Подалгебры в полукольцах непрерывных частичных действительнозначных функций

Е. М. ВЕЧТОМОВ
Вятский государственный университет
e-mail: vecht@mail.ru

Е. Н. ЛУБЯГИНА
Вятский государственный университет
e-mail: shishkina.en@mail.ru

УДК 512.556

Ключевые слова: полукольцо непрерывных частичных действительнозначных функций, подалгебра, подалгебра с единицей, решётка подалгебр, определяемость.

Аннотация

Статья относится к теории полуколец непрерывных числовых функций, развиваемой в рамках функциональной алгебры. Объектом исследования являются полукольца $CP(X)$ непрерывных частичных функций на топологических пространствах X со значением в топологическом поле $\mathbf{R}$ действительных чисел. Предметом изучения служат подалгебры полуколец $CP(X)$. Рассматриваются свойства решёток $A(X)$ всевозможных подалгебр и $A_1(X)$ всех подалгебр с единицей полуколец $CP(X)$ над топологическими пространствами X. Выяснено строение атомов и предатомов в решётках $A(X)$ и $A_1(X)$. Это позволило решить задачу абсолютной определяемости T_1-пространств X каждой из решёток $A(X)$ и $A_1(X)$.

Abstract

E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, Subalgebras in semirings of continuous partial real-valued functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2022), no. 1, pp. 125—140.

This paper refers to the theory of semirings of continuous numerical functions, which has been developed within functional algebra. The object of the investigation is semirings $CP(X)$ of continuous partial functions on topological spaces X with the values in the topological field $\mathbf{R}$ of real numbers. The subject of study is the subalgebras of semirings $CP(X)$. Some properties of the lattices $A(X)$ of all possible subalgebras and $A_1(X)$ of all subalgebras with identity are considered. The structure of atoms and preatoms in lattices $A_1(X)$ is clarified. This allowed us to solve the problem of the absolute determinability of T_1-spaces X by each of the lattices $A_1(X)$ and $A_1(X)$.

1. Предварительные сведения

Данная работа посвящена изучению подалгебр полуколец $CP(X)$ непрерывных частичных функций на топологических пространствах X со значением в топологическом поле $\mathbf{R}$ действительных чисел. Рассматриваются решётка

Фундаментальная и прикладная математика, 2022, том 24, № 1, с. 125—140.

$A(X)$ всех подалгебр полукольца $CP(X)$ и её подрешётка $A_1(X)$ подалгебр с единицей 1.

Напомним необходимые понятия и факты.

Полукольцом (в широком смысле) называется алгебраическая структура с ассоциативными бинарными операциями сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$, такими что умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

В данной статье под *полукольцом* понимается полукольцо с коммутативными операциями сложения и умножения. Поле $\mathbf{R}$ всех действительных чисел является коммутативным полукольцом с делением с мультипликативным нулём 0 и единицей 1.

Пусть X — произвольное топологическое пространство, $C(X)$ — кольцо всех непрерывных действительнозначных функций на X,

$$CP(X) = \bigcup\{C(Y) \colon Y \subseteq X\} -$$

полукольцо всех непрерывных частичных $\mathbf{R}$-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на пересечении $D(f) \cap D(g)$ их областей определения.

Считаем, что $C(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Полукольцо $CP(X)$ имеет единицу 1 и *поглощающий* элемент $\varnothing$ ($f + \varnothing = \varnothing = f \cdot \varnothing$ для любой функции $f \in CP(X)$).

Подалгеброй в полукольце $CP(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа из $\mathbf{R}$. Пустое множество $\varnothing$ также считается подалгеброй в $CP(X)$. Относительно отношения включения $\subseteq$ множество $A(X)$ образует полную решётку с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом $CP(X)$, а $A_1(X)$ будет полной решёткой с наименьшим элементом $\mathbf{R}$ — подалгеброй функций-констант на X. Точной нижней гранью любого непустого подмножества в $A(X)$ будет их пересечение. Точная верхняя грань подалгебр $A, B \in A(X)$ равна $A \vee B = A \cup B \cup (A + B + AB)$, где AB — подалгебра полукольца $CP(X)$, состоящая из сумм произведений fg произвольных функций $f \in A$ и $g \in B$. Если $A, B \in A_1(X)$, то $A \vee B = A + B + AB = AB$. Решётка $A_1(X)$ является подрешёткой решётки $A(X)$.

Атомы (*коатомы*) решётки L с наименьшим элементом 0 (с наибольшим элементом 1) — это минимальные (максимальные) элементы упорядоченного множества $L \setminus \{0\}$ (соответственно $L \setminus \{1\}$). Элемент a решётки L с 0 называется её *предатомом*, если a строго больше ровно двух элементов решётки L: 0 и некоторого её атома.

Решётка с 0 называется *атомной*, если любой её ненулевой элемент больше либо равен некоторому её атому. Решётка L с 0 называется *решёткой с псевдодополнениями*, если с любым её элементом a она содержит наибольший элемент b, обладающий свойством $ab = 0$. Такой (однозначно определённый) элемент b называется *псевдодополнением* элемента a. Элементы a и b решётки с 0 и 1 называются *дополнением* друг друга, если $ab = 0$ и $a + b = 1$.

Напомним, что решётка $\langle L, +, \cdot \rangle$ называется *дистрибутивной* (*модулярной*), если на ней выполняется тождество $a(b+c) = ab+ac$ (соответственно $a(ab+c) = ab + ac$).

Топологическое пространство называется T_1-*пространством*, если все его одноточечные (одноэлементные) подмножества замкнуты, и T_0-*пространством*, если совпадение замыканий его одноточечных множеств $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ влечёт равенство самих точек x и y. Заметим, что топологическое пространство будет T_1-пространством (T_0-пространством) тогда и только тогда, когда любое его двухточечное подпространство дискретно (дискретно или является связным двоеточием). Двухточечное топологическое пространство называется *связным двоеточием*, если в нём ровно одно одноточечное подмножество открыто. Ясно, что T_1-пространства являются T_0-пространствами. Связное двоеточие, будучи T_0-пространством, не является T_1-пространством.

В нашей работе знак $\subset$ означает строгое включение множеств.

Для любого подмножества Y топологического пространства X обозначим через 0_Y и 1_Y такие функции из $CP(X)$, что $D(0_Y) = D(1_Y) = Y$, $0_Y = 0$ и $1_Y = 1$ на множестве Y. Имеем $0_\varnothing = 1_\varnothing = \varnothing$. Для точек $x \in X$ будем писать $0_x = 0_{\{x\}}$ и $1_x = 1_{\{x\}}$. В полукольце $CP(X)$ отождествляем $1_X\mathbf{R}$ с $\mathbf{R}$. Отметим, что $0_Y = 0_Z$ тогда и только тогда, когда $Y = Z$ для $Y, Z \subseteq X$.

Для произвольной функции $e \in CP(X)$ обозначим через (e) и $[e]$ соответственно наименьшую подалгебру и наименьшую подалгебру с единицей 1 полукольца $CP(X)$, содержащую e. Имеем $0_{D(e)} \in (e)$ и $(e) \subseteq [e]$. Если e принимает только нулевые и/или единичные значения, то $[e]$ совпадает с множеством, состоящим из функций-констант на X и функций из $C\big(D(e)\big)$, являющихся константами на множествах

$$e^{-1}(0) = \{x \in D(e)\colon e(x) = 0\}, \quad e^{-1}(1) = \{x \in D(e)\colon e(x) = 1\},$$

в частности, $1_{D(e)} \in [e]$. Заметим, что в силу следствия 1.2 $[f] = [e]$ для любой функции $f \in C\big(D(e)\big)$, являющейся константой как на множестве $e^{-1}(0)$, так и на множестве $e^{-1}(1)$. Имеем также $[1_Y] = [0_Y] = \mathbf{R} \cup 1_Y\mathbf{R}$ при любом $Y \subseteq X$, в частности, $[\varnothing] = \mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$.

Для любой $f \in CP(X)$ подалгебра $[f]$ есть множество всех функций из $CP(X)$, представляющих собой многочлены с действительными коэффициентами относительно функции f, а подалгебра (f) есть множество всех многочленов от f с действительными коэффициентами и нулевым свободным членом.

Коснёмся темы подалгебр в кольцах $C(X)$.

В любом кольце $C(X)$ максимальными подалгебрами являются максимальные идеалы $M_x = \{f \in C(X)\colon f(x) = 0\}$, $x \in X$, и подалгебры с единицей $A_{x,y} = \{f \in C(X)\colon f(x) = f(y)\} \neq \mathbf{R}$ для точек $x \neq y$ из X.

Напомним строение подалгебр кольца $C(X)$ для конечного дискретного пространства X. Пусть $\tau = \{K_0, K_1, \ldots, K_m\}$ — разбиение X на $m+1$ классов, причём класс K_0 может быть пустым, а остальные классы разбиения непустые. Разбиению τ соответствует подалгебра A_τ кольца $C(X)$, состоящая из всевозможных функций, постоянных на каждом из классов $K_1, \ldots, K_m$ и равных 0 на выделенном классе K_0 в случае $K_0 \neq \varnothing$. При этом A_τ содержит единицу 1 тогда и только тогда, когда $K_0 = \varnothing$.

Предложение 1.1 [2, теорема 9.3]. *Для любого конечного дискретного пространства X подалгебры кольца $C(X)$ — это в точности подалгебры A_τ по различным разбиениям $\tau = \{K_0, K_1, \ldots, K_m\}$ множества X.*

Следствие 1.2. *Пусть X — произвольное топологическое пространство и функция $f \in C(X)$ принимает различные значения в точках $x_0, x_1, \ldots, x_m \in X$, причём $f(x_0) = 0$. Тогда для любых действительных чисел $r_0, r_1, \ldots, r_m$, не обязательно различных, существуют функции $g \in (f)$ и $h \in [f]$, такие что $g(x_0) = 0$, $h(x_0) = r_0$ и $g(x_i) = h(x_i) = r_i$ для $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что подпространство

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subseteq X$$

дискретно, и применить предложение 1.1. □

Очевидно, что разбиениям τ с одноэлементными классами $K_0, K_1, \ldots, K_m$ отвечают максимальные подалгебры A_τ без единицы, а разбиениям τ с пустым классом K_0, с одним двухэлементным классом и $m-1$ одноэлементными классами соответствуют максимальные подалгебры A_τ с единицей. Поэтому из предложения 1.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.3. *Для любого конечного дискретного пространства X максимальные подалгебры кольца $C(X)$ — это в точности подалгебры вида M_x и $A_{x,y}$ по всем точкам $x \neq y$ из X.*

Говорят, что топологическое пространство X из класса K топологических пространств *определяется* (*абсолютно определяется*) кольцом $C(X)$, если для любого топологического пространства $Y \in K$ (любого пространства Y) изоморфность колец $C(Y)$ и $C(X)$ влечёт гомеоморфность пространств Y и X.

Изучение определяемости топологических пространств различными алгебрами функций на них является важным направлением в функциональной алгебре. Одной из первых теорем определяемости стала теорема Гельфанда и Колмогорова об определяемости произвольного *компакта* (компактного хаусдорфова пространства) X кольцом $C(X)$ [3]. В [9] доказана определяемость каждого *хьюиттовского* (вещественно компактного) пространства X кольцом $C(X)$. Более того, Э. Хьюитт показал, что любой изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$ над хьюиттовскими пространствами X и Y индуцирован соответствующим гомеоморфизмом этих пространств. В [5, 10] описаны все изоморфизмы решёток подалгебр полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ непрерывных неотрицательных функций на произвольных топологических пространствах X и Y и решёток подалгебр полуполей $U(X)$ и $U(Y)$ положительных непрерывных функций на X и Y (см. также [2, п. 14, 21]). Отметим, что задача определяемости хьюиттовских пространств X решёткой подалгебр полуколец $C^+(X)$ была решена Е. М. Вечтомовым и В. В. Сидоровым в 2010 г. (см. [2, п. 14]). Определяемость хьюиттовских пространств X решёткой всех подалгебр колец $C(X)$ доказана Е. М. Вечтомовым в 1997 г. (см. [2, п. 9]).

Основы теории полуколец непрерывных частичных числовых функций заложены в [1; 2, гл. 8]. Исследование полуколец $CP(X)$ расширяет классическую теорию колец $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций.

Общематематические понятия можно найти в известных, ставших уже классическими трудах: по теории решёток — в [4], по топологии — в [6], по кольцам непрерывных функций — в [7], по теории полуколец — в [8].

2. Решётка $A(X)$ всех подалгебр полукольца $CP(X)$

Следующее предложение даёт описание всех атомов и предатомов решётки $A(X)$.

Предложение 2.1. *Для любого топологического пространства X верны следующие утверждения*:

1) *атомами решётки $A(X)$ являются в точности одноэлементные подалгебры $\{0_Y\}$, $Y \subseteq X$;*
2) *предатомы решётки $A(X)$ — это в точности подалгебры $(e) = e\mathbf{R}$ по всем идемпотентам $e \in CP(X)$ ($e^2 = e$), принимающим ровно одно значение 1 ($e = 1_Y$ при $Y \neq \varnothing$) или ровно два значения*: 0 *и* 1.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Очевидно, что одноэлементные подалгебры являются атомами. Других атомов в $A(X)$ нет, поскольку вместе с любой функцией $f \neq 0_{D(f)}$ подалгебра (f) будет содержать (по отношению включения) атом $\big\{0_{D(f)}\big\}$.

Докажем второе утверждение. Пусть $e \in CP(X)$ принимает только значения 1 и, возможно, 0. Тогда $(e) = e\mathbf{R}$. Имеем $\big\{0_{D(e)}\big\} \subset (e)$. Других непустых подалгебр в $e\mathbf{R}$ не содержится, поскольку с каждым элементом re, $r \in \mathbf{R} \setminus 0$, подалгебра содержит $\frac{1}{r}\,re = e$. Таким образом, (e) — предатом.

Других предатомов в $A(X)$ нет, поскольку с любой функцией f, принимающей хотя бы два ненулевых значения $f(x_1) \neq f(x_2)$, подалгебра (f) будет содержать функцию

$$f_* = \frac{1}{f(x_1)f(x_2)}\big[\big(f(x_1) + f(x_2)\big)f - f^2\big], \quad f_*(x_1) = f_*(x_2) = 1, \qquad (*)$$

при этом $\big\{0_{D(f)}\big\} \subset (f_*) \subset (f)$. □

Здесь приведено непосредственное доказательство, но можно было использовать следствие 1.2.

Следствие 2.2. *Решётки $A(X)$ атомны.*

Предложение 2.1 описывает некоторые простейшие подалгебры полуколец $CP(X)$ в терминах решёток $A(X)$.

На языке $A(X)$ приведём решёточные характеризации ряда других соотношений в полукольцах $CP(X)$.

Следующие три леммы не требуют отдельных доказательств, поскольку они непосредственно усматриваются из введённых определений и обозначений.

Лемма 2.3. *Для любых двух различных атомов $\{0_Y\}$ и $\{0_Z\}$ решётки $A(X)$ верны следующие утверждения:*

1) $\{0_Y\} \vee \{0_Z\} = \{0_Y, 0_Z, 0_{Y\cap Z}\}$;
2) *подалгебра $\{0_Y\} \vee \{0_Z\}$ содержит ровно два атома $\{0_Y\}$ и $\{0_Z\}$ тогда и только тогда, когда $Y \subset Z$ или $Z \subset Y$;*
3) *подалгебра $\{0_Y\} \vee \{0_Z\}$ содержит ровно три атома $\{0_Y\}$, $\{0_Z\}$ и $\{0_{Y\cap Z}\}$ тогда и только тогда, когда $Y \not\subset Z$ и $Z \not\subset Y$.*

Отметим, что в третьем утверждении $\{0_{Y\cap Z}\} = \{\varnothing\}$ тогда и только тогда, когда $Y \cap Z = \varnothing$.

Лемма 2.4. *Для произвольного атома $\{0_Y\}$ решётки $A(X)$*

1) *$\{0_Y\} = \{\varnothing\}$ или $\{0_Y\} = \{0_X\}$ тогда и только тогда, когда $\{0_Y\} \vee \{0_Z\}$ содержит ровно два атома для любого атома $\{0_Z\} \neq \{0_Y\}$;*
2) *$\{0_Y\} = \{\varnothing\}$ тогда и только тогда, когда не существует предатома над $\{0_Y\}$;*
3) *$\{0_Y\} = \{0_X\}$ тогда и только тогда, когда $\{0_Y\}$ удовлетворяет достаточной части первой эквиваленции и не удовлетворяет достаточной части второй эквиваленции.*

Лемма 2.5. *Для любых отличных от $\{\varnothing\}$ различных атомов $\{0_Y\}$ и $\{0_Z\}$ решётки $A(X)$ имеем, что $Y \subset Z$ тогда и только тогда, когда существует такой атом $\{0_U\}$, что $\{0_U\} \vee \{0_Y\}$ включает ровно три атома $\{0_U\}$, $\{0_Y\}$, $\{\varnothing\}$ и $\{0_U\} \vee \{0_Z\}$ включает только атомы $\{0_U\}$ и $\{0_Z\}$.*

Ввиду предложения 2.1 леммы 2.3—2.5 устанавливают на множестве всех атомов решётки $A(X)$ решёточно выражаемое отношение *подчинения*: атом $\{0_Y\}$ подчинён атому $\{0_Z\}$, если $Y \subseteq Z$, где Y, Z — подмножества пространства X. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.6. *Упорядоченное множество $\big\{\{0_Y\} \colon Y \subseteq X\big\}$ всех атомов решётки $A(X)$, рассматриваемое с отношением подчинения, изоморфно булеану $B(X) = \{Y \colon Y \subseteq X\}$ с отношением включения $\subseteq$, причём атомы $\{0_x\}$ решётки $A(X)$, $x \in X$, соответствуют атомам $\{x\}$ булеана $B(X)$.*

Предложение 2.6 позволяет отождествлять атомы $\{0_Y\}$ решётки $A(X)$ с подмножествами Y топологического пространства X.

Лемма 2.7. *Пусть X — произвольное T_1-пространство, $\varnothing \neq Y \subseteq X$ и $x \in X \setminus Y$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *точка x не принадлежит замыканию множества Y в X тогда и только тогда, когда существует функция $e \in C(Y \cup \{x\})$, равная 0 на Y и 1 в точке x;*

2) *подалгебра* $e\mathbf{R}$, $e \in C(Y \cup \{x\})$, $e(Y) = \{0\}$, $e(x) = 1$, *решёточно определяется как предатом* P *решётки* $A(X)$ *над атомом* $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$, *для которого подалгебра* $P \vee \{0_Y\}$ *включает ровно пять подалгебр, а именно* $\varnothing$, $\{0_Y\}$, $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$, P, $P \vee \{0_Y\}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Докажем второе утверждение. Ясно, что подалгебра $e\mathbf{R}$ служит предатомом решётки $A(X)$ над атомом $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$, причём $e\mathbf{R}\vee\{0_Y\}$ включает ровно пять подалгебр. По утверждению 2) предложения 2.1 над атомом $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$ существуют также другие предатомы $Q = f\mathbf{R}$, где $e \neq f \in C(Y \cup \{x\})$ принимает только значения 1 и, возможно, 0, в частности, $1_{Y\cup\{x\}}\mathbf{R}$. Но в решётке $A(X)$ подалгебры $Q \vee \{0_Y\}$ включают по шесть подалгебр: $\varnothing$, $\{0_Y\}$, $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$, Q, $Q \vee \{0_Y\}$ и $g\mathbf{R}$, где g — сужение функции f на множество Y. □

Из пункта 1) леммы 2.7 вытекает следующая лемма.

Лемма 2.8. *Подмножество* Y T_1*-пространства* X *замкнуто тогда и только тогда, когда для любой точки* $x \in X \setminus Y$ *существует такая функция* $e \in C(Y \cup \{x\})$, *что* $e = 0$ *на* Y *и* $e(x) = 1$.

Теорема 2.9. *Произвольное* T_1*-пространство* X *абсолютно определяется решёткой* $A(X)$, *т. е. для любого топологического пространства* Y *изоморфность решёток* $A(X)$ *и* $A(Y)$ *влечёт гомеоморфность пространств* X *и* Y.

Доказательство. Пусть X — T_1-пространство, Y — топологическое пространство и α — изоморфизм решётки $A(X)$ на решётку $A(Y)$. Для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$ положим

$$\varphi(x) = y \Longleftrightarrow \alpha(\{0_x\}) = \{0_y\}.$$

На основании предложения 2.6 φ будет биекцией между множествами X и Y.

Покажем сначала, что пространство Y также будет T_1-пространством. Свойство пространства Y быть T_1-пространством означает (в силу леммы 2.8), что для любых двух различных точек $y_1, y_2 \in Y$ найдётся функция $g \in C(\{y_1, y_2\})$, $g(y_1) = 0$ и $g(y_2) = 1$. Возьмём в Y точки $y_1 \neq y_2$ и положим $x_1 = \varphi^{-1}(y_1)$, $x_2 = \varphi^{-1}(y_2)$. Существует функция $e \in C(\{x_1, x_2\})$, $e(x_1) = 0$ и $e(x_2) = 1$. По пункту 2) леммы 2.7 (e) является предатомом решётки $A(X)$, содержащим атом $(0_{\{x_1,x_2\}})$. Поэтому $\alpha\big((e)\big)$ будет предатомом решётки $A(Y)$, содержащим атом $\alpha\big((0_{\{x_1,x_2\}})\big) = (0_{\{y_1,y_2\}})$. Снова по лемме 2.7 $\alpha\big((e)\big) = (g)$ при $g \in C(\{y_1, y_2\})$, $g(y_1) = 0$ и $g(y_2) = 1$.

Покажем, что биекция φ сохраняет замкнутые множества. Пусть Z — замкнутое подмножество в X. Возьмём произвольную точку $y \in Y \setminus \varphi(Z)$. Рассмотрим $x = \varphi^{-1}(y)$. Очевидно, $x \notin Z$. Для замкнутого множества Z и точки $x \in X \setminus Z$ по лемме 2.8 найдётся такая функция $e \in C(Z \cup \{x\})$, что $e(Z) = \{0\}$, $e(x) = 1$. По пункту 2) леммы 2.7 $\alpha\big((e)\big) = (f)$, $f \in C(\varphi(Z) \cup \{y\})$ для соответствующей функции f, $f\big(\varphi(Z)\big) = \{0\}$, $f(y) = 1$. По лемме 2.8 подмножество

$\varphi(Z)$ замкнуто. Аналогично доказывается, что φ^{-1} сохраняет замкнутые множества. Следовательно, φ — гомеоморфизм X на Y.

Теорема доказана. □

Предложение 2.10. *Для любого топологического пространства X подалгебра $\mathbf{R}$ полукольца $CP(X)$ определяется в терминах решётки $A(X)$.*

Доказательство. Решёточно выражаемое отношение подчинения является порядком на множестве атомов решётки $A(X)$, относительно которого атом $\{0_X\}$ будет наибольшим элементом. Рассмотрим множество M всех предатомов решётки $A(X)$, содержащих атом $\{0_X\}$. В M предатом $P = \mathbf{R} = 1_X\mathbf{R}$ выделяется следующим свойством на языке решётки $A(X)$: для любого атома $\{0_Y\} \neq \{0_X\}$ подалгебра $\{0_Y\} \vee P$ содержит два предатома: $1_Y\mathbf{R}$ и P. Действительно, для $P = \mathbf{R}$ указанное свойство выполняется, а для $P \in M \setminus \{\mathbf{R}\}$ имеем $P = e\mathbf{R}$, где функция $e \in C(X)$ принимает ровно два значения: 0 и 1, и при $Y = e^{-1}(0)$ подалгебра $\{0_Y\} \vee P = \{0_Y\} \cup P$ содержит только один предатом P. □

Рассмотрим три примера, иллюстрирующие свойства решёток подалгебр полуколец $CP(X)$.

Пример 2.11. Для одноточечного топологического пространства $X = \{x\}$ получаем полукольцо $CP(X) = \mathbf{R} \vee \{\varnothing\}$, дистрибутивную решётку

$$A(X) = \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{0_x\},\ \{\varnothing, 0_x\},\ \mathbf{R},\ CP(X)\}$$

изоморфную прямому произведению двухэлементной и трёхэлементной цепей, и двухэлементную цепь

$$A_1(X) = \{\mathbf{R},\ CP(X)\}.$$

Пример 2.12. Рассмотрим двухточечное топологическое пространство $X = \{x, y\}$, наделённое антидискретной топологией или топологией связного двоеточия. Получаем полукольцо

$$CP(X) = \mathbf{R} \cup 1_x\mathbf{R} \cup 1_y\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$$

и 35-элементную решётку

$$\begin{aligned} A(X) = \{&\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{0_x\},\ \{0_y\},\ \{0_X\},\ \{\varnothing, 0_x\},\ \{\varnothing, 0_y\},\ \{\varnothing, 0_x, 0_y\},\ \{\varnothing, 0_X\},\\ &\{0_x, 0_X\},\ \{0_y, 0_X\},\ \{\varnothing, 0_x, 0_X\},\ \{\varnothing, 0_y, 0_X\},\ \{\varnothing, 0_x, 0_y, 0_X\},\ 1_x\mathbf{R},\ 1_y\mathbf{R},\\ &\{\varnothing\} \cup 1_x\mathbf{R},\ \{\varnothing\} \cup 1_y\mathbf{R},\ \{\varnothing, 0_x\} \cup 1_y\mathbf{R},\ \{\varnothing, 0_y\} \cup 1_x\mathbf{R},\ \{\varnothing\} \cup 1_x\mathbf{R} \cup 1_y\mathbf{R},\\ &1_x\mathbf{R} \cup \{0_X\},\ 1_y\mathbf{R} \cup \{0_X\},\ \{\varnothing, 0_X\} \cup 1_x\mathbf{R},\ \{\varnothing, 0_X\} \cup 1_y\mathbf{R},\\ &\{\varnothing, 0_x, 0_X\} \cup 1_y\mathbf{R},\ \{\varnothing, 0_y, 0_X\} \cup 1_x\mathbf{R},\ \{\varnothing, 0_X\} \cup 1_x\mathbf{R} \cup 1_y\mathbf{R},\ \mathbf{R},\ \mathbf{R} \cup 1_x\mathbf{R},\\ &\mathbf{R} \cup 1_y\mathbf{R},\ \mathbf{R} \cup \{\varnothing\},\ \mathbf{R} \cup 1_x\mathbf{R} \cup \{\varnothing\},\ \mathbf{R} \cup 1_y\mathbf{R} \cup \{\varnothing\},\ CP(X)\}. \end{aligned}$$

При этом $C(X) = \mathbf{R}$ и подалгебра $CP(X) \setminus C(X)$ всех собственно частичных функций полукольца $CP(X)$ содержит 14 подалгебр; добавляя к этим подалгебрам функцию-константу $0 = 0_X$, получаем ещё 14 подалгебр. Решётка $A(X)$

имеет четыре атома: $\{\varnothing\}$, $\{0_x\}$, $\{0_y\}$, $\{0_X\}$ и три предатома: $1_x\mathbf{R}$, $1_y\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$. В семиэлементной решётке

$$A_1(X) = \{\mathbf{R},\, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R},\, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R},\, \mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\, CP(X)\}$$

ровно три атома: $\mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}$, $\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}$, $\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}$ и нет предатомов. Её подрешётка

$$\{\mathbf{R},\, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R},\, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R},\, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\, CP(X)\}$$

является *пентагоном* (пятиэлементной немодулярной решёткой), поэтому решётки $A_1(X)$ и $A(X)$ не модулярны.

Пример 2.13. Пусть $X = \{x, y\}$ — двухточечное дискретное пространство. Тогда

$$CP(X) = C(X)\cup 1_x\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}$$

и решётка

$$\begin{aligned} A_1(X) = \{&\mathbf{R},\, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R},\, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R},\, \mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\\ &\mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\, C(X),\, C(X)\cup 1_x\mathbf{R},\, C(X)\cup 1_y\mathbf{R},\\ &C(X)\cup\{\varnothing\},\, C(X)\cup 1_x\mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\, C(X)\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\, CP(X)\}\end{aligned}$$

содержит 14 элементов, имеет четыре атома:

$$[1_x] = \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R},\ [1_y] = \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R},\ [\varnothing] = \mathbf{R}\cup\{\varnothing\},\ C(X)$$

и не имеет предатомов. Как и в примере 2.12, подалгебра $\big(CP(X)\setminus C(X)\big)\cup\{0_X\}$ полукольца $CP(X)$ содержит 28 подалгебр. В подалгебре

$$\big(CP(X)\setminus C(X)\big)\cup M_x = 1_x\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}\cup M_x$$

содержится 10 подалгебр:

$$\begin{aligned} &M_x,\ M_x\cup\{\varnothing\},\ M_x\cup\{0_x\},\ M_x\cup 1_x\mathbf{R},\ M_x\cup 1_y\mathbf{R},\ M_x\cup\{\varnothing, 0_x\},\ M_x\cup\{\varnothing\}\cup 1_x\mathbf{R},\\ &\qquad M_x\cup\{\varnothing\}\cup 1_y\mathbf{R},\ M_x\cup\{\varnothing, 0_x\}\cup 1_y\mathbf{R},\ \big(CP(X)\setminus C(X)\big)\cup M_x.\end{aligned}$$

Аналогично подалгебра $\big(CP(X)\setminus C(X)\big)\cup M_y$ включает в себя 10 подалгебр. Стало быть, всего в полукольце CP(X) содержится 62 подалгебры.

Замечание 2.14. Пример 2.12 показывает, что T_0-пространства X не обязаны определяться решёткой $A(X)$. Но в силу теоремы 2.9 каждое топологическое свойство любого T_1-пространства X может быть выражено на языке решётки $A(X)$.

Примеры 2.11—2.13 доказывают справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.15. *Для любого топологического пространства X верны следующие утверждения*:

1) *если X одноточечное, то решётки $A(X)$ и $A_1(X)$ дистрибутивны*;
2) *если X не одноточечное, то решётки $A(X)$ и $A_1(X)$ не модулярны.*

Замечание 2.16. Решётка подалгебр кольца $C(X)$ над двухэлементным дискретным пространством X является *диамантом*, то есть пятиэлементной недистрибутивной модулярной решёткой с тремя атомами [2, п. 9, рис. 2]. Для трёхэлементного дискретного пространства Y решётка подалгебр кольца $C(Y)$ является немодулярной 15-элементной решёткой [2, п. 9, рис. 1], изоморфной подрешётке решётки $A\big(C(X)\big)$ над любым T_1-пространством X мощности не меньше 3.

Подпространство Y топологического пространства X называется *C-расширяемым*, если каждая функций из $C(Y)$ продолжается до некоторой функции из $C(X)$.

Максимальные подалгебры полукольца $CP(X)$ — это предатомы решётки $A(X)$. Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.17. *Пусть X — произвольное топологическое пространство, $x \in X$, подпространство $X \setminus \{x\}$ C-расширяемо, A — максимальная подалгебра кольца $C(X)$. Тогда множества $CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$ и $\big(CP(X) \setminus C(X)\big) \cup A$ будут максимальными подалгебрами полукольца $CP(X)$.*

Для конечных дискретных пространств X получаем полное описание максимальных подалгебр полуколец $CP(X)$.

Теорема 2.18. *Для всякого конечного дискретного пространства X максимальные подалгебры полукольца $CP(X)$ исчерпываются подалгебрами*

$$CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\}), \quad \big(CP(X) \setminus C(X)\big) \cup M_x \quad \text{и} \quad \big(CP(X) \setminus C(X)\big) \cup A_{x,y}$$

по всем точкам $x \neq y$ пространства X.

Доказательство. Пусть X — n-элементное дискретное пространство. При $n = 1$ получаем две максимальные подалгебры $\mathbf{R}$ и $\{0, \varnothing\}$ в полукольце $CP(X) = \mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$.

Пусть $n \geqslant 2$.

В силу предложения 2.17 подалгебры вида

$$CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\}) \quad \text{и} \quad \big(CP(X) \setminus C(X)\big) \cup A$$

являются максимальными подалгебрами полукольца $CP(X)$. Обратно, возьмём произвольную максимальную подалгебру M в $CP(X)$. Если подалгебра M не содержит $C(X \setminus \{x\})$ для некоторой точки $x \in X$, то $M \cap C(X \setminus \{x\}) = \varnothing$ и $M \subseteq CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$, т. е. $M = CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$. Поэтому можно считать, что M содержит n подалгебр $C(X \setminus \{x\})$ для всех $x \in X$. Но тогда M содержит и всевозможные пересечения подалгебр $C(X \setminus \{x\})$, $x \in X$. Значит, подалгебра $CP(X) \setminus C(X)$ содержится в M и $A = M \cap C(X)$ будет максимальной подалгеброй кольца $C(X)$. Остаётся применить предложение 1.3. □

Заметим, что число максимальных подалгебр полукольца $CP(X)$ над n-элементным дискретным пространством X равно $2n + n(n-1)/2$.

3. Решётка $A_1(X)$ подалгебр с единицей полукольца $CP(X)$

Для решёток $A_1(X)$ справедлив результат, аналогичный предложению 2.1.

Предложение 3.1. *Для любого топологического пространства X имеют место следующие утверждения*:

1) *атомы решётки $A_1(X)$ исчерпываются подалгебрами $[1_Y]$ по всем подмножествам $Y \subset X$ и подалгебрами $[e]$, где функция $e \in C(X)$ принимает в точности значения 0 и 1 (т. е. является нетривиальным идемпотентом кольца $C(X)$)*;
2) *предатомы решётки $A_1(X)$ совпадают с подалгебрами $[e]$ по всем $e \in CP(X) \setminus C(X)$, принимающим ровно два значения*: 0 *и* 1.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Очевидно, что атомами решётки $A_1(X)$ будут подалгебры $[\varnothing]$ и $[e]$, где $e \in CP(X)$ принимает значение 1 на непустом подмножестве $Y \subset X$ и, возможно, 0 на $X \setminus Y$.

Покажем, что других атомов $[f]$ в $A_1(X)$ нет.

Если $f \in CP(X)\setminus C(X)$, то подалгебра $[f]$ будет содержать функцию $1_{D(f)} = 1 + 0 \cdot f$ и, следовательно, атом $[1_{D(f)}]$.

Если функция $f \in C(X)$ принимает ровно два значения, то по следствию 1.2 $[f] = [e]$ для соответствующего нетривиального идемпотента $e \in C(X)$.

Рассмотрим случай, когда $f \in C(X)$ принимает хотя бы три различных значения $f(x_1) = a \neq 0$, $f(x_2) = b \neq 0$, $f(x_3) = c$ в (различных) точках x_1, x_2, x_3. Подалгебра $[f]$ содержит функцию $f_* \in C(X)$, определённую формулой $(*)$ как $f_*(x) = g\big(f(x)\big)$ для числовой функции $g(\chi) = \frac{1}{ab}\big((a + b)\chi - \chi^2\big)$. Квадратное уравнение $g(\chi) = 1$ имеет корни a и b. Значит, $f_*(x_3) = f_*(c) \neq 1 = f_*(x_1) = f_*(x_2)$. Тогда $\mathbf{R} \neq [f_*] \subset [f]$ и $[f]$ не является атомом. Так же, как и при доказательстве предложения 2.1, достаточно было воспользоваться следствием 1.2.

Докажем утверждение 2). Пусть функция $e \in CP(X) \setminus C(X)$ принимает ровно два значения: 0 и 1. Тогда $[e]$ строго содержит ровно две подалгебры с единицей: $\mathbf{R}$ и $[1_{D(e)}]$, т. е. является предатомом.

Обратно, пусть P — предатом решётки $A_1(X)$, содержащий атом A. В силу доказанного утверждения 1) возможны два случая: либо $A = [1_Y]$ для $Y \subset X$, либо $A = [e]$ для некоторой функции $f \in C(X)$, принимающей ровно два значения: 0 и 1. В первом случае получаем, что $P = [f] \supset [1_Y]$ для произвольно выбранной функции $f \in P \setminus [1_Y]$. Имеем $D(f) = Y \neq \varnothing$, и функция f не является константой на Y. Если f принимает более двух значений, то подалгебра $[f_*] \supset [1_Y]$ строго содержится в $[f]$, что невозможно. Значит, f принимает ровно два значения, и в силу следствия 1.2 можно считать эти значения равными 0 и 1.

Во втором случае предатом P содержит атом $[e]$ для двузначной функции $e \in C(X)$. Возьмём $f \in P \setminus [e]$. Тогда если $D(f) \neq X$, то атом $[1_{D(f)}] \subset P$, противоречие. Если же $f \in C(X)$ принимает более двух значений, то подалгебра $[f_*] \neq \mathbf{R}$ строго содержится в $[f] \subset P$, что невозможно. $\square$

Следствие 3.2. *Решётки $A_1(X)$ атомны.*

Замечание 3.3. Атомы $[e]$ из первого пункта предложения 3.1 существуют для несвязных топологических пространств X, и над ними нет предатомов. Атомы $[1_Y]$, $Y \subset X$, содержатся в предатомах, соответствующих в силу второго пункта предложения 3.1 двухклассовым открыто-замкнутым разбиениям подпространств Y.

Предложение 3.1 позволяет описать топологию любого T_1-пространства X в терминах атомов и предатомов решётки $A_1(X)$. Для этого нам потребуется ряд предварительных утверждений.

Лемма 3.4. *Для любых двух различных атомов $[1_Y]$ и $[1_Z]$ решётки $A_1(X)$ верны следующие утверждения*:

1) $[1_Y] \vee [1_Z] = \mathbf{R} \cup [1_Y] \cup [1_Z] \cup [1_{Y \cap Z}]$;
2) *подалгебра $[1_Y] \vee [1_Z]$ содержит ровно два атома $[1_Y]$ и $[1_Z]$ тогда и только тогда, когда $Y \subset Z$ или $Z \subset Y$*;
3) *подалгебра $[1_Y] \vee [1_Z]$ содержит ровно три атома $[1_Y]$, $[1_Z]$, $[1_{Y \cap Z}]$ тогда и только тогда, когда $Y \not\subset Z$ и $Z \not\subset Y$. При этом $[1_{Y \cap Z}] = [\varnothing]$ тогда и только тогда, когда $Y \cap Z = \varnothing$.*

Справедливость леммы 3.4 усматривается непосредственно.

Из леммы 3.4 следует лемма 3.5.

Лемма 3.5. *Для любых отличных от $[\varnothing]$ различных атомов $[1_Y]$ и $[1_Z]$ решётки $A_1(X)$ включение $Y \subset Z$ равносильно существованию такого атома $[1_U]$, что подалгебра $[1_U] \vee [1_Y]$ содержит ровно три атома: $[1_U]$, $[1_Y]$, $[\varnothing]$, а подалгебра $[1_U] \vee [1_Z]$ содержит два атома: $[1_U]$ и $[1_Z]$.*

Лемма 3.6. *Для произвольного атома A решётки $A_1(X)$ эквивалентны следующие утверждения*:

1) *$A = [\varnothing]$ либо $A = [e]$, $e \in C(X)$ принимает ровно два значения: 0, 1, и в кольце $C(X)$ нет других нетривиальных идемпотентов, кроме e и $1 - e$*;
2) *$A \vee B$ содержит ровно два атома для любого атома $B \neq A$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из предложения 3.1.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Если $A = [1_Y]$ для непустого собственного подмножества Y пространства X, то $A \vee B$ содержит три атома A, B, $[\varnothing]$ при $B = [1_{X \setminus Y}]$. Поэтому по предложению 3.1 $A = [\varnothing]$ либо $A = [e]$ для некоторого нетривиального идемпотента $e \in C(X)$. Остаётся показать, что в $C(X)$ нет нетривиальных идемпотентов f, отличных от e и $1 - e$. Предположим от противного, что такой идемпотент f существует. Подалгебра $[f]$ в силу первого утверждения предложения 3.1 будет атомом решётки $A_1(X)$. Но подалгебра $A \vee [f]$ содержит три или семь атомов в зависимости от того, на три или на четыре части открыто-замкнутые разбиения $\{e^{-1}(0), e^{-1}(1)\}$ и $\{f^{-1}(0), f^{-1}(1)\}$ делят пространство X, что противоречит условию 2). $\square$

Лемма 3.7. *Пусть X имеет более двух точек. Тогда для атома A решётки $A_1(X)$ равенство $A = [\varnothing]$ равносильно тому, что для любого атома $B \neq A$ подалгебра $A \vee B$ содержит ровно два атома и не содержит предатомов.*

Доказательство. Пусть $A = [\varnothing]$ и $B \neq A$. Тогда $A \vee B = B \cup \{\varnothing\}$ содержит только атомы A и B и не содержит предатомов в силу предложения 3.1.

Обратно, пусть атом A удовлетворяет достаточному условию леммы. Тогда выполняется утверждение 1) леммы 3.6. Если $A = [e]$ для некоторого нетривиального идемпотента e кольца $C(X)$, $x_0 \in e^{-1}(0)$ и $x_1 \in e^{-1}(1)$, то при $Y = \{x_0, x_1\}$ подалгебра $A \vee [1_Y]$ содержит предатом $[f]$, где $D(f) = Y$, $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$. Остаётся воспользоваться леммой 3.6. $\square$

Замечание 3.8. Предложение 3.1 и леммы 3.4—3.7 устанавливают на множестве атомов $[1_Y]$, $Y \subset X$, решётки $A_1(X)$ решёточно выражаемое отношение порядка $\prec$:

$$[1_Y] \prec [1_Z] \Longleftrightarrow Y \subseteq Z$$

для любых собственных подмножеств Y, Z топологического пространства X. Тем самым мы можем отождествлять атомы $[1_Y]$ решётки $A_1(X)$ с подмножествами $Y \subset X$. В частности, $[1_x] \equiv \{x\}$ для любой точки x неодноточечного пространства X.

Лемма 3.9. *Пусть Y — собственное подмножество топологического пространства X и $x \in X \setminus Y$. Для того чтобы точка x не принадлежала замыканию Y, необходимо и достаточно, чтобы в решётке $A_1(X)$ существовал либо предатом P, содержащий атом $[1_{Y\cup\{x\}}]$, либо атом P, такие что подалгебра $P \vee [1_Y]$ содержит ровно пять подалгебр с единицей — $\mathbf{R}$, P, $[1_Y]$, $[1_{Y\cup\{x\}}]$, $P \vee [1_Y]$ — в первом случае и четыре подалгебры с единицей — $\mathbf{R}$, P, $[1_Y]$, $P \vee [1_Y]$ — во втором случае.*

Доказательство. Если точка x не принадлежит замыканию множества Y, то по лемме 2.8 имеем $Y = e^{-1}(0)$ и $\{x\} = e^{-1}(1)$ для подходящей функции $e \in C(Y \cup \{x\})$. Если $Y \cup \{x\} \neq X$, то в силу пункта 2) предложения 3.1 получаем предатом $P = [e]$ над атомом $\left[1_{Y\cup\{x\}}\right]$. Легко видеть, что подалгебра $P \vee [1_Y]$ включает в себя ровно пять подалгебр с единицей: $\mathbf{R}$, P, $[1_Y]$, $[1_{Y\cup\{x\}}]$, $P \vee [1_Y]$. Если же $Y \cup \{x\} = X$, то в силу пункта 1) предложения 3.1 получаем атом $P = [e]$, для которого $P \vee [1_Y]$ содержит четыре подалгебры с единицей: $\mathbf{R} = [1_X] = [1_{Y\cup\{x\}}]$, P, $[1_Y]$ и $P \vee [1_Y]$.

Обратно, пусть выполнено достаточное условие леммы. Возьмём предатом P, содержащий атом $\left[1_{Y\cup\{x\}}\right]$. По пункту 2) предложения 3.1 $P = [e]$ для функции $e \in C(Y \cup \{x\})$ со значениями 0 и 1. Если $e^{-1}(0) \neq Y$ и $e^{-1}(0) \neq \{x\}$, то множество Z, равное $e^{-1}(0)$ или $e^{-1}(1)$, строго содержится в Y. Но тогда подалгебра $P \vee [1_Y]$ содержит также предатом Q, порождённый открыто-замкнутым разбиением $\{Z, Y \setminus Z\}$ подпространства Y, что противоречит принятому условию. Аналогично проверяется и случай атома P. $\square$

Теорема 3.10. *Произвольное T_1-пространство X абсолютно определяется решёткой $A_1(X)$.*

Доказательство. Пусть даны T_1-пространство X и топологическое пространство Y с изоморфными решётками $A_1(X)$ и $A_1(Y)$. Можно считать пространства X и Y неодноточечными. Рассмотрим изоморфизм α решётки $A_1(X)$ на решётку $A_1(Y)$. Для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$ положим

$$\varphi(x) = y \Longleftrightarrow \alpha([1_x]) = [1_y].$$

На основании предложения 3.1, замечаний 3.3 и 3.8 φ будет биекцией между множествами X и Y.

Тот факт, что пространство Y также будет T_1-пространством, доказывается аналогично доказательству из теоремы 2.9, только вместо предложения 2.1 следует применить предложение 3.1.

Гомеоморфность биекции φ вытекает из лемм 2.8 и 3.9.

Теорема доказана. □

4. Дополнение

В заключение сделаем ряд дополняющих замечаний.

Замечание 4.1. Следствием теоремы 3.10 и предложения 2.10 является теорема 2.9. Получили новое доказательство этой теоремы.

Замечание 4.2. Легко видеть, что для любого топологического пространства X носителем полукольца $CP(X)$ служит множество всех (частичных) функций-констант тогда и только тогда, когда каждое двухэлементное подпространство пространства X либо антидискретно, либо является связным двоеточием. Последнее условие равносильно тому, что открытые множества топологического пространства X образуют цепь по отношению включения $\subseteq$.

Замечание 4.3. Пусть X — счётное множество. Упорядочим его как натуральный ряд $\mathbf{N}$ и объявим открытыми множества

$$\varnothing,\ \{1\},\ \{1,2\},\ldots,\ \{1,2,\ldots,n,\ldots\},\ldots,\ X,$$

образуя топологию τ на X. Упорядочим X как множество $\mathbf{Z}$ целых чисел и положим

$$U_k = \{z \in \mathbf{Z}\colon z \leqslant k\} \quad \text{при} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Множества $\varnothing$, X и U_k, $k \in \mathbf{Z}$, образуют топологию σ на X. Топологии τ и σ представляют собой неизоморфные счётные цепи относительно включения. Получаем негомеоморфные T_0-пространства $\langle X,\tau\rangle$ и $\langle X,\sigma\rangle$ с одним и тем же полукольцом $CP(X)$, состоящим — по замечанию 4.2 — из функций-констант на подмножествах в X. Этот пример показывает, что из изоморфизма решёток $A(X)$ и $A(Y)$ или $A_1(X)$ и $A_1(Y)$ над T_0-пространствами X и Y не следует, вообще говоря, гомеоморфизм самих пространств X и Y.

Замечание 4.4. В отличие от решёток идеалов полуколец $CP(X)$ [2, предложение 40.4], решётки подалгебр $A(X)$ и $A_1(X)$ не обязаны быть решётками с псевдодополнениями и могут иметь нетривиальные дополняемые элементы.

Так, подалгебры $C(X)$ и $CP(X) \setminus C(X)$ являются дополнениями друг друга в решётке $A(X)$.

Замечание 4.5. Подалгебру полукольца $CP(X)$ назовём *нётеровой*, если любая содержащаяся в ней подалгебра является конечно порождённой. Понятие нётеровой подалгебры решёточное, поскольку конечная порождённость подалгебры означает её компактность как элемента решётки всех подалгебр. Нётеровы подалгебры в $CP(X)$ — это в точности подалгебры, порождённые конечными множествами конечнозначных функций (функций, принимающих конечное число значений), или, что равносильно, подалгебры, содержащие лишь конечное число подалгебр. Это вытекает из того, что для произвольной подалгебры A кольца $C(X)$ эквивалентны следующие утверждения:

1) A нётерова;
2) A порождена конечным множеством конечнозначных функций;
3) A порождена одной конечнозначной функцией;
4) множество подалгебр в A конечно (см. предложение 1.1).

Множество $FCP(X)$ всевозможных конечнозначных функций в полукольце $CP(X)$ образует подалгебру с единицей и поглощающим элементом. Так же, как и в теоремах 2.9 и 3.10, доказывается абсолютная определяемость любого T_1-пространства X решёткой всех подалгебр и решёткой подалгебр с единицей полукольца $FCP(X)$.

Замечание 4.6. Опираясь на теоремы 2.9 и 3.10, можно показать, что любой изоморфизм решёток подалгебр $A(X)$ и $A(Y)$ (соответственно $A_1(X)$ и $A_1(Y)$) над T_1-пространствами X и Y индуцирован подходящим гомеоморфизмом пространств X и Y. Доказательству этих результатов будет посвящена отдельная статья. Отметим, что произвольный изоморфизм полуколец $CP(X)$ и $CP(Y)$ для T_1-пространств X и Y индуцированный [2, предложение 42.2].

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9.

Литература

[1] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Полукольца непрерывных частичных действительнозначных функций // Proc. of the 48th Int. Youth School-Conference “Modern Problems in Mathematics and Its Applications” Yekaterinburg, Russia, February 5—11, 2017. — CEUR-WS.org. Vol. 1894. — С. 20—29.

[2] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. Элементы функциональной алгебры / Под ред. Е. М. Вечтомова. — Киров: Радуга-ПРЕСС, 2016.

[3] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // ДАН СССР. — 1939. — Т. 22, № 1. — С. 11—15.

[4] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[5] Сидоров В. В. Изоморфизмы решёток подалгебр полуполей непрерывных положительных функций // Сиб. матем. журн. — 2019. — Т. 60, № 3. — С. 676—694.

[6] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
[7] Gillman L., Jerison M. Rings of Continuous Functions. — New York, 1976.
[8] Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
[9] Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 64, no. 1. — P. 45–99.
[10] Sidorov V. V. Isomorphisms of semirings of continuous nonnegative functions and the lattices of their subalgebras // Lobachevskii J. Math. — 2020. — Vol. 41, no. 9. — P. 1684—1692.