Пусть acd-группы X и X' содержат одну и ту же вполне разложимую группу A и для целого положительного числа e выполняются включения $eX \subset A$ и $eX' \subset A$. Тогда*

1) *если $\sigma \colon X \to X'$ является изоморфизмом, таким что $A\sigma \subset A$, то σ сужается до $\alpha \in \operatorname{Aut} A$, причём $\overline{eX}\bar{\alpha} = \overline{eX'}$;*
2) *если $\alpha \in \operatorname{Aut} A$ и $\overline{eX}\bar{\alpha} = \overline{eX'}$, то существует единственный изоморфизм $\sigma \colon X \to X'$, такой что $\sigma = \alpha$ на A. В частности, если $A = R(X)$, то*
$$\operatorname{Aut} X = \{\alpha \in \operatorname{Aut} A \colon \overline{eX}\bar{\alpha} = \overline{eX}\}.$$

В предложении 2.12 было показано, что если X является acd-группой, то $\operatorname{End} X$ тоже acd-группа по отношению к операции сложения. Переформулируем это предложение для случая блочно-жёстких групп.

Предложение 3.7. *Пусть X — блочно-жёсткая acd-группа кольцевого типа с регулятором*

$$A = \bigoplus_{\tau \in T} A_\tau,$$

регуляторным показателем e, множеством критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(X)$ и $n_\tau = \operatorname{rk} A_\tau$. Тогда

1) *имеют место включения $e \operatorname{End} A \subseteq \operatorname{End} X \subseteq \operatorname{End} A$;*
2) *$(\operatorname{End} X)^+$ является acd-группой с множеством критических типов T и регулятором $R\big((\operatorname{End} X)^+\big) \cong (\operatorname{End} A)^+$, при этом для всех $\tau \in T$ его τ-ранг равен n_τ^2.* □

Мы видим, что $R(\operatorname{End} X^+)$, как и регулятор группы X, является блочно-жёсткой группой. На этом основании факты, касающиеся блочно-жёстких acd-групп X, оказываются справедливыми и для их колец эндоморфизмов $\operatorname{End} X^+$, рассматриваемых как группы по отношению к операции сложения.

Как и раньше, определим канонические эпиморфизмы

$$\overline{}\colon A \to \bar{A} = A/eA, \quad \overline{}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$$

и индуцированные гомоморфизмы

$$\overline{}\colon \operatorname{End} A \to \operatorname{End} \bar{A}, \quad \overline{}\colon \operatorname{Aut} A \to \operatorname{Aut} \bar{A}.$$

Мы будем пользоваться определениями мультипликативной группы $\operatorname{TypAut} \bar{A}$ (2.5), почти изоморфизма (2.6) и совпадающим с ним понятием слабого изоморфизма (2.8).

Напомним, что регулятор $A = R(X)$ блочно-жёсткой acd-группы X — это вполне разложимая подгруппа наименьшего индекса, которая однозначно определена и однозначно разложима в прямую сумму τ-однородных компонент $A_\tau = A(\tau) = X(\tau)$, являющихся сервантными и потому вполне характеристическими в X, так как каждый критический тип является максимальным в $T_{\mathrm{cr}}(A)$. Любая вполне разложимая подгруппа A' конечного индекса блочно-жёсткой acd-группы $X \in \mathcal{A}$ изоморфна её регулятору A, который является вполне характеристической подгруппой в X. Справедливо следующее утверждение:

$$\text{если } A' \cong A \text{ и } A' \subset X, \text{ то } A' \subset A, \tag{21}$$

поскольку однородные группы A_τ сервантны в X и, следовательно, содержат соответствующие слагаемые A'_τ из канонического разложения

$$A' = \bigoplus_{\tau \in T} A'_\tau.$$

Это означает, что регулятор $R(X)$ блочно-жёсткой acd-группы X содержит любую подгруппу группы X, изоморфную группе $R(X)$.

Пусть p — простое число. Если в X существует подгруппа $A' \cong A$, такая что X/A' — p-примарная группа, то группа $X/A \cong (X/A')/(A/A')$ тоже p-примарна, и значит, X является acd-группой с p-примарным регуляторным фактором.

Рассмотрим произвольную группу $X \in \mathcal{A}$, имеющую p-примарный регуляторный фактор X/A и регуляторный показатель $e = p^l = \exp X/A$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Перечисляя все критические типы группы X, мы можем написать $T = T_{\mathrm{cr}}(A) = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$. Из разложения регулятора

$$A = \bigoplus_{i=1}^{k} A_{\tau_i}$$

на τ_i-однородные компоненты A_{τ_i} рангов n_i сразу следует, что кольцо $\operatorname{End} A$ изоморфно кольцу M, состоящему из $(n \times n)$-матриц F блочно-диагональной формы

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & F_k \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad F_i \in M_{n_i}(\tau_i). \tag{22}$$

Ясно, что

$$M = \bigoplus_{i=1}^{k} M'(\tau_i), \tag{23}$$

где матричные кольца

$$M'(\tau_i) \cong \operatorname{End} A_{\tau_i} \tag{24}$$

имеют только один ненулевой блок $M_{n_i}(\tau_i)$. Для $F \in M$ это будет символически записываться $F = (F_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$, или, что то же самое, $F = (F_\tau)_{\tau \in T}$, что означает, что $(n_\tau \times n_\tau)$-матрицы F_τ состоят из элементов соответствующих колец $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$, $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$.

Для любого $\tau \in T$ мы фиксируем разложение

$$A_\tau = \tau a_1^\tau \oplus \ldots \oplus \tau a_{n_\tau}^\tau. \tag{25}$$

Пусть $\mathcal{F}_\tau \in \operatorname{End} A_\tau$. Рассмотрим A_τ как свободный модуль над кольцом τ, имеющий базис $a_1^\tau, \ldots, a_{n_\tau}^\tau$. Мы отождествляем действие $\mathcal{F}_\tau$ на произвольном элементе $a_\tau = \gamma_1 a_1^\tau + \ldots + \gamma_{n_\tau} a_{n_\tau}^\tau \in A_\tau$, определённом числами $\gamma_i \in \tau$, с умножением слева вектора $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n_\tau})^T$ на соответствующую матрицу F_τ, столбцы которой — образы элементов a_i^τ, $i = 1, \ldots, n_\tau$, при отображении $\mathcal{F}_\tau$, расположенные в том же порядке.

Предположим, что $K = \{k_{l+1}, k_l, k_{l-1}, \ldots, k_1, k_0\}$ — это множество неотрицательных целых чисел, причём $k_{l+1} = 0$ и $k_l + k_{l-1} + \ldots + k_1 + k_0 = n_\tau$. Пусть

$$H(\tau) = \Big(\underbrace{p^l\tau}_{k_l} \,|\, \underbrace{p^{l-1}\tau}_{k_{l-1}} \,|\, \ldots \,|\, \underbrace{p\tau}_{k_1} \,|\, \underbrace{\tau}_{k_0}\Big) \tag{26}$$

является подкольцом кольца $M_{n_\tau}(\tau)$ и определяется множеством K следующим образом: столбцы матриц, составляющих $H(\tau)$, с номерами

$$k_{l+1} + k_l + \ldots + k_{l-j} + 1,\ k_{l+1} + k_l + \ldots + k_{l-j} + 2, \ldots,\ k_{l+1} + k_l + \ldots + k_{l-j-1}$$

имеют элементы из $p^{l-j-1}\tau$, где $j = -1, \ldots, l-1$ (число $k_{l+1} = 0$ введено в K для возможности описания элементов первых k_l столбцов).

Обозначим $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$ и $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$. Имеется разложение

$$\mathcal{E}_A = \bigoplus_{\tau \in T} \mathcal{E}_\tau \tag{27}$$

в сумму идеалов $\mathcal{E}_\tau \cong \operatorname{End} A_\tau \cong M_{n_\tau}(\tau)$, таких что $\mathcal{E}_\tau|_{A_\sigma} = 0$, если $\sigma \neq \tau$. Мы будем также пользоваться тем, что $\mathcal{E}_A$ может рассматриваться как прямое произведение колец

$$\mathcal{E}_A \cong \prod_{\tau \in T} \operatorname{End} A_\tau \tag{28}$$

(см. [35, гл. 1, предложение 3]). В дальнейшем элементы $\mathcal{F}_\tau$ колец $\operatorname{End} A_\tau$ и элементы соответствующих идеалов $\mathcal{E}_\tau$ кольца $\mathcal{E}_A$ мы будем обозначать одинаково, чтобы избежать введения многочисленных символов.

Определим $\mathcal{R} = \mathrm{Hom}(X, A) \subset \mathcal{E}$. Наша ближайшая цель — показать, что $\mathcal{R}^+$ является регулятором acd-группы $\mathcal{E}^+$, т. е. $\mathcal{R}^+ = R(\mathcal{E}^+)$ (символ $+$, указывающий на операцию суммирования, будет опускаться, если это не приводит к путанице).

Лемма 3.8. *Пусть $X \in \mathcal{A}$ является блочно-жёсткой acd-группой и $e = \exp X/A = p^l$ для некоторого простого числа p и $l \in \mathbb{N}$. Любая вполне разложимая подгруппа $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{E}^+$, изоморфная $\mathcal{E}_A$, содержится в $\mathcal{R}^+$.*

Доказательство. Основываясь на предложении 2.12, мы рассматриваем $\mathcal{H}$ как некоторую вполне разложимую подгруппу $\mathcal{E}_A$, которая также входит в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H} \cong \mathcal{E}_A^+$. Поскольку разложение блочно-жёсткой группы $\mathcal{E}_A^+$ на однородные компоненты определено однозначно:

$$\mathcal{E}_A = \bigoplus_{\tau \in T} \mathcal{E}_\tau,$$

существует (единственное) разложение

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\tau \in T} \mathcal{H}_\tau,$$

где $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{E}_\tau$ также вполне разложимые τ-однородные группы. Заметим, что $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ по условию. Таким образом, для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ верно

$$\mathcal{F} = \sum_{\tau \in T} \mathcal{F}_\tau, \quad \mathcal{F}_\tau \in \mathcal{H}_\tau, \quad \mathcal{F}_\tau \in \mathcal{E}.$$

Для всех $x \in X$ рассмотрим действие $\mathcal{F}$ на элементе $p^l x \in A$, который однозначно записывается в виде

$$p^l x = \sum_{\tau \in T} a_\tau, \quad a_\tau \in A_\tau.$$

Очевидно, что $(p^l x)\mathcal{F}_\tau = a_\tau \mathcal{F}_\tau = a_\tau \mathcal{F}$. Отсюда следует, что элемент $a_\tau \mathcal{F}_\tau \in A_\tau$ делится на p^l в группе X, а значит, и в самой группе A_τ в силу её сервантности в X. Поскольку это верно для любого τ, мы получаем, что

$$(p^l x)\mathcal{F} = \sum_{\tau \in T} a_\tau \mathcal{F} \in p^l A,$$

а это влечёт требуемое утверждение $x\mathcal{F} \in A$, означающее, что $\mathcal{F} \in \mathrm{Hom}(X, A)$. □

Теорема 3.9. *Пусть $X \in \mathcal{A}$ является блочно-жёсткой acd-группой с p-примарным регуляторным фактором и $e = p^l = \exp X/A$. Тогда для всех $\tau \in T = T_{\mathrm{cr}}(X)$ существуют и однозначно определены целые неотрицательные числа k_j^τ, $j = 0, \ldots, l$, такие что $n_\tau = k_l^\tau + k_{l-1}^\tau + \ldots + k_1^\tau + k_0^\tau$ и при специальном выборе базисов (25) для A_τ кольцо $\mathcal{R} = \mathrm{Hom}(X, A)$ имеет представление*

$$\mathcal{R} \cong H \cong \prod_{\tau \in T} H(\tau)$$

блочно-диагональными матрицами H, состоящими из блоков вида

$$H(\tau) = \Big(\underbrace{p^l\tau}_{k_l^\tau} \,|\, \underbrace{p^{l-1}\tau}_{k_{l-1}^\tau} \,|\, \ldots \,|\, \underbrace{p\tau}_{k_1^\tau} \,|\, \underbrace{\tau}_{k_0^\tau}\Big). \tag{29}$$

Доказательство. По условию для любого $x \in X$ верно, что $ex \in A$, следовательно, имеется однозначное представление

$$ex = \sum_{\tau \in T} v_{\tau x}, \quad v_{\tau x} \in A_\tau,$$

ввиду того что блочно-жёсткая группа A однозначно разложима в прямую сумму своих τ-однородных компонент A_τ. Отсюда получаем, что

$$\overline{ex} = \sum_{\tau \in T} \overline{v_{\tau x}}$$

и

$$X/A \cong \overline{eX} \subset \bar{A} = \bigoplus_\tau \overline{A_\tau} = \bigoplus_\tau A_\tau/p^l A_\tau.$$

Фиксируем любое τ, такое что $\tau(p) \neq \infty$, и обозначим множество всех элементов группы $\overline{A_\tau}$, на которые отображаются элементы из $\overline{eX}$ при канонический проекции $\bar{A} \to \overline{A_\tau}$, через $\overline{C_\tau} = \{\overline{v_{\tau x}}\colon x \in X\}$. По построению $\overline{C_\tau}$ — подгруппа группы $\overline{A_\tau}$, прямой суммы n_τ копий циклической группы $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$. На основании критерия Куликова [34, с. 146] $\overline{C_\tau}$, будучи подгруппой прямой суммы p-примарных циклических групп, также разлагается в прямую сумму циклических групп, причём единственным, с точностью до изоморфизма, образом. При естественных ограничениях $s \leqslant n_\tau$, $l_i \leqslant l$ имеем

$$\overline{C_\tau} = \langle\overline{b_1}\rangle \oplus \langle\overline{b_2}\rangle \oplus \ldots \oplus \langle\overline{b_s}\rangle, \quad \overline{b_i} \in \overline{A_\tau}, \quad |\overline{b_1}| = p^{l_i}. \tag{30}$$

Считаем циклические слагаемые расположенными по уменьшению их порядков, т. е. $l_i \geqslant l_j$, если $i \leqslant j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant s)$.

Возьмём какой-либо прообраз b_1 элемента $\overline{b_1}$ в группе A. Ясно, что $b_1 \in$ $\in p^{l-l_1}A$, но $b_1 \notin p^{l-l_1+1}A$. Разделив b_1 на соответствующее число p^{l-l_1}, мы получим элемент a_1, принадлежащий A, но не pA (не исключён случай $l = l_1$ и $a_1 = b_1$).

Не умаляя общности, полагаем $\langle a_1\rangle_* = \tau a_1$ в группе A_τ. Действительно, мы можем считать A_τ разложенной в прямую сумму

$$A_\tau = \bigoplus_{i \leqslant n_\tau} \tau c_i, \quad c_i \in A_\tau$$

таким образом, что

$$a_1 = \sum_{i \leqslant n_\tau} \alpha_i c_i \tag{31}$$

с целыми α_i. Тогда

$$d = \gcd(\{\alpha_i\colon i \leqslant n_\tau\}) = \gcd(\alpha_{i_0}, d'),$$

где $d' = \gcd(\{\alpha_i\colon i \leqslant n_\tau,\ i \neq i_0\})$ при произвольном выборе i_0; в частности, мы можем взять α_{i_0}, не делящееся на p (такое α_{i_0} существует, так как $a_1 \notin pA$). Ясно, что $\gcd(d,p) = 1$. Если $d \neq 1$, то обозначим произведение всех различных простых делителей числа d' через r и подберём такое $t \in \mathbb{N}$, что $\alpha'_{i_0} = \alpha_{i_0} + tp^l$ является числом, взаимно простым с d'. Для этого в качестве t возьмём наибольший делитель числа r, взаимно простой с α_{i_0}. Заменив α_{i_0} на α'_{i_0} в (31), мы получим новый элемент a_1, имеющий тот же самый образ в $\overline{A_\tau}$ и удовлетворяющий условию сервантности $(\tau a_1)_* = \tau a_1$ в группе A_τ.

По [86, т. 1, лемма 86.8] мы заключаем, что группа τa_1 выделяется прямым слагаемым из A_τ и может быть дополнена до всей вполне разложимой группы $A_\tau = \tau a_1 \oplus A'_\tau$, где A'_τ — τ-однородная вполне разложимая группа ранга $n_\tau - 1$. Таким образом, $\overline{\tau a_1 \oplus A'_\tau} = \overline{A_\tau}$. Значит, $\bar{\tau} a_1 + \overline{A'_\tau} = \overline{A_\tau}$ и $\langle \overline{a_1} \rangle \cap \overline{A'_\tau} = 0$ (иначе $\operatorname{rk} \overline{A_\tau}$ был бы меньше n_τ).

Имеем прямую сумму
$$\overline{A_\tau} = \langle \overline{a_1} \rangle \oplus \overline{A'_\tau},$$
в которой $\overline{A'_\tau} \cong (n_\tau - 1)(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ изоморфна прямой сумме $n_\tau - 1$ экземпляров группы $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$. Из (30), учитывая $\overline{p^{l-l_1} a_1} = \overline{b_1}$, мы заключаем, что $\overline{C_\tau} = \langle \overline{b_1} \rangle \oplus \overline{C'_\tau}$ для некоторой группы $\overline{C'_\tau} \cong \langle \overline{b_2} \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \overline{b_s} \rangle$, входящей в $\overline{A'_\tau}$ (для этого введём вспомогательную группу $\widetilde{C_\tau} = \langle \overline{a_1} \rangle \oplus \langle \overline{b_2} \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \overline{b_s} \rangle \supseteq \overline{C_\tau}$ и, воспользовавшись [86, т. 1, с. 50 (б)], получим $\widetilde{C_\tau} = \langle \overline{a_1} \rangle \oplus \overline{C'_\tau}$, причём $\overline{C'_\tau} = \overline{A'_\tau} \cap \widetilde{C_\tau}$ является подгруппой $\overline{A'_\tau}$).

Мы получили следующие разложения: $A_\tau = \tau a_1 \oplus A'_\tau$, $\overline{A_\tau} = \langle \overline{a_1} \rangle \oplus \overline{A'_\tau}$ $\overline{C_\tau} = \langle \overline{p^{l-l_1} a_1} \rangle \oplus \overline{C'_\tau}$, где $\overline{C'_\tau} \subset \overline{A'_\tau}$. Аналогично выделим прямое слагаемое τa_2 из A'_τ так, что $A'_\tau = \tau a_2 \oplus A''_\tau$, $\overline{A'_\tau} = \langle \overline{a_2} \rangle \oplus \overline{A''_\tau}$, $\overline{C'_\tau} = \langle \overline{p^{l-l_2} a_2} \rangle \oplus \overline{C''_\tau}$ и $\overline{C''_\tau} \subset \overline{A''_\tau}$. Продолжаем процесс и на s-м шаге получаем $A_\tau = \tau a_1 \oplus \ldots \oplus \tau a_s \oplus A_\tau^{(n_\tau - s)}$, где
$$A_\tau^{(n_\tau - s)} = \bigoplus_{j=s+1}^{n_\tau} \tau a_j\ -$$
вполне разложимая группа ранга $n_\tau - s$,
$$\overline{A_\tau} = \langle \overline{a_1} \rangle \oplus \langle \overline{a_2} \rangle \ldots \oplus \langle \overline{a_s} \rangle \oplus \langle \overline{a_{s+1}} \rangle \ldots \oplus \langle \overline{a_{n_\tau}} \rangle, \quad \overline{C_\tau} = \bigoplus_{i=1,\ldots,s} \langle \overline{p^{l-l_i} a_i} \rangle.$$

Произвольное отображение
$$\mathcal{F} \in \operatorname{Hom}(X, A) \subset \mathcal{E} \subset \prod_{\tau \in T} \operatorname{End} A_\tau$$
записывается в виде $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\tau)_{\tau \in T}$, где $\mathcal{F}_\tau \in \operatorname{End} A_\tau$.

Фиксируем τ. Поскольку $\overline{C_\tau}$ — это образ при канонической проекции группы $\overline{eX}$ в $\overline{A_\tau}$, для любого $i = 1, \ldots, s$ существует элемент x_i, такой что $p^l x_i = y_\tau + y \in X \setminus A$, где
$$p^l y \in \bigoplus_{\sigma \in T,\ \sigma \neq \tau} A_\sigma, \quad p^l y_\tau \in A_\tau,$$

и $\overline{p^l y_\tau} = \overline{p^{l-l_i} a_i}$, т. е. $p^l x_i = p^{l-l_i} a_i + x' + p^l x''$, где

$$x' \in \bigoplus_{\sigma \in T,\ \sigma \neq \tau} A_\sigma$$

и $x'' \in A_\tau$. Тогда

$$(p^l x_i)\mathcal{F} = (p^{l-l_i} a_i)\mathcal{F} + (x')\mathcal{F} + (p^l x'')\mathcal{F} \in p^l A = p^l A_\tau \oplus p^l \Bigg(\bigoplus_{\sigma \in T,\ \sigma \neq \tau} A_\sigma \Bigg).$$

Напомним, что a_i и x' принадлежат разным прямым слагаемым в указанном разложении A, которые являются вполне характеристическими в X, что влечёт $p^{l-l_i} a_i \mathcal{F} = p^{l-l_i} a_i \mathcal{F}_\tau \in p^l A_\tau$, так как $(p^l x'')\mathcal{F} \in p^l A_\tau$. Значит, $a_i \mathcal{F}_\tau \in p^{l_i} A_\tau$, где $\mathcal{F}_\tau \in \operatorname{End} A_\tau$. Таким образом, отображение $\mathcal{F}_\tau$ представляется некоторой матрицей $F_\tau \in H(\tau)$.

Будем считать, что аналогичные прямые разложения получены для всех групп A_τ, удовлетворяющих $\tau(p) \neq \infty$. Для каждого такого $\tau \in T$ обозначим через k_j^τ, $j = 1, \ldots, l$, число циклических слагаемых порядка p^j группы $\overline{C_\tau}$. В силу изоморфизма различных прямых разложений на циклические слагаемые [86, т. 1, теорема 17.4] числа k_j^τ определяются однозначно.

Если $\tau(p) = \infty$, то $\overline{A_\tau} = 0$ и очевидным образом $H(\tau)$ совпадает с $M_{n_\tau}(\tau)$ и также имеет требуемую форму, которой соответствует множество K с единственным ненулевым числом $k_0^\tau = n_\tau$.

Теперь очевидно, что любому отображению $\mathcal{F} \in \mathcal{R} = \operatorname{Hom}(X, A)$ в найденном базисе будет соответствовать некоторая блочно-диагональная матрица из

$$H \cong \prod_{\tau \in T} H(\tau),$$

состоящая из блоков вида (29). Обозначим множество отображений $A \to A$, определённых этими матрицами, через $\mathcal{H}$.

Мы показали, что $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}$. Обратно, для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ верно, что $\bar{\mathcal{F}}\colon \bar{A} \to \bar{A}$ аннулирует группу $\overline{eX}$. Это означает, что $(eX)\mathcal{F} \subset eA$ и $X\mathcal{F} \subset A$. Следовательно, $\mathcal{F} \in \mathcal{R}$ и $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. В итоге имеем требуемое равенство $\mathcal{R} = \mathcal{H}$. □

Оказалось, что $\mathcal{R}^+ = \operatorname{Hom}(X, A)^+$ является вполне разложимой группой, изоморфной $\mathcal{E}_A^+$ (см. (29)). По построению существуют (по крайней мере два) критических типа $\tau \in T$, для которых $k_l^\tau > 0$ при условии, что $p^l = \exp X/A$.

Из предложения 2.12 мы заключаем, что существует цепь

$$p^l \mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_A,$$

из которой следует, что $\exp \mathcal{E}/\mathcal{R} \leqslant p^l$. Для тождественного отображения $I \in \mathcal{E}$ очевидно, что l является наименьшим числом, удовлетворяющим $p^l I \in \mathcal{R}$. Значит, $\exp \mathcal{E}/\mathcal{R}$ в точности равняется p^l.

Пользуясь леммой 3.8 и (21), мы получаем следствие.

Следствие 3.10. *Пусть $X \in \mathcal{A}$ является блочно-жёсткой acd-группой с p-примарным регуляторным фактором X/A и $p^l = \exp X/A$. Тогда $\mathcal{R} = \operatorname{Hom}(X, A)^+$ является регулятором в $\operatorname{End}(X)^+$, т. е. $\mathcal{R} = R(\operatorname{End}(X)^+)$, и регуляторная экспонента группы $\operatorname{End}(X)^+$ равна p^l.*

Замечание 3.11. Пусть $X \in \mathcal{A}$ является блочно-жёсткой acd-группой с p-примарным регуляторным фактором X/A. Тогда $\mathcal{R} = \operatorname{Hom}(X, A)$ является двусторонним идеалом в кольце $\operatorname{End}(X)$, так как A — вполне характеристическая подгруппа в X.

На основании следствия 3.4, учитывая, что отображение $\tilde{\mathcal{F}} \in \operatorname{TypAut} \overline{E_A}$ сохраняет порядки элементов в $\overline{E_A} = E_A/eE_A \cong \bar{M}$, делаем следующее замечание.

Замечание 3.12. Пусть $X, X' \in \mathcal{A}$ являются блочно-жёсткими acd-группами с p-примарным регуляторным фактором. Если $X \cong_{\mathrm{nr}} X'$, то числа k_j^τ, определённые в теореме 3.9, для них совпадают и, значит, множества $R(\operatorname{End}(X)^+)$ и $R(\operatorname{End}(X')^+)$ являются изоморфными кольцами.

3.3. Автоморфизмы кольца эндоморфизмов блочно-жёсткой абелевой acd-группы с примарным регуляторным фактором

Как и выше, мы рассматриваем $X \in \mathcal{A}$, блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы кольцевого типа с регулятором

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau \cong \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} n_\tau \tau$$

и регуляторным показателем $e = \exp X/A$.

Мы используем разложение

$$\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A = \bigoplus_{\tau \in T} \mathcal{E}_\tau$$

в прямую сумму τ-однородных компонент $\mathcal{E}_\tau \cong \operatorname{End} A_\tau$ и цепь $e\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_A$, данную в предложении 2.12, где $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$ (см. (27)). Напомним, что кольцо $\mathcal{E}_\tau$ изоморфно кольцу $M_{n_\tau}(\tau)$ всех $(n_\tau \times n_\tau)$-матриц с элементами из соответствующего кольца $\tau \subset \mathbb{Q}$ (см. (23)).

Мы можем однозначно продолжить любой эндоморфизм α абелевой группы Y без кручения до линейного преобразования $\alpha \otimes 1 \in \operatorname{End}(Y) \otimes \mathbb{Q}$ её делимой оболочки $Y \otimes \mathbb{Q}$, отождествляя Y с $Y \otimes 1 = \{y \otimes 1 \colon y \in Y\}$. Принимая во внимание изоморфизм $\operatorname{End}(\mathbb{Q}^+) \cong \mathbb{Q}$ и используя определение тензорного произведения гомоморфизмов [21, 10.2.1], получаем, что $(\alpha \otimes r) \in \operatorname{End}(Y) \otimes \mathbb{Q}$ действует на $(y \otimes q) \in Y \otimes \mathbb{Q}$ следующим образом: $(y \otimes q)(\alpha \otimes r) = (y\alpha \otimes qr)$. Естественно, мы рассматриваем кольцо $\operatorname{End}(Y)$ как подкольцо кольца $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(Y \otimes \mathbb{Q})$, состоящее из тех эндоморфизмов α, которые удовлетворяют условию $Y\alpha \subset Y$. Легко видеть, что если Y — кольцо и α — кольцевой эндоморфизм на Y, то

$\alpha \otimes 1$ — кольцевой эндоморфизм кольца $Y \otimes \mathbb{Q}$. Вполне уместно использовать для элемента из $Y \otimes \mathbb{Q}$ обозначение qy вместо $(y \otimes q)$. Тогда $\alpha \in \operatorname{End}(Y)$ продолжается до всех элементов делимой оболочки группы Y с помощью соотношения $(qy)\alpha = q(y\alpha)$, где $y \in Y$.

Вернёмся к группам X и $\mathcal{E}^+$. Пусть $\mathcal{B} \in \operatorname{Aut}(\mathcal{E})$ — кольцевой автоморфизм. Напомним, что регулятор группы $\mathcal{E}^+$, вполне характеристическая подгруппа того же ранга, что и сама $\mathcal{E}^+$, совпадает с $\mathcal{R}^+$ по следствию 3.10. Тогда $\mathcal{B}$ может рассматриваться как эндоморфизм группы $\mathcal{E}^+$ с дополнительными предположениями $\phi\psi\mathcal{B} = \phi\mathcal{B}\psi\mathcal{B}$ для всех $\phi, \psi \in \mathcal{E}$ и $\mathcal{R}\mathcal{B} = \mathcal{R}$ (см. леммы 3.5, 3.6). Из $\operatorname{End}\mathcal{E}^+ \subset \operatorname{End}\mathcal{R}^+$ выводим, что эндоморфизм $\mathcal{B}$ может быть продолжен до линейного преобразования $\mathcal{B} \otimes 1 \in \mathcal{B} \otimes \mathbb{Q}$ делимой оболочки $\mathcal{R} \otimes \mathbb{Q}$ регулятора $\mathcal{R}$, отождествлённого с $\mathcal{R} \otimes 1$.

Напомним, что $\mathcal{R}^+ \cong \mathcal{E}_A^+$ является блочно-жёсткой вполне разложимой группой. Пусть

$$\mathcal{R}^+ = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} \mathcal{R}_\tau$$

с однородными компонентами $\mathcal{R}_\tau \cong H(\tau)^+$ (см. (29)). Из (23) и (24) следует, что $\operatorname{End}(\mathcal{R}^+)^+$ также является блочно-жёсткой вполне разложимой группой с тем же самым множеством критических типов, что и группы $\mathcal{R}^+$, X, т. е. являющимся антицепью. По лемме 3.6 и (28) верно, что

$$\mathcal{B} \in \operatorname{Aut}\mathcal{R} \cong \prod_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} \operatorname{Aut}\mathcal{R}_\tau,$$

и как элемент прямого произведения эндоморфизм $\mathcal{B}$ записывается в виде

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_\tau)_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)}, \quad \text{где} \quad \mathcal{B}_\tau \in \operatorname{Aut}\mathcal{R}_\tau. \tag{32}$$

По предложению 2.12 и лемме 3.8 получаем, что матричное кольцо $H(\tau)$ содержит $eM_{n_\tau}(\tau)$, т. е. $eM_{n_\tau}(\tau) \subset H(\tau) \subset M_{n_\tau}(\tau)$. Тогда $\mathbb{Q}$-алгебра

$$H(\tau) \otimes \mathbb{Q} = eM_{n_\tau}(\tau) \otimes \mathbb{Q} = eM_{n_\tau}(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \tag{33}$$

совпадает с

$$M_{n_\tau}(\mathbb{Q}) = M_{n_\tau}(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q},$$

полным кольцом $(n_\tau \times n_\tau)$-матриц над полем $\mathbb{Q}$. Для того чтобы упростить обозначения, мы будем использовать одни и те же символы для эндоморфизмов (автоморфизмов) изоморфных структур, если это не будет приводить к путанице. Таким образом, предположим, что $\mathcal{B}_\tau$ определено на $H(\tau)$. Так как $\operatorname{Ker}\mathcal{B}_\tau = 0$, мы можем естественным образом продолжить $\mathcal{B}_\tau$ с $H(\tau)$ на кольцо $M_{n_\tau}(\mathbb{Q}) = H(\tau) \otimes \mathbb{Q}$, отождествляя $\mathcal{B}_\tau$ с $\mathcal{B}_\tau \otimes 1 \in \operatorname{End} H(\tau) \otimes \mathbb{Q}$, которое действует на $(h \otimes q) \in H(\tau) \otimes \mathbb{Q}$ с помощью равенства $(h \otimes q)(\mathcal{B}_\tau \otimes 1) = (h\mathcal{B}_\tau \otimes q)$. Было подчёркнуто, что $\mathcal{B}_\tau \otimes 1$ сохраняет не только операцию сложения, но также и (матричное) умножение в кольце $H(\tau) \otimes \mathbb{Q}$, и в этом смысле $\mathcal{B}_\tau$ индуцирует кольцевой автоморфизм всего кольца $M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$. Суммируя вышесказанное (см. (32)),

мы утверждаем для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$, что
$$\mathcal{B}_\tau \in \operatorname{Aut} H(\tau) \cap \operatorname{Aut}\bigl(M_{n_\tau}(\mathbb{Q})\bigr). \tag{34}$$

Классический результат (см. [20, гл. 2, теорема 10]) утверждает, что любой автоморфизм полного матричного кольца над $\mathbb{Q}$ является внутренним. Это означает, что для любого автоморфизма β в $M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$ существует такая обратимая матрица $B \in M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$, что β действует на произвольной матрице $C \in M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$ следующим образом:
$$C\beta = B^{-1}CB.$$
Мы рассматриваем те $\beta \in \operatorname{Aut}\bigl(M_{n_\tau}(\mathbb{Q})\bigr)$, которые также являются автоморфизмами кольца $H(\tau) \subset M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$. Покажем, что из $\beta \in \operatorname{Aut} H(\tau)$ следует $\beta \in \operatorname{Aut} M_{n_\tau}(\tau)$.

Следующая лемма не нуждается в доказательстве.

Лемма 3.13. *Пусть автоморфизм $\beta \in \operatorname{Aut}\bigl(M_{n_\tau}(\mathbb{Q})\bigr)$ задан на элементах $C \in M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$ с помощью равенства $C\beta = B^{-1}CB$ с обратимой матрицей $B \in M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$. Тогда для любых $r, q \in \mathbb{N}$ существует матрица $\tilde{B} = (\frac{q}{r})B$, также определяющая автоморфизм β с помощью $C\beta = (\tilde{B})^{-1}C\tilde{B}$ и $(\tilde{B})^{-1} = (\frac{r}{q})B^{-1}$.*

Следствие 3.14. *Пусть автоморфизм $\beta \in \operatorname{Aut}\bigl(M_{n_\tau}(\mathbb{Q})\bigr)$ определён на матрице $C \in M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$ с помощью $C\beta = B^{-1}CB$. Тогда для любого простого f отображение β может быть определено с помощью такой обратимой матрицы $B^* \in M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$ с целыми коэффициентами, что по крайней мере один из её элементов взаимно прост с f.*

Доказательство. Пусть все элементы матрицы B являются несократимыми рациональными дробями. Предположим, что q является наименьшим общим кратным их знаменателей и $t \geqslant 0$ является наибольшим таким целым числом, что $r = f^t$ делит все элементы из $B'' = qB$. Тогда матрица $B^* = \frac{q}{r}B$ принадлежит кольцу $M_{n_\tau}(\mathbb{Z})$ и содержит элемент, не делящийся на f в $\mathbb{Z}$. $\square$

Для изучения $\beta \in \operatorname{Aut}\bigl(M_{n_\tau}(\mathbb{Q})\bigr)$ мы ограничимся матрицами $B \in M_{n_\tau}(\mathbb{Z})$ с целыми элементами, определяющими действие автоморфизма β на элементах из $M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$. Через B' обозначим матрицу, также содержащуюся в $M_{n_\tau}(\mathbb{Z})$ и удовлетворяющую равенству $B^{-1} = \frac{B'}{\det B}$. Иными словами, $B' = \{B_{ij}\}$ состоит из алгебраических дополнений B_{ij} элементов b_{ji} из $B = \{b_{ij}\}$, где $b_{ij}, B_{ij} \in \mathbb{Z}$ и $i, j \leqslant n_\tau$.

Лемма 3.15. *Пусть f — простое число и $B \in M_{n_\tau}(\mathbb{Z})$. Предположим, что $s \geqslant 1$ является наибольшим целым числом, таким что f^s делит $\det B$. Тогда B' содержит элемент, не делящийся на f^s.*

Доказательство. Предположим, что все элементы из B' делятся на f^s. Тогда $(f^s)^{n_\tau} \mid \det B'$, n_τ является наибольшим таким целым числом, что $(f^s)^{n_\tau}$ делит $(\det B)^{n_\tau}$, и
$$\det B^{-1} \det B = \det\left(\frac{B'}{\det B}\right) \det B = \frac{\det B'}{(\det B)^{n_\tau}} \det B$$

является рациональным числом, которое в виде несократимой дроби имеет f^s множителем своего числителя. Это противоречит равенству $\det B^{-1}\det B = 1$ и заканчивает доказательство. $\square$

С этого момента мы предполагаем, что автоморфизм β определён на элементах C из $M_{n_\tau}(\mathbb{Z})$ с помощью равенства $C\beta = \frac{1}{\det B}B'CB$, где $B, B' \in M_{n_\tau}(\mathbb{Z})$ и $B^{-1} = \frac{1}{\det B}B'$. Сконцентрируемся на матричном произведении $B'CB$.

Пусть $\bar{C} = \{c_{ij} : i, j \leqslant n_\tau\}$ — матрица из кольца $M_{n_\tau}(\mathbb{Z})$. Будем говорить, что c_{ij} является (ij)-элементом матрицы $\bar{C}$, (ij)-элемент матрицы $\bar{C}$ будет также обозначаться через $(\bar{C})_{ij}$. Мы будем писать $\bar{C} = (1_{rm})$, если матрица имеет единственный ненулевой элемент $c_{rm} = 1$,

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Тогда $C = n\bar{C} = n(1_{rm})$ содержит число $n \in \mathbb{Z}$ своим (rm)-элементом, а все остальные элементы матрицы равны нулю.

Рутинная проверка позволяет убедиться в том, что для произвольных матриц $D_1, D_2 \in M_{n_\tau}(\mathbb{Z})$ и фиксированной матрицы $\bar{C} = (1_{rm})$ выполнено следующее:

$$(D_1\bar{C}D_2)_{kt} = (D_1)_{kr}(\bar{C})_{rm}(D_2)_{mt} = (D_1)_{kr}\ 1\ (D_2)_{mt} = (D_1)_{kr}(D_2)_{mt}, \tag{36}$$
$$(D_1CD_2)_{kt} = (D_1)_{kr}(n\bar{C})_{rm}(D_2)_{mt} = n(D_1)_{kr}(D_2)_{mt}.$$

Напомним, что мы рассматриваем группу $X \in \mathcal{A}$ с p-примарной фактор-группой X/A. Нам понадобится лемма, которая, являясь технической, на самом деле определяет многие дальнейшие результаты.

Лемма 3.16. *Пусть $H(\tau)$ — кольцо вида* (29) *с некоторыми целыми k_j^τ и фиксированным $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)$, удовлетворяющим $\tau(p) \neq \infty$. Если $\beta \in \mathrm{Aut}\big(M_{n_\tau}(\mathbb{Q})\big) \cap \mathrm{Aut}\, H(\tau)$, то $\beta \in \mathrm{Aut}\big(M_{n_\tau}(\tau)\big)$, причём любой автоморфизм кольца $M_{n_\tau}(\tau)$ является внутренним.*

Доказательство. Как и выше, имеем $p^l = \exp X/A$ с натуральным $l > 0$. Используя следствие 3.14, мы можем считать, что матрица $B = \{b_{ij}\}$, определяющая β с помощью равенства $C\beta = B^{-1}CB = \frac{1}{\det B}B'CB$, содержит целые элементы и по крайней мере один из них, например $b_{kr} \neq 0$, не делится на простое число p.

Мы хотим доказать, что $\gcd(\det B, p) = 1$. Рассуждая от противного, предположим, что $p \mid \det B$, и возьмём p^s $(s \geqslant 1)$ — наибольшую степень p, делящую $\det B$. По лемме 3.15 $B' = \{B_{ij}\}$ содержит элемент, не делящийся на p^s в $\mathbb{Z}$.

Предположим, что это будет $B_{mt} \neq 0$. Схема доказательства основана на том факте, что целое число $b_{kr}B_{mt}$ не делится на p^s.

Пусть p^h является такой наименьшей степенью числа p, что матрица $C = p^h(1_{tk})$, имеющая лишь один ненулевой элемент (в k-м столбце), содержится в $H(\tau)$. Мы используем (36), полагая $D_1 = B'$ и $D_2 = B$. Так как $\tau(p) \neq \infty$, из $(B'CB)_{mr} = \bigl(B'\bigl(p^h(1_{tk})\bigr)B\bigr)_{mr} = p^h B_{mt} b_{kr}$ следует, что p-высота в $M_{n_\tau}(\tau)$ элемента

$$(C\beta)_{mr} = \frac{1}{\det B} p^h B_{mt} b_{kr} \tag{37}$$

меньше, чем p-высота элемента $(C)_{tk}$, либо $(C\beta)_{mr}$ вовсе не содержится в $M_{n_\tau}(\tau)$. Значит, $C\beta \in H(\tau)$ возможно только при $r > k$ (см. (29)).

Аналогично возьмём p^g, наименьшую степень числа p, для которой матрица $C' = p^g(1_{rm})$ является элементом в $H(\tau)$. Из равенства $C'\beta^{-1} = BC'B^{-1} = \frac{1}{\det B} BC'B'$ мы видим, что p-высота в $M_{n_\tau}(\tau)$ элемента

$$(C'\beta^{-1})_{kt} = \frac{1}{\det B} p^g b_{kr} B_{mt} \tag{38}$$

меньше p-высоты элемента $(C')_{rm}$ либо даже $C'\beta^{-1} \notin M_{n_\tau}(\tau)$, откуда по тем же причинам следует $t > m$.

Отсюда можно заключить, что если матрица B определяет автоморфизм кольца $M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$, также являющийся автоморфизмом в $H(\tau)$, то $p \mid b_{ij}$ и $p^s \mid B_{ij}$ для всех $i \geqslant j$. Фиксированные элементы b_{kr} и B_{mt}, не делящиеся на p и p^s соответственно, удовлетворяют неравенствам $k < r$, $m < t$, т. е.

$$B \in \begin{pmatrix} p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \dots & p\mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B' \in \begin{pmatrix} p^s\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} \\ p^s\mathbb{Z} & p^s\mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^s\mathbb{Z} & p^s\mathbb{Z} & \dots & p^s\mathbb{Z} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Обозначим через k'' элемент k_h^τ множества $\{k_l^\tau, k_{l-1}^\tau, \dots, k_1^\tau, k_0^\tau\}$ с минимальным h, таким что $k_h^\tau \neq 0$ (см. (29)). В частном случае, когда $k'' = n_\tau$, мы уже доказали, что если $\beta \in \operatorname{Aut}\bigl(M_{n_\tau}(\mathbb{Q})\bigr) \cap \operatorname{Aut} H(\tau)$, то определитель $\det B$ взаимно прост с p. Иначе p-высота элемента $(C\beta)_{mr}$ матрицы $M_{n_\tau}(\tau)$, заданного равенством (37), была бы меньше p-высоты элемента $(C)_{tk}$ и элемент $(C\beta)_{mr}$ не содержался бы в

$$H(\tau) = \Bigl(\underbrace{p^h\tau | p^h\tau | \dots | p^h\tau}_{n_\tau}\Bigr).$$

Отсюда, в частности, следует при $h = 0$, что все автоморфизмы кольца $M_{n_\tau}(\tau)$ являются внутренними.

Покажем, что утверждение верно и в случае, когда $k'' < n_\tau$. Обозначим $k' = n_\tau - k''$. Из равенства

$$H(\tau) = \Bigl(\underbrace{p^l\tau | p^{l-1}\tau | \dots |}_{k'} \underbrace{p^h\tau}_{k''}\Bigr) \tag{40}$$

легко увидеть, что p-высота в $M_{n_\tau}(\tau)^+$ любого элемента вполне разложимой группы $H(\tau)^+$ не может быть меньше h. Так как $C = p^h(1_{ij})$ содержится в $H(\tau)$ для всех i и j, таких что $k' < j \leqslant n_\tau$, мы можем рассмотреть p-высоты элементов $(C\beta)_{ij}$ и $(C\beta^{-1})_{ij}$. Напомним, что в наших рассуждениях выделенные элементы $b_{kr} \in B$ и $B_{mt} \in B'$ считаются фиксированными.

Аналогично равенству (37) для каждого $j > k'$ мы имеем

$$(C\beta)_{mn_\tau} = (B^{-1}CB)_{mn_\tau} = \frac{1}{\det B} B_{mt}\big(p^h(1_{tj})\big)b_{jn_\tau} = \frac{1}{\det B} p^h B_{mt} b_{jn_\tau},$$

что обусловливает элементы матрицы $B = \{b_{ij}\}$ следующим образом, $p \mid b_{jn_\tau}$ при $j > k'$, поскольку целое число B_{mt} не делится на p^s, в то время как $(C\beta)_{mn_\tau}$ делится на p^h в $M_{n_\tau}(\tau)$. Тогда k'' нижних элементов последнего столбца матрицы B делятся на p, и матрицу можно переписать в более точном виде, чем в (39):

$$B \in \begin{pmatrix} p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \dots & p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Далее, как и в (38), возьмём $C = p^h(1_{rn_\tau}) \in H(\tau)$ и изучим

$$(C\beta^{-1})_{kj} = (BCB^{-1})_{kj} = \frac{1}{\det B} b_{kr}\big(p^h(1_{rn_\tau})\big)B_{n_\tau j} = \frac{1}{\det B} p^h b_{kr} B_{n_\tau j}$$

при условии $j \leqslant k'$. Из (40) видно, что p-высота в $M_{n_\tau}(\tau)$ элемента $(C\beta^{-1})_{kj}$ должна быть больше h. Соотношение $\gcd(b_{kr}, p) = 1$ даёт нам, что $B_{n_\tau j}$ делятся по меньшей мере на p^{s+1} при $j \leqslant k'$. Тогда первые k' элементов нижней строки матрицы B' принадлежат $p^{s+1}\mathbb{Z}$, а не только $p^s\mathbb{Z}$ (ср. с (39)),

$$B' \in \begin{pmatrix} p^s\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ p^s\mathbb{Z} & p^s\mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^s\mathbb{Z} & \vdots & \vdots & \vdots & p^s\mathbb{Z} & \vdots \\ p^{s+1}\mathbb{Z} & \dots & p^{s+1}\mathbb{Z} & p^s\mathbb{Z} & \dots & p^s\mathbb{Z} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Поскольку $k'' + k' = n_\tau$, мы видим, что $B^{-1}B = \frac{1}{\det B}B'B$ не может быть единичной матрицей, потому что $(B'B)_{n_\tau n_\tau} \in p^{s+1}\mathbb{Z}$, в то время как $\det B$ делится не более чем на p^s. Из этого противоречия мы выводим требуемое равенство $\gcd(\det B, p) = 1$.

Для того чтобы завершить доказательство, покажем, что $\gcd(\det B, q) = 1$ для любого простого $q \neq p$, такого что $\tau(q) \neq \infty$. Предположим противное. Как и выше, возьмём $q^{s'}$ $(s' \geqslant 1)$ — наибольшую степень q, делящую $\det B$. Мы можем считать, что $B, B' \in M_{n_\tau}(\mathbb{Z})$ и существуют элементы b_{kr} из B и B_{mt} из B', не делящиеся на q и $q^{s'}$ соответственно.

Пусть $C = p^h(1_{tk})$ содержится в $H(\tau)$. Снова применим (36) к $D_1 = B'$ и $D_2 = B$. Так как $b_{kr}B_{mt}$ не делится на $q^{s'}$, то из

$$(B'CB)_{mr} = \big(B'\big(p^h(1_{tk})\big)B\big)_{mr} = p^h B_{mt} b_{kr}$$

следует, что

$$(C\beta)_{mr} = \frac{1}{\det B} p^h B_{mt} b_{kr}$$

не содержится в τ, что означает $C\beta \notin M_{n_\tau}(\tau)$. Значит, $s' = 0$.

Вышесказанное приводит к тому, что любой простой делитель f числа $\det B$ удовлетворяет условию $\tau(f) = \infty$, и, таким образом, матрица $B^{-1} = \frac{1}{\det B} B'$ содержится в кольце $M_{n_\tau}(\tau)$, откуда следует, что $\beta \in \operatorname{Aut}\big(M_{n_\tau}(\tau)\big)$, как и требовалось. $\square$

Вернёмся к группе $X \in \mathcal{A}$. Мы будем использовать тот факт, что кольцо $M_{n_\tau}(\tau)$ имеет только внутренние автоморфизмы. Так как $H(\tau)$ совпадает с $M_{n_\tau}(\tau)$ при $\tau(p) = \infty$, то предыдущая лемма, а также (32) и (34) приводят к одному из ключевых результатов.

Теорема 3.17. *Пусть X — блочно-жёсткая почти вполне разложимая группа кольцевого типа с регулятором*

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau$$

и p-примарным регуляторным фактором X/A. Если $\mathcal{B} \in \operatorname{Aut}(\operatorname{End} X)$, то

$$\mathcal{B} \in \prod_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} \operatorname{Aut}(\operatorname{End} A_\tau),$$

т. е. $\mathcal{B}$ продолжается до (кольцевого) автоморфизма кольца $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$.

Используя принятые обозначения, мы получаем из этой теоремы, что если $\mathcal{B} \in \operatorname{Aut} \mathcal{E}$, то $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_\tau)_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)}$, где $\mathcal{B}_\tau \in \operatorname{Aut}(\mathcal{E}_\tau)$ и $\mathcal{E}_\tau \cong \operatorname{End}(A_\tau)$.

Пусть $E \subset M$ — матричное кольцо, изоморфное кольцу $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$, где

$$M \cong \prod_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} M_{n_\tau}(\tau),$$

и снова $p^l = \exp X/A$.

По предложению 2.12 имеем

$$p^l M \subset E \subset M.$$

Как и выше, будем использовать обозначение $F = (F_\tau)_{\tau \in T}$ для блочно-диагональных матриц из E, представляющих

$$\mathcal{F} = \sum_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} \mathcal{F}_\tau \in \mathcal{E},$$

где $\mathcal{F}_\tau \in \mathcal{E}_\tau$. Для каждого $\tau \in T$ обозначим образ кольца E в $M_{n_\tau}(\tau)$ при канонической проекции следующим образом:

$$E_\tau = \{F_\tau \colon \text{существует } F^0 = (F^0_\sigma)_{\sigma\in T} \in E, \text{ где } F^0_\tau = F_\tau\}. \tag{43}$$

Очевидно, E_τ является подкольцом в $M_{n_\tau}(\tau)$ и его можно отождествить с соответствующим подкольцом кольца $\mathcal{E}_\tau$, удовлетворяющим соотношению

$$p^l\mathcal{E}_\tau \subset E_\tau \subset \mathcal{E}_\tau. \tag{44}$$

Если $\tau(p) = \infty$, то $E_\tau = M_{n_\tau}(\tau)$ по лемме 3.5.

Из предыдущей теоремы получаем следствие.

Следствие 3.18. *Пусть X — почти вполне разложимая блочно-жёсткая группа кольцевого типа с регулятором*

$$A = \bigoplus_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau$$

и $p^l = \exp X/A$. Пусть E_τ — образ кольца $\mathcal{E} = \mathrm{End}(X)$ при канонической проекции на $\mathcal{E}_\tau \cong \mathrm{End}(A_\tau)$. Тогда группа $\mathrm{Aut}\,\mathcal{E}$ является подгруппой прямого произведения

$$\prod_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A)} K_\tau,$$

где

$$K_\tau = \{\beta \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{E}_\tau \colon \beta|_{E_\tau} \in \mathrm{Aut}\,E_\tau\}. \tag{45}$$

Доказательство. Теорема 3.17 утверждает, что $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_\tau)_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A)} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{B}_\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{E}_\tau$. Для любого $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\tau)_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A)} \in \mathcal{E}$ его образом является $\mathcal{F}\mathcal{B} = (\mathcal{F}_\tau\mathcal{B}_\tau)_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A)}$, где $\mathcal{F}_\tau \in E_\tau \subset \mathcal{E}_\tau$. Мы утверждаем, что сужения отображений $\mathcal{B}_\tau|_{E_\tau}$ являются автоморфизмами колец E_τ. Утверждение очевидно в случае, когда $\tau(p) = \infty$. Предположим, что $\tau(p) \neq \infty$.

Если $\mathrm{rk}\,A_\tau = 1$, то $\mathcal{E}_\tau \cong \tau$ допускает только тождественный кольцевой автоморфизм кольца $\mathcal{E}_\tau$, равно как и кольца E_τ.

Если $\mathrm{rk}\,A_\tau > 1$, мы сразу получаем, что $E_\tau\mathcal{B}_\tau$ является подмножеством в E_τ, так как $\mathcal{B} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$. Кроме того, $\mathcal{B}_\tau$ инъективно на E_τ, так как это мономорфизм большего кольца $\mathcal{E}_\tau$. Наконец, образ кольца E_τ совпадает с E_τ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$ (иначе отображение $\mathcal{B}$ не могло бы быть эпиморфным на $\mathcal{E}$).

Таким образом, $\mathcal{B}_\tau|_{E_\tau}$ является автоморфизмом кольца E_τ и $\mathcal{B}_\tau \in K_\tau$ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$, что и требовалось доказать. □

4. Почти вполне разложимые абелевы группы с циклическим регуляторным фактором и их кольца эндоморфизмов

Рассматривается класс $\mathcal{A}_O$ почти вполне разложимых групп X кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором (класс crq-групп), который выделяется из класса $\mathcal{A}$ абелевых почти вполне разложимых групп тем, что для него удалось получить полную классификацию (см. [55]). Покажем, что если $X \in \mathcal{A}_O$, то $\operatorname{End} X^+$ тоже crq-группа, и построим группу автоморфизмов $\operatorname{Aut}(\operatorname{End} X)$ кольца $\operatorname{End} X$, что уточняет теорему 3.17 для этого класса. Докажем, что группы $X, Y \in \mathcal{A}_O$ почти изоморфны тогда и только тогда, когда их кольца эндоморфизмов изоморфны (ср. с теоремой 3.3).

4.1. Общие сведения об абелевых acd-группах с циклическим регуляторным фактором

Мы рассматриваем блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы $X \in \mathcal{A}_O$ кольцевого типа с регулятором

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau \cong \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} n_\tau \tau$$

и циклическим регуляторным фактором X/A, т. е. $e = \exp X/A = |X/A|$. Обозначения сохраняются: $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$, $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$, $\mathcal{E}_\tau \cong \operatorname{End} A_\tau$, $T = T_{\mathrm{cr}}(X) = T_{\mathrm{cr}}(A)$.

Мы используем числа $m_\tau(X)$, введённые для crq-группы X в [109, определение 12.6.2] и [63, определение 2.1]. Для этого определим естественный эпиморфизм

$$\overline{}\colon A \mapsto A/eA = \bar{A}. \tag{46}$$

Выберем образующий элемент $b + A$ группы X/A. Тогда

$$eb = \sum_{\tau \in T} v_\tau, \quad v_\tau \in A_\tau.$$

Положим

$$m_\tau = m_\tau(X) = |\overline{v_\tau}| = |v_\tau + eA|. \tag{47}$$

Очевидно, $m_\tau \mid e$ для всех $\tau \in T$.

Особое разложение, называемое *главным разложением* в [63, теорема 3.5] и [109, теорема 13.1.6], всегда существует для рассматриваемых групп.

Теорема 4.1 (о главном разложении). *Пусть X — блочно-жёсткая crq-группа. Тогда существует разложение $X = Y \oplus A'$, такое что A' вполне разложима, Y является жёсткой crq-группой и $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(Y)$, если и только если $m_\tau(Y) = m_\tau(X) > 1$. Группа Y единственна с точностью до почти изоморфизма и A' единственна с точностью до изоморфизма.*

Главное разложение не единственно, но определяется с точностью до почти изоморфизма. В [63, лемма 2.2] показано, что $m_\tau(X)$ не зависят от выбора элемента b и служат инвариантами группы X. Более того, они одинаковы для почти изоморфных групп.

Теорема 4.2 (критерий почти изоморфизма [63, теорема 2.4]). *Пусть X и Y — блочно-жёсткие crq-группы. Тогда $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, если и только если $R(X) \cong R(Y)$ и для всех типов τ $m_\tau(X) = m_\tau(Y)$.*

Напомним, что почти изоморфизм — это эквивалентность, которая слабее изоморфизма (см. определение 2.6). Эта эквивалентность сохраняет свойства прямых разложений абелевых групп без кручения конечного ранга в смысле теоремы 1.1. Числа $m_\tau(X)$ будем называть *инвариантами почти изоморфизма* crq-группы X.

Сначала мы рассмотрим почти вполне разложимую группу X с p-примарным циклическим регуляторным фактором X/A, т. е. $p^l = \exp X/A = |X/A|$ для некоторого натурального l. Это означает, что все числа $m_\tau(X)$ являются степенями числа p. Естественно считаем, что

$$m_\tau = 1, \quad \text{если} \quad \tau(p) = \infty \quad \text{или} \quad \tau \notin T_{\mathrm{cr}}(X), \tag{48}$$

так как в данном случае $\overline{A_\tau} = A_\tau / p^l A_\tau = 0$.

Как и раньше,

$$A_\tau = \tau a_1^\tau \oplus \ldots \oplus \tau a_{n_\tau}^\tau, \tag{49}$$

и для некоторого элемента b, такого что $\langle b + A \rangle = X/A$, не умаляя общности, полагаем

$$p^l b = \sum_{\tau \in T,\ m_\tau \neq 1} \frac{p^l}{m_\tau} s_\tau a_1^\tau, \tag{50}$$

где $s_\tau \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет соотношениям

1) $\gcd(s_\tau, p) = 1$ для всех $\tau \in T$;
2) $\gcd(p, q) = 1$ и $\gcd(s_\tau, q) = 1$ для любого простого q, удовлетворяющего условию $\tau(q) = \infty$.

Тогда $X = Y \oplus A'$ — главное разложение, имеющее слагаемые

$$Y = \Bigl(\bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau \neq 1} \tau a_1^\tau \Bigr)_*$$

и

$$A' = \Bigl(\bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau \neq 1} A'_\tau \Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau = 1} A_\tau \Bigr),$$

где $A'_\tau = \tau a_2^\tau \oplus \ldots \oplus \tau a_{n_\tau}^\tau$.

Заметим, что существуют по крайней мере два критических типа τ_1, τ_2, для которых $m_{\tau_1} = m_{\tau_2} = p^l$ (иначе однородная группа A_τ с $m_\tau = p^l$ не являлась бы сервантной подгруппой в X, что противоречило бы свойству A быть регулятором для X).

4.2. Автоморфизмы кольца эндоморфизмов блочно-жёсткой абелевой crq-группы

Нам потребуется матричное представление кольца $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$.

Теорема 4.3. *Кольцо эндоморфизмов $\mathcal{E}$ блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X кольцевого типа с регулятором*

$$A \cong \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)} n_\tau \tau$$

и p-примарным циклическим регуляторным фактором X/A изоморфно кольцу E блочно-диагональных матриц $F = (F_\tau)_{\tau \in T}$ вида

$$F_\tau \in \begin{pmatrix} k + m_\tau \tau & \tau & \dots & \tau & \tau \\ m_\tau \tau & \tau & \dots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau \tau & \tau & \dots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau \tau & \tau & \dots & \tau & \tau \end{pmatrix} \subset M_{n_\tau}(\tau), \tag{51}$$

где $m_\tau = m_\tau(X)$ и целое число $k = k(F)$ фиксировано.

Доказательство. Как и выше, любое отображение

$$\mathcal{F} = \sum_{\tau \in T} \mathcal{F}_\tau \in \mathcal{E}$$

с $\mathcal{F}_\tau \in \mathcal{E}_\tau$ представляется блочно-диагональной матрицей $F = (F_\tau)_{\tau \in T}$ с

$$F_\tau = \{f_{ij} \colon f_{ij} \in \tau\} \in M_{n_\tau}(\tau) \cong \operatorname{End} A_\tau.$$

Возьмём главное разложение $X = Y \oplus A'$, определяющее соответствующие разложения своих вполне инвариантных подгрупп $A_\tau = \tau a_1^\tau \oplus A'_\tau$ с $m_\tau \neq 1$, таких что $\tau a_1^\tau = Y \cap A$.

Лемма 3.5 утверждает, что $\mathcal{F} \in \mathcal{E}_A$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{p^l b}\bar{\mathcal{F}} = k\overline{p^l b}, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}, \tag{52}$$

так как $\overline{p^l X} = \langle \overline{p^l b} \rangle$ является циклической подгруппой в $\bar{A} = A/p^l A$. Из (50) и матричного подхода, ассоциированного с разложением (49), получаем

$$\overline{p^l b}\bar{\mathcal{F}} = \sum_{\tau \in T,\ m_\tau \neq 1} \left(\overline{\frac{p^l}{m_\tau}}\right) \overline{s_\tau} \overline{a_1^\tau \mathcal{F}_\tau} = \sum_{\tau \in T,\ m_\tau \neq 1} \left(\overline{\frac{p^l}{m_\tau}}\right) \overline{s_\tau} \overline{F_\tau} \overline{a_1^\tau}$$

с

$$\overline{F_\tau} = \{\overline{f_{ij}} \colon \overline{f_{ij}} \in \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}\}, \tag{53}$$

представляющей матрицей для $\overline{\mathcal{F}}_\tau \in \overline{\mathcal{E}_\tau}$. Так как $s_\tau a_1^\tau \mathcal{F}_\tau$ делится на s_τ в A_τ, применяя (52), имеем

$$\left(\frac{p^l}{m_\tau}\right) s_\tau a_1^\tau \mathcal{F}_\tau \equiv k \left(\frac{p^l}{m_\tau}\right) s_\tau a_1^\tau \bmod s_\tau p^l A_\tau.$$

Для всех τ, удовлетворяющих $m_\tau \neq 1$, это приводит к равенству

$$\left(\frac{p^l}{m_\tau}\right) s_\tau F_\tau a_1^\tau = k\left(\frac{p^l}{m_\tau}\right) s_\tau a_1^\tau + s_\tau p^l (f'_{11} a_1^\tau + f'_{21} a_2^\tau + \ldots + f'_{n_\tau 1} a_\tau^{n_\tau}) =$$

$$= \left(\frac{p^l}{m_\tau}\right) s_\tau \big((k + m_\tau f'_{11}) a_1^\tau + m_\tau f'_{21} a_2^\tau + \ldots + m_\tau f'_{n_\tau 1} a_\tau^{n_\tau}\big), \quad f'_{i1} \in \tau.$$

Далее получаем, что первый столбец матрицы F_τ при $m_\tau \neq 1$ состоит из элементов $f_{11} = k + m_\tau f'_{11}$ и $f_{i1} = m_\tau f'_{i1}$, если $i \neq 1$ (целое число k одно и то же для всех таких τ). С таким ограничением $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{E}$ при любых F_τ, для которых $m_\tau = 1$, так как

$$\overline{p^l b} \subset \bigoplus_{\tau \in T,\ m_\tau \neq 1} \overline{A_\tau}.$$

Заметим, что блоки (51) формально совпадают с кольцами $M_{n_\tau}(\tau)$, если $m_\tau = 1$, и могут также задаваться в этой форме.

Таким образом, кольцо $\mathcal{E}$ изоморфно матричному кольцу E, заданному формулой (49), что и требовалось доказать. □

Замечание 4.4. Если $n_\tau = 1$, то F_τ рассматривается как элемент (1×1)-матрицы $k + m_\tau \tau$.

Замечание 4.5. Для блочно-жёсткой почти вполне разложимой $X \in \mathcal{A}$ кольцевого типа с p-примарным циклическим фактором X/A регулятор $\mathcal{R}^+$ acd-группы $\operatorname{End}(X)^+$ изоморфен блочно-жёсткой группе матриц с τ-однородными компонентами

$$H(\tau) = \begin{pmatrix} m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\mathcal{R}^+ = \operatorname{Hom}(X, A)^+ \cong \bigoplus_{\tau \in T} H(\tau)$$

по следствию 3.10.

Легко видеть, что для любого $\tau \in T$ кольцо $E_\tau \subset M_{n_\tau}(\tau)$, определённое в формуле (43), имеет вид

$$E_\tau = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Это следует из того факта, что любое число $x \in \tau$ совпадает с $k + p^t s$, где $p^t = m_\tau \neq 1$, при определённых числах $k \in \mathbb{Z}$ и $s \in \tau$. Действительно, из $\tau(p) \neq \infty$ получаем, что дробь $x = \frac{z_1}{z}$, заданная в несократимом виде, удовлетворяет соотношению $\gcd(p, z) = 1$. Тогда для некоторых целых u и v выполнено $p^t u + zv = 1$, $z_1 p^t u + z_1 zv = z_1$, и $x = \frac{z_1}{z} = z_1 v + p^t \frac{z_1 u}{z}$ имеет требуемый вид, если положить $k = z_1 v$, $s = \frac{z_1 u}{z}$ (случай целого x включается при $z = 1$). При этом E_τ также имеет вид (54), если $m_\tau = 1$ или $\operatorname{rk} A_\tau = 1$, т. е. $E_\tau \cong \tau$.

Как и выше в (43), (44), отождествляя матричное кольцо $M_{n_\tau}(\tau)$ с $\mathcal{E}_\tau \cong \cong \operatorname{End} A_\tau$, мы рассматриваем E_τ в качестве подкольца колец $\mathcal{E}_\tau$ или $\operatorname{End} A_\tau$, а также $M_{n_\tau}(\tau)$. Мы не будем делать различия между $\mathcal{B}_\tau \in \operatorname{Aut} \mathcal{E}_\tau$ и соответствующим ему элементом из $\operatorname{Aut}\bigl(M_{n_\tau}(\tau)\bigr)$ в силу изоморфизма колец.

Для того чтобы применить следствие 3.18 к почти вполне разложимым группам с циклическим регуляторным фактором, нам требуется следующая лемма.

Лемма 4.6. *Пусть $X \in \mathcal{A}_O$ является блочно-жёсткой acd-группой кольцевого типа с p-примарным циклическим регуляторным фактором X/A. Предположим, что*

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_\tau)_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} \in \prod_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} K_\tau,$$

где

$$K_\tau = \{\beta \in \operatorname{Aut} \mathcal{E}_\tau : \beta|_{E_\tau} \in \operatorname{Aut} E_\tau\}$$

(см. (45)). *Тогда сужение $\mathcal{B}|_{E_\tau} = \mathcal{B}_\tau$ индуцирует внутренний автоморфизм кольца E_τ для любого $\tau \in T = T_{\mathrm{cr}}(A)$.*

Доказательство. Являясь элементами кольца

$$\mathcal{E} \subset \prod_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} \operatorname{End} A_\tau$$

отображения $\mathcal{F}_\tau$ записываются следующим образом: $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\tau)_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)}$, где $\mathcal{F}_\tau$ представлены матрицами $F_\tau \in E_\tau$, относящимися к разложениям (49) групп A_τ, $\tau \in T$. Фиксируем некоторое τ, удовлетворяющее $m_\tau \neq 1$, и из (54) получаем очевидную цепь

$$\begin{pmatrix} m_\tau\tau & m_\tau\tau & \dots & m_\tau\tau & m_\tau\tau \\ m_\tau\tau & m_\tau\tau & \dots & m_\tau\tau & m_\tau\tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & m_\tau\tau & \dots & m_\tau\tau & m_\tau\tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & m_\tau\tau & \dots & m_\tau\tau & m_\tau\tau \end{pmatrix} \subset E_\tau \subset \begin{pmatrix} \tau & \tau & \dots & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \dots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau & \tau & \dots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau & \tau & \dots & \tau & \tau \end{pmatrix},$$

которая означает, что E_τ^+ содержит вполне разложимую подгруппу $m_\tau M_{n_\tau}(\tau)$ p-примарного конечного индекса, являющуюся инвариантной по отношению ко всем $\mathcal{B}_\tau \in \operatorname{Aut}\bigl(M_{n_\tau}(\tau)\bigr)$. Поскольку все автоморфизмы кольца $M_{n_\tau}(\tau)$ являются внутренними, $\mathcal{B}_\tau$ определяется на элементах $F_\tau \in E_\tau$ с помощью матрицы $B \in M_{n_\tau}(\tau)^\times$ следующим образом: $F_\tau \mathcal{B}_\tau = B^{-1} F_\tau B$.

Применяя лемму 3.6 к группе $\frac{E_\tau}{m_\tau} \cong E_\tau^+$, мы видим, что $\overline{E_\tau}\,\overline{\mathcal{B}_\tau} = \overline{E_\tau}$, т. е. $\overline{\mathcal{B}_\tau}|_{\overline{E_\tau}} \in \operatorname{Aut} \overline{E_\tau}$, где $\overline{E_\tau} \subset \overline{M_{n_\tau}(\tau)} = M_{n_\tau}(\tau)/m_\tau M_{n_\tau}(\tau)$. Для любого $F_\tau \in E_\tau$ имеем $\overline{F_\tau}\,\overline{\mathcal{B}_\tau} = \overline{B^{-1}}\,\overline{F_\tau}\bar{B}$ и $\overline{F_\tau} \in \overline{M_{n_\tau}(\tau)}$ относительно разложения

$$\overline{A_\tau} = A/m_\tau A = \langle \overline{a_1^\tau} \rangle \oplus \langle \overline{a_2^\tau} \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \overline{a_{n_\tau}^\tau} \rangle$$

(см. (49)).

Рассматриваемые матрицы содержат элементы из кольца $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/m_\tau\mathbb{Z}$, и матрица $\overline{B^{-1}} = \bar{B}^{-1}$ корректно определена, так как $\gcd(\det B, p) = 1$ при $\tau(p) \neq \infty$. Поскольку $(1_{ii}) \in \overline{E_\tau}$ — ортогональные идемпотенты с единицей

$$I = \sum_{i \leqslant n_\tau} (1_{ii}),$$

ввиду [21, предложение 7.2.3] имеем разложение

$$\overline{E_\tau} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbb{Z}} & \bar{\mathbb{Z}} & \ldots & \bar{\mathbb{Z}} & \bar{\mathbb{Z}} \\ \bar{0} & \bar{\mathbb{Z}} & \ldots & \bar{\mathbb{Z}} & \bar{\mathbb{Z}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{\mathbb{Z}} & \ldots & \bar{\mathbb{Z}} & \bar{\mathbb{Z}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{\mathbb{Z}} & \ldots & \bar{\mathbb{Z}} & \bar{\mathbb{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbb{Z}} & \bar{0} & \ldots & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \ldots & \bar{0} & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \ldots & \bar{0} & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \ldots & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{\mathbb{Z}} & \ldots & \bar{\mathbb{Z}} & \bar{\mathbb{Z}} \\ \bar{0} & \bar{\mathbb{Z}} & \ldots & \bar{\mathbb{Z}} & \bar{\mathbb{Z}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{\mathbb{Z}} & \ldots & \bar{\mathbb{Z}} & \bar{\mathbb{Z}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{\mathbb{Z}} & \ldots & \bar{\mathbb{Z}} & \bar{\mathbb{Z}} \end{pmatrix} \tag{55}$$

на левые идеалы кольца $\overline{E_\tau}$, имеющие вид

$$\overline{E_\tau}(1_{11}) = \overline{E_\tau}|_{\langle \overline{a_1^\tau} \rangle} \cong \operatorname{End} \langle \overline{a_1^\tau} \rangle$$

и

$$\overline{E_\tau}\big((1_{22}) + \ldots + (1_{n_\tau n_\tau})\big) = \overline{E_\tau}|_{\langle \overline{a_2^\tau} \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \overline{a_{n_\tau}{}^\tau} \rangle},$$

где

$$\overline{E_\tau}|_{\langle \overline{a_2^\tau} \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \overline{a_{n_\tau}{}^\tau} \rangle} \cong \bigoplus_{j>1} \operatorname{Hom}(\langle \overline{a_j^\tau} \rangle, \langle \overline{a_1^\tau} \rangle \oplus \langle \overline{a_2^\tau} \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \overline{a_{n_\tau}^\tau} \rangle). \tag{56}$$

Имеем

$$\overline{A_\tau} = \bar{\mathbb{Z}}(\overline{a_1^\tau}) \oplus \ldots \oplus \bar{\mathbb{Z}}(\overline{a_{n_\tau}^\tau}). \tag{57}$$

Тогда $\{\overline{a_1^\tau}, \ldots, \overline{a_{n_\tau}^\tau}\}$ — базис кольца $\overline{A_\tau}$, рассматриваемого как свободный модуль над $\bar{\mathbb{Z}}$. По отношению к базису (57) обозначим

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{\overline{\mathcal{F}_\tau} \colon \overline{\mathcal{F}_\tau} \text{ представляется с помощью } \overline{F_\tau} \in \overline{E_\tau}\}.$$

Это позволяет рассматривать столбец j матрицы $\overline{F_\tau} \in \overline{E_\tau}$ как образ $\overline{a_j^\tau}$ при отображении $\overline{\mathcal{F}_\tau}$. Более того, матрица $\overline{B^{-1}}\,\overline{F_\tau}\,\bar{B}$ представляет то же линейное отображение $\overline{\mathcal{F}_\tau}$ относительно другого базиса

$$\overline{A_\tau} = \bar{\mathbb{Z}}(\overline{a'^\tau_1}) \oplus \ldots \oplus \bar{\mathbb{Z}}(\overline{a'^\tau_{n_\tau}}),$$

состоящего из элементов $\overline{a'^\tau_j}$, ассоциированных с соответствующими столбцами матрицы $\bar{B}$ — матрицы преобразования базиса.

Мы утверждаем, что если образы элемента $\bar{a} \in \overline{A_\tau}$ порядка m_τ под действием всех отображений $\overline{\mathcal{F}_\tau} \in \tilde{\mathcal{F}}$ принадлежат его циклической оболочке $\langle \bar{a} \rangle$, то элемент $\bar{a}$ обязательно содержится в $\langle \overline{a_1^\tau} \rangle$. Действительно, из (56) получаем, что если $\bar{a} \notin \langle \overline{a_1^\tau} \rangle$, то элементы $\{\bar{a}\overline{\mathcal{F}_\tau} \colon \overline{\mathcal{F}_\tau} \in \tilde{\mathcal{F}}\}$ порождают всю группу $\overline{A_\tau}$, а не её подгруппу ранга 1, если $n_\tau > 1$.

Отсюда следует, что все отображения $\overline{\mathcal{F}_\tau} \in \tilde{\mathcal{F}}$ имеют представление (55) по отношению к другой порождающей системе $\{\overline{a'^\tau_1}, \ldots, \overline{a'^\tau_{n_\tau}}\}$, только если она содержит $\bar{k}\overline{a_1^\tau}$ с $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/m_\tau\mathbb{Z})^\times$ в качестве своего первого элемента $\overline{a'^\tau_1}$. Тогда обратимая матрица $\overline{B} \in M_{n_\tau}(\bar{\mathbb{Z}})$ принадлежит кольцу $\overline{E_\tau}^\times$, потому что только такие линейные отображения переводят элемент $\overline{a_1^\tau}$ в $\overline{a'^\tau_1} \in \langle \overline{a_1^\tau} \rangle$. Так как алгебраические дополнения элементов $(\bar{B})_{1j}$ (при $j > 1$) равны нулю, то получаем также $\bar{B}^{-1} \in \overline{E_\tau}^\times$ (см. (55)).

Если для некоторого $\tau \in T$ ранг n_τ группы A_τ равен 1, т. е. $E_\tau \cong \tau$ как кольца, то $B, B^{-1} \in \tau^\times$ и $\mathcal{B}_\tau$ является тождественным отображением в этом частном случае.

Мы доказали, что если $m_\tau \neq 1$, то прообразы B, B^{-1} рассматриваемых матриц принадлежат кольцу E_τ, и отсюда следует, что это также очевидно при $m_\tau = 1$, когда $E_\tau = M_{n_\tau}(\tau)$ (см. (54)).

Доказательство завершено. □

Замечание 4.7. Из (54) следует, что $(B)_{11}(B^{-1})_{11} \equiv 1 \bmod m_\tau$.

Для любого $\tau \in T$ обозначим через $\operatorname{Aut_{inn}} E_\tau$ группу внутренних автоморфизмов кольца E_τ. Заметим, что если $m_\tau = 1$, то $E_\tau = M_{n_\tau}(\tau)$ согласно (54) и $\operatorname{Aut_{inn}} E_\tau$ совпадает с группой внутренних автоморфизмов кольца $M_{n_\tau}(\tau)$. В другом частном случае, при $n_\tau = 1$, группа $\operatorname{Aut_{inn}} E_\tau$ тривиальна.

Теперь мы готовы доказать основные результаты работы, касающиеся почти вполне разложимых групп с циклическими регуляторными факторами.

Теорема 4.8. *Пусть X — блочно-жёсткая почти вполне разложимая группа кольцевого типа с регулятором*

$$A \cong \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)} n_\tau \tau,$$

p-примарным циклическим регуляторным фактором X/A и $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$. Тогда

$$\operatorname{Aut} \mathcal{E} \cong \prod_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)} \operatorname{Aut_{inn}} E_\tau,$$

где $E_\tau \subset M_{n_\tau}(\tau)$,

$$E_\tau = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \ldots & \tau \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Следуя теореме 3.17, рассмотрим группу автоморфизмов кольца $\mathcal{E}$ как подгруппу прямого произведения внутренних автоморфизмов колец $\mathcal{E}_\tau$. Следствие 3.18 сводит наше рассмотрение к тем автоморфизмам, которые индуцируют автоморфизмы кольца $E_\tau \subset \mathcal{E}_\tau$. В лемме 4.6 было показано, что внутренние автоморфизмы кольца $\mathcal{E}_\tau$ индуцируют только внутренние автоморфизмы в E_τ.

Напомним, что любое отображение $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\tau)_{\tau\in T} \in \mathcal{E}$ представляется матрицей $F = (F_\tau)_{\tau\in T}$, и все F_τ, заданные формулой (51), характеризуются одним и тем же целым числом $k = k(F)$ для всех $\tau \in T$. Замечание 4.7 показывает, что внутренние автоморфизмы кольца E_τ сохраняют число k для всех $F_\tau \in E_\tau$. Тогда произвольное отображение

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_\tau)_{\tau\in T} \in \prod_{\tau\in T} \mathrm{Aut}_{\mathrm{inn}}\, E_\tau$$

переводит $\mathcal{F}$ в $\mathcal{E}$, так как действие покомпонентно, $\mathcal{F}\mathcal{B} = (\mathcal{F}_\tau\mathcal{B}_\tau)_{\tau\in T}$. Поскольку $\mathcal{B}$ обратимо очевидным образом, доказательство завершено. □

Теперь мы покажем, что предыдущая теорема остаётся верной для почти вполне разложимых групп с циклическими, но не обязательно примарными регуляторными факторами. Это ограничение было сделано для того, чтобы доказать лемму 3.16 и теорему 3.17. Однако для почти вполне разложимых групп X с циклическими регуляторными факторами они выполняются и в общем случае, потому что возникшие матричные кольца имеют один и тот же вид при любом показателе $\exp X/R(X)$. Значит, результаты этого раздела оказываются верными для всех почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором с полным сохранением их формулировок.

Теорема 4.9. *Пусть X — блочно-жёсткая почти вполне разложимая группа кольцевого типа с регулятором*

$$A \cong \bigoplus_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(X)} n_\tau \tau,$$

циклическим регуляторным фактором X/A, инвариантами $m_\tau = m_\tau(X)$ и кольцом эндоморфизмов $\mathcal{E} = \mathrm{End}\, X$. Тогда $\mathcal{E} = \langle \mathrm{Hom}(X, A), I\rangle$ и

$$\mathrm{Aut}\,\mathcal{E} \cong \prod_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(X)} \mathrm{Aut}_{\mathrm{inn}}\, E_\tau,$$

где

$$E_\tau = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \dots & \tau \\ m_\tau\tau & \tau & \dots & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & \tau & \dots & \tau \end{pmatrix} \subset M_{n_\tau}(\tau).$$

Доказательство. Обозначим через P множество простых чисел, делящих $e = \exp X/A$. Тогда в примарно-факторном представлении

$$X = \sum_{p \in P} X_{(p)}$$

почти вполне разложимые группы $X_{(p)} \in \mathcal{A}$ имеют циклический регуляторный фактор, т. е. $X_{(p)}/A$ является p-примарной циклической группой.

Введём обозначения $\mathcal{E}_p = \operatorname{End} X_{(p)}$, $m_\tau^p = m_\tau(X_{(p)})$ и $m_\tau = m_\tau(X)$. Имеем

$$\mathcal{E} = \bigcap_{p \in P} \mathcal{E}_p$$

и из существования главного разложения для X получаем, что $\mathcal{E}$ представляется матричным кольцом E, заданным в (51) с помощью

$$m_\tau = \prod_{p \in P} m_\tau^p.$$

Кроме того, замечание 4.5 даёт нам матричное представление регулятора $\mathcal{R}^+ = \operatorname{Hom}(X, A)^+$ кольца $\mathcal{E}^+$, имеющее тот же вид, что и для групп с примарным регуляторным индексом. Из данных матричных представлений сразу видно, что кольцо $\mathcal{E}$ аддитивно порождается следующим образом:

$$\mathcal{E} = \langle \operatorname{Hom}(X, A), I \rangle, \tag{58}$$

где I — тождественное отображение на X.

Проанализируем предшествующие доказательства и обоснуем их применимость не только в случае crq-групп с примарным фактором, но и в рассматриваемом здесь общем случае.

Лемма 3.16 выполняется, так как её доказательство было основано на исследовании p-высоты в $\mathcal{E}_\tau$ элементов из R^+ и та же процедура может быть применена для всех $p \in P$. Это приводит нас к теореме 3.17, показывающей, что любой автоморфизм $\mathcal{B}$ кольца $\mathcal{E}$ продолжается до автоморфизма кольца $\mathcal{E}_A$. Доказательство следствия 3.18 также может быть повторено слово в слово, потому что оно основано только на теореме 3.17. Наконец, мы можем взять доказательства леммы 4.6 и теоремы 4.8 без изменений, потому что они также не имеют ссылок на число $\exp X/A$.

Это убеждает в справедливости утверждения теоремы. □

Из теоремы 4.9 получаем следствие.

Следствие 4.10. *Пусть X, Y — блочно-жёсткие crq-группы кольцевого типа. Если $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, то кольца $\operatorname{End}(X)$ и $\operatorname{End}(Y)$ изоморфны и как аддитивные группы они являются crq-группами.*

Замечание 4.11. Напомним, что $K_\tau = \{\beta \in \operatorname{Aut} \mathcal{E}_\tau \colon \beta|_{E_\tau} \in \operatorname{Aut} E_\tau\}$. Так как $\operatorname{Aut} \mathcal{E}_\tau$ состоит из внутренних автоморфизмов кольца $\mathcal{E}_\tau$, мы нашли такой класс блочно-жёстких почти вполне разложимых групп, что группа $\operatorname{Aut} \mathcal{E}$

в точности совпадает с группой

$$\prod_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A)} K_\tau,$$

а не просто является её подгруппой (сравните со следствием 3.18).

Известно, что группа внутренних автоморфизмов кольца K изоморфна группе $K^\times/C$, где C — центр кольца K. Из [20, гл. 2, (4)] получаем, что центр полного матричного кольца $M_{n_\tau}(\mathbb{Q})$ совпадает с группой $\mathbb{Q}I$ (I — единичная матрица). Тогда очевидно, что подкольцо $M_{n_\tau}(\tau)$ содержит $\tau^\times I$ в качестве своего центра, где $\tau^\times$ — это группа обратимых элементов кольца τ. То же самое верно и для кольца E_τ, так как $m_\tau M_{n_\tau}(\tau)\subset E_\tau\subset M_{n_\tau}(\tau)$.

Таким образом, мы можем вывести, что для блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X с циклическим регуляторным фактором, рассматриваемой в теоремах 4.9, 4.8, выполнено следующее:

$$\operatorname{Aut}\mathcal{E}\cong\prod_{\tau\in T} E_\tau^\times/\tau^\times I, \tag{59}$$

где $E_\tau^\times$ — мультипликативная группа обратимых элементов кольца E_τ (см. (54)).

Для любого множества $\mathcal{P}$ простых чисел $\mathcal{P}$-числом называется целое число, все простые делители которого принадлежат множеству $\mathcal{P}$ (см. [110, обозначение 6.1]). Мы будем использовать $\mathcal{P}(\tau)$-числа, где

$$\mathcal{P}(\tau)=\{q\colon \tau(q)=\infty\}. \tag{60}$$

Если $\tau\in T$, то $\tau(p)\neq\infty$ при $p\mid m_\tau(X)$, что следует из (48), отсюда получаем, что $\gcd(q,m_\tau)=1$ для каждого $q\in\mathcal{P}(\tau)$, и мы можем определить группу

$$\overline{\mathcal{P}(\tau)}=\{\bar r\in(\mathbb{Z}/m_\tau\mathbb{Z})^\times\colon r\in\mathbb{Z}\text{ является }\mathcal{P}(\tau)\text{-числом}\}. \tag{61}$$

Пусть $\frac{k}{l}$, $l>0$, — несократимая дробь с $\mathcal{P}(\tau)$-числами k, l, и пусть $\bar k$, $\bar l$ — их образы в $(\mathbb{Z}/m_\tau\mathbb{Z})^\times$, $\tau\in T$. Мы видим, что

$$\overline{\mathcal{P}(\tau)}=\{\bar k\,\bar l^{-1}\in(\mathbb{Z}/m_\tau\mathbb{Z})^\times\colon k,l\in\mathbb{Z}\text{ являются }\mathcal{P}(\tau)\text{-числами}\}, \tag{62}$$

и эта группа совпадает с естественным образом группы $\tau^\times$ в $(\mathbb{Z}/m_\tau\mathbb{Z})^\times$.

Приведём непосредственное следствие из теоремы 4.9 и формулы (59). При дополнительном ограничении на $T=T_{\mathrm{cr}}(X)$ оно даёт явное матричное представление группы $\operatorname{Aut}\mathcal{E}$.

Следствие 4.12. *Пусть X — блочно-жёсткая почти вполне разложимая группа кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Если $\overline{\mathcal{P}(\tau)}=(\mathbb{Z}/m_\tau\mathbb{Z})^\times$ для любого $\tau\in T_{\mathrm{cr}}(X)$, то группа автоморфизмов кольца $\mathcal{E}=\operatorname{End}X$ допускает следующее матричное представление*:

$$\operatorname{Aut}\mathcal{E}\cong\prod_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(X)}\begin{pmatrix}1+m_\tau\tau & \tau & \dots & \tau\\ m_\tau\tau & \tau & \dots & \tau\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ m_\tau\tau & \tau & \dots & \tau\end{pmatrix}^{\times}.$$

Замечание 4.13. Все рассматриваемые acd-группы принадлежат классу $\mathcal{A}$, т. е. имеют регулятор

$$A \cong \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)} n_\tau \tau.$$

Предполагается, что матрицы с элементами из соответствующих колец τ, задействованные в формулировках теорем 4.8, 4.9 и следствия 4.12, имеют размерность $n_\tau = \mathrm{rk}\, A_\tau$. Если $n_\tau = 1$, то это (1×1)-матрицы.

Полученные матричные представления допускают случай $m_\tau = 1$.

4.3. Проблема Бэра—Капланского для блочно-жёстких почти вполне разложимых абелевых групп с циклическим регуляторным фактором

Одна из принятых форм *теоремы Бэра—Капланского для класса модулей* $\mathcal{M}$ — это следующее утверждение, называемое *теоремой изоморфизма*: если $M, N \in \mathcal{M}$ удовлетворяют условию $\mathrm{End}(M) \cong \mathrm{End}(N)$, то $M \cong N$.

Мы покажем, что класс $\mathcal{A}_O$ удовлетворяет теореме Бэра—Капланского в более слабой формулировке, которую мы будем называть *теоремой почти изоморфизма*, а именно: *для групп X и Y из класса $\mathcal{A}_O$ (рассматриваемых как $\mathbb{Z}$-модули) верно, что из $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$ следует $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$.* Обратное утверждение о том, что почти изоморфные группы X и Y класса $\mathcal{A}_O$ имеют изоморфные кольца эндоморфизмов, доказано ранее (см. теорема 4.2 и следствие 4.10).

Известна также строгая форма теоремы Бэра—Капланского, которая выполняется, например, для класса абелевых p-групп и утверждает, что для каждого кольцевого изоморфизма $\Theta\colon \mathrm{End}(M) \to \mathrm{End}(N)$ существует изоморфизм групп $\phi\colon M \to N$, такой что для всех $f \in \mathrm{End}(M)$ верно равенство $f\Theta = \phi^{-1} f \phi$.

Для определяемости блочно-жёстких почти вполне разложимых абелевых групп X и Y с циклическими регуляторными факторами их кольцами эндоморфизмов с точностью до почти изоморфизма аналогичная теорема должна была бы утверждать, что для каждого кольцевого изоморфизма $\Theta\colon \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(Y)$ существует такой изоморфизм $\phi\colon X \to Y$, что для любого $f \in \mathrm{End}(X)$ выполняется равенство $f\Theta = \phi^{-1} f \phi$. Но доказанное в [55, теорема 3.7] наличие почти изоморфных, но не изоморфных групп этого класса исключает возможность существования подобной теоремы.

Нам понадобится предложение 2.12 в уточнённой формулировке для рассматриваемых групп.

Предложение 4.14. *Пусть X — блочно-жёсткая acd-группа кольцевого типа с регулятором*

$$A = \bigoplus_{\tau \in T} A_\tau,$$

регуляторным показателем e, множеством критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(X)$ и $n_\tau = \mathrm{rk}\, A_\tau$. Тогда

1) *имеют место включения* $e\,\mathrm{End}\,A \subseteq \mathrm{End}\,X \subseteq \mathrm{End}\,A$;
2) $(\mathrm{End}\,X)^+$ *является crq-группой с множеством критических типов* T *и регулятором* $R\big((\mathrm{End}\,X)^+\big) \cong (\mathrm{End}\,A)^+$, *при этом для всех* $\tau \in T$ *его* τ*-ранг равен* n_τ^2. □

4.4. Теорема почти изоморфизма для абелевых жёстких crq-групп кольцевого типа

Мы сейчас интересуемся почти вполне разложимыми блочно-жёсткими (жёсткими) группами кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Сначала рассмотрим жёсткую группу X с регулятором

$$R(X) = A = \bigoplus_{\tau \in T} A_\tau = \bigoplus_{\tau \in T} \tau a_\tau. \tag{63}$$

Заметим, что все подгруппы A_τ имеют ранг 1 и элемент $a_\tau \in A_\tau$ имеет p-высоту 0, если $p\tau \neq \tau$, и p-высоту ∞, если $p\tau = \tau$.

Мы воспользуемся так называемым *стандартным представлением* crq-группы $X = \langle A, b\rangle$, где b — элемент из делимой оболочки регулятора A и $eb = a$ для некоторого $a \in A$, $m_\tau = m_\tau(X)$. При специальном выборе элементов a_τ, используя [63, теорема 3.2, A.1], имеем

$$eb = \sum_{\tau \in T} \frac{e}{m_\tau} s_\tau a_\tau, \tag{64}$$

где e, m_τ, $s_\tau \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условиям

1) $e = \mathrm{lcm}_{\tau \in T}\, m_\tau$;
2) $\gcd(s_\tau, m_\tau) = 1$ для всех $\tau \in T$;
3) $\gcd(p, s_\tau) = 1$ и $\gcd(p, m_\tau) = 1$ для всех простых p со свойством $p\tau = \tau$.

Если мы вместо s_τ возьмём целые числа s'_τ, удовлетворяющие данным условиям, то мы получим группу X', почти изоморфную группе X (в частности, если $s_\tau \equiv s'_\tau \pmod{m_\tau}$ для всех $\tau \in T$, то X' совпадает с X). Из критерия почти изоморфизма (теорема 39) следует, что любая группа, которая почти изоморфна группе X, получается этим способом (с точностью до изоморфизма).

Фиксируем специальную группу $X_0 = \langle A,\, b\rangle$ из данного класса почти изоморфизма, которая определяется стандартным представлением (64), в котором все числа s_τ равны 1, т. е.

$$eb = \sum_{\tau \in T} \frac{e}{m_\tau} a_\tau. \tag{65}$$

Такую группу X_0 назовём *правильной crq-группой*. Мы покажем, что, если X — жёсткая acd-группа с циклическим регуляторным фактором и стандартным представлением (64), то $\mathrm{End}(X)^+$ — жёсткая acd-группа с циклическим регуляторным фактором, изоморфная группе X_0. Мы используем следующие результаты из [110].

Лемма 4.15 [110, предложение 3.3]. *Если X — почти вполне разложимая группа, то кольцо $\operatorname{End}(X)$ коммутативно тогда и только тогда, когда X — жёсткая группа.*

Лемма 4.16 [110, лемма 6.2]. *Пусть $X = \langle A, b\rangle$ — жёсткая acd-группа кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором, множеством критических типов T, регулятором A и регуляторным фактором C экспоненты e. Пусть $m_\tau = m_\tau(X)$, $\tau \in T$, — инварианты почти изоморфизма группы X. Тогда существует точная последовательность колец с естественными кольцевыми гомоморфизмами*

$$0 \rightarrowtail \operatorname{Hom}(X, A) \rightarrowtail \operatorname{End}(X) \twoheadrightarrow \operatorname{End}(C) \twoheadrightarrow 0$$

и выполнены следующие условия:

1) $\operatorname{Hom}(X, A)^+ \cong \operatorname{End}(A)^+ \cong A$;
2) $\operatorname{End}(X)^+$ *— жёсткая acd-группа с циклическим регуляторным фактором, множеством критических типов T и регулятором $R\big(\operatorname{End}(X)\big)^+ = \operatorname{Hom}(X, A)$*;
3) *справедливо*
$$\operatorname{End}(A) = \bigoplus_{\tau\in T} \tau I_\tau, \quad \operatorname{Hom}(X, A) = \bigoplus_{\tau\in T} m_\tau \tau I_\tau,$$
где I_τ обозначает тождественное отображение на A_τ;
4) $\operatorname{End}(X)$ *имеет стандартное представление* $\operatorname{End}(X) = \langle \operatorname{Hom}(X, A), I_X\rangle$, *где $I = I_X$ — тождественное отображение на X и $eI_X \colon X \to A$ — умножение на e*;
5) *естественное отображение* $\operatorname{End}(X) \to \operatorname{End}(C)$, *определённое как $f + kI_X \mapsto k \pmod e$ для всех $f \in \operatorname{Hom}(X, A)$ и $k \in \mathbb{Z}$, является эпиморфизмом.*

Доказательство. Все перечисленные факты, кроме свойства $R(\operatorname{End}(X)^+) = \operatorname{Hom}(X, A)$, содержатся в [110, лемма 6.2]. Свойство $R(\operatorname{End}(X)^+) = \operatorname{Hom}(X, A)$ получается по замечанию 4.5. □

Теперь мы можем доказать теорему, характеризующую кольца эндоморфизмов жёстких crq-групп.

Теорема 4.17. *Пусть $X = \langle A, b\rangle$ является жёсткой acd-группой кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Тогда $X \cong_{\mathrm{nr}} \operatorname{End}(X)^+$. Более того, существует в точности одна группа X_0 из класса почти изоморфизма группы X, такая что $X_0 \cong \operatorname{End}(X_0)^+ \cong \operatorname{End}(X)^+$.*

Доказательство. Из предложения 4.14 следует, что $\operatorname{End}(X)^+$ — жёсткая crq-группа, имеющая то же множество критических типов T, что и X. Следовательно, используя [109, теорема 12.6.5], мы заключаем, что $X \cong_{\mathrm{nr}} \operatorname{End}(X)^+$. Повторив рассуждение с заменой X на X_0, мы получаем, что

$$X_0 \cong_{\mathrm{nr}} \operatorname{End}(X_0)^+ \cong \operatorname{End}(X)^+.$$

Докажем изоморфизм $X_0 \cong \mathrm{End}(X)^+$. Для этого построим изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(X, A) = \bigoplus_{\tau \in T} m_\tau \tau I_\tau \to A = \bigoplus_{\tau \in T} \tau a_\tau$$

регуляторов этих групп, тривиально определённый для всех $\tau \in T$, т. е. $m_\tau \tau I_\tau \to \tau a_\tau$. Мы видим, что

$$eI = \sum_{\tau \in T} \frac{e}{m_\tau} m_\tau \tau I_\tau \to \sum_{\tau \in T} \frac{e}{m_\tau} a_\tau = eb,$$

где

$$I = \sum_{\tau \in T} I_\tau,$$

и значит, это отображение продолжается до изоморфизма $\mathrm{End}(X) \to X_0$, при котором образом тождественного отображения I является b (см. (65)). Теорема доказана. □

Таким образом, кольцо эндоморфизмов жёсткой crq-группы X изоморфно правильной группе X_0 из класса почти изоморфизма группы X, и следовательно, $\mathrm{End}(X)^+$ — правильная crq-группа.

Среди колец эндоморфизмов рассматриваемых групп будут встречаться так называемые E-кольца. Кольцо L называется *E-кольцом*, если его левое регулярное представление является изоморфизмом, т. е. каждый эндоморфизм группы L^+ совпадает с умножением слева кольца L на некоторый элемент из L (см. [28, гл. 1, раздел 3]).

В [117, следствие 3] было показано, что кольцо R с единицей является E-кольцом тогда и только тогда, когда $E(R^+)$ коммутативно.

Следствие 4.18.

1. *Если X и Y — жёсткие почти изоморфные crq-группы кольцевого типа, то $\mathrm{End}(X)^+$ и $\mathrm{End}(Y)^+$ являются изоморфными crq-группами из того же класса почти изоморфизма, что и группы X и Y.*
2. *Если X является жёсткой crq-группой кольцевого типа, то $\mathrm{End}(X)$ является E-кольцом.*

Доказательство. 1. Для группы X_0 из того же класса почти изоморфизма, что и X, определённой в (65), верно, что $\mathrm{End}(X)^+ \cong X_0 \cong \mathrm{End}(Y)^+$.

2. Из леммы 4.15 следует, что $\mathrm{End}(X_0)^+ \cong X_0$ имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов. Следовательно, $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(X_0)$ является E-кольцом. □

Мы завершаем рассмотрение проблемы Бэра—Капланского для жёстких crq-групп кольцевого типа. На самом деле мы получаем несколько более сильный результат:

Теорема 4.19. *Пусть X — жёсткая crq-группа кольцевого типа и Y — любая crq-группа кольцевого типа. Тогда Y почти изоморфна группе X, если и только если $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$. По лемме 4.15 кольцо $\mathrm{End}(Y)$ коммутативно, и значит, Y — жёсткая группа. Из теоремы 4.17 мы немедленно получаем, что $Y \cong_{\mathrm{nr}} \mathrm{End}(Y)^+$ и $X \cong_{\mathrm{nr}} \mathrm{End}(X)^+$. Следовательно, $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$.

Обратно, предположим, что $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$. По теореме 4.17 существует группа X_0, почти изоморфная как X, так и Y, для которой $X_0 \cong \mathrm{End}(Z)^+$ для любой группы Z из класса почти изоморфизма группы X_0. В частности, существует изоморфизм групп $\mathrm{End}(X)^+$ и $\mathrm{End}(Y)^+$. Покажем, что $\mathrm{End}(X)$ и $\mathrm{End}(Y)$ изоморфны как кольца. Обозначим $R = \mathrm{End}(X)$ и $R' = \mathrm{End}(Y)$ и воспользуемся тем, что R и R' — E-кольца по пункту 2 следствия 4.18. Поэтому $R \cong \mathrm{End}(R^+)$ и $R' \cong \mathrm{End}(R'^+)$, и из изоморфизма $R^+ \cong R'^+$ следует, что $R \cong R'$, т. е. $\mathrm{End}(X)$ и $\mathrm{End}(Y)$ являются изоморфными кольцами. □

Покажем, что предположение в теореме 4.19 о том, что обе acd-группы X и Y имеют циклические регуляторные факторы, является необходимым. Для этого построим жёсткую acd-группу, регуляторный фактор которой не является циклическим, а кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу $\mathrm{End}(X)$, где X — некоторая acd-группа с циклическим регуляторным фактором.

Пример 4.20. Пусть $A = \sigma s \oplus \tau t \oplus \rho r$, где σ, τ и ρ — попарно несравнимые идемпотентные типы, которые не являются p-делимыми, и s, t, r — элементы группы A соответствующих типов, характеристики которых состоят только из нулей и единиц. Пусть $X = \langle A, a\rangle$ и $Y = \langle A, b, c\rangle$, где $pa = s + t + r$, $pb = s + t$ и $pc = t + r$.

Тогда обе группы X и Y имеют регулятор A, X является crq-группой $X/A \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, при этом Y, очевидно, не изоморфна группе X, так как $Y/A \cong \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Мономорфизм $\phi \in \mathrm{End}(A)$ является эндоморфизмом crq-группы X тогда и только тогда, когда $(pa)\phi$ делится на p в X (см. [109, лемма 15.3.4]). Отсюда получаем, что $(pa)\phi = p(ka + x)$ и

$$(s + t + r)\phi = (pa)\phi = ks + kt + kr + px$$

для некоторых $k \in \mathbb{Z}$ и $x \in A$.

Пусть $B = \langle s\sigma + t\tau, b\rangle$ и $C = \langle t\tau + r\rho, c\rangle$. Тогда B и C — жёсткие crq-группы, являющиеся вполне характеристическими подгруппами в Y. Поэтому для них тоже выполнено, что любое отображение $\psi \in \mathrm{End}(Y)$ действует на них следующим образом: $pb\psi = p\big(lb+(y_1s+y_2t)\big)$ и $pc\psi = p\big(mc+(z_2t+y_3r)\big)$ для некоторых $l, m \in \mathbb{Z}$ и $y_1 \in \sigma$, $y_2, z_2 \in \tau$, $y_3 \in \rho$. Таким образом, $t\psi = lt + py_2t = mt + pz_2t$, т. е. $l \equiv m \pmod{p\tau}$, что может быть записано в виде $m = l + p\alpha$, где число $\alpha \in \tau$ является целым, так как $l, m \in \mathbb{Z}$.

Положив $k = l$, мы можем считать, что

$$(s + t + r)\psi = ks + kt + kr + px,$$

где $x = y_1s + y_2t + (\alpha + y_3)r \in A$. Это означает, что $\mathrm{End}(Y) \subset \mathrm{End}(X)$. Обратное включение очевидно. Следовательно, $\mathrm{End}(Y) \cong \mathrm{End}(X)$.

4.5. Теорема почти изоморфизма для абелевых блочно-жёстких crq-групп кольцевого типа

Для распространения теоремы Бэра—Капланского на блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы с циклическим регуляторным фактором будут использоваться результаты из [95], сформулированные там для модулей над кольцами с единицей, порождёнными неразложимыми прямыми слагаемыми и обладающих так называемым свойством *конечного вложения*. Это означает, что для некоторого разложения

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

модуля M в прямую сумму неразложимых модулей каждое неразложимое слагаемое модуля M содержится в прямой сумме конечного числа M_i. Очевидно, что абелевы группы конечного ранга без кручения, рассматриваемые как модули над кольцом $\mathbb{Z}$, обладают этим свойством.

Рассмотрим crq-группы из класса $\mathcal{A}_O$ как $\mathbb{Z}$-модули и переформулируем результаты [95] для этого класса.

Определение 4.21 [95, с. 108]. Пусть $X, Y \in \mathcal{A}_O$. Кольцевой изоморфизм $\Phi\colon \operatorname{End}(X) \to \operatorname{End}(Y)$ называется *IP-изоморфизмом*, если для любого примитивного идемпотента $e \in \operatorname{End}(X)$ верно, что $Y(e\Phi) \cong Xe$.

Предложение 4.22 [95, предложение 1]. *Пусть $X, Y \in \mathcal{A}_O$. Тогда $X \cong Y$ в том и только в том случае, когда существует IP-изоморфизм $\operatorname{End}(X) \to \operatorname{End}(Y)$.*

Нам также понадобится следующая лемма.

Лемма 4.23 [86, т. 2, гл. XV, с. 257]. *Пусть $A = B \oplus C$ и A' — абелевы группы, и пусть $\Phi\colon \operatorname{End}(A) \to \operatorname{End}(A')$ — изоморфизм между их кольцами эндоморфизмов. Тогда существует разложение $A' = B' \oplus C'$, такое что Φ индуцирует изоморфизмы $\operatorname{End}(B) \to \operatorname{End}(B')$ и $\operatorname{End}(C) \to \operatorname{End}(C')$.*

Чтобы рассмотреть проблему Бэра—Капланского с точностью до почти изоморфизма для блочно-жёстких crq-групп, мы несколько модифицируем определение 4.21 и предложение 4.22.

Определение 4.24. Пусть $X, Y \in \mathcal{A}_O$. Кольцевой изоморфизм

$$\Phi\colon \operatorname{End}(X) \to \operatorname{End}(Y)$$

называется *почти IP-изоморфизмом*, если для любого примитивного идемпотента $e \in \operatorname{End}(X)$ верно, что $Y(e\Phi) \cong_{\mathrm{nr}} Xe$.

Предложение 4.25. *Пусть $X, Y \in \mathcal{A}_O$. Тогда $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$ в том и только в том случае, когда существует почти IP-изоморфизм $\operatorname{End}(X) \to \operatorname{End}(Y)$.*

Доказательство может быть взято из [95, предложение 1], если везде заменить слово «изоморфизм» на «почти изоморфизм» и учесть, что если $X_i \cong_{\mathrm{nr}} Y_i$

для всех $i \leqslant s$, то

$$\bigoplus_{i \leqslant s} X_i \cong_{\mathrm{nr}} \bigoplus_{i \leqslant s} Y_i.$$

Теперь мы готовы доказать основную теорему определяемости абелевых блочно-жёстких почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором их кольцами эндоморфизмов с точностью до почти изоморфизма.

Теорема 4.26. *Пусть X и Y — блочно-жёсткие crq-группы кольцевого типа. Если $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$, то $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$.*

Доказательство. Вначале мы покажем, что если $\Phi\colon \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(Y)$ — изоморфизм, то он является почти IP-изоморфизмом. Пусть $\sigma \in \mathrm{End}(X)$ — примитивный идемпотент, т. е. $X = X\sigma \oplus X(I - \sigma)$. Обозначим $X_1 = X\sigma$.

Из леммы 4.23 следует, что существует соответствующее разложение $Y = Y_1 \oplus Y_2$, для которого $\mathrm{End}(Y_1) \cong \mathrm{End}(X_1)\Phi$ и $\sigma\Phi$ — примитивный идемпотент в $\mathrm{End}(Y)$, отображающий Y на Y_1.

Поскольку слагаемое X_1 неразложимо, то в соответствии с [63, теоремы 3.3, 3.7] X_1 является либо жёсткой группой с циклическим регуляторным фактором, либо группой ранга 1; в обоих случаях $\mathrm{End}(X_1) \cong_{\mathrm{nr}} X_1$ по теореме 4.17.

Поскольку $\mathrm{End}(Y_1) \cong \mathrm{End}(X_1)$, из теоремы 4.19 следует, что Y_1 и X_1 почти изоморфны (или даже изоморфны в случае $\mathrm{rk}\, X_1 = 1$). Таким образом, Φ является почти IP-изоморфизмом.

Применяя предложение 4.25, мы получаем $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, что и требовалось. □

Следствие 4.27. *Класс $\mathcal{A}_O$ блочно-жёстких почти вполне разложимых групп кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором удовлетворяет теореме Бэра—Капланского с точностью до почти изоморфизма.*

Из теоремы 4.26 и следствия 4.10 получается следующая теорема.

Теорема 4.28. *Пусть $X, Y \in \mathcal{A}_O$. Тогда $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, если и только если кольца $\mathrm{End}\, X$ и $\mathrm{End}\, Y$ изоморфны.*

Существуют классы блочно-жёстких crq-групп, для которых почти изоморфизм влечёт изоморфизм (см. [55, следствие 3.8]). Для них верна теорема Бэра—Капланского в обычной форме (с точностью до изоморфизма).

Теорема 4.29. *Пусть $X, Y \in \mathcal{A}_O$ и $\mathrm{rk}\, X(\tau) > 1$ при всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)$, удовлетворяющих условию $m_\tau(X) > 1$. Тогда $X \cong Y$, если и только если кольца $\mathrm{End}\, X$ и $\mathrm{End}\, Y$ изоморфны.*

Доказательство очевидно (см. теорему 4.28 и [55, следствие 3.8].

Поскольку автоморфизмы кольца $\mathrm{End}(X)$ для блочно-жёстких acd-групп кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором не исчерпываются внутренними автоморфизмами, как было показано в теореме 4.9, нет смысла даже ставить вопрос о какой-либо версии теоремы Бэра—Капланского в строгой форме для таких групп.

5. Связи между почти вполне разложимыми абелевыми группами и их кольцами эндоморфизмов

5.1. Кольца эндоморфизмов почти изоморфных абелевых acd-групп

Распространим теорему 3.3, доказанную для почти вполне разложимых групп с примарным регуляторным фактором, на случай acd-групп из класса $\mathcal{A}$ с произвольными регуляторными факторами. Класс $\mathcal{A}$ определяется некоторой вполне разложимой группой A, являющейся регулятором всех рассматриваемых групп.

Пусть группы X, X' из класса $\mathcal{A}$ почти изоморфны. Напомним, что для рассматриваемых групп существуют примарно-факторные представления:

$$X = \sum_{p \in P} X_{(p)}, \quad X' = \sum_{p \in P} X'_{(p)},$$

при этом

$$\operatorname{End}(X) = \bigcap_{p \in P} \operatorname{End}\bigl(X_{(p)}\bigr), \quad \operatorname{End}(X') = \bigcap_{p \in P} \operatorname{End}\bigl(X'_{(p)}\bigr) \tag{66}$$

(см. (5)).

Теорема 5.1. *Пусть X и X' — почти изоморфные почти вполне разложимые абелевы группы кольцевого типа с одним и тем же регулятором A. Пусть $e = \exp X/A = \exp X'/A$ и $\tau(p) \neq \infty$ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$ и всех простых $p \mid e$. Тогда $\operatorname{End}(X)^+$ и $\operatorname{End}(X')^+$ почти изоморфны как абелевы группы конечного ранга без кручения.*

Доказательство. По условию X и X' принадлежат классу $\mathcal{A}$, и наши обозначения согласованы с теоремой 3.3 и её доказательством. Пусть

$$X = \sum_{p \in P} X_{(p)}, \quad X' = \sum_{p \in P} X'_{(p)} -$$

примарно-факторные представления (4) с изоморфными p-примарными группами $X_{(p)}/A$ и $X'_{(p)}/A$, для которых $e_p = \exp X_{(p)}/A = \exp X'_{(p)}/A$ (см. теорему 2.9). По определению 2.8 существует $\rho \in \operatorname{TypAut} \bar{A}$, для которого $\overline{eX}\rho = \overline{eX'}$ в $\bar{A} = A/eA$. Ясно, что $\overline{eX_{(p)}}\rho = \overline{eX'_{(p)}}$ по замечанию 2.11 и можно применить теорему 3.3 к фиксированной паре $X_{(p)} \cong_{\mathrm{tp}} X'_{(p)}$. Мы строим $\mathcal{F} \in \operatorname{Mon}(D_M, D_M)$ как и выше (см. (18)). Напомним, что по предложению 2.12 $e \operatorname{End}(A) \subseteq \operatorname{End}\bigl(X_{(p)}\bigr) \subseteq \operatorname{End}(A)$, а также $e_p \operatorname{End}(A) \subseteq \operatorname{End}\bigl(X_{(p)}\bigr) \subseteq \operatorname{End}(A)$ для каждого p и то же верно для $\operatorname{End}\bigl(X'_{(p)}\bigr)$.

Пусть

$$E_p \cong \operatorname{End}\bigl(X_{(p)}\bigr), \quad E'_p \cong \operatorname{End}\bigl(X'_{(p)}\bigr) - \tag{67}$$

матричные кольца, вложенные в $M \cong \mathrm{End}(A)$. Как в доказательстве теоремы 3.3, рассмотрим $\bar{M} = M/eM$ и $\bar{\mathcal{F}} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{M}$, который отображает $\overline{E'_p}$ на $\overline{E_p}$, а именно

$$\overline{E_p} = \overline{E'_p}\,\bar{\mathcal{F}} = \overline{F'}\,\overline{E'_p}\,\bar{F} = \bar{F}^{-1}\,\overline{E'_p}\,\bar{F} \quad \text{для каждого } p. \tag{68}$$

Вернёмся к группам X и X' и их кольцам эндоморфизмов. Из (66) мы видим, что

$$\mathrm{End}(X) = \bigcap_{p\in P} \mathrm{End}\big(X_{(p)}\big), \quad \mathrm{End}(X') = \bigcap_{p\in P} \mathrm{End}\big(X'_{(p)}\big)$$

и что как кольца эндоморфизмов acd-групп они удовлетворяют условиям

$$e\,\mathrm{End}(A) \subseteq \mathrm{End}(X) \subseteq \mathrm{End}(A), \quad e\,\mathrm{End}(A) \subseteq \mathrm{End}(X') \subseteq \mathrm{End}(A), \tag{69}$$

так как $eX, eX' \subset A$ (см. предложение 2.12).

Предположим сначала, что $|P| = 2$ и $P = \{p_1, p_2\}$ состоит из двух разных простых чисел. Тогда $e = \exp X/A = e_1 e_2$, где $e_i = \exp X_{(p_i)}/A$ — некоторая степень p_i, $i = 1, 2$. Поскольку $X_{(p_i)} \cong_{\mathrm{tp}} X'_{(p_i)}$ для каждого i, числа e, e_1, e_2 являются соответственно показателями групп X'/A, $X'_{(p_1)}/A$, $X'_{(p_2)}/A$ по теореме 2.9.

Обратимся к матричному представлению $M \cong \mathrm{End}(A)$ и определим матричные кольца $E_i \cong \mathrm{End}\big(X_{(p_i)}\big)$ и $E'_i \cong \mathrm{End}\big(X'_{(p_i)}\big)$, $i = 1, 2$. Так как числа p_1, p_2 взаимно просты и e_1, e_2 также взаимно просты, мы получаем, что $M^+ = e_1 M^+ + e_2 M^+$. Из этого непосредственно следует, что

$$E_1 + E_2 = M, \quad E'_1 + E'_2 = M$$

и

$$\overline{E_1} + \overline{E_2} = \bar{M}, \quad \overline{E'_1} + \overline{E'_2} = \bar{M}, \tag{70}$$

потому что

$$e_1 M \subset E_1, E'_1 \subset M, \quad e_2 M \subset E_2, E'_2 \subset M.$$

Это влечёт одни и те же включения для четырёх колец

$$e_1 e_2 M \subset E_1, E'_1, E_2, E'_2 \subset M$$

и следующие равенства в $\bar{M} = M/e_1 e_2 M = M/eM$:

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}, \quad \overline{E'_1 \cap E'_2} = \overline{E'_1} \cap \overline{E'_2}.$$

Так как автоморфизм $\bar{\mathcal{F}}$ группы $\bar{M}$ влечёт изоморфизм из $\overline{E'_i}$ на $\overline{E_i}$, $i = 1, 2$ (см. (68)), мы немедленно получаем, что

$$\bar{\mathcal{F}}\colon \overline{E'_1} \cap \overline{E'_2} \to \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \text{ — изоморфизм (колец).} \tag{71}$$

Пусть $E_* \cong \mathrm{End}(X)$ и $E'_* \cong \mathrm{End}(X')$ — матричные подкольца в M. Тогда $E_* = E_1 \cap E_2$ и $E'_* = E'_1 \cap E'_2$ по (66). Мы доказали следующее:

$$\overline{E'_*}\,\bar{\mathcal{F}} = \overline{E_*}. \tag{72}$$

Теперь мы сосредоточимся на кольцах, которые являются acd-группами по сложению. Как и выше (в доказательстве теоремы 3.3), по предложению 2.7 мы заключаем, что $\mathcal{F} \in \mathrm{Mon}(M, M)$ индуцирует инъективное отображение из E'_* в E_* и $[E_* : E'_*\mathcal{F}] = [M : M\mathcal{F}]$ взаимно просто с p_1p_2. Из (69) получаем включения $eM \subset E_* \subset M$, $eM \subset E'_* \subset M$, при этом вложение $E'_* \cong eE'_* \subset eM \subset E_*$ удовлетворяет условию определения 2.6 для любого простого $q \neq p_1, p_2$. Следовательно, ${E'_*}^+$ и ${E_*}^+$ почти изоморфны.

Тривиальная индукция по $|P|$, основанная на том, что

$$\gcd\biggl(\prod_{p\in P,\ p\neq q} p, q\biggr) = 1,$$

если $q \in P$, и начинающаяся с $|P| = 2$, завершает доказательство для $E_* \cong \mathrm{End}(X)$ и $E'_* \cong \mathrm{End}(X')$ в общем случае.

Утверждение доказано. □

Следствие 5.2. *Пусть X и X' — почти изоморфные почти вполне разложимые группы кольцевого типа с одним и тем же регулятором A. Пусть $e = \exp X/A = \exp X'/A$ и $\tau(p) \neq \infty$ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$ и простых p, $p \mid e$. Тогда $\mathrm{End}(X)^+$ и $\mathrm{End}(X')^+$ слабо изоморфны как абелевы группы относительно вполне разложимой подгруппы $e\,\mathrm{End}(A)^+$ в $\mathrm{End}(X)^+$ и $\mathrm{End}(X')^+$. Более того, для колец $\mathcal{E} = \mathrm{End}(X)$, $\mathcal{E}' = \mathrm{End}(X')$, $E_A = \mathrm{End}(A)$ существует $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{TypAut}\,\overline{E_A}$, где $\overline{E_A} = E_A/eE_A$, для которого $\tilde{\mathcal{F}}\colon \overline{\mathcal{E}'} \to \bar{\mathcal{E}}$ — изоморфизм колец.*

5.2. Двойственные булевы алгебры

Теорема 5.1 была мотивирована весьма удивительным результатом — теоремой Бэра—Капланского для блочно жёстких crq-групп кольцевого типа (см. теоремы 4.19, 5.1 и [61, теоремы 3.4, 3.6, 4.6].

Теорема 5.3. *Пусть X и X' — блочно жёсткие crq-группы кольцевого типа. Тогда X и X' почти изоморфны, если и только если $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(X')$. Если X — жёсткая группа, то $\mathrm{End}(X)^+ \cong_{\mathrm{nr}} X$.*

Это означает, что если взять любые две пары почти изоморфных блочно-жёстких crq-групп с регулятором A, скажем $X_p \cong_{\mathrm{nr}} X'_p$ и $X_q \cong_{\mathrm{nr}} X'_q$, с примарными фактор-группами над A, связанными соответственно с простыми числами $p \neq q$, то по теореме 5.3 и (66) мы получаем следующее:

$$\mathrm{End}\,X_p \cong \mathrm{End}\,X'_p, \quad \mathrm{End}\,X_q \cong \mathrm{End}\,X'_q$$

и

$$\mathrm{End}\,X_p \cap \mathrm{End}\,X_q \cong \mathrm{End}\,X'_p \cap \mathrm{End}\,X'_q.$$

По сути, это происходит потому, что

$$\mathrm{End}\,X_p + \mathrm{End}\,X_q = \mathrm{End}\,X'_p + \mathrm{End}\,X'_q = \mathrm{End}(A)$$

и существует $\eta \in \operatorname{Aut}\bigl(\operatorname{End}(A)\bigr)$, отображающий $\operatorname{End} X_p$ на $\operatorname{End} X'_p$ и $\operatorname{End} X_q$ на $\operatorname{End} X'_q$.

В поисках подобных результатов для acd-групп, не ограничиваясь блочно-жёсткими crq-группами, мы нашли аналогичное объяснение на «более низком» уровне, а именно на уровне $\overline{\operatorname{End}(A)}$ (см. (70), (71), (72)). В предположениях теоремы 3.3 для любых пар acd-групп $X_p \cong_{\mathrm{nr}} X'_p$ и $X_q \cong_{\mathrm{nr}} X'_q$ с p- и q-примарными фактор-группами над A соответственно, для которых $p \neq q$, можно вывести следующее заключение:

$$\operatorname{End} {X_p}^+ \cong_{\mathrm{nr}} \operatorname{End} {X'_p}^+, \quad \operatorname{End} {X_q}^+ \cong_{\mathrm{nr}} \operatorname{End} {X'_q}^+$$

и

$$\operatorname{End} {X_p}^+ \cap \operatorname{End} {X_q}^+ \cong_{\mathrm{nr}} \operatorname{End} {X'_p}^+ \cap \operatorname{End} {X'_q}^+.$$

Чтобы установить двойственность между acd-группами и их кольцами эндоморфизмов, нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 5.4. *Пусть P — конечное множество простых чисел и для каждого $p \in P$ $X_p \in \mathcal{A}$ — группа, для которой X_p/A — p-примарная конечная группа, $\tau(p) \neq \infty$ при всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$ (см.* (3)*). Пусть P' и P'' — подмножества P и*

$$X(P') = \sum_{p \in P'} X_p, \quad X(P'') = \sum_{p \in P''} X_p.$$

Тогда

$$\operatorname{End}\bigl(X(P') \cap X(P'')\bigr) = \operatorname{End}\bigl(X(P')\bigr) + \operatorname{End}\bigl(X(P'')\bigr).$$

Доказательство. Пусть $Q' = P' \setminus P''$, $Q'' = P'' \setminus P'$, $Q = P' \cap P''$. По построению $X(P') \cap X(P'') = X(P' \cap P'') = X(Q)$. Из (66) мы видим, что

$$\operatorname{End}\bigl(X(P')\bigr) = \operatorname{End}\bigl(X(Q')\bigr) \cap \operatorname{End}\bigl(X(Q)\bigr), \tag{73}$$

$$\operatorname{End}\bigl(X(P'')\bigr) = \operatorname{End}\bigl(X(Q'')\bigr) \cap \operatorname{End}\bigl(X(Q)\bigr). \tag{74}$$

Суммируя (73) и (74), мы получаем

$$\operatorname{End}\bigl(X(P')\bigr) + \operatorname{End}\bigl(X(P'')\bigr) = \\ = \operatorname{End}\bigl(X(Q)\bigr) \cap \Bigl(\operatorname{End}\bigl(X(Q')\bigr) + \operatorname{End}\bigl(X(Q'')\bigr)\Bigr) = \operatorname{End}\bigl(X(Q)\bigr),$$

так как $\operatorname{End}\bigl(X(Q')\bigr) + \operatorname{End}\bigl(X(Q'')\bigr) = \operatorname{End}(A)$, что гарантируется условием $(Q' \cap Q'') = \varnothing$ и предложением 2.12.

Это означает, что

$$\operatorname{End}\bigl(X(P') \cap X(P'')\bigr) = \operatorname{End}\bigl(X(P')\bigr) + \operatorname{End}\bigl(X(P'')\bigr),$$

как и требовалось. □

Пример 5.5. Рассмотрим вполне разложимую группу $A = \langle \tau_1 a_1 \rangle \oplus \langle \tau_2 a_2 \rangle$, для которой $T_{\mathrm{cr}}(A) = \{\tau_1, \tau_2\}$ состоит из двух несравнимых идемпотентных типов. Пусть P — конечное множество различных простых чисел и $\tau_1(p) \neq \infty$,

$\tau_2(p) \neq \infty$, если $p \in P$, а $X(p) = \langle A, b_p \rangle$ — неразложимые crq-группы ранга 2 с соотношениями $pb_p = a_1 + a_2$. Определим группу

$$X = \sum_{p \in P} X(p),$$

которая тоже является crq-группой. Для любого подмножества P' в P рассмотрим группу

$$X(P') = \sum_{p \in P'} X(p).$$

Тогда множество $B = \{X(P') \colon P' \subset P\}$ замкнуто относительно взятия произвольных сумм и пересечений этих групп. Предположим, что $X(\varnothing) = A$. Обозначим $E = \mathrm{End}(X)$, $E(P') = \mathrm{End}\bigl(X(P')\bigr)$, тогда $E(\varnothing) = \mathrm{End}(A)$, и рассмотрим $B^* = \{E(P') \colon P' \subset P\}$. Из (66) следует, что для любых $P', P'' \in P$ выполнено, что

$$\mathrm{End}\bigl(X(P') + X(P'')\bigr) = \mathrm{End}\bigl(X(P' \cup P'')\bigr) = \mathrm{End}\bigl(X(P')\bigr) \cap \mathrm{End}\bigl(X(P'')\bigr).$$

Из предложения 5.4 также ясно, что

$$\mathrm{End}\bigl(X(P') \cap X(P'')\bigr) = \mathrm{End}\bigl(X(P' \cap P'')\bigr) = \mathrm{End}\bigl(X(P')\bigr) + \mathrm{End}\bigl(X(P'')\bigr).$$

Мы введём две булевы алгебры (см. [100]): $B = (\{X(P')\}, +, \cap, ')$ с дополнением $X(P')' = X(P \setminus P')$ и выделенными элементами $O_B = A = X(\varnothing)$, $1_B = X = X(P)$ и $B^* = (\{E(P')\}, +, \cap, ')$ с дополнением $E(P')' = E(P \setminus P')$ и выделенными элементами $O_{B^*} = \mathrm{End}(X) = E(P)$, $1_{B^*} = \mathrm{End}(A) = E(\varnothing)$. Операции $\cap$ и $+$ понимаются в теоретико-групповом смысле.

Согласно предложению 5.4 и (66) отображение f из B в B^*, заданное формулой $X(P')f = E(P')$, является антиизоморфизмом булевых алгебр, потому что для любых $P', P'' \in P$

$$\bigl(X(P') + X(P'')\bigr)f = E(P') \cap E(P''), \quad \bigl(X(P') \cap X(P'')\bigr)f = E(P') + E(P'')$$

и $O_B f = 1_{B^*}$, $1_B f = O_{B^*}$. Заметим, что соответствующие элементы B и B^* почти изоморфны как абелевы группы, являющиеся жёсткими crq-группами (см. теорему 5.3).

Мы определим две булевы алгебры, обобщая предыдущий пример. Пусть P — конечное множество различных простых чисел и для каждого $p \in P$, $X(p)$ — acd-группа кольцевого типа (не обязательно crq-группа) с регулятором A и p-примарной конечной группой $X(p)/A$, $\tau(p) \neq \infty$ для каждого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$. Как и выше,

$$X(P') = \sum_{p \in P'} X(p)$$

и $E(P') = \mathrm{End}\bigl(X(P')\bigr)$ для любого $P' \subset P$.

Мы введём булевы алгебры: B, состоящую из групп $X(P')$, и B^* с элементами $E(P')$. Операции $\cap$ и $+$, выделенные элементы O_B, 1_B, O_{B^*}, 1_{B^*} и антиизоморфизм f из B в B^* определяются как в рассмотренном примере. Другими словами, для любых $P', P'' \in P$

$$X(P') + X(P'') = X(P' \cup P''), \quad X(P') \cap X(P'') = X(P' \cap P''), \tag{75}$$
$$E(P') + E(P'') = E(P' \cap P''), \quad E(P') \cap E(P'') = E(P' \cup P''), \tag{76}$$
$$O_B = X(\varnothing), \quad 1_B = X(P), \quad O_B{}^* = E(P), \quad 1_B{}^* = E(\varnothing), \tag{77}$$
$$X(P')' = X(P \setminus P'), \quad E(P')' = E(P \setminus P'), \tag{78}$$
$$X(P')f = E(P'), \quad \text{в частности,} \quad O_B f = 1_{B^*}, \quad 1_B f = O_{B^*}. \tag{79}$$

Заметим, что f переводит возрастающие цепочки элементов B в убывающие цепочки в B^*. Элементы B и B^*, связанные f, имеют соответствующие разложения на неразложимые слагаемые (левые или правые идеалы для B^* и подгруппы для B) (см. [86, гл. XV, 106; 109, следствие 10.1.7]).

Замечание 5.6. Пусть P — конечное множество различных простых чисел и для каждого $p \in P$ $X(p) \cong_{\mathrm{nr}} X'(p)$ — пара acd-групп кольцевого типа с p-примарными конечными фактор-группами $X(p)/A \cong X'(p)/A$, $\tau(p) \neq \infty$ для каждого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$. Как и выше (см. (75)—(79)), мы построим булевы алгебры B и B' с атомами $X(p)$ и $X'(p)$ соответственно и двойственные алгебры B^* и B'^*, состоящие из $E(P') = \mathrm{End}\big(X(P')\big)$ и $E'(P') = \mathrm{End}\big(X'(P')\big)$ соответственно ($P' \subset P$). По лемме 2.13 элементы $X(P') \in B$ и $X'(P') \in B'$, заданные одним и тем же P', почти изоморфны. Из теоремы 5.1 следует, что элементы $E(P') \in B^*$ и $E'(P') \in B'^*$ также почти изоморфны как группы по сложению.

Это замечание позволяет нам определить две двойственные булевы алгебры $\tilde{B}$ и $\tilde{B}^*$, состоящие соответственно из классов почти изоморфизма элементов B и B^*.

Пусть атомы $\tilde{B}$ — классы $\tilde{X}(p)$ почти изоморфизма групп $X(p)$ из B и $\tilde{X}(P')$ для $P' \subset P$ — класс почти изоморфизма группы $X(P')$ (т. е. множество всех групп из $\mathcal{A}$, почти изоморфных $X(P')$) (см. (3)). Предположим, что булева алгебра $\widetilde{B^*}$ состоит из классов почти изоморфизма $\tilde{E}(P')$, содержащих $\mathrm{End}\,X(P')$, т. е. множеств $\mathrm{End}(Y)\colon Y \cong_{\mathrm{nr}} X(P'),\ Y \in \mathcal{A}\}$. Определение булевых операций в $\tilde{B}$ и $\tilde{B}^*$ можно получить из (75)—(78), поставив над символами X, E и B знак «тильда».

Мы подытожим вышеизложенное в следующей таблице, в которой $B(P)$ — булева алгебра всех подмножеств конечного множества P различных простых чисел, P' и P'' — произвольные элементы $B(P)$ и элементы булевых алгебр $\tilde{B}$ и $\widetilde{B^*}$, заданные одним и тем же подмножеством P (в левом столбце), помещены в одну и ту же строку. Любая группа из $\tilde{X}(P')$ имеет кольцо эндоморфизмов из соответствующего класса $\tilde{E}(P')$.

$B(P)$	$\tilde{B}$	$\widetilde{B^*}$
P'	$\tilde{X}(P')$	$\tilde{E}(P')$
$P' \cup P''$	$\tilde{X}(P') + \tilde{X}(P'')$	$\tilde{E}(P') \cap \tilde{E}(P'')$
$P' \cap P''$	$\tilde{X}(P') \cap \tilde{X}(P'')$	$\tilde{E}(P') + \tilde{E}(P'')$
P	1	O
$\varnothing$	O	1

6. Локально почти вполне разложимые абелевы группы

Проблематика, связанная с классификацией групп без кручения счётного ранга, представлена в [86] примерами так называемых «патологических» (неизоморфных) прямых разложений. Особенно следует отметить примеры Корнера [86, теоремы 91.1, 91.2]. Рассмотренные в них группы характеризуются тем, что любые их сервантные вполне характеристические подгруппы конечного ранга являются почти вполне разложимыми группами, что позволяет расширить и адаптировать для них методы, развитые в теории почти вполне разложимых групп, что и делается в этом разделе.

6.1. Почти изоморфизм абелевых групп без кручения счётного ранга

Для групп бесконечного ранга введём понятие почти изоморфизма, обобщающее известное отношение эквивалентности с этим названием, принятое для класса групп конечного ранга. Из его различных известных определений выбираем определение в симметричной форме (см. [109, теорема 9.1.4]).

Определение 6.1. Две абелевы группы без кручения конечного ранга G и H *почти изоморфны* (обозначение $G \cong_{\mathrm{nr}} H$), если для любого простого p существуют мономорфизмы $\Phi_p\colon G \to H$, $\Psi_p\colon H \to G$, для которых группы $G/H\Psi_p$ и $H/G\Phi_p$ конечны, и числа $[G : H\Psi_p]$ и p, а также $[H : G\Phi_p]$ и p являются взаимно простыми.

Распространим это определение на группы произвольного ранга следующим образом (см. [64]).

Определение 6.2. Пусть G и H — абелевы группы без кручения. Тогда G и H называются *почти изоморфными*, $G \cong_{\mathrm{nr}} H$, если для любого простого p существуют мономорфизмы $\Phi_p\colon G \to H$ и $\Psi_p\colon H \to G$, такие что

1) группы $H/G\Phi_p$ и $G/H\Psi_p$ являются периодическими;
2) $(H/G\Phi_p)_p = 0 = (G/H\Psi_p)_p$;
3) для любых сервантных подгрупп конечного ранга $G' \subseteq G$ и $H' \subseteq H$ фактор-группы $(G'\Phi_p)_*^H/G'\Phi_p$ и $(H'\Psi_p)_*^G/H'\Psi_p$ являются конечными.

Если группы конечного ранга почти изоморфны в смысле последнего определения, они почти изоморфны в соответствии с традиционным определением 2.6, которое сохраняет свойства прямых разложений группы с точностью до почти изоморфизма по теореме 1.1 (см. [44, следствие 12.9 (b)]). При этом почти изоморфные вполне разложимые группы бесконечного ранга являются изоморфными, что согласуется со случаем групп конечного ранга (см. [64, лемма 2.4]).

В этой статье был введён класс $\mathcal{H}_{\mathfrak{T}}$ абелевых групп произвольного ранга.

Определение 6.3. Абелева группа без кручения G принадлежит классу $\mathcal{H}_{\mathfrak{T}}$, если для некоторой её вполне разложимой подгруппы

$$R(G) = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}\bigl(R(G)\bigr)} C_\tau^G \subseteq G$$

с τ-однородными компонентами C_τ^G выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{T}$ состоит из попарно несравнимых идемпотентных типов и $T_{\mathrm{cr}}\bigl(R(G)\bigr) \subseteq \mathfrak{T}$;
2) $C_\tau^G \subseteq_* G$ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}\bigl(R(G)\bigr)$;
3) для некоторого множества простых чисел P_G и $p^{n_p^G}$-ограниченных p-примарных групп T_p^G
$$G/R(G) = \bigoplus_{p \in P_G} T_p^G;$$
4) для каждого $p \in P_G$ множество $\{q \in P_G \colon [T_p^G] \cap [T_q^G] \neq \varnothing\}$ конечно; здесь $[T_p^G]$ совпадает с наименьшим из подмножеств $\mathfrak{T}_p \subset \mathfrak{T}$, для которых
$$T_p^G \subseteq \biggl(\Bigl(\bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_p} C_\tau^G\Bigr)_*^G + R(G)\biggr)/R(G).$$

Поскольку $T_{\mathrm{cr}}\bigl(R(G)\bigr) = T_{\mathrm{cr}}(G)$ состоит из попарно несравнимых типов, все группы из $\mathcal{H}_{\mathfrak{T}}$ являются блочно-жёсткими группами без кручения, содержащими $R(G)$ в качестве вполне характеристической подгруппы по условию 2) данного определения.

До того как ограничиться рассмотрением групп из этого класса с одним и тем же множеством критических типов, мы докажем, что если группы $X, Y \in \mathcal{H}_{\mathfrak{T}}$ почти изоморфны, то $T_{\mathrm{cr}}\bigl(R(X)\bigr) = T_{\mathrm{cr}}\bigl(R(Y)\bigr)$.

Теорема 6.4. *Пусть группы $X, Y \in \mathcal{H}_{\mathfrak{T}}$ почти изоморфны. Тогда $R(X) \cong$ $\cong R(Y)$.*

Доказательство. Фиксируем простое число p. По определению 6.2 существуют мономорфизмы $\Phi_p \colon X \to Y$ и $\Psi_p \colon Y \to X$, для которых

а) $Y/X\Phi_p$ и $X/Y\Psi_p$ — периодические группы;
б) для любых сервантных подгрупп конечного ранга $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$ фактор-группы $(X'\Phi_p)_*^Y/X'\Phi_p$ и $(Y'\Psi_p)_*^X/Y'\Psi_p$ конечны.

Обозначим $\Phi = \Phi_p$ и $\Psi = \Psi_p$. Пусть $\mathfrak{T}_1 = T_{\mathrm{cr}}\bigl(R(X)\bigr)$, $\mathfrak{T}_2 = T_{\mathrm{cr}}\bigl(R(Y)\bigr)$ и

$$R(X) = \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_1} C_\tau^X \subseteq X, \quad R(Y) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{T}_2} C_\sigma^Y \subseteq Y -$$

разложения на однородные компоненты $R(X)_\tau = C_\tau^X$ и $R(Y)_\sigma = C_\sigma^Y$ соответственно.

Возьмём любые $\tau \in \mathfrak{T}_1$ и $a \in R(X)_\tau$. Из условия б) получаем, что группа $(\langle a \rangle_*^X \Phi)_*^Y / \langle a \rangle_*^X \Phi$ конечна. Значит, $\mathrm{tp}^X(a) = \mathrm{tp}^Y(a\Phi)$ и τ принадлежит $\mathrm{Tst}(Y)$. Мы утверждаем, что $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(Y)$. Иначе из определения критического типа следует, что

$$0 \neq Y(\tau) = \Biggl(\sum_{\sigma > \tau} Y(\sigma)\Biggr)_*^Y,$$

т. е. существует элемент $c \in Y$, для которого $\mathrm{tp}^Y(c) = \sigma > \tau$. Значит, $b = c\Psi \in X$ и $\mathrm{tp}^X(b) \geqslant \mathrm{tp}^Y(c) = \sigma > \tau$, т. е. $\mathrm{tp}^X(b) > \tau$. Это противоречит тому, что в блочно-жёсткой группе X любой критический тип является максимальным.

Следовательно, $\tau \in \mathfrak{T}_2$, и мы получаем $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$. Аналогично $\mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{T}_1$, что приводит к равенству $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$.

Мы также доказали, что $R(X)_\tau \Phi \subset R(Y)_\tau$ и $R(Y)_\tau \Psi \subset R(X)_\tau$. Условие а) означает, что $\mathrm{rk}\, R(X)_\tau$ и $\mathrm{rk}\, R(Y)_\tau$ являются одновременно конечными или бесконечными для любого $\tau \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$ и совпадают. Таким образом, $R(X) \cong R(Y)$, как и требовалось. □

Следствие 6.5. *Пусть $X, Y \in \mathcal{H}_{\mathfrak{T}}$ и $R(X) \cong R(Y)$, и пусть $\Phi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Тогда $\Phi|_{R(X)} \in \mathrm{Hom}\bigl(R(X), R(Y)\bigr)$.*

Действительно, любое отображение $\Phi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ определяется действием на элементах вполне характеристической подгруппы $R(X)$ группы X. Значит, $\mathrm{Hom}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}\bigl(R(X), R(Y)\bigr)$, так как для любого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}\bigl(R(X)\bigr) = T_{\mathrm{cr}}\bigl(R(Y)\bigr)$ выполняется следующее: $R(X)_\tau \Phi \subset Y(\tau) = R(Y)_\tau$.

Введём класс групп не более чем счётного ранга, содержащийся в $\mathcal{H}_{\mathfrak{T}}$. Как и выше, $\mathfrak{T}$ — множество идемпотентных попарно несравнимых типов и T — его счётное подмножество, $T \subseteq \mathfrak{T}$. Тогда для любой вполне разложимой группы

$$C = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(C)} C_\tau,$$

для которой $T_{\mathrm{cr}}(C) \subseteq T$, её разложение в прямую сумму однородных компонент C_τ определяется однозначно.

Определение 6.6. Пусть T — счётное множество идемпотентных попарно несравнимых типов. Абелева группа без кручения X принадлежит классу $\mathcal{C}'$, если она содержит некоторую вполне разложимую подгруппу

$$R(X) = C = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(C)} C_\tau,$$

для которой выполнены следующие условия:

1) $T_{\mathrm{cr}}(C) \subseteq T$;
2) C_τ — сервантная подгруппа конечного ранга в X для каждого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(C)$;
3) для некоторого множества простых чисел $P(X)$ и $p^{n_p(X)}$-ограниченных p-примарных групп T_p^X
$$X/C = \bigoplus_{p \in P(X)} T_p^X;$$
4) для каждого $p \in P(X)$ множество $\big\{q \in P(X) \colon [T_p^X] \cap [T_q^X] \neq \varnothing\big\}$ конечно; здесь $[T_p^X]$ совпадает с наименьшим из подмножеств $\mathfrak{T}_p \subset T_{\mathrm{cr}}(C)$, для которых
$$T_p^X \subseteq \bigg(\Big(\bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_p} C_\tau\Big)_* + C\bigg)/C.$$

Для удобства введём ещё один класс $\mathcal{C}'(A)$ групп счётного ранга, определённый некоторой фиксированной вполне разложимой группой
$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau,$$
для которой $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$. Пусть
$$\mathcal{C}'(A) = \{X \in \mathcal{C}' \colon R(X) = A \subset X,\\ X/A \text{ периодическая}, \ A_\tau \subseteq_* X \text{ для всех } \tau \ \in T\}. \tag{80}$$

Рассмотрим подкласс $\mathcal{C}'_e(A)$ класса $\mathcal{C}'(A)$, состоящий из групп X, таких что $eX \subset A$ для натурального числа e. Очевидно, $X \in \mathcal{C}'_e(A)$ означает, что $X \in \mathcal{C}'_{e'}(A)$, если $e \mid e'$.

Пусть, в частности, $e = p^{n_p}$ — степень простого числа p. Нам понадобится обозначение $\mathcal{C}_{p^{n_p}}(A)$ для класса, который отличается от $\mathcal{C}'_{p^{n_p}}(A)$ тем, что A_τ, $\tau \in T$, не обязательно сервантны в $X \in \mathcal{C}_{p^{n_p}}(A)$.

Для натурального числа e имеется цепь
$$\mathcal{C}'_e(A) \subset \mathcal{C}'(A) \subset \mathcal{C}' \subset \mathcal{H}_{\mathfrak{T}}.$$
Все утверждения, доказанные в классе $\mathcal{C}'(A)$, автоматически переносятся на группы счётного ранга из класса $\mathcal{C}'$ ввиду их структурной идентичности.

Условие 4) означает, что любой элемент $\tau \in T$ содержится лишь в конечном наборе множеств $\big[T_p^X\big]$, т. е. множества
$$P_\tau = \big\{p \in P(X) \colon \tau \in \big[T_p^X\big]\big\} \tag{81}$$
конечны. По определению 6.6 все однородные компоненты группы A сервантны в $X \in \mathcal{C}'(A)$, и мы называем $A = R(X)$ *регулятором* группы X в соответствии с теорией блочно-жёстких почти вполне разложимых групп.

Из прямого разложения группы
$$X = \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$$

следует соответствующее разложение регулятора как её вполне характеристической подгруппы

$$A = \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} A_i, \quad A_i = A \cap X_i,$$

из которого получаем, что

$$X/A \cong \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i/A_i$$

и $X_i \in \mathcal{C}'$. Отсюда легко видеть, что класс $\mathcal{C}'$ замкнут относительно образования конечных прямых сумм и прямых слагаемых.

Заметим, что $A_\tau = R(X)_\tau = R(X)(\tau) = X(\tau)$ — вполне характеристические подгруппы групп X и $R(X)$ для любого $\tau \in T$. Обобщая, для любого подмножества T' в T определим

$$X(T') = \sum_{\tau \in T'} X(\tau),$$

вполне характеристическую подгруппу в X, совпадающую с

$$\bigoplus_{\tau \in T'} A_\tau.$$

Используя это для конечных множеств T' и применяя подход из [59, леммы 2.8, 3.4], мы докажем следующую теорему.

Теорема 6.7. *Пусть $X \in \mathcal{C}'(A)$. Любая вполне характеристическая сервантная подгруппа конечного ранга группы X является почти вполне разложимой группой.*

Доказательство. Пусть $V' \subset X$ — вполне характеристическая сервантная подгруппа конечного ранга. Тогда существует конечное подмножество T_0 в $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$, для которого

$$V' \subseteq \left(\bigoplus_{\tau \in T_0} A_\tau \right)_*^X.$$

Обозначим

$$e = \prod_{p \in P_\tau,\ \tau \in T_0} p^{n_p(X)}.$$

Мы видим, что

$$eV \subset \bigoplus_{\tau \in T_0} A_\tau \subset A.$$

Тогда

$$eV' \subset \bigoplus_{\tau \in T_0} A_\tau \subset A.$$

Пусть $\pi_\tau \colon A \to A_\tau$ — канонические проекции, связанные с разложением

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau.$$

Заметим, что $e\pi_\sigma \in \operatorname{End} X$ для любого $\sigma \in T_0$ и $V'e\pi_\sigma \subseteq V' \cap A_\sigma$, поскольку V' — вполне характеристическая подгруппа в X. Пусть $T' = \{\sigma \in T_0 \colon V'e\pi_\sigma \neq 0\}$. Тогда

$$eV' \subseteq \sum_{\sigma\in T'} V'e\pi_\sigma \subseteq \sum_{\sigma\in T'} (V' \cap A_\sigma) \subseteq V'. \tag{82}$$

Поскольку V' сервантна в X, имеем, что $V' \cap A_\sigma$ сервантна в A_σ, и значит, существует разложение $A_\sigma = (V' \cap A_\sigma) \oplus A'_\sigma$, так как A_σ — однородная вполне разложимая группа конечного ранга (см. [86, лемма 86.8]). Если оба слагаемых $V' \cap A_\sigma$ и A'_σ ненулевые, то существуют $x \in V' \cap A_\sigma$ и гомоморфизм $\psi \colon V' \cap A_\sigma \to A'_\sigma$, для которых $xe\pi_\sigma\psi \neq 0$. Но $e\pi_\sigma\psi \in \operatorname{End} X$, при этом V', A_σ и, значит, $V' \cap A_\sigma$ — вполне характеристические подгруппы в X, следовательно,

$$xe\pi_\sigma\psi \in (V' \cap A'_\sigma) \cap (V' \cap A_\sigma) = 0.$$

Данное противоречие и то, что $V' \cap A_\sigma \neq 0$, приводят к $A_\sigma = V' \cap A_\sigma$ для всех $\sigma \in T'$. Из (82) мы получаем, что

$$eV' \subseteq \sum_{\sigma\in T'} A_\sigma \subseteq V',$$

т. е.

$$V' = \Big(\bigoplus_{\sigma\in T'} A_\sigma\Big)_*^X = A(T')_*^X.$$

Заметим, что A_σ сервантны в V' для всех $\sigma \in T'$, иначе нарушилась бы их сервантность в X. Значит, вполне разложимая группа

$$\bigoplus_{\sigma\in T'} A_\sigma$$

является регулятором в V', обозначим её $R(V')$. Тогда $eV' \subset R(V')$, а это означает, что V' — почти вполне разложимая группа, как и требовалось. □

Поскольку A — блочно-жёсткая группа, из теоремы видно, что подгруппами вида

$$\Big(\bigoplus_{\sigma\in T'} A_\sigma\Big)_*^X,$$

где T' — конечное подмножество элементов из $T_{\mathrm{cr}}(X)$, исчерпываются все вполне характеристические сервантные подгруппы конечного ранга в X.

Следствие 6.8. *Если $X \in \mathcal{C}'(A)$ и $L \subset R(X)$ имеет конечное множество критических типов $T' = T_{\mathrm{cr}}(L) \subset T$, то L_*^X — почти вполне разложимая группа.*

Этот факт следует из очевидного включения

$$L_*^X \subseteq \Big(\bigoplus_{\sigma\in T'} A_\sigma\Big)_*^X,$$

в котором последняя группа является почти вполне разложимой по теореме 6.7.

Определение 6.9. Если любая вполне характеристическая сервантная подгруппа конечного ранга группы X является почти вполне разложимой, мы говорим, что X — локально почти вполне разложимая группа.

Мы доказали в теореме 6.7, что класс $\mathcal{C}'$ состоит из локально почти вполне разложимых групп не более чем счётного ранга. Только группы из этого класса $\mathcal{C}'$, содержащего в качестве подкласса блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы кольцевого типа конечного ранга, будут называться локально почти вполне разложимыми (хотя ими не исчерпываются все локально почти вполне разложимые группы в смысле определения 6.9).

6.2. Почти изоморфизм для локально почти вполне разложимых абелевых групп счётного ранга

Из $X \subset \mathbb{Q}A$ и определения 6.6 получаем следующее представление группы $X \in \mathcal{C}'(A)$:

$$X = \sum_{p \in P(X)} X_{(p)}, \quad \text{где} \quad X_{(p)} = X \cap \frac{A}{p^{n_p(X)}} \in \mathcal{C}'_{p^{n_p(X)}}(A) \tag{83}$$

и $X_{(p)}/A = T_p^X$. Мы естественно полагаем $X_{(p)} = A$ для простых p, которые не принадлежат множеству $P(X)$. Тогда группа записывается в виде

$$X = \sum_{p \in \mathbb{P}} X_{(p)},$$

где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Очевидно,

$$X/A = \sum_{p \in \mathbb{P}} X_{(p)}/A.$$

Расширяя подход теории почти вполне разложимых групп к группам счётного ранга, мы называем (83) *примарно-факторным представлением* группы $X \in \mathcal{C}'(A)$. Очевидно, A является регулятором для каждой группы $X_{(p)}$ и

$$X/A = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} X_{(p)}/A.$$

Лемма 6.10. *Пусть $X \in \mathcal{C}'(A)$. Тогда выполняется следующее:*

1) *$X_{(p)}$ — вполне характеристические подгруппы в X для всех простых p;*
2) *$X_{(p)} \cap X_{(q)} = A$, если $p \neq q$.*

Доказательство. Пусть $p \in P(X)$. Напомним, что A — вполне характеристическая подгруппа в X. Значит, для любого $\phi \in \operatorname{End} X$ имеем, что $\phi \in \operatorname{End}(A)$ и $\phi \in \operatorname{End}\bigl(\frac{A}{p^{n_p(X)}}\bigr)$. Отсюда получаем 1) и 2), так как $\frac{A}{p^{n_p(X)}} \cap \frac{A}{q^{n_q(X)}} = A$, если $p \neq q$. Если $p \notin P(X)$, утверждения очевидны. $\square$

Следствие 6.11. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$ и $\Phi \in \operatorname{Hom}(X, Y)$. Тогда $\Phi|_{X_{(p)}} \in \operatorname{Hom}\bigl(X_{(p)}, Y_{(p)}\bigr)$ для всех p.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{C}'(A)$ — подкласс класса $\mathcal{H}_{\mathfrak{T}}$, мы можем применить следствие 6.5, чтобы показать, что $\Phi|_A \in \operatorname{End}(A)$ и, следовательно, $\Phi\big|_{\frac{A}{p^{n_p}}} \in \operatorname{End}\big(\frac{A}{p^{n_p}}\big)$, где $p^{n_p} = \max\big(p^{n_p(X)}, p^{n_p(Y)}\big)$. Тогда образ группы $X_{(p)} = X \cap \frac{A}{p^{n_p}}$ при отображении Φ входит в $Y_{(p)} = Y \cap \frac{A}{p^{n_p}}$, как и требовалось. □

Поскольку $\Phi|_A \in \operatorname{End}(A)$ для всех $\Phi \in \operatorname{Mon}(X, Y)$ и каждая τ-однородная компонента A_τ сервантна в X и в Y, мы получаем, что $A_\tau\Phi \subseteq A_\tau$ и если $a = a'\Phi$, где $a \in A_\tau$, $a' \in X$, то $a' \in A_\tau$. Следовательно, если $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$, то $A_\tau/A_\tau\Phi$ может рассматриваться как подгруппа группы $Y/X\Phi$ для каждого $\tau \in T = T_{\mathrm{cr}}(A)$, т. е.

$$A_\tau/A_\tau\Phi \subset Y/X\Phi, \quad \text{если} \quad \Phi \in \operatorname{Mon}(X, Y). \tag{84}$$

Замечание 6.12. Если $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$ и $\Phi \in \operatorname{Mon}(X, Y)$, причём $(Y/X\Phi)_p = 0$ для некоторого простого p, то

$$(A/A\Phi)_p = \bigoplus_{\tau \in T} (A_\tau/A_\tau\Phi)_p = 0.$$

Лемма 6.13. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$ и $\Phi \in \operatorname{Mon}(X, Y)$. Если $(A/A\Phi)_p = 0$, то $(Y/X\Phi)_p \cong \big(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi\big)_p$.*

Доказательство. Имеем $(Y/X\Phi)_p \cong (Y/A\Phi)_p/(X\Phi/A\Phi)_p$ и

$$(Y/A)_p = Y_{(p)}/A \cong \big(Y_{(p)}/A\Phi\big)/(A/A\Phi).$$

Из $(A/A\Phi)_p = 0$ следует, что

$$Y_{(p)}/A = \big(Y_{(p)}/A\big)_p \cong \big(Y_{(p)}/A\Phi\big)_p.$$

По той же причине

$$Y_{(p)}/A \cong (Y/A)_p \cong (Y/A\Phi)_p/(A/A\Phi)_p \cong (Y/A\Phi)_p.$$

Значит, $(Y/A\Phi)_p \cong \big(Y_{(p)}/A\Phi\big)_p$.

Далее,

$$(X\Phi/A\Phi)_p \cong (X/A)_p \cong X_{(p)}/A \cong X_{(p)}\Phi/A\Phi = \big(X_{(p)}\Phi/A\Phi\big)_p,$$

так как отображение Φ инъективно. Отсюда получаем, что

$$\big(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi\big)_p \cong \big(Y_{(p)}/A\Phi\big)_p/\big(X_{(p)}\Phi/A\Phi\big)_p \cong (Y/A\Phi)_p/(X\Phi/A\Phi)_p \cong (Y/X\Phi)_p,$$

как и требовалось. □

Следствие 6.14. *Пусть*

$$X = \sum_{p \in P(X)} X_{(p)}, \quad Y = \sum_{p \in P(Y)} Y_{(p)} \text{ —}$$

группы из класса $\mathcal{C}'(A)$ и $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$. Тогда $P(X) = P(Y)$.

Доказательство. По определению почти изоморфизма для любого простого p существуют $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X, Y)$ и $\Psi_p \in \mathrm{Mon}(Y, X)$, для которых $(Y/X\Phi_p)_p = (X/Y\Psi_p)_p = 0$, а значит, $(A/A\Phi_p)_p = (A/A\Psi_p)_p = 0$ по замечанию 6.12. Из леммы 6.13 следует, что $(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi_p)_p = 0$ и если $X_{(p)} = A$, то $Y_{(p)} = A$, значит, $P(Y) \subset P(X)$. Аналогично $P(X) \subset P(Y)$, и мы имеем требуемое равенство $P(X) = P(Y)$. □

Мы можем однозначно продолжить $\eta \in \mathrm{End}\, A$ до линейного преобразования пространства $\mathbb{Q}A$, и из следствия 6.5 вытекает следующая лемма.

Лемма 6.15. *Пусть X, Y — группы из класса $\mathcal{C}'(A)$ и $p^{n_p} = \max\bigl(p^{n_p(X)}, p^{n_p(Y)}\bigr)$ для любого простого p. Тогда*

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \bigl\{\Phi \in \mathrm{End}\, A\colon \bigl(p^{n_p} X_{(p)}\bigr)\Phi \subset p^{n_p} Y_{(p)} \text{ для каждого } p\bigr\}.$$

Доказательство. Из следствия 6.5 получаем $\Phi|_A \in \mathrm{End}\, A$ и, используя следствие 6.11, имеем $\Phi\big|_{X_{(p)}} \in \mathrm{Hom}\bigl(X_{(p)}, Y_{(p)}\bigr)$, т. е. $\bigl(p^{n_p} X_{(p)}\bigr)\Phi \subset p^{n_p} Y_{(p)}$ для каждого p.

Обратно, если $\Phi \in \mathrm{End}\, A$, то Φ продолжается на $\mathbb{Q}A$, делимую оболочку группы A, и образ любого элемента из $X_{(p)} = X \cap \frac{A}{p^{n_p}}$ принадлежит группе $Y_{(p)}$ для любого простого p по условию. Тогда по (83) заключаем, что $X\Phi \subseteq Y$, как и требовалось. □

Следствие 6.16. *Пусть $X \in \mathcal{C}'(A)$ и $p^{n_p} = p^{n_p(X)}$ для любого простого p. Тогда*

$$\mathrm{End}(X) = \bigl\{\Phi \in \mathrm{End}\, A\colon \bigl(p^{n_p} X_{(p)}\bigr)\Phi \subset p^{n_p} X_{(p)} \text{ для всех } p\bigr\}.$$

Пусть $X \in \mathcal{C}'_e(A)$. Определим канонический эпиморфизм

$$\overline{}\colon A \mapsto A/eA = \bar{A} \tag{85}$$

и индуцированные гомоморфизмы

$$\overline{}\colon \mathrm{End}\, A \to \mathrm{End}\, \bar{A} \quad \text{и} \quad \overline{}\colon \mathrm{Aut}\, A \to \mathrm{Aut}\, \bar{A}. \tag{86}$$

Очевидно, $X/A \cong eX/eA = \overline{eX} \subset \bar{A}$, где $eX \subset A$.

Распространим определение 2.5 для групп конечного ранга на рассматриваемые здесь группы счётного ранга. Напомним, что для блочно-жёстких групп $A(\tau) = A_\tau$ для любого $\tau \in T$.

Определение 6.17. Группа $\mathrm{TypAut}\, \bar{A}$ — это подгруппа всех автоморфизмов η группы $\bar{A}$, удовлетворяющих условию $\overline{A(\tau)}\eta \subseteq \overline{A(\tau)}$ для всех $\tau \in T$.

Кольцо $\mathrm{TypEnd}\, \bar{A}$ — это подкольцо всех эндоморфизмов η группы $\bar{A}$, удовлетворяющих условию $\overline{A(\tau)}\eta \subseteq \overline{A(\tau)}$ для всех $\tau \in T$.

Очевидно,

$$\overline{\mathrm{End}\, A} \subseteq \mathrm{TypEnd}\, \bar{A}, \quad \overline{\mathrm{Aut}\, A} \subseteq \mathrm{TypAut}\, \bar{A}. \tag{87}$$

Далее,

$$\mathrm{TypAut}\, \bar{A} = \prod_{\tau \in T} \mathrm{Aut}\, \bar{A}_\tau$$

и также

$$\mathrm{TypEnd}\,\bar{A} = \prod_{\tau\in T} \mathrm{End}\,\bar{A}_\tau.$$

Отсюда, применив [109, предложение 2.5.10] к группам A_τ, $\tau \in T$, конечного ранга, получаем $\overline{\mathrm{End}\,A_\tau} = \mathrm{End}\,\overline{A_\tau}$, и

$$\overline{\mathrm{End}\,A} = \mathrm{TypEnd}\,\bar{A}. \tag{88}$$

Обобщая подход [109, определение 8.1.14], мы вводим понятие слабого изоморфизма для рассматриваемых групп счётного ранга и далее покажем, что, как и в случае групп конечного ранга, это отношение эквивалентности совпадает с почти изоморфизмом, но даёт новые возможности для исследования групп.

Определение 6.18. Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'_e(A)$. Тогда X и Y называются *слабо изоморфными* группами (обозначение $X \cong_{\mathrm{tp}} Y$), если существует отображение $\eta \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$, такое что $\overline{eX}\eta = \overline{eY}$, где $\bar{A} = A/eA$.

Если $X', Y \in \mathcal{C}'_e(A)$, $X' \cong_{\mathrm{tp}} Y$ и $X' \cong X$, то, естественно, мы будем говорить, что X и Y слабо изоморфны, если даже $X \notin \mathcal{C}'_e(A)$. Таким образом, понятие слабого изоморфизма допускает изоморфизм, а не только равенство регуляторов групп.

Лемма 6.19. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$ и $\Phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$. Тогда $Y/X\Phi$ является периодической группой. При этом если U является сервантной подгруппой конечного ранга в X, то $(U\Phi)^Y_*/U\Phi$ — конечная группа.*

Доказательство. Напомним, что в каноническом разложении

$$A = \bigoplus_{\tau\in T} A_\tau$$

все однородные компоненты A_τ имеют конечный ранг, что влечёт конечность групп $A_\tau/A_\tau\Phi$.

Из изоморфизма $Y/A \cong (Y/A\Phi)/(A/A\Phi)$ следует, что $Y/A\Phi$ является периодической группой, так как этим свойством, очевидно, обладают группы Y/A и

$$A/A\Phi = \bigoplus_{\tau\in T} A_\tau/A_\tau\Phi.$$

Группа $Y/X\Phi$ является периодической как подгруппа периодической группы $Y/A\Phi$.

По условию 4) определения 6.6 существует натуральное число k, такое что $kU \subset A$. Возьмём подгруппу конечного ранга $L \subset A$, содержащую kU, такую что $T_{\mathrm{cr}}(L) = T_{\mathrm{cr}}(U)$. По следствию 6.8 группы $L' = L^X_*$ и $L'' = (L\Phi)^Y_*$ являются почти вполне разложимыми с изоморфными регуляторами $R' = R(L')$ и $R'' = R(L'') = (R\Phi)^A_*$ и Φ индуцирует мономорфизм $L' \to L''$, а также мономорфизм $R' \to R''$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию $mL'' \subset R''$. Очевидно, порядки элементов группы $L''/L'\Phi$ ограничены числом $m|R'/R''\Phi|$ и, следовательно, она конечна в силу конечности её ранга. Поскольку $(U\Phi)_*^Y/U\Phi$ является подгруппой в $L'/L''\Phi$, она также конечна. $\square$

Специальный способ построения мономорфизмов для рассматриваемых групп с использованием конечности множеств (81) даёт следующая лемма.

Лемма 6.20. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$, $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$, $P = P(X) = P(Y)$ и $p^{n_p}T_p^X = p^{n_p}T_p^Y = 0$, $p \in P$. Кроме того, пусть*

$$m_\tau{}^X = \prod_{p\colon \tau\in[T_p^X]} p^{n_p}$$

($m_\tau{}^X = 1$, если $P_\tau = \varnothing$) и I_τ — тождественное отображение на соответствующем A_τ. Тогда

$$\phi = (m_\tau{}^X I)_{\tau\in T} \in \prod_{\tau\in T}^{\otimes} \mathrm{Mon}(A_\tau, A_\tau)$$

является мономорфизмом $X \to Y$ со свойством $(Y/X\phi)_q = 0$ для любого простого $q \notin P$.

Доказательство. Мономорфизм ϕ продолжается с A до делимой оболочки $\mathbb{Q}A$ и по лемме 6.15 индуцирует мономорфизм из X в Y, так как $X_{(p)}\phi \subset A \subset Y_{(p)}$, что означает $p^{n_p}X_{(p)}\phi \subset p^{n_p}Y_{(p)}$ для любого p.

Из $Y/A \cong (Y/A\phi)/(A/A\phi)$ получаем, что $(Y/A\phi)_q = 0$ для любого простого $q \notin P$, так как $(Y/A)_q = 0$ и $(A/A\phi)_q = 0$ по условию. Отсюда следует, что $Y/X\phi \cong (Y/A\phi)/(X\phi/A\phi)$ также имеет нулевую q-примарную компоненту, как и требовалось. $\square$

Лемма 6.21. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'_{p^n}(A)$ и $\bar{A} = A/p^nA$. Если $\Phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$ удовлетворяет условию $(Y/X\Phi)_p = 0$, то $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ и $\overline{p^nX}\bar{\Phi} = \overline{p^nY}$. Обратно, если отображение $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ удовлетворяет условию $\overline{p^nX}\bar{\Phi} = \overline{p^nY}$, то для него существует прообраз $\Phi\colon A \to A$, такой что $\Phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$, и выполняется условие $(Y/X\Phi)_p = 0$.*

Доказательство. Пусть $(Y/X\Phi)_p = 0$. Покажем, что $Y = X\Phi + A$. Достаточно проверить включение $Y \subset X\Phi + A$. Действительно, для любого $y \in Y$ существует $x \in X$, такой что $ly = x\Phi$, причём l и p взаимно просты. Тогда существуют целые числа u, v, для которых $ul + vp^n = 1$. Имеем $y = (ly)u + (p^ny)v \in X\Phi + A$, поскольку $p^ny \in A$.

Из (84) следует, что $(A_\tau/A_\tau\Phi)_p = 0$, и если взять $y \in A_\tau$ для произвольного $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$, то $x \in A_\tau$, и мы получаем, что $A = A\Phi + p^nA$, т. е. $\bar{A} = \bar{A}\bar{\Phi}$ и $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$.

Из $Y = X\Phi + A$ выводим, что $p^nY = p^nX\Phi + p^nA$, и значит, $\overline{p^nX}\bar{\Phi} = \overline{p^nY}$.

Обратно, пусть для отображения $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ верно, что $\overline{p^nX}\bar{\Phi} = \overline{p^nY}$. Для него существует прообраз $\Phi \in \mathrm{End}(A)$ (см. (88)). Очевидно, что $\Phi \in \mathrm{Mon}(A, A)$, иначе $\mathrm{rk}(\bar{A}\bar{\Phi})$ был бы меньше, чем $\mathrm{rk}\,\bar{A}$. Мономорфизм Φ продолжается с A до делимой оболочки $\mathbb{Q}A$ и индуцирует гомоморфизм из X в $\mathbb{Q}A$.

Для любого $x \in X$ имеем

$$(p^n x + p^n A)\bar{\Phi} = \overline{p^n x}\bar{\Phi} \in \overline{p^n}\bar{Y}.$$

Значит, $p^n x\Phi \in p^n Y + p^n A = p^n Y$, т. е. $x\Phi \in Y$. Таким образом, $\Phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$. По условию для любого $y \in Y$ существует $x \in X$, такой что $\overline{p^n y} = \overline{p^n x}\bar{\Phi}$, отсюда следует, что $p^n y = p^n x\Phi + p^n a$ для некоторого $a \in A$ и $Y \subset X\Phi + A$.

Далее, $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ означает, что $\bar{A} = \bar{A}\bar{\Phi}$ и $A = A\Phi + p^n A$. Отсюда следует, что

$$Y \subset X\Phi + A\Phi + p^n A = X\Phi + p^n A \subset X\Phi + p^n Y,$$

и значит, $Y = X\Phi + p^n Y$. Таким образом, периодическая по лемме 6.19 группа $Y/X\Phi$ является p-делимой, т. е. $(Y/X\Phi)_p = 0$.

Доказательство завершено. □

Теорема 6.22. *Пусть*

$$X = \sum_{p \in \mathbb{P}} X_{(p)}, \quad Y = \sum_{p \in \mathbb{P}} Y_{(p)} -$$

группы из класса $\mathcal{C}'(A)$ *и* $X_{(p)} \in \mathcal{C}'_{p^{n_p}}(A)$, $Y_{(p)} \in \mathcal{C}'_{p^{n_p}}(A)$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$;
2) $X_{(p)} \cong_{\mathrm{tp}} Y_{(p)}$, $p \in \mathbb{P}$;
3) $X_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}} Y_{(p)}$, $p \in \mathbb{P}$.

Доказательство. Лемма 6.19 показывает, что достаточно доказать только одно условие 2) из определения 6.2 для установления почти изоморфизма групп при наличии соответствующих мономорфизмов между ними.

Докажем импликацию 1) → 2). По следствию 6.14 положим $P = P(X) = P(Y)$. Возьмём произвольное простое число $p \in P$. Поскольку $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, для p существует отображение $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X, Y)$, удовлетворяющее условию $(Y/X\Phi_p)_p = 0$.

Применяя следствие 6.11 и замечание 6.12, получаем, что $\Phi_p \in \mathrm{Mon}\big(X_{(p)}, Y_{(p)}\big)$ и $(A/A\Phi_p)_p = 0$, что позволяет применить лемму 6.13. Таким образом, $(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi_p)_p = 0$.

Из леммы 6.21 следует, что $\overline{\Phi_p} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ и $\overline{p^{n_p}X_{(p)}}\,\overline{\Phi_p} = \overline{p^{n_p}Y_{(p)}}$, где $p^{n_p}X_{(p)} \subset A$ и $p^{n_p}Y_{(p)} \subset A$ и $\bar{A} = A/p^{n_p}A$. По определению 6.18 группы $X_{(p)}$ и $Y_{(p)}$ слабо изоморфны.

Докажем импликацию 2) → 3). Пусть p — произвольное простое число и $\bar{A} = A/p^{n_p}A$. По условию существует $\overline{\Phi_p} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ и $\overline{p^{n_p}X_{(p)}}\,\bar{\Phi} = \overline{p^{n_p}Y_{(p)}}$. Из лемм 6.19 и 6.20 следует, что достаточно построить мономорфизмы $\Phi_p\colon X_{(p)} \to Y_{(p)}$ и $\Psi_p\colon Y_{(p)} \to X_{(p)}$, для которых $\big(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi_p\big)_p = \big(X_{(p)}/Y_{(p)}\Psi_{(p)}\big)_p = 0$. По лемме 6.21 прообразы отображений $\overline{\Phi_p}, \overline{\Phi_p^{-1}} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ существуют и обладают указанными свойствами.

Докажем импликацию 3) $\to$ 1). По условию существуют мономорфизмы $\Phi_p\colon X_{(p)} \to Y_{(p)}$ и $\Psi_p\colon Y_{(p)} \to X_{(p)}$, для которых $\bigl(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi_p\bigr)_p = \bigl(X_{(p)}/Y_{(p)}\Psi_p\bigr)_p = 0$. Напомним, что $T_p^X \cong X_{(p)}/A$, $T_p^Y \cong Y_{(p)}/A$ и $p^{n_p}T_p^X = p^{n_p}T_p^Y = 0$ для всех простых p.

Зафиксируем p и построим мономорфизмы $\Phi\colon X \to Y$ и $\Psi\colon Y \to X$, удовлетворяющие условию $(Y/X\Phi)_p = (X/Y\Psi)_p = 0$. Как и раньше, для каждого $\tau \in T$ обозначим $P_\tau = \{q \in P(X)\colon \tau \in [T_q^X]\}$. По условию 4) определения 6.6 мы можем определить число

$$m_0 = \prod_{q\colon q\neq p,\ [T_q^X]\cap[T_p^X]\neq\varnothing} q^{n_q},$$

которое не делится на p. Для него существует натуральное число v, такое что $m_0 v \equiv 1 \bmod p^{n_p}$. Обозначим $m = m_0 v$. Кроме того, введём числа

$$m_\tau = \prod_{q\in P_\tau} q^{n_q}$$

для $\tau \in T \setminus [T_p^X]$.

Запишем

$$\Phi_p = (\phi_\tau)_{\tau\in T} \in \prod_{\tau\in T} \operatorname{Mon}(A_\tau, A_\tau).$$

Заметим, что $(A_\tau/A_\tau\phi_\tau)_p = 0$ по лемме 6.12. Определим $\Phi = (\phi'_\tau)_{\tau\in T}$ следующим образом: $\phi'_\tau = m\phi_\tau$, если $\tau \in [T_p^X]$; $\phi'_\tau = m_\tau I_\tau$, если $\tau \notin [T_p^X]$, где I_τ — тождественное отображение на соответствующем A_τ. Из того, что $X_{(p)}\Phi \subset Y_{(p)}$ и $X_{(q)}\Phi \subset A \subset Y_{(q)}$ для всех $q \neq p$, следует, что $\Phi \in \operatorname{Mon}(X, Y)$ (см. 6.16). Покажем, что Φ является одним из двух искомых мономорфизмов. Сначала рассмотрим его как элемент из $\operatorname{Mon}\bigl(X_{(p)}, Y_{(p)}\bigr)$.

Ввиду того что m_τ не делятся на p, условие $(A_\tau/A_\tau\Phi)_p = 0$ выполняется для всех $\tau \notin [T_p^X]$, и $\overline{m\phi_\tau} = \overline{\phi_\tau}\colon\ \overline{A_\tau} \to \overline{A_\tau}$ являются автоморфизмами для всех $\tau \in [T_p^X]$, где $\overline{A_\tau} = A_\tau/p^{n_p}A_\tau$. Отсюда следует, что $\overline{\Phi} \in \operatorname{TypAut}\bar{A} = A/p^{n_p}A$.

Из определения множества $[T_p^X]$ получаем, что

$$\overline{p^{n_p}X_{(p)}} = p^{n_p}X_{(p)}/p^{n_p}A \cong X_{(p)}/A = T_p^X \cong \Bigl(\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\Bigr)^X_{*(p)} \Big/ \Bigl(\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\Bigr). \tag{89}$$

Отсюда по построению, в котором $m \equiv 1 \bmod p^{n_p}$, и по лемме 6.21, применённой к Φ_p, имеем

$$\overline{p^{n_p}X_{(p)}}\,\overline{\Phi} = \overline{p^{n_p}X_{(p)}}\,\overline{\Phi^1} = \overline{p^{n_p}X_{(p)}}\,\overline{\Phi_p} = \overline{p^{n_p}Y_{(p)}}, \tag{90}$$

где $\Phi^1 = \Phi\big|_{\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau}$ и $\overline{p^{n_p}Y_{(p)}} \cong T_p^X$. Из той же леммы, отнесённой теперь к Φ, следует, что $(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi)_p = 0$, и, применив лемму 6.13, получаем выполнение условия $(Y/X\Phi)_p = 0$, как и требовалось.

Построение $\Psi \in \mathrm{Mon}(Y, X)$ проводится аналогично. Поскольку p выбиралось произвольно, на основании лемм 6.19 и 6.20 заключаем, что X и Y почти изоморфны. □

Поскольку в доказательстве импликации 1) $\to$ 2) использовалось только существование отображений $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X, Y)$ со свойствами $(Y/X\Phi_p)_p = 0$, определение слабого изоморфизма для групп рассматриваемого класса может быть дано следующим образом.

Следствие 6.23. *Пусть X и Y — группы из класса $\mathcal{C}'(A)$. Тогда $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$ тогда и только тогда, когда для каждого простого p существует отображение $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X, Y)$, удовлетворяющее условию $(Y/X\Phi_p)_p = 0$.*

Из (89) и (90) также получаем следствие.

Следствие 6.24. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$. Если $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, то $T_p^X \cong T_p^Y$ и $[T_p^X] = [T_p^Y]$ для любого простого p.*

Важным выводом из этой теоремы является то, что установление почти изоморфизма групп X и Y рассматриваемого класса сводится к независимым проверкам фактов, что $X_{(p)} \cong_{nr} Y_{(p)}$ для всех p в $\mathbb{P}$.

Перечислим некоторые общие известные свойства почти изоморфных почти вполне разложимых групп в виде следующей теоремы.

Теорема 6.25. *Пусть X' и Y' — блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы кольцевого типа и $X' \cong_{\mathrm{nr}} Y'$. Тогда $R(X') \cong R(Y')$, $\mathrm{End}(X')^+ \cong_{\mathrm{nr}} \mathrm{End}(Y')^+$, при этом $R\big(\mathrm{End}(X')\big)$ и $R\big(\mathrm{End}(Y')\big)$ являются изоморфными кольцами (и совпадают с $\mathrm{Hom}\big(X', R(X')\big)$ и $\mathrm{Hom}\big(Y', R(Y')\big)$ соответственно). Если, в частности, X' и Y' — группы с циклическим регуляторным фактором, то $\mathrm{End}(X')$ и $\mathrm{End}(Y')$ изоморфны как кольца.*

Доказательство. Перечисленные факты содержатся в [7, замечание 3.6, теоремы 5.2, 5.8; 8, теорема 3.4; 109, лемма 9.1.10]. □

Кольцо эндоморфизмов блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X' кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором также является почти вполне разложимой группой с циклическим регуляторным фактором, что видно из следующего представления:

$$\mathcal{E} = \big\langle \mathrm{Hom}\big(X', R(X')\big), I' \big\rangle, \tag{91}$$

где I' — единичное отображение на X' (см. [7, теорема 5.2]).

Для таких групп имеет место следующая теорема.

Теорема 6.1 [61, теорема 4.6]. *Пусть X' и Y' — блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Если $\mathrm{End}(X') \cong \mathrm{End}(Y')$, то $X' \cong_{\mathrm{nr}} Y'$.*

Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 6.26. *Пусть X' и Y' — блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Тогда $X' \cong_{\mathrm{nr}} Y'$, если и только если $\mathrm{End}(X') \cong \mathrm{End}(Y')$.*

Аналогичный результат будет доказан для некоторого специального класса групп без кручения счётного ранга с использованием инструмента, который даёт следующая теорема.

Теорема 6.2 [10, теорема 2 (следствие)]. *Пусть*

$$X' = \sum_{p \in P} X'_{(p)}$$

является блочно-жёсткой почти вполне разложимой группой кольцевого типа с регулятором A' и $\mathcal{E} = \mathrm{End}(X')$ — её кольцо эндоморфизмов. Тогда $R(\mathcal{E}^+) = \mathrm{Hom}(X', A')^+$ и любой автоморфизм $\mathcal{B}$ кольца $\mathcal{E}$ однозначно продолжается до автоморфизма кольца $\mathrm{End}(A')$, причём

$$\mathcal{B} \in \bigcap_{p \in P} \mathrm{Aut}\, \mathcal{E}_p,$$

где $\mathcal{E}_p = \mathrm{End}(X'_{(p)})$.

Замечание 6.27. Доказательство этой теоремы базируется на том, что любой автоморфизм $\mathcal{B}$ кольца $\mathcal{E} = \mathrm{End}(X')$ индуцирует автоморфизм кольца $\mathcal{H} = \mathrm{Hom}(X', A')$. Попутно показано, что любой автоморфизм $\mathcal{B}$ кольца $\mathrm{Hom}(X', A')$ однозначно продолжается до автоморфизма кольца $\mathrm{End}(A')$ и

$$\mathcal{B} \in \bigcap_{p \in P} \mathrm{Aut}\, \mathcal{H}_p,$$

где $\mathcal{H}_p = \mathrm{End}(X'_{(p)}, A')$.

6.3. Локально почти вполне разложимые абелевы группы с обобщённо циклическими регуляторными факторами

В [9] и [64] дано определение 6.2 почти изоморфизма для абелевых групп без кручения произвольного ранга, которое совпадает с обычным понятием почти изоморфизма в случае групп конечного ранга.

Там же (аналогично [44, следствие 12.9 (b)]) доказано, что почти изоморфные группы обладают почти изоморфными прямыми разложениями для достаточно широкого класса $\mathcal{C}'$ групп счётного ранга, получивших название *локально почти вполне разложимых* групп в связи с тем, что все их вполне характеристические сервантные подгруппы конечного ранга являются почти вполне разложимыми группами.

Определение 6.28. Пусть T — счётное множество идемпотентных попарно несравнимых типов. Абелева группа без кручения X принадлежит классу $\mathcal{C}'$, если она содержит вполне разложимую подгруппу

$$R(X) = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}\left(R(X)\right)} C_\tau,$$

для которой выполнены следующие условия:

1) $T_{\mathrm{cr}}\big(R(X)\big) \subseteq T$;
2) C_τ — сервантная подгруппа конечного ранга в X для каждого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(C_X)$;
3) для некоторого множества простых чисел P_X и $p^{n_p(X)}$-ограниченных p-примарных групп T_p^X
$$X/R(X) = \bigoplus_{p \in P_X} T_p^X;$$
4) для каждого $p \in P_X$ множество $\{q \in P_X \colon [T_p^X] \cap [T_q^X] \neq \varnothing\}$ конечно; здесь $[T_p^X]$ совпадает с наименьшим из подмножеств $\mathfrak{T}_p \subset T_{\mathrm{cr}}\big(R(X)\big)$, для которых
$$T_p^X \subseteq \bigg(\Big(\bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_p} C_\tau\Big)_*^X + R(X)\bigg)/R(X).$$

Определим класс $\mathcal{C}^0$ *локально почти вполне разложимых* групп с обобщённо циклическим регуляторным фактором, входящий в $\mathcal{C}'$ (не будучи так названными, эти группы фактически обсуждались в [59; 86, теоремы 91.1, 91.2]):

$$\mathcal{C}^0 = \bigg\{X \in \mathcal{C}' \colon X/R(X) = \bigoplus_{p \in P_X} T_p^X, \\ \text{где } T_p^X \text{ — конечные циклические группы порядков } p^{n_p(X)}\bigg\}. \tag{92}$$

Определим также класс $\mathcal{C}^0(A)$, подкласс класса $\mathcal{C}^0$, состоящий из групп счётного ранга, содержащих в качестве подгруппы некоторую фиксированную вполне разложимую группу

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau,$$

для которой $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$. Пусть

$$\mathcal{C}^0(A) = \bigg\{X \in \mathcal{C}^0 \colon R(X) = A \subset X,\ X/A = \bigoplus_{p \in P_X} T_p^X\bigg\}. \tag{93}$$

Мы будем использовать результаты, полученные в [9] для групп более широкого класса $\mathcal{C}'(A)$, определённого как

$$\mathcal{C}'(A) = \bigg\{X \in \mathcal{C}' \colon R(X) = A \subset X,\ X/A = \bigoplus_{p \in P_X} T_p^X, \\ \text{где } T_p^X - p^{n_p(X)}\text{-ограниченные, не обязательно циклические группы}\bigg\}. \tag{94}$$

Так как все однородные компоненты A_τ группы A по условию сервантны в $X \in \mathcal{C}'(A)$ и, значит, A является вполне характеристической подгруппой в X, мы называем $A = R(X)$ *регулятором* группы X в соответствии с теорией блочно-жёстких почти вполне разложимых групп.

Пусть группы $X \in \mathcal{C}^0(A)$, для которых $eX \subset A$, составляют класс $\mathcal{C}^0_e(A)$ (e — некоторое натуральное число). Очевидно, $X \in \mathcal{C}^0_e(A)$ означает, что $X \in \mathcal{C}^0_{e'}(A)$, если $e \mid e'$. Имеем

$$\mathcal{C}^0_e(A) \subset \mathcal{C}^0(A) \subset \mathcal{C}^0 \subset \mathcal{C}'. \tag{95}$$

Из $X \subset \mathbb{Q}A$ и определения 6.28 следует (единственно определённое) представление произвольной группы $X \in \mathcal{C}^0(A)$ в виде суммы её вполне характеристических подгрупп,

$$X = \sum_{p \in P_X} X_{(p)}, \quad \text{где} \quad X_{(p)} = X \cap \frac{A}{p^{n_p(X)}} \in \mathcal{C}^0_{p^{n_p(X)}}(A) \tag{96}$$

и $X_{(p)}/A = T_p^X$.

Расширяя подход теории почти вполне разложимых групп к группам счётного ранга, мы называем (96) *примарно-факторным* представлением группы $X \in \mathcal{C}^0(A)$. Мы естественно полагаем $X_{(p)} = A$ и $[T_p^X] = \varnothing$ для тех простых p, которые не принадлежат множеству P_X; тогда группа записывается в виде

$$X = \sum_{p \in \mathbb{P}} X_{(p)},$$

где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Очевидно, A является регулятором для каждой группы $X_{(p)}$ и

$$X/A = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} X_{(p)}/A.$$

Для $X \in \mathcal{C}^0(A)$ множества $[T_p^X]$ конечны, если $p \in P_X$, и

$$T_p^X \cong \Bigl(\bigoplus_{\tau \in [T_p^X]} A_\tau \Bigr)_*^{X_{(p)}} \Big/ \bigoplus_{\tau \in [T_p^X]} A_\tau.$$

Введём группы

$$X'_{(p)} = \Bigl(\bigoplus_{\tau \in [T_p^X]} A_\tau \Bigr)_*^{X_{(p)}}, \quad p \in P_X,$$

которые являются почти вполне разложимыми группами с p-примарными циклическими регуляторными факторами T_p^X и, значит,

$$X_{(p)} = X'_{(p)} \oplus \Bigl(\bigoplus_{\tau \notin [T_p^X]} A_\tau \Bigr). \tag{97}$$

Из (92), (93) следует, что множества

$$P_\tau(X) = \{p \in P_X : \tau \in [T_p^X]\} \tag{98}$$

конечны для всех $\tau \in T$.

Для удобства читателя мы будем рассматривать группы из класса $\mathcal{C}^0(A)$, все они имеют один и тот же фиксированный регулятор A и структурно совпадают с группами из $\mathcal{C}^0$ (см. (95)).

Теорема 6.29. *Пусть $X \in \mathcal{C}^0(A)$. Любая вполне характеристическая сервантная подгруппа конечного ранга группы X является почти вполне разложимой группой с циклическим регуляторным фактором.*

Доказательство. В [9, теорема 2.7] показано, что вполне характеристические сервантные подгруппы конечного ранга группы $X \in \mathcal{C}'(A)$ являются почти вполне разложимыми группами и их множество совпадает со множеством групп вида

$$V' = \Big(\bigoplus_{\sigma \in T'} A_\sigma\Big)_*^X,$$

где T' — любое конечное подмножество элементов из $T = T_{\mathrm{cr}}(X)$, при этом

$$R(V') = \bigoplus_{\sigma \in T'} A_\sigma$$

и

$$V'/R(V') \subset \bigoplus_{p \in P_X} T_p^X.$$

Если, в частности, $X \in \mathcal{C}^0(A)$, то, очевидно, $V'/R(V')$ является прямой суммой конечного числа p-примарных циклических групп T_p^X для некоторых различных простых чисел p из P_X. Значит, регуляторный фактор группы V' цикличен, как и требовалось. $\square$

Аналогично, используя [9, следствие 2.8] и рассматривая $X \in \mathcal{C}^0(A)$ как группу из класса $\mathcal{C}'(A)$, получаем следующее утверждение.

Следствие 6.30. *Если $X \in \mathcal{C}^0(A)$ и группа $L \subset R(X)$ имеет конечное множество критических типов $T' = T_{\mathrm{cr}}(L) \subset T$, то L_*^X — почти вполне разложимая группа с циклическим регуляторным фактором.*

Следуя [9, определение 2.9], на основании теоремы 6.29 мы называем группы из класса $\mathcal{C}^0(A)$ *локально почти вполне разложимыми группами с обобщённо циклическим регуляторным фактором*, имея в виду, что все их вполне характеристические сервантные подгруппы конечного ранга являются вполне разложимыми группами с циклическими регуляторными факторами.

Произвольные группы $X, Y \in \mathcal{C}^0(A)$, имеющие примарно-факторные представления

$$X = \sum_{p \in P_X} X_{(p)}, \quad Y = \sum_{p \in P_Y} Y_{(p)},$$

как и все группы из класса $\mathcal{C}'(A)$, обладают следующими свойствами:

1) $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, если и только если для каждого простого p существует отображение $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X, Y)$, удовлетворяющее условию $(Y/X\Phi_p)_p = 0$ (см. [9, следствие 2.25]);

2) $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, если и только если $X_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}} Y_{(p)}$ для каждого простого p (см. [9, предложение 2.24]);
3) если $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, то $P_X = P_Y$, $T_p^X \cong T_p^Y$ и $[T_p^X] = [T_p^Y]$ для любого простого p, а также $P_\tau(X) = P_\tau(Y)$ для любого $\tau \in T$ (см. [9, следствия 2.14, 2.26]);
4) если $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, то $R(X) \cong R(Y)$, и для любого $\Phi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ верно, что $\Phi|_{R(X)} \in \mathrm{Hom}\big(R(X), R(Y)\big)$, в частности, изоморфное отображение $X \to Y$ индуцирует изоморфное отображение $R(X) \to R(Y)$ (см. [9, теорема 2.4, лемма 2.5]).

Нам понадобится описание [9, следствие 2.16] кольца эндоморфизмов рассматриваемых групп:

$$\mathrm{End}(X) = \big\{\Phi \in \mathrm{End}(A)\colon \big(p^{n_p} X_{(p)}\big)\Phi \subset p^{n_p} X_{(p)} \text{ для всех } p\big\}, \tag{99}$$

где $p^{n_p} = p^{n_p(X)}$ для любого простого p. Поскольку A — регулятор в $X_{(p)}$ для любого p, верно, что $\Phi \in \mathrm{End}(X_{(p)})$ влечёт $\Phi|_A \in \mathrm{End}(A)$. Кроме того, $X_{(p)}$ содержится в делимой оболочке $\mathbb{Q}A$ регулятора A, что позволяет рассматривать $\mathrm{End}(X_{(p)})$ как подкольцо кольца

$$\mathrm{End}(A) \cong \bigoplus_{\tau \in T} \mathrm{End}(A_\tau),$$

следовательно,

$$\mathrm{End}(X) = \bigcap_{p \in P_X} \mathrm{End}\big(X_{(p)}\big). \tag{100}$$

Аналогично для подкольца $\mathrm{Hom}(X, A)$ кольца $\mathrm{End}(X)$

$$\mathrm{Hom}(X, A) = \bigcap_{p \in P_X} \mathrm{Hom}(X_{(p)}, A). \tag{101}$$

Обозначим тождественное отображение на A как

$$I = \sum_{\tau \in T} I_\tau \in \bigoplus_{\tau \in T} \mathrm{End}(A_\tau) = \mathrm{End}(A),$$

где $I_\tau \in \mathrm{End}(A_\tau)$.

Из (97), (100) следует, что для любого p

$$\mathrm{End}\big(X_{(p)}\big) = \mathrm{End}\big(X'_{(p)}\big) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\tau \notin [T_p^X]} \mathrm{End}(A_\tau)\Bigg). \tag{102}$$

Отсюда и из теоремы 6.25, применённой к группе $X'_{(p)}$ конечного ранга, сразу получаем следствие.

Следствие 6.31. *Пусть $X_{(p)} \in \mathcal{C}^0_{p^{n_p}}(A)$. Тогда*

$$R\big(\mathrm{End}\big(X_{(p)}\big)\big) = \mathrm{Hom}(X_{(p)}, A) = \mathrm{Hom}\Bigg(X'_{(p)}, \bigoplus_{\tau \in [T_p^X]} A_\tau\Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\tau \notin [T_p^X]} \mathrm{End}(A_\tau)\Bigg),$$

т. е.

$$\operatorname{Hom}\bigl(X_{(p)}, A\bigr) = \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} H_\tau^p \oplus \Biggl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} \operatorname{End}(A_\tau)\Biggr),$$

причём

$$\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} H_\tau^p = \operatorname{Hom}\Biggl(X'_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\Biggr) = R\bigl(\operatorname{End}\bigl(X'_{(p)}\bigr)\bigr) -$$

вполне разложимая группа с τ-однородными компонентами $H_\tau^p \subset \operatorname{End}(A_\tau)$, $\tau \in [T_p^X]$.

Значит, для произвольной группы $X \in \mathcal{C}^0(A)$ из (101) выводим, что

$$\operatorname{Hom}(X, A) = \bigoplus_{\tau\in T}\Biggl(\bigcap_{p\in P_\tau(X)} H_\tau^p\Biggr) = \bigoplus_{\tau\in T} H_\tau, \tag{103}$$

где

$$H_\tau = \bigcap_{p\in P_\tau(X)} H_\tau^p = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} H_\tau^p -$$

τ-однородные вполне разложимые группы конечного ранга, как пересечения конечного числа однородных групп H_τ^p, $p \in P_\tau(X)$, что следует из (98) на основании [86, теорема 86.6] (естественно считать, что $H_\tau^p = \operatorname{End}(A_\tau)$, если $\tau \in T \setminus [T_p^X]$).

Теорема 6.32. *Пусть $X \in \mathcal{C}^0_{p^{n_p}}(A)$ и Y — группа из класса $\mathcal{C}^0$. Если $\operatorname{End}(X) \cong \operatorname{End}(Y)$, то $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$.*

Доказательство. Из (97) и (102) получаем, что

$$X = X'_{(p)} \oplus \Biggl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} A_\tau\Biggr),$$

где $X'_{(p)}$ — группа с циклическим регуляторным фактором с регулятором

$$\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau,$$

причём

$$\operatorname{End}(X) = \operatorname{End}\bigl(X'_{(p)}\bigr) \oplus \Biggl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} \operatorname{End}(A_\tau)\Biggr).$$

По условию $\operatorname{End}(X) \cong \operatorname{End}(Y)$ имеем, что

$$Y = Y'_{(p)} \oplus \Biggl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} A_\tau\Biggr),$$

где $Y'_{(p)}$ тоже имеет циклический регуляторный фактор, кроме того, $\operatorname{End}\bigl(X'_{(p)}\bigr) \cong \operatorname{End}\bigl(Y'_{(p)}\bigr)$. Теорема 6.2 обеспечивает, что $X'_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}} Y'_{(p)}$, и значит, $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, как и требовалось. $\square$

Рассматривается произвольная группа $X \in \mathcal{C}^0(A)$. Для каждого элемента $\tau \in T$ введём конечное множество типов

$$T_\tau = T_\tau(X) = \{\sigma\colon \sigma \in [T_q^X] \text{ для некоторого } q \in P_\tau(X)\}$$

или $T_\tau = \{\tau\}$, если $P_\tau(X) = \varnothing$. Возьмём $\widetilde{X^\tau}$, сервантную вполне характеристическую подгруппу в X конечного ранга, определённую как

$$\widetilde{X^\tau} = \left(\bigoplus_{\sigma\in T_\tau} A_\sigma\right)_*^X = \sum_{p\in P_X\colon [T_p^X]\subset T_\tau} \left(X'_{(p)} + \bigoplus_{\sigma\in T_\tau} A_\sigma\right), \tag{104}$$

она является почти вполне разложимой группой с регулятором

$$R(\widetilde{X^\tau}) = \bigoplus_{\sigma\in T_\tau} A_\sigma$$

и циклическим регуляторным фактором по теореме 6.29. Для неё (104) является примарно-факторным представлением со слагаемыми

$$\widetilde{X^\tau}_{(p)} = X'_{(p)} + \bigoplus_{\sigma\in T_\tau} A_\sigma.$$

Ясно, что $\tau \in T_\tau$ и $[T_p^X] \subset T_\tau$ для любого $p \in P_\tau(X)$.

Пусть

$$\mathrm{Hom}\left(\widetilde{X^\tau}, \bigoplus_{\sigma\in T_\tau} A_\sigma\right) = \bigoplus_{\sigma\in T_\tau} \widetilde{H_\sigma} \text{ —}$$

разложение группы $R\bigl(\mathrm{End}\bigl(\widetilde{X^\tau}\bigr)\bigr)$ на её однородные компоненты. По построению видно, что

$$\widetilde{H_\tau} = H_\tau = \bigcap_{p\in P_\tau(X)} H_\tau^p = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} H_\tau^p, \tag{105}$$

где H_τ — τ-однородная компонента группы $\mathrm{Hom}(X, A)$ счётного ранга (см. следствие 6.31 и (103)). В частности, если $P_\tau(X) = \varnothing$, то $\widetilde{X^\tau} = A_\tau$ и $\widetilde{H_\tau} = H_\tau = \mathrm{End}(A_\tau)$.

Теорема 6.33. *Пусть* $X \in \mathcal{C}^0(A)$. *Тогда* $\mathrm{End}(X) = \langle \mathrm{Hom}(X, A), I\rangle$ *и* $R(\mathrm{End}(X)^+) = \mathrm{Hom}(X, A)$.

Доказательство. Из (91) для любого $p \in P_X$ следует, что

$$\mathrm{End}\bigl(X'_{(p)}\bigr) = \left\langle \mathrm{Hom}\left(X'_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\right), I_p \right\rangle,$$

где I_p — тождественное отображение на

$$\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau.$$

Значит, $\operatorname{End}\bigl(X_{(p)}\bigr) = \bigl\langle \operatorname{Hom}\bigl(X_{(p)}, A\bigr), I\bigr\rangle$, поскольку

$$\operatorname{Hom}\bigl(X_{(p)}, A\bigr) = \operatorname{Hom}\left(X'_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\right) \oplus \left(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} \operatorname{End}(A_\tau)\right)$$

(см. (102)). Из (100) и (101) сразу получаем, что $\operatorname{End}(X) = \langle \operatorname{Hom}(X, A), I\rangle$.

Сервантность подгруппы H_τ в

$$\operatorname{End}\bigl(\widetilde{X^\tau}\bigr) = \left\langle \operatorname{Hom}\left(\widetilde{X^\tau}, \bigoplus_{\sigma\in T_\tau} A_\sigma\right), I^\tau\right\rangle,$$

где I^τ обозначает единичное отображение на $\widetilde{X^\tau}$, влечёт её сервантность в $\operatorname{End}(X)$, и это верно для всех $\tau \in T$, что доказывает равенство $R(\operatorname{End}(X)^+) = \operatorname{Hom}(X, A)$, как и требовалось. $\square$

Теорема 6.34. *Пусть* $X, Y \in \mathcal{C}^0$ *и* $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$. *Тогда* $\operatorname{End}(X) \cong \operatorname{End}(Y)$.

Доказательство. Поскольку почти изоморфные группы имеют изоморфные регуляторы [9, теорема 2.4], отождествляя их, мы полагаем, не умаляя общности, что $X, Y \in \mathcal{C}^0(A)$ для некоторой вполне разложимой группы A со множеством критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$.

Имеем примарно-факторные представления

$$X = \sum_{p\in P_X} X_{(p)}, \quad Y = \sum_{p\in P_Y} Y_{(p)}$$

(см. (96)), в которых $X_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}} Y_{(p)}$ (свойство 2)). Получаем, что в разложениях (97) групп

$$X_{(p)} = X'_{(p)} \oplus \left(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} A_\tau\right), \quad Y_{(p)} = Y'_{(p)} \oplus \left(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^Y]} A_\tau\right)$$

группы с циклическим регуляторным фактором $X'_{(p)}$ и $Y'_{(p)}$ почти изоморфны (в частности, $[T_p^X] = [T_p^Y]$). Для них известно, что $\operatorname{End}\bigl(X'_{(p)}\bigr) \cong \operatorname{End}\bigl(Y'_{(p)}\bigr)$ (см. теорему 6.25). Отсюда для любого p ввиду (102) сразу получаем, что $\operatorname{End}\bigl(X_{(p)}\bigr) \cong \operatorname{End}\bigl(Y_{(p)}\bigr)$.

Фиксируем произвольный элемент $\tau \in T$ и замечаем, что $T_\tau(X) = T_\tau(Y)$, так как $[T_p^X] = [T_p^Y]$ для любого p. Обозначаем это множество как T_τ. Из примарно-факторного представления (104) и [109, теорема 9.2.8] видно, что $\widetilde{X^\tau} \cong_{\mathrm{nr}} \widetilde{Y^\tau}$, поскольку для любого p выполняется

$$\left(X'_{(p)} + \bigoplus_{\tau\in T_\tau} A_\tau\right) \cong_{\mathrm{nr}} \left(Y'_{(p)} + \bigoplus_{\tau\in T_\tau} A_\tau\right).$$

Значит, по теореме 6.25 имеем изоморфизмы колец

$$R\bigl(\operatorname{End}\bigl(\widetilde{X^\tau}\bigr)\bigr) = \operatorname{Hom}\left(\widetilde{X^\tau}, \bigoplus_{\tau\in T_\tau} A_\tau\right) \cong \operatorname{Hom}\left(\widetilde{Y^\tau}, \bigoplus_{\tau\in T_\tau} A_\tau\right) = R\bigl(\operatorname{End}\bigl(\widetilde{Y^\tau}\bigr)\bigr)$$

и $\widetilde{H_\tau} \cong \widetilde{H'_\tau}$, где

$$R\big(\mathrm{End}\big(\widetilde{X^\tau}\big)\big) = \bigoplus_{\sigma \in T_\tau} \widetilde{H_\sigma}, \quad R\big(\mathrm{End}\big(\widetilde{Y^\tau}\big)\big) = \bigoplus_{\sigma \in T_\tau} \widetilde{H'_\sigma} \,-$$

разложения на однородные компоненты. Напомним, что $\widetilde{H_\tau} = H_\tau$ и $\widetilde{H'_\tau} = H'_\tau$, где H_τ и H'_τ — τ-однородные компоненты колец $\mathrm{Hom}(X, A)$ и $\mathrm{Hom}(Y, A)$ соответственно (см. (105)). Таким образом, $H_\tau \cong H'_\tau$ для любого $\tau \in T$, что влечёт кольцевой изоморфизм $\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(Y, A)$, при этом изоморфизм τ-однородных компонент $H_\tau \to H'_\tau$ для любого τ можно рассматривать как сужение некоторого изоморфизма $R\big(\mathrm{End}\big(\widetilde{X^\tau}\big)\big) \to R\big(\mathrm{End}\big(\widetilde{Y^\tau}\big)\big)$ к τ-однородной компоненте, так как эти кольца являются блочно-жёсткими вполне разложимыми аддитивными структурами. Замечание 6.27 позволяет сделать заключение, что любой автоморфизм кольца H_τ (однозначно) продолжается до автоморфизма кольца $\mathrm{End}(A_\tau)$, что влечёт аналогичное продолжение изоморфизма $H_\tau \to H'_\tau$, при котором единица I_τ кольца $\mathrm{End}(A_\tau)$ отображается на себя. Поскольку это выполняется для любого τ и

$$I = \sum_{\tau \in T} I_\tau \in \bigoplus_{\tau \in T} \mathrm{End}(A_\tau) = \mathrm{End}(A),$$

построенное отображение переводит единицу $I \in \mathrm{End}(A)$ на себя и получается изоморфизм колец $\langle \mathrm{Hom}(X, A), I\rangle$ и $\langle \mathrm{Hom}(Y, A), I\rangle$, которые совпадают с $\mathrm{End}(X)$ и $\mathrm{End}(Y)$ соответственно по теореме 6.33. Мы доказали, что $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$, как и требовалось. □

Теорема 6.35. *Пусть* $X, Y \in \mathcal{C}^0$ *и* $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$. *Тогда* $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что $X \in \mathcal{C}^0(A)$ для некоторой вполне разложимой группы A со множеством критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$.

Пусть сначала $X \in \mathcal{C}^0_{p^{n_p}}(A)$, где p — некоторое простое число. Тогда по теореме 6.32 $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$.

В общем случае, когда $X \in \mathcal{C}^0(A)$, имеем $\mathrm{End}(X) \subset \mathrm{End}(A)$, и условие $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$ позволяет считать, что $\mathrm{End}(Y) \subset \mathrm{End}(A)$, т. е. $Y \in \mathcal{C}^0(A)$ (см. (99)).

Пусть $\mathcal{B}\colon \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(Y)$ — изоморфизм. Его сужение даёт изоморфизм регуляторов $\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(Y, A)$ по теореме 6.33 и свойству 4) почти изоморфных (в данном случае изоморфных) групп $\mathrm{End}(X)^+$ и $\mathrm{End}(Y)^+$. Поскольку T состоит из попарно несравнимых типов, он индуцирует изоморфизм τ-однородных компонент из разложений (103) для

$$\mathrm{Hom}(X, A) = \bigoplus_{\tau \in T} \Bigg(\bigcap_{p \in P_\tau(X)} H^p_\tau \Bigg) = \bigoplus_{\tau \in T} H_\tau,$$

$$\mathrm{Hom}(Y, A) = \bigoplus_{\tau \in T} \Bigg(\bigcap_{p \in P_\tau(Y)} {H'}^p_\tau \Bigg) = \bigoplus_{\tau \in T} H'_\tau,$$

где

$$\operatorname{Hom}\bigl(X_{(p)}, A\bigr) = \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} H_\tau^p \oplus \Biggl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} \operatorname{End}(A_\tau)\Biggr),$$

$$\operatorname{Hom}\bigl(Y_{(p)}, A\bigr) = \bigoplus_{\tau\in[T_p^Y]} H'^p_\tau \oplus \Biggl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^Y]} \operatorname{End}(A_\tau)\Biggr).$$

Напомним, что H_τ и H'_τ совпадают с τ-однородными компонентами из канонических разложений групп $R\bigl(\operatorname{End}\bigl(\widetilde{X^\tau}\bigr)\bigr)$ и $R\bigl(\operatorname{End}\bigl(\widetilde{Y^\tau}\bigr)\bigr)$ соответственно, при этом для любого $p \in P_\tau(X)$ из предыдущего следует, что

$$\operatorname{Hom}\bigl(X_{(p)}, A\bigr) = \operatorname{Hom}\Biggl(\widetilde{X^\tau}_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in T_\tau(X)} A_\tau\Biggr) \oplus \Biggl(\bigoplus_{\tau\notin T_\tau(X)} \operatorname{End}(A_\tau)\Biggr)$$

и аналогично

$$\operatorname{Hom}(Y_{(p)}, A) = \operatorname{Hom}\Biggl(\widetilde{Y^\tau}_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in T_\tau(Y)} A_\tau\Biggr) \oplus \Biggl(\bigoplus_{\tau\notin T_\tau(Y)} \operatorname{End}(A_\tau)\Biggr)$$

для любого $p \in P_\tau(Y)$ (см. (104)). Как и в доказательстве предыдущей теоремы, мы рассматриваем изоморфизм τ-однородных компонент $H_\tau \to H'_\tau$ для любого τ как сужение некоторого изоморфизма $R\bigl(\operatorname{End}\bigl(\widetilde{X^\tau}\bigr)\bigr) \to R\bigl(\operatorname{End}\bigl(\widetilde{Y^\tau}\bigr)\bigr)$ к τ-однородной компоненте. Из (105) по замечанию 6.27 получаем, что $H_\tau^p\mathcal{B} = H'^p_\tau$ для любого простого p и $\tau \in T$ (как и раньше, $H_\tau^p = \operatorname{End}(A_\tau)$ для $\tau \notin [T_p^X]$), при этом единица $I_\tau \in \operatorname{End}(A_\tau)$ отображается на себя. Получаем, что $\bigl\langle \operatorname{Hom}\bigl(X_{(p)}, A\bigr), I\bigr\rangle \cong \bigl\langle \operatorname{Hom}\bigl(Y_{(p)}, A\bigr), I\bigr\rangle$, т. е. $\operatorname{End}\bigl(X_{(p)}\bigr) \cong \operatorname{End}\bigl(Y_{(p)}\bigr)$ для любого p, значит, $X_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}} Y_{(p)}$ для любого p (см. теоремы 6.32, 6.33). Воспользовавшись критерием почти изоморфизма (свойство 2)), мы получаем, что $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, чем завершается доказательство. □

Отсюда и из теоремы 6.34 получаем заключительную теорему.

Теорема 6.36. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}^0$. Тогда $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, если и только если* $\operatorname{End}(X) \cong \operatorname{End}(Y)$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-11-50181.

Литература

[1] Артамонов В. А., Латышев В. Н. Линейная алгебра и выпуклая геометрия. — М.: Факториал Пресс, 2004.

[2] Балаба И. Н., Михалёв А. В. Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 3—18.

[3] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Антиизоморфизмы колец эндоморфизмов модулей и антиэквивалентности Мориты // УМН. — 1995. — Т. 50, № 1 (301). — С. 187—188.

[4] Беккер И. Х., Кожухов С. Ф. Автоморфизмы абелевых групп без кручения. — Томск, 1988.

[5] Благовещенская Е. А. О прямых разложениях абелевых групп без кручения конечного ранга // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1983. — Т. 132. — С. 17—25.

[6] Благовещенская Е. А. Разложения абелевых групп конечного ранга без кручения в прямые суммы неразложимых групп // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, № 2. — С. 62—69.

[7] Благовещенская Е. А. Автоморфизмы колец эндоморфизмов блочно-жёстких почти вполне разложимых групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 23—50.

[8] Благовещенская Е. Двойственные связи между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов // Соврем. матем. и её прил. — 2004. — Т. 13.

[9] Благовещенская Е. Прямые разложения локально почти вполне разложимых групп счётного ранга // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, № 4. — С. 24—47.

[10] Благовещенская Е. Двойственная структура почти вполне разложимых групп и их колец эндоморфизмов // УМН. — 2006. — Т. 61, № 2. — С. 159—160.

[11] Благовещенская Е. А. Почти вполне разложимые группы и кольца // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 3—27.

[12] Благовещенская Е. Почти вполне разложимые группы с примарным регуляторным фактором и их кольца эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 17—38.

[13] Благовещенская Е. Теоремы реализации и классификации для одного класса колец без кручения конечного ранга // УМН. — 2006. — Т. 61, № 4. — С. 183—184.

[14] Благовещенская Е. А. Определяемость абелевых групп без кручения счётного ранга некоторого класса их кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 1. — С. 31—43.

[15] Благовещенская Е. А. Почти вполне разложимые абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2009.

[16] Благовещенская Е. А., Яковлев А. В. Прямые разложениях абелевых групп конечного ранга без кручения // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1. — С. 111—127.

[17] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2004. — Т. 10, № 2. — С. 135—224.

[18] Бунина Е. И., Ройзнер М. А. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов абелевых p-групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, № 7. — С. 81—112.

[19] Гриншпон С. Я., Себельдин А. М. Определяемость периодических абелевых групп своими группами эндоморфизмов // Матем. заметки. — 1995. — Т. 57, № 5. — С. 663—669.

[20] Джекобсон Н. Теория колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1947.

[21] Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.

[22] Кожухов С. Ф. Об одном классе почти вполне разложимых абелевых групп без кручения // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1983. — Т. 10. — С. 29—36.

[23] Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Матем. сб. — 1974. — Т. 95, № 2. — С. 214—228.

[24] Крылов П. А. Абелевы группы без кручения и их кольца эндоморфизмов // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1979. — Т. 11. — С. 26—33.

[25] Крылов П. А. Сильно однородные абелевы группы без кручения // Сиб. матем. журн. — 1983. — Т. 24, № 2. — С. 77—84.

[26] Крылов П. А. О двух проблемах, касающихся груп расширений абелевых групп // Матем. сб. — 1994. — Т. 185, № 1. — С. 75—94.

[27] Крылов П. А. Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43, № 1. — С. 60—76.

[28] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал Пресс, 2006.

[29] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над областями дискретного нормирования. — М.: Факториал Пресс, 2007.

[30] Крылов П. А., Туганбаев А. А., Царёв А. В. Вокруг теоремы Бэра—Капланского // Итоги науки и техн. Тем. обзоры. — 2019. — Т. 159. — С. 46—67.

[31] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. — 1945. — Т. 16. — С. 129—162.

[32] Куликов Л. Я. О прямых разложениях групп // Укр. матем. журн. — 1952. — Т. 4. — С. 230—275.

[33] Куликов Л. Я. Абелевы группы: избранные труды (сб. работ Л. Я. Куликова). — М.: Буки Веди, 2013.

[34] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[35] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[36] Мальцев А. И. Абелевы группы конечного ранга без кручения // Матем. сб. — 1938. — Т. 4, № 1. — С. 45—68.

[37] Михалёв А. В. Изоморфизмы колец эндоморфизмов модулей, близких к свободным // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1989. — № 4. — С. 20—27.

[38] Михалёв А. В., Мишина А. П. Бесконечные абелевы группы: методы и результаты // Фундамент. и прикл. матем. — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 319—375.

[39] Себельдин А. М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11, № 4. — С. 403—408.

[40] Себельдин А. М. Определяемость векторных групп полугруппами эндоморфизмов // Алгебра и логика. — 1994. — Т. 26, № 4. — С. 422—428.

[41] Туганбаев А. А. Кольца эндоморфизмов строго неразложимых модулей // УМН. — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 207—208.

[42] Фомин А. А. Двойственность в некоторых классах абелевых групп без кручения конечного ранга // Сиб. матем. журн. — 1986. — Т. 27. — С. 117—127.

[43] Фомин А. А. Инварианты и двойственность в некоторых классах абелевых групп без кручения конечного ранга // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 1. — С. 63—83.

[44] Arnold D. Finite-Rank Torsion-Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[45] Arnold D. Endomorphism rings and submodules of finite rank torsion-free Abelian groups // Rocky Mountain J. Math. — 1982. — Vol. 32, no. 2. — P. 241—256.

[46] Arnold D. M. A duality for quotient divisible Abelian groups of finite rank // Pacific J. Math. — 1972. — Vol. 42. — P. 11—15.

[47] Arnold D. M., Lady L. Endomorphism rings and direct sums of torsion-free Abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 211. — P. 225—237.

[48] Arnold D. M., Vinsonhaler C. Pure subgroups of finite rank completely decomposable groups. II // Berlin: Springer, 1984. — Abelian Group Theory. — Berlin: Springer, 1983. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1006). — P. 97—143.

[49] Arnold D. M., Vinsonhaler C. Duality and invariants for Butler groups // Pacific J. Math. — 1991. — Vol. 148. — P. 1—10.

[50] Baer R. Automorphism rings of primary Abelian operator groups // Ann. Math. — 1943. — Vol. 44. — P. 192—227.

[51] Baer R. Linear algebra and projective geometry. — New York: Columbia University, 1952.

[52] Baer R. Linear algebra and projective geometry. II. — New York: Columbia University, 1966.

[53] Benabdallah R., Mutzbauer O. On direct decompositions of torsion-free Abelian groups of rank 4 // Abelian Group Theory. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 874). — P. 62—69.

[54] Blagoveshchenskaya E. Direct decompositions of almost completely decomposable Abelian groups // Abelian Groups and Modules. — New York: Marcel Dekker, 1996. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 182). — P. 163—179.

[55] Blagoveshchenskaya E. Classification of a class of almost completely decomposable groups // Rings, Modules, Algebras and Abelian Groups. — New York: Marcel Dekker, 2004. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 236). — P. 45—54.

[56] Blagoveshchenskaya E. Classification of a class of finite rank Butler groups // Models, Modules and Abelian Groups. — 2008. — P. 135—146.

[57] Blagoveshchenskaya E. Endomorphism rings of rigid almost completely decomposable Abelian groups // J. Math. Sci. — 2014. — Vol. 197, no. 4. — P. 467—478.

[58] Blagoveshchenskaya E. Direct decompositions of torsion-free Abelian groups // Lobachevskii J. Math. — 2020. — Vol. 41, no. 9. — P. 1640—1646.

[59] Blagoveshchenskaya E., Göbel R. Classification and direct decompositions of some Butler groups of countable rank // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30, no. 7. — P. 3403—3427.

[60] Blagoveshchenskaya E., Göbel R., Strüngmann L. Classification of some Butler groups of infinite rank // J. Algebra. — 2013. — Vol. 380. — P. 1—17.

[61] Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P. The Baer—Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups // Contemp. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 85—93.

[62] Blagoveshchenskaya E., Kunetz D. Direct decomposition theory of torsion-free Abelian groups of finite rank: graph method // Lobachevskii J. Math. — 2018. — Vol. 39, no. 1. — P. 29—34.

[63] Blagoveshchenskaya E., Mader A. Decompositions of almost completely decomposable Abelian groups // Contemp. Math. — 1994. — Vol. 171. — P. 21—36.

[64] Blagoveshchenskaya E., Strüngmann L. Near-isomorphism for a class of infinite rank torsion-free Abelian groups // Commun. Algebra. — 2007. — Vol. 35. — P. 1—18.

[65] Blagoveshchenskaya E., Strüngmann L. H. Direct decomposition theory under near-isomorphism for a class of infinite rank torsion-free Abelian groups // J. Group Theory. — 2017. — Vol. 20, no. 2. — P. 325—346.

[66] Bowshell R., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. — 1977. — Vol. 228. — P. 197—214.

[67] Breaz S. A Baer—Kaplansky theorem for modules over principal ideal domains // J. Commut. Algebra. — 2015. — Vol. 7, no. 1. — P. 1—7.

[68] Breaz S., Calugareanu G. Every Abelian group is determined by a subgroup lattice // Stud. Sci. Math. Hungar. — 2008. — Vol. 45. — P. 135—137.

[69] Burkhardt R. On a special class of almost completely decomposable groups. I // Abelian Groups and Modules. Proc. of the Udine Conf. — (CISM Courses Lect. Notes; Vol. 287). — 1984. — P. 141—150.

[70] Butler M. C. R. A class of torsion-free Abelian groups of finite rank // Proc. London Math. Soc. — 1965. — Vol. 40. — P. 680—698.

[71] Corner A. L. S. A note on rank and decomposition of torsion-free Abelian groups // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1961. — Vol. 57, no. 2. — P. 230—233.

[72] Corner A. L. S., Goldsmith B., Wallutis S. L. Anti-isomorphisms and the failure of duality // Models, Modules and Abelian groups. In Memory of A. L. S. Corner. — Walter de Gruyter, 2008. — P. 315—323.

[73] Crivei S., Tütüncü D. K. Baer—Kaplansky classes in Grothendieck categories and applications // Mediterranean J. Math. — 2019. — Vol. 16. — P. 90.

[74] Crivei S., Tütüncü D. K., Tribak R. Baer—Kaplansky classes in categories: transfer via functors // Commun. Algebra. — 2020. — Vol. 48, no. 7. — P. 1—13.

[75] Faticoni T. Categories of modules over endomorphism rings // Mem. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 103, no. 492. — P. 140—159.

[76] Faticoni T., Schultz P. Direct decompositions of ACD groups with primary regulating index // Abelian Groups and Modules. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 182). — New York: Marcel Dekker, 1996. — P. 233—241.

[77] Files S. T. Endomorphism algebras of modules with distinguished torsion-free elements // J. Algebra. — 1995. — Vol. 178. — P. 264—276.

[78] Files S., Wickless W. The Baer—Kaplansky theorem for a class of global mixed Abelian groups // Rocky Mountain J. Math. — 1996. — Vol. 26, no. 2. — P. 593—613.

[79] Flagg M. A Jacobson radical isomorphism theorem for torsion-free modules // Models, Modules and Abelian Groups. — Berlin: Walter de Gruyter, 2008. — P. 309—314.

[80] Flagg M. The role of the Jacobson radical in isomorphism theorems // Contemp. Math. — 2012. — Vol. 576. — P. 77—88.

[81] Flagg M. The Jacobson radical's role in isomorphism theorems for p-adic modules extends to topological isomorphism // Groups, Modules, and Model Theory—Surveys and Recent Developments. — Berlin: Springer, 2017. — P. 285—300.

[82] Fomin A. A. The category of quasi-homomorphisms of Abelian torsion-free groups of finite rank // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 91—111.

[83] Fomin A. A. Abelian groups in Russia // Rocky Mountain J. Math. — 2002. — Vol. 32, no. 4. — P. 1161—1180.

[84] Fomin A., Wickless W. Categories of mixed and torsion-free Abelian groups // Abelian Groups and Modules. — Boston: Kluwer, 1995. — P. 185—192.

[85] Fomin A. A., Wickless W. J. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, no. 1. — P. 45—52.

[86] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vols. 1, 2. — Academic Press, 1970, 1973.

[87] Fuchs L. Reinhold Baer and his influence on the theory of Abelian groups // Illinois J. Math. — 2003. — Vol. 47. — P. 207—222.

[88] Fuchs L. Abelian Groups. — Berlin: Springer, 2015.

[89] Glaz S., Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups // Commun. Algebra. — 1994. — Vol. 22, no. 4. — P. 1161—1176.

[90] Goldsmith B. Endomorphism rings of torsion-free modules over a complete discrete valuation ring // J. London Math. Soc. — 1978. — Vol. 18, no. 3. — P. 464—471.

[91] Goldsmith B., Göbel R. On almost-free modules over complete discrete valuation rings // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1991. — Vol. 86. — P. 75—87.

[92] Hassler W., Wiegand R. Direct sum cancellation for modules over one-dimensional rings // J. Algebra. — 2005. — Vol. 283. — P. 93—124.

[93] Hausen J., Johnson J. A. Determining Abelian p-groups by the Jacobson radical of their endomorphism rings // J. Algebra. — 1995. — Vol. 174, no. 1. — P. 217—224.

[94] Hausen J., Praeger C. E., Schultz P. Most Abelian p-groups are determined by the Jacobson radical of their endomorphism rings // Math. Z. — 1994. — Vol. 216, no. 3. — P. 431—436.

[95] Ivanov G. Generalizing the Baer—Kaplansky theorem // J. Pure Appl. Algebra. — 1998. — Vol. 133. — P. 107—115.

[96] Ivanov G., Vámos P. A characterization of FGC rings // Rocky Mountain J. Math. — 2002. — Vol. 32. — P. 1485—1492.

[97] Jonsson B. On direct decompositions of torsion-free Abelian groups // Math. Scand. — 1957. — Vol. 5. — P. 230—235.

[98] Jonsson B. On direct decompositions of torsion-free Abelian groups // Math. Scand. — 1959. — Vol. 7. — P. 361—371.

[99] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1954.

[100] Koppelberg S. Handbook on Boolean Algebras. — Amsterdam: North-Holland, 1989.

[101] Kurosh A. G. Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range // Ann. Math. — 1937. — Vol. 38. — P. 175—203.

[102] Lady L. Summands of finite rank torsion-free Abelian groups // J. Algebra. — 1974. — Vol. 32. — P. 51—52.

[103] Lady L. Almost completely decomposable torsion-free Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 45. — P. 41—47.

[104] Lady L. Nearly isomorphic torsion-free Abelian groups // J. Algebra. — 1975. — Vol. 35. — P. 235—238.

[105] Leptin H. Abelsche p-Gruppen und ihre Automorphismengruppen // Math. Z. — 1960. — Vol. 73. — P. 235—253.

[106] Liebert W. Endomorphism rings of free modules over principal ideal domains // Duke Math. J. — 1974. — Vol. 41. — P. 323—328.

[107] Liebert W. Isomorphic automorphism groups of primary Abelian groups // Abelian Group Theory. — Gordon and Breach, 1987. — P. 9—31.

[108] Mader A. Almost completely decomposable torsion-free Abelian groups // Abelian Groups and Modules. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1995. — (Math. Its Appl.; Vol. 343). — P. 343—366.

[109] Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 2000. — (Algebra, Logic and Applications; Vol. 13).

[110] Mader A., Schultz P. Endomorphism rings and automorphism groups of almost completely decomposable groups // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28. — P. 51—68.

[111] Mader A., Strüngmann L. Bounded essential extensions of completely decomposable Abelian groups // J. Algebra. — 2000. — Vol. 229. — P. 205—233.

[112] May W. Isomorphism of endomorphism algebras over complete discrete valuation rings // Math. Z. — 1990. — Vol. 204. — P. 485—499.

[113] May W., Toubassi E. Endomorphisms of Abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky // J. Algebra. — 1976. — Vol. 43. — P. 1—13.

[114] Mikhalev A. V. Isomorphisms and antiisomorphisms of endomorphism rings of modules // First Int. Tainan-Moscow Algebra Workshop, 1996. — P. 69—122.

[115] O'Meara K. C., Vinsonhaler C. Separative cancellation and multiple isomorphism in torsion-free Abelian groups // J. Algebra. — 1999. — Vol. 221. — P. 536—550.

[116] Reid J. Some matrix rings associated with ACD groups // Abelian Groups and Modules. Int. Conf. in Dublin. — 1998. — P. 191—198.

[117] Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Aust. Math. Soc. — 1973. — Vol. 15. — P. 60—69.

[118] Schultz P. When is an Abelian p-group determined by the Jacobson radical of its endomorphism ring // Contemp. Math. — 1994. — Vol. 171. — P. 385—396.

[119] Schultz P., Sebeldin A., Sylla A. L. Determination of torsion Abelian groups by their automorphism groups // Bull. Aust. Math. Soc. — 2003. — Vol. 67. — P. 511—519.

[120] Stelzer J. A cancellation criterion for finite-rank torsion-free Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 94. — P. 363—368.

[121] Susanto H., Irawati S., Hidayah I. N., Irawati I. Isomorphism between endomorphism rings of modules over a semi simple ring // J. Physics: Conf. Series. — 2019. — 1245:012050.

[122] Thomas S. The classification problem for torsion-free Abelian groups of finite rank // J. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 16, no. 1. — P. 233—258.

[123] Wolfson K. Anti-isomorphisms of endomorphism rings of locally free modules // Math. Z. — 1989. — Vol. 202. — P. 151—159.

[124] Wolfson K. Isomorphisms between endomorphism rings of modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 123. — P. 1971—1973.

[125] Wolfson K. G. Isomorphisms of the endomorphism rings of torsion-free modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 14. — P. 589—594.