Наследственность радикалов и идеалы алгебр, порождённые достижимыми и субинвариантными подалгебрами

А. Ю. ГОЛУБКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: artgolub@hotmail.com

УДК 512.554.36+512.554.5+512.554

Ключевые слова: идеально наследственный радикал, нижний радикал, алгебраическая алгебра Ли, радикалы Бэра и Грюнберга алгебр Ли.

Аннотация

В работе собраны в единой форме известные варианты леммы Андерсона—Дивинского—Сулиньского для алгебр, близких к ассоциативным, и приводится ряд её аналогов для алгебр Ли.

Abstract

A. Yu. Golubkov, Heredity of radicals and ideals of algebras generated by subideals and subinvariant subalgebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2022), no. 1, pp. 141—163.

This paper collects in a unified form well-known versions of the Anderson–Divinsky–Sulinski lemma for algebras that are nearly associative, and gives a number of its analogues for Lie algebras.

1. Введение

Если значения радикала в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ на идеалах алгебр из его класса определения являются их идеалами, то класс $\mathcal{T}$-полупростых алгебр замкнут относительно взятия идеалов. Это гарантирует идеальную наследственность $\mathcal{T}$, если он наследственный (имеет замкнутый относительно взятия идеалов класс $\mathcal{T}$-радикальных алгебр). Таким свойством обладают радикалы альтернативных алгебр (лемма Андерсона—Дивинского—Сулиньского [20]), линейных йордановых алгебр и (γ, δ)-алгебр над кольцами с $1/2$ и $1/6$ соответственно (см. [9, 10]). Выводы [2, 9, 10, 20] объединены в первой части работы в общее для них описание в терминах радикальных расширений идеалов алгебр, порождённых достижимыми и субинвариантными подалгебрами, там же

Фундаментальная и прикладная математика, 2022, том 24, № 1, с. 141—163.

приведены новые варианты теорем Левича и Стюарта. Во второй части результаты первой части частично переносятся на алгебры Ли на основе лиева аналога теоремы Бэра—Кемхадзе. В двух дополнениях обсуждается взаимосвязь между локальной нильпотентностью и наличием нормального ряда с факторами, имеющими нулевое умножение, для счётно порождённых алгебр и поэлементная характеризация наибольшего из идеалов алгебры Ли над алгеброй над полем характеристики нуль, порождённых субинвариантными конечными разрешимыми подалгебрами.

Всюду далее F — произвольное ассоциативное коммутативное кольце с единицей, все алгебры над F — линейные F-алгебры, являющиеся одновременно левыми и правыми унитарными F-модулями с идентичным левым и правым действием, все классы алгебр над F содержат нулевую алгебру и изоморфные копии своих алгебр. Везде, где речь идёт об алгебре F, F — алгебра над некоторым полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$. Если R — F-алгебра, то $R^\omega = \bigcap\limits_{i\geqslant 1} R^i$, Id_R — тождественный изоморфизм R, $\mathrm{Rad}(R)$ — первичный радикал R, l_x и r_x — операторы левого и правого умножения на элемент $x \in R$, $l_x\colon y \mapsto xy$ и $r_x\colon y \mapsto yx$, $y \in R$, FA, $\langle A\rangle$ и $(A)_R$ — F-подмодуль, подалгебра и идеал R, порождённые множеством $A \subseteq R$, $M^R(A)$ — подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(R)$ F-модуля R, порождённая всеми l_x и r_x, $x \in R$ ($M(R) = M^R(R)$ — алгебра умножений R), $\mathrm{Ann}_F R = \big\{f \in F \mid fR = \{0\}\big\}$ — аннулятор R как F-модуля. Действие элементов $\mathrm{End}_F(R)$ будет записываться слева: $\psi x = \psi(x)$, $\psi \in \mathrm{End}_F(R)$, $x \in R$.

Неубывающая цепочка подалгебр $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ алгебры R, индексированная трансфинитами из начального отрезка $[0, \alpha + 1)$, называется *нормальным* (*возрастающим нормальным*) *рядом*, если $R_{\beta-1} \lhd R_\beta$ для непредельного β, $R_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} R_\gamma$ для предельного β, $\beta \leqslant \alpha$, $R_0 = \{0\}$ и $R_\alpha = R$. Алгебры $R_{\gamma+1}/R_\gamma$, $\gamma < \alpha$, называются *факторами* ряда $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$. Элемент R_β, $\beta \leqslant \alpha$, *достижим по ряду*, если $R_{\beta_1} = R_\beta \lhd \ldots \lhd R_{\beta_k} = R_\alpha$ для некоторых $\beta_1 = \beta < \ldots < \beta_k = \alpha$, $k \geqslant 1$. Элементы нормальных (конечных нормальных) рядов R называются её *субинвариантными* (*достижимыми*) *подалгебрами*. Тот факт, что подалгебра A субинвариантна (достижима) в R, мы будем кратко обозначать через $A \operatorname{asc} R$ ($A \operatorname{si} R$).

Будут использоваться следующие обозначения: $\mathfrak{U}$ — класс всех алгебр над кольцом F; $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{A}$ — классы конечных (конечно порождённых как F-модули), нильпотентных, разрешимых алгебр и алгебр с нулевым умножением из $\mathfrak{U}$; $L\mathfrak{X}$ — класс алгебр из $\mathfrak{U}$, конечно порождённые подалгебры которых входят в $\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}$ ($R\mathfrak{X}$) — классы алгебр из $\mathfrak{U}$, содержащих нормальные ряды с факторами из $\mathfrak{X}$ (и достижимыми по ряду элементами); $\mathfrak{X}_R$ — класс гомоморфных образов алгебры $R \in \mathfrak{U}$, $\mathrm{Rad}_\mathfrak{X}(R)$ — сумма всех идеалов из $\mathfrak{X}$ алгебры $R \in \mathfrak{U}$, $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)$ ($\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{si}}(R)$) — подалгебра R, порождённая всеми её субинвариантными (достижимыми) подалгебрами из $\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — подкласс $\mathfrak{U}$. Несложно показать, что

$$\mathfrak{X} \subseteq R\mathfrak{X} = R(R\mathfrak{X}) \subseteq A\mathfrak{X} = R(A\mathfrak{X}) = A(A\mathfrak{X}).$$

Если $\mathfrak{M}$ — замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов подкласс $\mathfrak{U}$, то $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}} = \{R \in \mathfrak{M} \mid \mathcal{T}(R) = R\}$ и $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}} = \big\{R \in \mathfrak{M} \mid \mathcal{T}(R) = \{0\}\big\}$ — классы $\mathcal{T}$-радикальных и $\mathcal{T}$-полупростых алгебр для любого радикала в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ на $\mathfrak{M}$, $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ — нижний радикал, определяемый на $\mathfrak{M}$ его подклассом $\mathfrak{X}$ ($\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ — радикал $\mathcal{T}$ на $\mathfrak{M}$, такой что $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}}$ — наименьший из радикальных подклассов $\mathfrak{M}$, содержащих $\mathfrak{X}$). Если $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}} = \mathfrak{M} \cap R\mathfrak{X}$, и потому $\mathfrak{M} \cap A\mathfrak{X}$ и $R\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}$ — радикальные подклассы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{U}$. Радикал с неуказанным классом определения считается определённым на $\mathfrak{U}$. Ключевые роли в работе играют нижний ниль-радикал $RN = \mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$ и радикал $RN^* = \mathcal{T}_{A\mathfrak{A}}$, $\mathrm{Rad}(R) \subseteq RN(R) \subseteq RN^*(R)$, $R \in \mathfrak{U}$.

2. Лемма Андерсона — Дивинского — Сулиньского в алгебрах, близких к ассоциативным

Перейдём к описанию естественного обобщения леммы Андерсона—Дивинского—Сулиньского и её реализаций для альтернативных, линейных йордановых и (γ, δ)-алгебр на основе выводов [16], [2] (с включением теоремы Слинько из [6, теорема 12, с. 374], без использования конструкций [10]) и [9].

Лемма 2.1. *Если R — алгебра над кольцом F, I — идеал R, J — идеал I, $x \in R$ и $J_x = (J)_{\langle I,x\rangle}$, $J_x^{(m)} \subseteq J$, $(J^n)_x \subseteq (J_x)^2$ для некоторых $m, n \geqslant 1$, то алгебра J_x содержит нормальный ряд подалгебр $\{H_i \mid i = 0, \ldots, m+1\}$, $H_0 = \{0\}$, $H_i = J + J_x^{(m+1-i)}$, факторы которого — суммы идеалов, являющихся гомоморфными образами J.*

Доказательство. Достаточно установить наличие таких рядов в алгебрах с нулевым умножением $J_x^{(k)}/J_x^{(k+1)}$, $k = 0, \ldots, m-1$, поскольку

$$\big(J_x^{(k)} + J\big)/\big(J_x^{(k+1)} + J\big) \cong J_x^{(k)}/\big(J_x^{(k+1)} + J \cap J_x^{(k)}\big) \cong \\ \cong \big(J_x^{(k)}/J_x^{(k+1)}\big)/\big(\big(J_x^{(k+1)} + J \cap J_x^{(k)}\big)/J_x^{(k+1)}\big).$$

Выделим F-подмодули алгебры $J_x^{(k)}$

$$V_i = \sum_{z_j \in (J^{s_j})_x,\ 1 \leqslant s_j \leqslant n,\ \sum\limits_j s_j = i} g_k(z_1, \ldots, z_{2^k}) \quad (i = 2^k, \ldots, n2^k),$$

где g_k — k-й многочлен разрешимости, $g_0(x_1) = x_1$,

$$g_{l+1}(x_1, \ldots, x_{2^{l+1}}) = g_l(x_1, \ldots, x_{2^l}) g_l(x_{2^l+1}, \ldots, x_{2^{l+1}}) \quad (l \geqslant 1),$$

$V_{2^k} = J_x^{(k)}$, $V_{n2^k} \subseteq J_x^{(k+1)}$. Если $g_k(\phi_1 z_1, \ldots, \phi_{2^k} z_{2^k}) \in V_i \setminus V_{i+1}$, $2^k \leqslant i < n2^k$, где $z_j \in J^{s_j}$, $\phi_j \in \mathrm{Id}_R + M^R(\langle I, x\rangle)$ и $z_l \in J^{s_l}$, $1 \leqslant s_l < n$ для некоторого l, то отображение

$$z \mapsto g_k(\phi_1 z_1, \ldots, \phi_{l-1} z_{l-1}, \phi_l \psi z, \phi_{l+1} z_{l+1}, \ldots, \phi_{2^k} z_{2^k}) + V_{i+1} \quad (z \in J) —$$

гомоморфизм алгебр J и V_i/V_{i+1}, где

$$z_l = \sum_p \psi_p y_p, \quad y_p \in J, \quad \psi_p \in M^R(J), \quad \psi_p(J^2) \subseteq J^{s_l+1}, \quad \psi = \sum_p \psi_p.$$

Следовательно, алгебра $J_x^{(k)}/J_x^{(k+1)}$ содержит конечный идеальный ряд

$$\{0\} \subseteq \big(V_{n2^k-1} + J_x^{(k+1)}\big)/J_x^{(k+1)} \subseteq \ldots \subseteq \\ \subseteq \big(V_i + J_x^{(k+1)}\big)/J_x^{(k+1)} \subseteq \ldots \subseteq V_{2^k}/J_x^{(k+1)} = J_x^{(k)}/J_x^{(k+1)},$$

факторы которого (гомоморфные образы V_i/V_{i+1}, $i = 2^k, \ldots, n2^k - 1$) — суммы идеалов, являющихся гомоморфными образами J. □

Аналогичный вывод можно получить, заменив $J_x = (J)_{\langle I,x\rangle}$ на $J_x = (J + xJ + Jx)_I$.

Лемма 2.2. *Если условия леммы* 2.1 *выполняются для всех* $x \in R$ *и* $I = (J)_R$, *то* $I \in R\mathfrak{X}_J$, $I/J = RN(R/J)$.

Доказательство. Положим

$$J_0 = J, \quad J_{k+1} = \sum_{x\in R} J_{kx}, \quad k \geqslant 0.$$

Тогда

$$I = \bigcup_{k\geqslant 0} J_k,$$

и по лемме 2.1 $J_{k+1} \in R\mathfrak{X}_{J_k} \subseteq R\mathfrak{X}_J$, $J_k/J = RN(J_k/J)$, $I \in R\mathfrak{X}_J$, $I/J = RN(I/J)$. □

Как следствие, если условия леммы 2.1 выполняются для всех $x \in R$ и $RN(I/J) = \{0\}$, то $J = (J)_R \lhd R$.

Лемма 2.3. *Если R — альтернативная алгебра над кольцом F, I — идеал R, J — идеал I и $I = (J)_R$, то $I \in R\mathfrak{X}_J$, $I/J = \mathrm{Rad}(I/J)$ — объединение счётной неубывающей цепи нильпотентных идеалов.*

Доказательство. Так как

$$I(xJ) + (xJ)I \subseteq (Ix + xI)J + x(IJ + JI) \subseteq J + xJ$$

и аналогичным образом $I(Jx)+(Jx)I \subseteq J+Jx$, $J_x = J+xJ+Jx \lhd I$, $J_x^3 \subseteq J_1^3 \subseteq J$, где $J_1 = J + RJ + JR \lhd I$ (см. [6, лемма 3, с. 186; 16, предложение 4.3]). Кроме того,

$$(J^2)_x \subseteq J^2 + J(xJ) + (xJ + Jx)J + (Jx)J + J(xJ + Jx) \subseteq J_x^2.$$

По [16, теорема A] I — объединение своих идеалов J_k, $k \geqslant 0$, нильпотентных по модулю $J_0 = J$, где

$$J_{k+1} = J_k + RJ_k + J_kR, \quad J_{k+2} = J_{k+1} + RJ_{k+1} = J_{k+1} + J_{k+1}R$$

(см. [16, предложение 3.2]). Поскольку

$$J_{k+1} = \sum_{x\in R} J_{kx} \in I(I\mathfrak{X}_{J_k}) \subseteq R\mathfrak{X}_J,$$

$J_{kx} \lhd I$, $x \in R$, где $I\mathfrak{X}$ — класс алгебр из класса $\mathfrak{U}$, содержащих нормальные ряды идеалов с факторами из класса $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{U}$, $I \in R\mathfrak{X}_J$. □

Для ассоциативной алгебры R лемма 2.3 сразу следует из леммы Андрунакиевича, согласно которой $(I/J)^3 = \{0\}$.

Лемма 2.4. *Если R — линейная йорданова алгебра над кольцом F с $1/2$, I — идеал R, J — идеал I и $I = (J)_R$, то $I \in R\mathfrak{X}_J$, $I/J = RN(I/J)$.*

Доказательство. Здесь $J_x = (J + xJ)_I = J + xJ + (xJ)I$, $J_x^{(4)} \subseteq J$ (см. [2, предложение 1; 6, лемма 19, с. 375]) и $(J^3)_x \subseteq J_x^2$, поскольку ввиду [6, (22), с. 86]

$$\big((ab)c\big)d + \big((ad)c\big)b + a\big((bd)c\big) = (ab)(cd) + (ac)(bd) + (ad)(bc),$$
$$xJ^3 \subseteq J_x^3,$$
$$\big((J^2J)x\big)I \subseteq \big((J^2I)x\big)J + J^2\big((JI)x\big) + J^3(xI) + (J^2x)(JI) + (J^2I)(Jx) \subseteq J_x^2. \quad \square$$

Лемма 2.5. *Если R — (γ,δ)-алгебра над кольцом F с $1/6$, I — идеал R, J — идеал I и $I = (J)_R$, то $I \in R\mathfrak{X}_J$, $I/J = RN(I/J)$.*

Доказательство. В данном случае $J_x = (J + xJ + Jx)_I = J + xJ + Jx \lhd I$, $J_x^{(3)} \subseteq J$ и, как следствие $(J^2)_x \subseteq J$, $J^2 \lhd I$, для $(p,q) = (1,2),(2,1)$

$$x(J^pJ^q) \subseteq (xJ^p)J^q + \gamma\big((J^px)J^q + J^p(xJ^q)\big) + \delta\big((J^qx)J^p + J^q(xJ^p)\big) \subseteq J^2,$$
$$(J^pJ^q)x \subseteq J^p(J^qx) + \gamma\big((J^px)J^q + J^p(xJ^q)\big) + (\delta-1)\big((J^qx)J^p + J^q(xJ^p)\big) \subseteq J^2,$$

$(J^3)_x \subseteq J^2$ (см. [9, теоремы 1, 2 и их доказательство]). □

Лемма 2.6. *Если класс $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{U}$ замкнут относительно взятия идеалов (субинвариантных подалгебр), $I \in R\mathfrak{X}_J$ ($I \in A\mathfrak{X}_J$) для всех $R \in \mathfrak{M}$, $J \lhd I = (J)_R \lhd R$, то $(A)_R \in R\mathfrak{X}_A$ ($(A)_R \in A\mathfrak{X}_A$) для любых $R \in \mathfrak{M}$, $A \operatorname{si} R$ ($A \operatorname{asc} R$).*

Доказательство. Если $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд подалгебр алгебры $R \in \mathfrak{M}$ и $\{R'_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд идеала $(A)_R$, $A = R_1$, $R'_0 = \{0\}$, $R'_\beta = (A)_{R_\beta}$, $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, то $R'_\gamma \lhd R'_{\gamma+1} = (R'_\gamma)_{R_{\gamma+1}} \lhd R_{\gamma+1}$ $(\gamma < \alpha)$, и $R'_{\gamma+1} \in R\mathfrak{X}_{R'_\gamma}$, если класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия идеалов и $R_{\gamma+1} \operatorname{si} R$, и $R'_{\gamma+1} \in A\mathfrak{X}_{R'_\gamma}$, если $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия субинвариантных подалгебр. Остаётся применить индукцию для $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ с достижимыми по ряду элементами и замкнутого относительно взятия идеалов $\mathfrak{M}$ и без этого условия для замкнутого относительно взятия субинвариантных подалгебр $\mathfrak{M}$ (с учётом $A\mathfrak{X}_A = A(A\mathfrak{X}_A)$, $R(R\mathfrak{X}_A) = R\mathfrak{X}_A$). □

Следствие 2.7. *Если в лемме 2.6 класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то для любых замкнутого относительно гомоморфных образов класса $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ и алгебры $R \in \mathfrak{M}$ радикал $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(R)$ ($\mathcal{T}_{A\mathfrak{X}}(R)$) содержит все достижимые* (*субинвариантные*) *подалгебры R из $\mathfrak{X}$ и, как следствие, каждый полупростой подкласс $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}}$ класса $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия идеалов* (*субинвариантных подалгебр, если $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}} = \mathfrak{M} \cap A\mathfrak{R}_{\mathcal{T}}$*).

Условия в скобках относятся к замкнутому относительно взятия субинвариантных подалгебр классу $\mathfrak{M}$. Отметим, что радикал $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(R)$ ($\mathcal{T}_{A\mathfrak{X}}(R)$) равен также объединению цепи идеалов $\{\Delta_\alpha(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$ алгебры $R \in \mathfrak{M}$, построенных аналогично цепи Бэра для отображения $\Delta\colon R \mapsto \bigl(\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{si}}(R)\bigr)_R$ ($R \mapsto \bigl(\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)\bigr)_R$), $R \in \mathfrak{M}$, где $D_0(R) = \{0\}$, $\Delta_\alpha(R)$ — прообраз $\Delta(R/\Delta_{\alpha-1}(R))$ в R для непредельного $\alpha \geqslant 1$,

$$\Delta_\alpha(R) = \bigcup_{\beta<\alpha} \Delta_\beta(R)$$

для предельного α. Следствие 2.7 применимо, в частности, к альтернативным, линейным йордановым ($1/2 \in F$) алгебрам и (γ,δ)-алгебрам ($1/6 \in F$).

Отметим, что за рамками данных построений остаются известные варианты леммы Андерсона—Дивинского—Сулиньского для невырожденных радикалов квадратичных йордановых и правоальтернативных алгебр из [17, 22].

Следуя [3], мы будем называть алгебру R *алгеброй Щукина*, если любая конечно порождённая подалгебра $A \subseteq R$ содержит такую конечно порождённую подалгебру B, что $A^2 \supseteq B \supseteq A^{(k)}$ для некоторого $k \geqslant 1$. Поскольку класс локально разрешимых алгебр Щукина над кольцом F — радикальный подкласс класса всех алгебр Щукина над F, на последнем определён локально разрешимый радикал LS. Алгебрами Щукина являются все альтернативные алгебры, линейные йордановы над кольцами с $1/2$ и (γ,δ)-алгебры над кольцами с $1/6$ (см. [6, теорема 7, лемма 5, с. 195, упражнение 5, с. 112] с учётом того, что наличие в основном кольце $1/3$ позволяет задать многообразие (γ,δ)-алгебр двумя однородными тождествами, наличие в нём $1/2$ обеспечивает существование на этом многообразии локально нильпотентного радикала LN (см. [9, теорема 3]), и того, что квадраты идеалов таких алгебр — идеалы).

Простая алгебра называется *строго простой*, если в ней нет ненулевых собственных субинвариантных подалгебр. Обобщая теорему Левича о строгой простоте простых ассоциативных алгебр [8], мы докажем следующую теорему.

Теорема 2.8. *Если $\mathfrak{M}$ — такой замкнутый относительно взятия субинвариантных подалгебр и гомоморфных образов класс алгебр Щукина, что $I/J = RN^*(I/J)$ для всех $R \in \mathfrak{M}$, $J \lhd I = (J)_R \lhd R$, для некоторого $p \geqslant 2$ $B^p \lhd A$ для любых $R \in \mathfrak{M}$, $A = \langle A \rangle \subseteq R$, $B \lhd A$, то простые алгебры из $\mathfrak{M}$ строго просты.*

Доказательство. Если $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд подалгебр простой алгебры $R \in \mathfrak{M}$, $A = R_1 \neq R = (A)_R, \{0\}$, то её нормальный ряд подалгебр

$\{R'_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ с $R'_0 = \{0\}$, $R'_\beta = (A)_{R_\beta}$, $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, и RN^*-радикальными факторами $R'_{\gamma+1}/R'_\gamma$, $1 \leqslant \gamma < \alpha$ (см. доказательство леммы 2.6), можно уплотнить до нормального ряда $\{R''_\tau \mid \tau \leqslant \sigma\}$ с $R''_1 = A$ и факторами с нулевым умножением $R''_{\eta+1}/R''_\eta$, $1 \leqslant \eta < \sigma$. Несложно показать по индукции с очевидным основанием для трансфинитов конечной мощности, что алгебра R''_τ локально разрешима по модулю алгебры A при всех $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma$. Проверить локальную разрешимость R''_τ по модулю A, предполагая локальную разрешимость по модулю A всех R''_η, $\eta < \tau$, достаточно только для непредельного τ. В этом случае любая конечно порождённая подалгебра $C \subseteq R''_\tau$ содержит конечно порождённую подалгебру D, такую что $R''_{\tau-1} \supseteq C^2 \supseteq D \supseteq C^{(k)}$ для некоторого $k \geqslant 1$, $C^{(n+k)} \subseteq D^{(n)} \subseteq A$ при подходящем $n \geqslant 0$.

Если $0 \neq x \in R$, то ввиду $R = (x)_R = (x)^k_R$, $k \geqslant 1$, найдётся конечно порождённая подалгебра $B \subseteq R$, $x \in (x)^p_B \subseteq B^p$, $(x)_B = (x)^p_B \subseteq B^{(p,l)} \subseteq B^{(l)}$, $l \geqslant 0$, где $B^{(p,0)} = B$, $B^{(p,l+1)} = \left(B^{(p,l)}\right)^p \lhd B$, и $x \in B^{(q)} \subseteq A$ для некоторого $q \geqslant 0$. Следовательно, $A = R$. $\square$

Теорема Левича о строгой простоте простых алгебр Ли [8] основана на том, что $(B^\omega)_R \subseteq A$ для любых алгебры Ли R, $A \operatorname{asc} R$ и конечно порождённой подалгебры $B \subseteq A$. С её помощью в [18] была доказана достижимость субинвариантных подалгебр алгебр Ли с условием минимальности для достижимых подалгебр над артиновыми кольцами. Эта теорема Стюарта легко переносится на ассоциативные алгебры без использования теоремы Левича. Идею такого переноса можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2.9. *Если класс алгебр Щукина с условием минимальности для достижимых подалгебр $\mathfrak{M}$ над артиновым кольцом F удовлетворяет условиям теоремы 2.8, p-первичные радикалы алгебр из $\mathfrak{M}$ разрешимы и $A^\omega \lhd R$ для всех $R \in \mathfrak{M}$, $A \operatorname{si} R$, то субинвариантные подалгебры алгебр из $\mathfrak{M}$ являются их достижимыми подалгебрами.*

Доказательство. Используемый здесь p-первичный радикал $\mathrm{Rad}_p(R)$ алгебры R — наименьший из идеалов R, в фактор-алгебрах по которым нет ненулевых нильпотентных идеалов индекса не выше p, $\mathrm{Rad}_p(R)$ совпадает с объединением цепи Бэра идеалов R, в которой суммы идеалов с нулевым умножением заменены на суммы нильпотентных идеалов индекса не выше p (см. [6, с. 192, 193]; $\mathrm{Rad}(R) = \mathrm{Rad}_2(R)$).

Если I — минимальный идеал локально разрешимой алгебры T, в которой p-е степени идеалов подалгебр — идеалы этих подалгебр, то $I^p = \{0\}$, так как иначе для любого $0 \neq x \in I$ из $I = (x)_T = (x)^p_T$ следует наличие конечно порождённой подалгебры $B \subseteq T$, такой что $(x)_B = (x)^p_B \subseteq B^p$, $x \in B^{(k)}$, $k \geqslant 0$, и ввиду локальной разрешимости T $x = 0$. Поэтому $\mathrm{Rad}_p(R) = RN^*(R) = LS(R)$ для всех $R \in \mathfrak{M}$ ($RN^*(R) \subseteq LS(R)$ для любой алгебры R из замкнутого относительно взятия субинвариантных подалгебр класса определения радикала LS). Поскольку по теореме Хопкинса—Левицкого для алгебр с нулевым умножением над артиновым кольцом F условие минимальности для достижимых подалгебр равносильно конечности над F, разрешимые алгебры из класса $\mathfrak{M}$ конечны над F.

Пусть R — алгебра из $\mathfrak{M}$, $A \operatorname{asc} R$ и I — минимальная среди содержащих подалгебру A достижимых подалгебр R, $I = (A)_I$. Без ограничения общности можно считать, что A не содержит ненулевых идеалов алгебры I. Если J — минимальный среди идеалов I, строго содержащих $\operatorname{Rad}_p(I)$, то $J/\operatorname{Rad}_p(I)$ — простая алгебра, так как для любого $K \lhd J$, $\operatorname{Rad}_p(I) \subseteq K \neq \operatorname{Rad}_p(I)$, $K^\omega = K^n \lhd I$ для некоторого $n \geqslant 1$ и, следовательно, или $K = K^n = J$, или $K^n \subseteq \operatorname{Rad}_p(I)$, $(K)_I/K = RN^*\big((K)_I/K\big)$ и $(K)_I \subseteq RN^*(I) = \operatorname{Rad}_p(I)$. Каждый $x \in J \backslash \operatorname{Rad}_p(I)$ входит в некоторую конечно порождённую подалгебру $C \subseteq J$, такую что $(x)_C \subseteq \subseteq (x)_C^p + \operatorname{Rad}_p(I)$, $x \in C^{(k)} + \operatorname{Rad}_p(I)$, $k \geqslant 0$, и потому $x \in A + \operatorname{Rad}_p(I)$ (см. доказательство теоремы 2.8). Значит, $J \subseteq A + \operatorname{Rad}_p(I)$, $J = (A \cap J) + + \operatorname{Rad}_p(I)$. Так как $A \cap J \operatorname{asc} J$, $A \cap J$ — элемент нормального ряда подалгебр $\{J_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ алгебры J, где $J_\beta = (A \cap J) + C_\beta$, $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, $\{C_\beta\}$ — неубывающая цепь подмодулей $\operatorname{Rad}_p(I)$ от $\{0\}$ до $\operatorname{Rad}_p(I)$, из конечности $\operatorname{Rad}_p(I)$ над F и его нётеровости как F-модуля следует, что $A \cap J \operatorname{si} J$. Значит, $(A \cap J)^\omega = = (A \cap J)^m \lhd I$ при некотором $m \geqslant 1$, $(A \cap J)^m = \{0\}$ (в A нет ненулевых идеалов I), но $\big((A \cap J)^m + \operatorname{Rad}_p(I)\big)/\operatorname{Rad}_p(I) = J/\operatorname{Rad}_p(I)$, $J = \operatorname{Rad}_p(I)$. Таким образом, $I = \operatorname{Rad}_p(I)$ — нётеров F-модуль, $A \operatorname{si} I$ и $A \operatorname{si} R$. $\square$

Условие $A^\omega \lhd R$ можно заменить условием $A^{(\omega)} = \bigcap\limits_{i \geqslant 0} A^{(i)} \lhd R$ ($A^{(q,\omega)} = = \bigcap\limits_{i \geqslant 0} A^{(q,i)} \lhd R$ или $A^{[q,\omega]} = \bigcap\limits_{i \geqslant 0} A^{[q,i]} \lhd R$ для некоторого $q \geqslant 2$, где $A^{[q,0]} = A$, $A^{[q,i+1]} = ({A^{[q,i]}}^q)_A$, $i \geqslant 0$), $A \operatorname{si} R \in \mathfrak{M}$.

Следствие 2.10. *Субинвариантные подалгебры альтернативных алгебр с условием минимальности для достижимых подалгебр над артиновым кольцом F являются их достижимыми подалгебрами.*

Доказательство. Ввиду [6, следствие 1, с. 291] следует проверить, что $A^\omega \lhd R$ для любых альтернативной алгебры R и $A \lhd B \lhd R$. Для этого достаточно установить по индукции, что $RA^k + A^kR \subseteq A^{k-1}$, $k \geqslant 2$, с основанием

$$RA^2 + A^2R \subseteq (RA + AR)A + A(RA) + (AR)A + A(RA + AR) \subseteq A$$

и шагом

$$\begin{aligned} RA^n + A^nR &= \sum_{i=1}^{n-1} (R(A^iA^{n-i}) + (A^iA^{n-i})R) \subseteq \\ &\subseteq \sum_{i=1}^{n-1} \big((RA^i + A^iR)A^{n-i} + A^i(RA^{n-i}) + A^i(A^{n-i}R + RA^{n-i}) + (A^iR)A^{n-i}\big) \subseteq \\ &\subseteq A^{n-1} \end{aligned}$$

(с учётом $AR + RA \subseteq B$ и $I^m \lhd R$ для любых $I \lhd R$, $m \geqslant 1$). $\square$

Следствие 2.11. *Субинвариантные подалгебры $(-1,1)$-алгебр с условием минимальности для достижимых подалгебр над артиновым кольцом F с $1/6$ являются их достижимыми подалгебрами.*

Доказательство. Применение [12, следствие 3] сводит доказательство к обоснованию того, что $A^\omega \lhd R$ для любых $(-1,1)$-алгебры R над кольцом F и $A \lhd B \lhd R$. Так как многообразие $(-1,1)$-алгебр определяется тождествами

$$(y,x,x)=0, \quad (x,y,z)+(y,z,x)+(z,x,y)=0,$$

где $(x,y,z)=(xy)z-x(yz)$, при всех $i,j \geqslant 1$

$$(A^iA^j)R \subseteq (A^iR)A^j + A^i(A^jR+RA^j),$$
$$R(A^iA^j) \subseteq (RA^i)A^j + (A^iA^j)R + A^i(A^jR) + (A^jR)A^i + A^j(RA^i),$$

и, как следствие, $A^m \lhd B$, $RA^n + A^nR \subseteq A^{n-1}$ (индукция по $m \geqslant 1$, $n \geqslant 2$). □

3. Радикалы RN, RN^* и наследственность радикалов алгебр Ли

Начнём с необходимых нам условий алгебраичности эндоморфизмов модулей. Назовём эндоморфизм ϕ F-модуля R *локально конечным* (*степени не выше* $n \geqslant 1$), если для любого $x \in R$ найдётся многочлен

$${}_{\phi,x}f(t) = t^{n_{\phi,x}} + {}_{\phi,x}f_{n_{\phi,x}-1}t^{n_{\phi,x}-1} + \ldots + {}_{\phi,x}f_1 t \in F[t], \quad n_{\phi,x} \geqslant 1,$$

такой что ${}_{\phi,x}f(\phi)x = 0$ ($n_{\phi,x} \leqslant n$), и *ниль-эндоморфизмом*, если $\phi^{n_{\phi,x}}x = 0$ для каждого $x \in R$ при подходящем $n_{\phi,x} \geqslant 1$. Мы будем называть ϕ *алгебраическим* (*слабо алгебраическим*), если R — F-алгебра, её подалгебра $\langle \phi^k x \mid k \geqslant 0\rangle$ конечно порождена (входит в некоторую конечно порождённую подалгебру) для всех $x \in R$. Автоморфизм ϕ модуля R будет называться *локально конечным* (*алгебраичным, слабо алгебраичным* для алгебры R), если такими являются эндоморфизмы ϕ и ϕ^{-1}. Эта же терминология будет применяться к дифференцированиям алгебр как к эндоморфизмам модулей.

Мы будем называть алгебру R *слабо идеально алгебраической*, если каждый конечно порождённый идеал I любой её конечно порождённой подалгебры A входит в некоторую её подалгебру B, идеал которой $(I)_B$ — конечно порождённая алгебра.

Алгебра Ли называется *алгебраической* (*ограниченной степени, степени не выше* n), если её внутренние дифференцирования локально конечны (ограниченных степеней, степеней не выше n), и *ниль-алгеброй*, если они являются ниль-дифференцированиями. Условие слабой алгебраичности имеет смысл только для внешних дифференцирований алгебр Ли. В рассматриваемых алгебрах Ли $[\,,\,]$ — операция умножения, $\mathrm{ad}_x = l_x = [x,\,]$ — внутреннее дифференцирование, отвечающее элементу x.

Простейший вариант леммы 2.2 для алгебр Ли может быть выведен из формулы Ньютона—Лейбница, а точнее, следующего наблюдения.

Замечание 3.1. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — однородный элемент степени $m \geqslant 1$ свободной неассоциативной алгебры $F\langle X\rangle$ над кольцом F с множеством свободных порождающих $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, то для любых алгебры R над F, её дифференцирования D и идеала I

$$D^m f(y_1, \ldots, y_n) - m!\, f(Dy_1, \ldots, Dy_m),\ D^k f(y_1, \ldots, y_n) \in I \qquad (y_i \in I,\ 0 \leqslant k < m-1).$$

Лемма 3.2. *Если R — алгебраическая алгебра Ли ограниченной степени (не выше $n \geqslant 1$) над алгеброй (кольцом с $1/n!$) F, I — идеал L, J — идеал I, то $(J)_I \in R\mathfrak{X}_J$, $I/J = RN(I/J)$.*

Доказательство. В этом случае $J_x = J + [x, J] \lhd I$, $(J^2)_x \subseteq J_x^2$ и $J_x^n \subseteq J + \mathrm{ad}_x^n J^n \subseteq J$, так как $\deg_{\mathrm{ad}_x, y} f \leqslant n$ для всех $x, y \in R$ (см. замечание 3.1 и обозначения леммы 2.1). □

Поэтому к классу алгебраических алгебр Ли ограниченной степени (не выше n) над алгеброй (кольцом с $1/n!$) F применимо следствие 2.7.

Другой возможный подход к адаптации леммы 2.2 для алгебр Ли базируется на одной из частей доказательства лиева варианта теоремы Бэра—Кемхадзе (теоремы Симоняна [13]) в изложении [14, теорема 5.4, с. 126—128].

Лемма 3.3. *Если R — ниль-алгебра Ли над алгеброй F, $A \operatorname{si} R$ ($A \operatorname{asc} R$), то $(A)_R \in R\mathfrak{X}_A$ ($(A)_R \in A\mathfrak{X}_A$).*

Доказательство. Если $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд подалгебр алгебры Ли R с $R_1 = A$, то нормальный ряд $\{R'_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ идеала $(A)_R$, $R'_0 = \{0\}$, $R'_\beta = (A)_{R_\beta}$, $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, имеет факторы

$$R'_{\gamma+1}/R'_\gamma = \Bigg(\sum_{\psi \in \langle \exp(\mathrm{ad}_x) \mid x \in R_{\gamma+1}\rangle} \psi(R'_\gamma)\Bigg) = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_{R'_\gamma}}(R'_{\gamma+1}/R'_\gamma) \in R\mathfrak{X}_{R'_\gamma} \quad (\gamma < \alpha),$$

где $\exp(\mathrm{ad}_x)$ — автоморфизм R,

$$\exp(\mathrm{ad}_x) y = \sum_{k=0}^{n_{x,y}-1} \frac{\mathrm{ad}_x^k y}{k!}, \quad x, y \in R,$$

$\mathrm{ad}_x^{n_{x,y}} y = 0$ при некотором $n_{x,y} \geqslant 1$,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} F \exp(\mathrm{ad}_{mx}) y = \sum_{m \in \mathbb{Z}} F \exp(\mathrm{ad}_x)^m y = \sum_{k=0}^{n_{x,y}-1} F\, \mathrm{ad}_x^k y$$

(стандартные рассуждения с использованием определителя Вандермонда).

Остаётся вывести по индукции, что $R'_\beta \in A\mathfrak{X}_A$, $\beta \leqslant \alpha$, и $R'_\beta \in R\mathfrak{X}_A$, $\beta \leqslant \alpha$, если все элементы $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ достижимы по ряду (он идеален на всех предельных местах (см. [1, лемма 1, с. 115]), и, как следствие, это верно для $\{R'_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$). □

Следствие 3.4. *Если $\mathfrak{X}$ — замкнутый относительно взятия гомоморфных образов класс алгебр Ли над алгеброй F, R — такая ниль-алгебра Ли над F, что $R = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{si}}(R)$ ($R = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)$), то $R \in R\mathfrak{X}$ ($R \in A\mathfrak{X}$).*

Доказательство. По лемме 3.3 $R = \mathrm{Rad}_{R\mathfrak{X}}(R) \in R\mathfrak{X}$ ($R = \mathrm{Rad}_{A\mathfrak{X}}(R) \in A\mathfrak{X}$). □

Подалгебры $SN(R) = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{N}-\mathrm{si}}(R)$ и $AN(R) = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{N}-\mathrm{asc}}(R)$ алгебры Ли R принято называть её *радикалами Бэра* и *Грюнберга* (без каких-либо понятийных ассоциаций с радикалом в смысле Куроша—Амицура). Идеалы алгебр Ли, инвариантные относительно действия всех их дифференцирований, называются *характеристическими*.

Следствие 3.5. *На классе алгебр Ли над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$, нижний ниль-радикал RN является идеально наследственным.*

Доказательство. Как известно, радикал Бэра $SN(R)$ любой алгебры Ли R над полем $\mathbb{F}$ — локально нильпотентный характеристический идеал R, $SN(R)$ — множество всех элементов R, порождающих достижимые подалгебры (см. [14, 15]). По следствию 3.4 $SN(R) = RN\big(SN(R)\big)$. Последнее также следует из энгелевости $SN(L)$ (нильпотентности его внутренних дифференцирований) и леммы 3.2 (следствия 2.7). Поэтому класс RN-полупростых алгебр Ли над $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия идеалов.

Остаётся заметить, что расширения $R\mathfrak{X}$ и $A\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{X}$ наследуют его замкнутость относительно взятия идеалов ((субинвариантных) подалгебр) при её наличии. □

Естественно, что поле $\mathbb{F}$ в следствии 3.5 можно заменить на алгебру F, поскольку определение $RN(R)$ и $SN(R)$ ($RN^*(R)$ и $AN(R)$) не зависит от выбора подкольца F с его единицей, над которым рассматривается R. Кроме того, если I — идеал R над таким подкольцом, то FI — F-идеал R, порождённый I, $(FI)^2 \subseteq I$,

$$FI/I = \sum_{f \in F} (fI + I)/I,$$

где $(fI + I)/I$ — образ I при действии гомоморфизма $x \mapsto fx + I$, $x \in I$.

Следствие 3.6. *Каждый полупростой подкласс $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}}$ класса ниль-алгебр Ли $\mathfrak{N}$ над алгеброй F замкнут относительно взятия идеалов (субинвариантных подалгебр, если $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}} = \mathfrak{N} \cap A\mathfrak{R}_{\mathcal{T}}$).*

Обозначим через $\mathfrak{A}_1$ класс F-алгебр с одним порождающим и нулевым умножением.

Следствие 3.7. *Если R — алгебра Ли над алгеброй F, $A \,\mathrm{si}\, R$ и $A^\omega = A^k \in \mathfrak{X}$ для некоторых класса алгебр Ли $\mathfrak{X}$ над F, $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{X}$, и $k \geqslant 1$, то $(A)_R \in R\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{A} \subseteq R\mathfrak{A}_1$, A^ω — характеристический идеал алгебры Ли R (см. [14, лемма 3.2, с. 10]),

$$(A)_R/A^k \cong (A/A^k)_{R/A^k} = (A/A^k)_{R/A^k} \cap SN(R/A^k) = RN\big((A/A^k)_{R/A^k}\big) \in R\mathfrak{X},$$

и потому $(A)_R \in R\mathfrak{X}$. □

Следствие 3.8. *Если $\mathfrak{X}$ — замкнутый относительно взятия гомоморфных образов класс алгебр Ли над алгеброй F, такой что $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{X}$ и $A^\omega = A^k$ для любой $A \in \mathfrak{X}$ при некотором $k = k(A) \geqslant 1$, то $\mathcal{T}_\mathfrak{X}(B) \subseteq \mathcal{T}_\mathfrak{X}(R)$ для любых алгебры Ли R над F и $B \operatorname{si} R$ ($\mathcal{T}_\mathfrak{X}(B) = B \cap \mathcal{T}_\mathfrak{X}(R)$, если $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия идеалов).*

Сходные выводы для субинвариантных подалгебр потребуют от нас ряд сведений об условиях, при которых радикал Грюнберга алгебры Ли является её идеалом.

Пусть R — алгебра над кольцом F, $F((t))$ и $R((t))$ — алгебры рядов Лорана от одной переменной t с коэффициентами из F и R (алгебры над F и $F((t))$), $\bar{R}((t))$ и $\hat{R}((t))$ — подалгебры $R((t))$, состоящие из рядов с коэффициентами из конечно порождённых F-подмодулей и конечно порождённых подалгебр R соответственно,

$$\bar{R}((t)) = F((t))R \subseteq \hat{R}((t)) \subseteq R((t)).$$

Замечание 3.9. Если $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд подалгебр (слабо идеально алгебраической) алгебры R, то $\{\bar{R}((t)) \mid \beta \leqslant \alpha\}$ ($\{\hat{R}((t)) \mid \beta \leqslant \alpha\}$) — нормальный ряд подалгебр алгебры $\bar{R}((t))$ ($\hat{R}((t))$).

Доказательство. Следует лишь проверить, что $\hat{I}((t)) \lhd \hat{R}((t))$ для слабо алгебраической алгебры R и всех $I \lhd R$. Для этого достаточно заметить, что для любых конечно порождённых подалгебр $A \subseteq I$ и $B \subseteq R$ идеал $\big((A)_{\langle A,B\rangle}\big)_C \subseteq I \cap C$ конечно порождён как алгебра для некоторой подалгебры $C \subseteq R$, $C \supseteq (A)_{\langle A,B\rangle}$, $AB + BA \subseteq (A)_{\langle A,B\rangle}$. □

Отметим, что в общем случае переход от $\bar{R}((t))$ к $R((t))$ здесь невозможен.

Если A — $F((t))$-подмодуль (подалгебра, идеал) алгебры $R((t))$, A_0 — дополненное нулём множество всех первых ненулевых коэффициентов рядов из A, то A_0 — подмодуль (подалгебра, идеал) R, причём если $A_0 \subseteq A$, $A \subseteq A_0((t))$. Можно показать, что любому нормальному ряду подалгебр $\{A_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ $F((t))$-алгебры $R((t))$ ($\bar{R}((t))$, $\hat{R}((t))$) соответствует нормальный ряд подалгебр $\{A_{\beta_0} \mid \beta \leqslant \alpha\}$ алгебры R.

Каждому дифференцированию D алгебры R над алгеброй F отвечает автоморфизм $\exp(tD)$ алгебры $R((t))$,

$$\exp(tD)\sum_{i\geqslant n} r_i t^i = \sum_{k\geqslant n}\bigg(\sum_{i=n}^{k}\frac{D^{k-i}r_i}{(k-i)!}\bigg)t^k \quad \bigg(\sum_{i\geqslant n} r_i t^i \in R((t))\bigg).$$

Если D локально конечно, ограничение $\exp(tD)$ на $\bar{R}((t))$ — автоморфизм $\bar{R}((t))$. Если D слабо алгебраично, ограничение $\exp(tD)$ на $\hat{R}((t))$ — автоморфизм $\hat{R}((t))$.

Замечание 3.10. Если $F((t))$-подмодуль A алгебры $R((t))$ инвариантен относительно действия её автоморфизма $\exp(tD)$ и $A_0 \subseteq A$, то $D(A_0) \subseteq A_0$.

Доказательство. По условию $\exp(tD)x - x \in A$, $Dx \in A_0$ для всех $x \in A_0$. $\square$

Известные выводы [14, 15, 19] дополняет следствие.

Следствие 3.11. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}$ — классы алгебр над алгеброй F, содержащие вместе с каждой алгеброй A алгебру ${}_F\bar{A}((t))$, и для любой алгебры $R \in \mathfrak{M}$*

1) $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R) = \bigcup\limits_{A \,\mathrm{asc}\, R,\ A \in \mathfrak{X}} A,$
2) *если* $A \,\mathrm{asc}\, \bar{R}((t))$, ${}_F A \in \mathfrak{X}$, *то* $A_0 \in \mathfrak{X}$,
3) $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_t-\mathrm{asc}}\big(\bar{R}((t))\big) = \bigcup\limits_{B \,\mathrm{asc}\, \bar{R}((t)),\ B \in \mathfrak{X}_t} B,$

где ${}_F B$ — $F((t))$-алгебра B, рассматриваемая как F-алгебра, $\mathfrak{X}_t$ — класс $F((t))$-алгебр B, ${}_F B \in \mathfrak{X}$. Тогда $D\big(\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)\big) \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)$ для любых алгебры $R \in \mathfrak{M}$ и её локально конечного дифференцирования D.

Доказательство. По условию 1) и замечанию 3.9 в любой алгебре $R \in \mathfrak{M}$

$$\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R) \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_t-\mathrm{asc}}\big(\bar{R}((t))\big) \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}\big({}_F\bar{R}((t))\big),$$

по условиям 2), 3) $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_t-\mathrm{asc}}\big(\bar{R}((t))\big)_0 \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)$, и значит,

$$\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R) = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_t-\mathrm{asc}}\big(\bar{R}((t))\big)_0 \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_t-\mathrm{asc}}\big(\bar{R}((t))\big).$$

Остаётся применить замечание 3.10.

Если ${}_F F((t))A \in \mathfrak{X}$ для всех $R \in \mathfrak{M}$, $A \,\mathrm{asc}\, {}_F\bar{R}((t))$, $A \in \mathfrak{X}$ (каждому нормальному ряду F-подалгебр $\{A_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ алгебры $\bar{R}((t))$ с $A_1 \in \mathfrak{X}$ отвечает её нормальный ряд $F((t))$-подалгебр $\{F((t))A_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ с ${}_F F((t))A_1 \in \mathfrak{X}$), то условие 3) следует из условия 1). $\square$

Аналогичным образом доказывается следствие 3.12.

Следствие 3.12. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}$ — классы алгебр над алгеброй F, содержащие вместе с каждой алгеброй A алгебру ${}_F\hat{A}((t))$, и для любой слабо идеально алгебраической алгебры $R \in \mathfrak{M}$*

1) $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R) = \bigcup\limits_{A \,\mathrm{asc}\, R,\ A \in \mathfrak{X}} A;$
2) *если* $A \,\mathrm{asc}\, \hat{R}((t))$, ${}_F A \in \mathfrak{X}$, *то* $A_0 \in \mathfrak{X}$;
3) $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_t-\mathrm{asc}}(\hat{R}((t))) = \bigcup\limits_{B \,\mathrm{asc}\, \hat{R}((t)),\ B \in \mathfrak{X}_t} B.$

Тогда $D\big(\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)\big) \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)$ для любых слабо идеально алгебраической алгебры $R \in \mathfrak{M}$ и её слабо алгебраического дифференцирования D.

Назовём подкласс $\mathfrak{X}$ класса алгебр $\mathfrak{M}$ *идеально замкнутым*, если $I + J \in \mathfrak{X}$ для любых $R \in \mathfrak{M}$, $I, J \lhd R$, $I, J \in \mathfrak{X}$, и *достижимо* (*субинвариантно*) *замкнутым*, если $\langle A, B\rangle \,\mathrm{si}\, R$ ($\langle A, B\rangle \,\mathrm{asc}\, R$), $\langle A, B\rangle \in \mathfrak{X}$ для всех $R \in \mathfrak{M}$, $A, B \,\mathrm{si}\, R$

$(A, B \operatorname{asc} R)$, $A, B \in \mathfrak{X}$. Эти условия будут рассматриваться далее применительно к подклассам класса всех алгебр Ли над алгеброй F. Из следствий 3.11, 3.12 и субинвариантной замкнутости класса конечных нильпотентных алгебр Ли над алгеброй F (см. [14, 15] с учётом достижимости подалгебр нильпотентных алгебр) несложно вывести следствие 3.13.

Следствие 3.13. *Радикал Грюнберга $AN(R)$ (слабо идеально алгебраической) алгебры Ли R над алгеброй F инвариантен относительно действия всех её локально конечных (слабо алгебраических) дифференцирований.*

Замечание 3.14. Для любых алгебры R, $A \operatorname{asc} R$, $x \in R$ и $Y \subseteq A$, $|Y| < \infty$, найдётся $k = k(x, Y) \geqslant 1$, такой что

$$Z_n = \{t_{y_1} \cdots t_{y_n} x \mid y_i \in Y,\ t_{y_i} \in \{l_{y_i}, r_{y_i}\}\} \subseteq A \quad (n \geqslant k).$$

Доказательство. Если $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд подалгебр алгебры R с $R_1 = A$, $\beta_n = \min\{1 \leqslant \beta \leqslant \alpha \mid Z_n \subseteq R_\beta\}$, $n \geqslant 1$, то β_n не является предельным ($|Z_n| < \infty$) и либо $\beta_n > \beta_{n+1}$, либо $\beta_n = 1$, $n \geqslant 1$ ($AR_{\beta+1} + R_{\beta+1}A \subseteq R_\beta$, $1 \leqslant \beta < \alpha$). Отсюда следует, что $\min\limits_{n \geqslant 1} \beta_n = 1$, $Z_l \subseteq A$ при всех $l \geqslant k = \min\{m \geqslant 1 \mid \beta_m = 1\}$. □

Следствие 3.15. *Если R — алгебра Ли над кольцом F, $A \operatorname{asc} R$ и A конечно порождена, то A^ω — характеристический идеал R.*

Доказательство. Так как $A \operatorname{asc} R'$ для любой F-алгебры Ли R', $R \operatorname{asc} R'$, достаточно показать, что $A^\omega \lhd R$. Если $A = \langle Y \rangle$, $|Y| < \infty$, $x \in R$, то ввиду тождества Якоби $[A^n, x] \subseteq \sum\limits_{l \geqslant n} FZ_l$ при всех $n \geqslant 1$ (в обозначениях замечания 3.14), и значит, $[A^k, x] \subseteq A$ для некоторого $k = k(x, Y) \geqslant 1$. Поэтому $[A^\omega, R] \subseteq A$. □

Более известен вариант следствия 3.15 для конечномерной субинвариантной подалгебры алгебры Ли над полем (см. [14, 15, 21]).

Следствие 3.16. *Если $\mathfrak{X}$ — идеально замкнутый и замкнутый относительно взятия конечных нильпотентных расширений класс конечно порождённых алгебр Ли над алгеброй F, $A^\omega = A^k \in \mathfrak{X}$ для любой $A \in \mathfrak{X}$ при некотором $k = k(A) \geqslant 1$, то $\mathfrak{X}$ достижим и субинвариантно замкнут, идеал $\operatorname{Rad}_{\mathfrak{X}-asc}(R)$ любой (слабо идеально алгебраической) алгебры Ли R над F инвариантен относительно действия всех её локально конечных (слабо алгебраических) дифференцирований.*

Доказательство. Если $A, B \operatorname{asc} R$, $A, B \in \mathfrak{X}$, то ввиду следствия 3.15, конечности конечно порождённых нильпотентных алгебр и субинвариантной замкнутости класса конечных нильпотентных алгебр Ли над алгеброй F $I = A^\omega + B^\omega \lhd R$, $I \in \mathfrak{X}$,

$$(A+I)/I,\ (B+I)/I \operatorname{asc} R/I, \quad (A+I)/I,\ (B+I)/I \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N},$$
$$\langle (A+I)/I, (B+I)/I \rangle = \langle A, B \rangle / I \operatorname{asc} R/I, \quad \langle A, B \rangle / I \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$$

и потому $\langle A, B\rangle \operatorname{asc} R$, $\langle A, B\rangle \in \mathfrak{X}$. Аналогичным образом из достижимой замкнутости класса конечных нильпотентных алгебр Ли над F (см. [14, 15]) выводится достижимая замкнутость класса $\mathfrak{X}$.

Если $A \operatorname{asc} R$, $A \in \mathfrak{X}$, D — локально конечное (слабо алгебраическое) дифференцирование (слабо идеально алгебраической) алгебры R, то по следствиям 3.15, 3.13 $A^\omega \lhd R$, $A^\omega \in \mathfrak{X}$, $\langle A, D(A)\rangle/A^\omega = \langle A/A^\omega, \bar{D}(A/A^\omega)\rangle \subseteq AN(R/A^\omega)$, $\langle A, D(A)\rangle/A^\omega \operatorname{asc} R/A^\omega$, $\langle A, D(A)\rangle/A^\omega \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ (субинвариантная замкнутость класса конечных нильпотентных алгебр Ли над F), $\langle A, D(A)\rangle \operatorname{asc} R$, $\langle A, D(A)\rangle \in \mathfrak{X}$, где $\bar{D}$ — дифференцирование алгебры R/A^ω, индуцированное D. Поэтому $D\big(\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)\big) \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)$. □

Сходное рассуждение позволяет установить достижимую (субинвариантную) замкнутость любого класса конечно порождённых алгебр Ли $\mathfrak{X}$ над алгеброй F, такого что $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}}(R) = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{si}}(R)$ ($\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}}(R) = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)$) для любой конечно порождённой алгебры Ли R над F, $A^\omega = A^k$ для любой $A \in \mathfrak{X}$ при некотором $k = k(A) \geqslant 1$.

Следствие 3.17. *Радикал $RN^*(R)$ алгебраической или слабо идеально алгебраической алгебры Ли R над алгеброй F является наименьшим среди идеалов R, в фактор-алгебрах по которым нет ненулевых субинвариантных нильпотентных подалгебр. Как следствие, $RN^*(A) = A \cap RN^*(R)$ для всех $A \operatorname{asc} R$.*

Доказательство. В обоих случаях $AN(R) = LN(R) \cap RN^*(R)$, где $LN(R)$ — наибольший локально нильпотентный идеал алгебры Ли R (см. следствие 3.13, [14, теорема 5.4, с. 126—128]). Поэтому $RN^*(R)$ не только входит во все идеалы R, в фактор-алгебрах по которым нет ненулевых субинвариантных нильпотентных (RN^*-радикальных) подалгебр, но и сам является таким идеалом и равен объединению цепи идеалов, построенных аналогично цепи Бэра для отображения $AN\colon R \mapsto AN(R)$ (см. замечание после следствия 2.7 с учётом замкнутости классов алгебраических и слабо идеально алгебраических алгебр Ли над F относительно взятия гомоморфных образов). Поскольку класс RN^*-радикальных алгебр $A\mathfrak{A}$ над любым кольцом замкнут относительно взятия подалгебр, $RN^*(A) = A \cap RN^*(R)$ для всех $A \operatorname{asc} R$. □

Аналогично следствию 3.7 из следствий 3.15, 3.17 можно вывести следующие утверждения.

Следствие 3.18. *Если R — алгебраическая или слабо идеально алгебраическая алгебра Ли над алгеброй F, $A \operatorname{asc} R$, A конечно порождена и $A^\omega = A^k \in \mathfrak{X}$ для некоторых класса алгебр Ли $\mathfrak{X}$ над F, $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{X}$, и $k \geqslant 1$, то $(A)_R \in A\mathfrak{X}$.*

Следствие 3.19. *Если $\mathfrak{X}$ — замкнутый относительно взятия гомоморфных образов класс конечно порождённых алгебр Ли над алгеброй F, $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{X}$ и $A^\omega = A^k$ для любой $A \in \mathfrak{X}$ при некотором $k = k(A) \geqslant 1$, то $\mathcal{T}_{A\mathfrak{X}}(B) \subseteq \mathcal{T}_{A\mathfrak{X}}(R)$ для любых алгебраической или слабо идеально алгебраической алгебры Ли R над F и $B \operatorname{asc} R$ ($\mathcal{T}_{A\mathfrak{X}}(B) = B \cap \mathcal{T}_{A\mathfrak{X}}(R)$, если $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия субинвариантных подалгебр).*

Дополнение 1

Известное наблюдение о RN^*-радикальности локально нильпотентных идеалов счётно порождённых алгебр можно обобщить следующим образом.

Теорема 3.20. *Если алгебра R над кольцом F счётно порождена, $\mathcal{T}_{L\mathfrak{R}}(R) \subseteq RN^*(R)$. Если алгебра $\bar{R} = R/\operatorname{Rad}(F)R = \bar{R}_1 \oplus \ldots \oplus \bar{R}_k$ — конечная прямая сумма идеалов, где каждый $\bar{R}_i$ — F_i-модуль без кручения, $F_i = F/\operatorname{Ann}_F \bar{R}_i$, $RN^*(R) = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{R})}(R)$.*

Доказательство. Так как подалгебры нильпотентных алгебр достижимы, алгебры, являющиеся объединениями неубывающих цепей своих нильпотентных подалгебр, и, в частности, счётно порождённые локально нильпотентные алгебры RN^*-радикальны. Счётно порождённые F-алгебры и их счётно порождённые идеалы являются счётно порождёнными F-модулями. Отсюда следует RN^*-радикальность счётно порождённых локально нильпотентных идеалов алгебры R и суммы всех её локально нильпотентных идеалов, $\operatorname{Rad}_{L\mathfrak{R}}(R) \subseteq RN^*(R)$.

Если $\{R_i \mid i = 0,\ldots,k\}$ — конечный нормальный ряд алгебры R, $I = RN^*(I) \lhd R_1$ и $R_1/I \in L\mathfrak{R}$, то $R_1 = RN^*(R_1)$. Случай $k = 1$ очевиден, $R/I = RN^*(R/I)$ и $R = RN^*(R)$. Если это уже доказано для всех $k < m$ при некотором $m > 1$, то при $k = m$ каждый $x \in R_1$ порождает счётно порождённый как F-модуль идеал $(x)_R \lhd R$, $(x)_R \subseteq R_{m-1}$, с конечным нормальным рядом $\{R'_i = (x)_R \cap R_i \mid i = 0,\ldots,m-1\}$. Поскольку $I \cap (x)_R = RN^*(I \cap (x)_R) \lhd R'_1$, $R'_1/(I \cap (x)_R) \cong (R'_1 + I)/I \lhd R_1/I$, $R'_1/(I \cap (x)_R) \in L\mathfrak{R}$, то $R'_1 = RN^*(R'_1) \lhd R_1$. Поэтому $R_1 = \sum\limits_{x \in R_1} (x)_R \cap R_1 = RN^*(R_1)$.

Радикал $\mathcal{T}_{L\mathfrak{R}}(R)$ содержит нормальный ряд с достижимыми по ряду элементами и локально нильпотентными факторами $\{I_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$, в котором $I_1 = RN^*(I_1)$ (см. выше). Если для некоторого $1 < \gamma \leqslant \alpha$ уже доказано, что $I_\beta = RN^*(I_\beta)$ при всех $\beta < \gamma$, то $I_{\gamma-1} = RN^*(I_{\gamma-1}) \lhd I_\gamma$, $I_\gamma/I_{\gamma-1} \in L\mathfrak{R}$ для непредельного γ, $\{I_\beta \mid \beta \leqslant \gamma\}$ — нормальный ряд I_γ с RN^*-радикальными факторами для предельного γ и потому $I_\gamma = RN^*(I_\gamma)$ в любом случае. Таким образом,

$$\mathcal{T}_{L\mathfrak{R}}(R) = RN^*\big(\mathcal{T}_{L\mathfrak{R}}(R)\big) \subseteq RN^*(R).$$

Покажем теперь, что включение $RN^*(R) \subseteq \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{R})}(R)$ переходит в равенство, если алгебра $\bar{R} = \bar{R}_1 \oplus \ldots \oplus \bar{R}_k$ — конечная прямая сумма идеалов, каждый $\bar{R}_i$ — F_i-модуль без кручения, $\bar{R}_i \neq \{0\}$. Последнее предполагает целостность всех колец F_i. Поскольку первичный радикал $\operatorname{Rad}(F)$ кольца F — множество всех нильпотентных элементов F, $\operatorname{Rad}(F)R$ — сумма нильпотентных идеалов $fR \lhd R$, $f \in \operatorname{Rad}(F)$, $\operatorname{Rad}(F)R \subseteq RN^*(R)$,

$$\mathcal{T}(\bar{R}) = \mathcal{T}(R)/\operatorname{Rad}(F)R = \overline{\mathcal{T}(R)} = \{r + \operatorname{Rad}(F)R \mid r \in \mathcal{T}(R)\}, \quad \mathcal{T} = RN^*, \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{R})}.$$

Идеалы алгебр $\bar{R}_i$ являются идеалами $\bar{R}$ и $J \subseteq \phi_1(J) \oplus \ldots \oplus \phi_k(J)$ для любого $J \lhd \bar{R}$, где $J_i = \phi_i(J) \lhd \bar{R}$, $\phi_i \colon \bar{R} \to \bar{R}_i$ — канонический эпиморфизм $\bar{R}$

на $\bar{R}_i$. Поэтому если $\mathcal{T}$ — радикал в смысле Куроша—Амицура на замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе алгебр над F, содержащем $\bar{R}$,

$$\mathcal{T}(\bar{R}) = \mathcal{T}(\bar{R})_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}(\bar{R})_k, \quad \mathcal{T}(\bar{R})_i = \mathcal{T}(\bar{R}_i) = \mathcal{T}(\bar{R}) \cap \bar{R}_i.$$

В частности, это верно для $\mathcal{T} = RN^*, \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{R})}$. Рассматривая каждую $\bar{R}_i$ как F_i-алгебру, отождествим $\bar{R}_i$ с F_i-подалгеброй $1 \otimes \bar{R}_i$ её скалярного расширения $\bar{R}'_i = \mathbb{F}_i \otimes_{F_i} \bar{R}_i$ над полем частных $\mathbb{F}_i$ области целостности F_i, $\bar{R}'_i = \mathbb{F}_i \bar{R}_i$. Так как алгебры над $\mathbb{F}_i$ являются алгебрами над F_i и F, классы алгебр с нулевым умножением, нильпотентных алгебр $\mathfrak{A}_{\mathbb{F}_i}$, $\mathfrak{N}_{\mathbb{F}_i}$ и их радикальные расширения $A\mathfrak{A}_{\mathbb{F}_i}$, $A(L\mathfrak{N}_{\mathbb{F}_i})$ над $\mathbb{F}_i$ — подклассы классов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ и $A\mathfrak{A}$, $A(L\mathfrak{N})$ над F,

$$RN^*_{\mathbb{F}_i}(\bar{R}'_i) = \mathcal{T}_{A\mathfrak{A}_{\mathbb{F}_i}}(\bar{R}'_i) \subseteq RN^*(\bar{R}'_i)$$

и $\mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N}_{\mathbb{F}_i})}(\bar{R}'_i) \subseteq \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(\bar{R}'_i)$. Вместе с тем любая $\mathcal{T}$-радикальная F-подалгебра $A \subseteq \bar{R}'_i$, $\mathcal{T} = RN^*, \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}$, порождает $\mathcal{T}_{\mathbb{F}_i}$-радикальную $\mathbb{F}_i$-подалгебру $\mathbb{F}_i A$, $\mathcal{T}_{\mathbb{F}_i} = RN^*_{\mathbb{F}_i}, \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N}_{\mathbb{F}_i})}$ (каждому нормальному ряду $\{A_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ в A с факторами из $\mathfrak{A}$ ($L\mathfrak{N}$) отвечает нормальный ряд $\{\mathbb{F}_i A_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ в $\mathbb{F}_i A$ с факторами из $\mathfrak{A}_{\mathbb{F}_i}$ ($L\mathfrak{N}_{\mathbb{F}_i}$)), и значит,

$$\mathcal{T}(\bar{R}_i) \subseteq \mathbb{F}_i \mathcal{T}(\bar{R}_i) \subseteq \mathcal{T}(\bar{R}'_i) = \mathbb{F}_i \mathcal{T}(\bar{R}'_i) = \mathcal{T}_{\mathbb{F}_i}(\bar{R}'_i), \quad \mathcal{T}(\bar{R}_i) = \bar{R}_i \cap \mathcal{T}(\bar{R}'_i).$$

Ввиду счётной порождённости $\bar{R}_i$ размерности $\mathbb{F}_i$-подалгебр $\bar{R}'_i$ и их факторов не более чем счётны и

$$RN^*(\bar{R}'_i) = RN^*_{\mathbb{F}_i}(\bar{R}'_i) = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(\bar{R}'_i) = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N}_{\mathbb{F}_i})}(\bar{R}'_i),$$
$$RN^*(\bar{R}_i) = \bar{R}_i \cap RN^*(\bar{R}'_i) = \bar{R}_i \cap \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(\bar{R}'_i) = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(\bar{R}_i)$$

(см. начало доказательства с учётом $A\mathfrak{A}_{\mathbb{F}_i} = A(A\mathfrak{A}_{\mathbb{F}_i})$). Поэтому

$$RN^*(\bar{R}) = RN^*(\bar{R})_1 \oplus \ldots \oplus RN^*(\bar{R})_k = RN^*(\bar{R}_1) \oplus \ldots \oplus RN^*(\bar{R}_k) =$$
$$= \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(\bar{R}_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(\bar{R}_k) = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(\bar{R})_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(\bar{R})_k = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(\bar{R}),$$

$$\overline{RN^*(R)} = RN^*(\bar{R}) = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(\bar{R}) = \overline{\mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(R)},\ RN^*(R) = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{N})}(R). \qquad \square$$

Второе утверждение теоремы 3.20 верно, в частности, для счётно порождённых алгебр над полулокальным кольцом Джекобсона F ($F/\operatorname{Rad}(F)$ — конечная прямая сумма полей).

Следствие 3.21. *Если на замкнутом относительно взятия субинвариантных подалгебр и гомоморфных образов классе алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F определён локально нильпотентный радикал LN, то $LN(R) = RN^*(R)$ для любой счётно порождённой алгебры $R \in \mathfrak{M}$.*

Существование радикала LN на классе $\mathfrak{M}$ означает, что $M \cap L\mathfrak{N}$ — радикальный подкласс $\mathfrak{M}$ (в следствии 3.21 также $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap A(L\mathfrak{N})$). В частности, это верно для классов альтернативных алгебр и ниль-алгебр Ли над кольцом F, линейных йордановых алгебр и (γ, δ)-алгебр над F с $1/2$.

Дополнение 2

Согласно [14, теорема 5.4, с. 126—128] ниль-элементы (элементы, которым отвечают внутренние ниль-дифференцирования) радикала $RN^*(R)$ алгебры Ли R над алгеброй F порождают субинвариантные абелевы подалгебры, $LN(R) \cap RN^*(R)$ — наибольший идеал Грюнберга R (наибольший из $I = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{R}-\mathrm{asc}}(I) \lhd R$) и наибольший из ниль-идеалов R, входящих в $RN^*(R)$. Рассмотрим вариант данного утверждения для полулокальной алгебры Джекобсона F и наибольшего из $I = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}-\mathrm{asc}}(I) \lhd R$.

Замечание 3.22. Если R — конечная алгебра над полулокальным кольцом Джекобсона F, то $R^\omega = R^k$ для некоторого $k \geqslant 1$.

Доказательство. Поскольку конечная алгебра $R/\mathrm{Rad}(F)R$ над артиновым кольцом $F/\mathrm{Rad}(F)$ — артинов и нётеров $F/\mathrm{Rad}(F)$-модуль, для некоторого $m \geqslant 2$

$$(R/\mathrm{Rad}(F)R)^m = (R/\mathrm{Rad}(F)R)^k, \quad R^m \subseteq R^k + \mathrm{Rad}(F)R \quad (k \geqslant m).$$

Если $R = FE$, $|E| < \infty$, E_k — множество произведений длины l элементов E, $R^l = FE_l$, $l \geqslant 1$, $E_1 = E$, то каждый $e \in E_{m+i}$, $i \geqslant 0$, представи́м в виде

$$e = \sum_{e' \in E_{m+i+1}} f_e^{e'} e' + \sum_{i=1}^{n} g_e^i e_i$$

для подходящих $f_e^{e'} \in F$, $g_e^i \in \mathrm{Rad}(F)$. Идеал $H = (G)_F = FG \lhd F$,

$$G = \{g_e^i \mid e \in E_m \cup E_{m+1} \cup \ldots \cup E_{2m-2},\ i = 1, \ldots, n\},$$

нильпотентен, $H^p = \{0\}$ для некоторого $p \geqslant 1$, $R^{m+i} \subseteq R^{m+i+1} + HR$, $i = 0, \ldots, m-2$, и, как следствие, $R^{m+i} \subseteq R^{m+j} + HR$, $j \geqslant i \geqslant 0$. Используя индукцию по длине слова и однозначную представимость правильного неассоциативного слова в виде произведения слов меньшей длины, несложно показать, что любое слово длины $l \geqslant 2m-1$ содержит подслово длины l', $m \leqslant l' \leqslant 2m-2$. Поэтому

$$R^k \subseteq R^{k+1} + \sum_{i=m}^{2m-2} HR^{k-i+1} \subseteq R^{k+1} + HR^{k-2m+3} \quad (k \geqslant 2m-1)$$

и, более того, $R^k \subseteq R^{k+i} + HR^{k-2m+3}$, $k \geqslant 2m-1$, $i \geqslant 1$. Если для некоторого $k \geqslant 1$ уже доказано, что $R^{k(2m-3)+i} \subseteq R^{k(2m-3)+j} + H^k R$, $2 \leqslant i < j$, то

$$\begin{aligned} R^{(k+1)(2m-3)+i} &\subseteq R^{(k+1)(2m-3)+j} + HR^{k(2m-3)+i} \subseteq \\ &\subseteq R^{(k+1)(2m-3)+j} + HR^{k(2m-3)+i+1} + H^{k+1}R \subseteq \\ &\subseteq R^{(k+1)(2m-3)+j} + H^{k+1}R \quad (2 \leqslant i < j) \end{aligned}$$

($R^{k(2m-3)+i+1} \subseteq R^{(k+1)(2m-3)+j} + H^k R$). Поэтому $R^{p(2m-3)+2} = R^{p(2m-3)+3} = R^\omega$. □

Для любых алгебры $R \in \mathfrak{U}$ и класса $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{U}$ выделим

$$\mathfrak{X}_* = \{R \in \mathfrak{U} \mid R = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-*}(R)\}$$

и наибольший идеал $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_*}(R)$ среди идеалов R из $\mathfrak{X}_*$, $* = \mathrm{si}, \mathrm{asc}$, положим

$$MF^*(R) = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}_{\mathrm{asc}}}(R), \quad MSF^*(R) = \mathrm{Rad}_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S})_{\mathrm{asc}}}(R),$$
$$AF(R) = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}-\mathrm{asc}}(R), \quad ASF(R) = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}-\mathrm{asc}}(R).$$

Если $\mathfrak{X}$ — достижимо (субинвариантно) замкнутый подкласс класса $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{U}$, то $\mathfrak{X}_{\mathrm{si}} \cap \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{X}_{\mathrm{asc}} \cap \mathfrak{M}$) — класс алгебр $R \in \mathfrak{M}$, конечные подмножества которых входят в достижимые (субинвариантные) подалгебры из $\mathfrak{X}$. Если такой X также замкнут относительно взятия конечно порождённых идеалов, то $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_{\mathrm{si}}}(R)$ ($\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_{\mathrm{asc}}}(R)$) — наибольший из идеалов $R \in \mathfrak{M}$, входящих в $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{si}}(R)$ ($\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)$). Действительно, для любых $I \lhd R$, $I \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{si}}(R)$ ($I \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-\mathrm{asc}}(R)$), и $S \subseteq I$, $|S| < \infty$, можно подобрать $A \,\mathrm{si}\, R$ ($A \,\mathrm{asc}\, R$), $A \in \mathfrak{X}$, $S \subseteq A$, и значит, $(S)_A \in \mathfrak{X}$, $(S)_A \,\mathrm{si}\, I$ ($(S)_A \,\mathrm{asc}\, I$) (пересечения подалгебры $B \subseteq R$ с элементами нормального ряда R формируют нормальный ряд B). В данной ситуации $D(\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_*}(R)) \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_*}(R)$, где D — дифференцирование R, $D\big(\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-*}(R)\big) \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}-*}(R)$, $* = \mathrm{si}(\mathrm{asc})$ ($I + D(I) \lhd R$ для любых $I \lhd R$ и дифференцирования D). Эти наблюдения, следствие 3.16, замечание 3.22 и конечность конечно порождённых идеалов конечных алгебр (см. [7, лемма 2]) позволяют получить следующий результат.

Следствие 3.23. *Классы конечных и конечных разрешимых алгебр Ли над полулокальной алгеброй Джекобсона F достижимы и субинвариантно замкнуты, подалгебры $AF(R)$, $ASF(R)$, $MF^*(R)$, $MSF^*(R)$ любой* (*слабо идеально алгебраической*) *алгебры Ли R над F инвариантны относительно действия всех её локально конечных* (*слабо алгебраических*) *дифференцирований.*

Как и в следствии 3.16, здесь представлены условия замкнутости подклассов класса всех алгебр Ли над алгеброй F. Часть следствия 3.23 известна в случае, если F — поле, $\mathrm{char}\, F = 0$ (см. [14, 15]).

Замечание 3.24. Если ϕ — алгебраический автоморфизм алгебры R над кольцом F, $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд подалгебр R, то

$$\left\{R_\beta(\phi) = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \phi^i(R_\beta)\big|\beta \leqslant \alpha\right\} -$$

нормальный ряд $\langle\phi\rangle_\infty$-инвариантных подалгебр R, $\langle\phi\rangle_\infty = \{\phi^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство. Инвариантность подалгебр $R_\beta(\phi)$, $\beta \leqslant \alpha$, алгебры R относительно действия автоморфизмов ϕ^i, $i \in \mathbb{Z}$, следует из их определения, $R_0(\phi) = \{0\}$, $R_\alpha(\phi) = R$. Так как $R_\beta \lhd R_{\beta+1}$, $\beta < \alpha$,

$$R_\beta(\phi)R_{\beta+1}(\phi) + R_{\beta+1}(\phi)R_\beta(\phi) \subseteq$$
$$\subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \phi^i(R_\beta R_{\beta+1} + R_{\beta+1}R_\beta) \subseteq R_\beta(\phi), \quad R_\beta(\phi) \lhd R_{\beta+1}(\phi).$$

Если β предельный, $\beta \leqslant \alpha$, то $R_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} R_\gamma$ и потому $R_\beta(\phi) \supseteq \bigcup\limits_{\gamma<\beta} R_\gamma(\phi)$. Для любого $x \in R_\beta(\phi)$ подалгебра $A(x,\phi) = \langle \phi^i x \mid i \in \mathbb{Z}\rangle \subseteq R_\beta(\phi)$ конечно порождена и инвариантна относительно действия ϕ^i, $i \in \mathbb{Z}$, и значит, $A(x,\phi) \subseteq R_\gamma$, $A(x,\phi) \subseteq R_\gamma(\phi)$ для некоторого $\gamma < \beta$. Поэтому $R_\beta(\phi) = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} R_\gamma(\phi)$. □

Выделим в алгебре $F((t))$ над алгеброй F подалгебру $\hat{F}((t))$, состоящую из рядов с коэффициентами из конечно порождённых подалгебр F, и в алгебре $\bar{R}((t))$ — $\hat{F}((t))$-подалгебру $R((t))' = \hat{F}((t))R$, порождённую F-алгеброй R (см. выше).

Замечание 3.25. Если D — локально конечное дифференцирование D алгебры R над алгеброй F, то ограничение $\exp(tD)$ на $\hat{F}((t))$-алгебру $R((t))'$ — локально конечный автоморфизм $R((t))'$.

Доказательство. Ограничение $\exp(tD)|_{R((t))'}$ — автоморфизм алгебры $R((t))'$, так как для каждого $x \in R$ найдётся

$$ {}_{D,x}f(t) = t^{n_{D,x}} + {}_{D,x}f_{n_{D,x}-1}t^{n_{D,x}-1} + \ldots + {}_{D,x}f_1 t \in F[t], \quad n_{D,x} \geqslant 1, $$

такой что ${}_{D,x}f(D)x = 0$, и потому

$$ \exp(itD)x = \exp(tD)^i x \in \sum_{j=0}^{n_{D,x}-1} H_x((t))D^j x \quad (i \in \mathbb{Z}), $$

где H_x — подалгебра алгебры F, порождённая коэффициентами ${}_{D,x}f$ (см. [5, замечание 3.5]). Если $y \in R((t))'$, то $y = g_1x_1 + \ldots + g_m x_m$ для некоторых $m \geqslant 1$, $g_k \in G((t))$, $x_k \in R$ и конечно порождённой подалгебры $G \subseteq F$,

$$ \exp(tD)^i y \in M = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_{D,x_j}-1} T((t))D^j x_k \quad (i \in \mathbb{Z}), $$

где $T = \langle G, H_{x_1}, \ldots, H_{x_k}\rangle \subseteq F$. Поскольку по теореме Гильберта о базисе T и $T((t))$ — нётеровы кольца, $T((t))$-модуль M нётеров, $T((t))$-модули $M_\pm = \sum\limits_{i\geqslant 0} T((t))\exp(\pm tD)^i y$ и $\hat{F}((t))$-модули $\hat{F}((t))M_\pm$ конечно порождены. Поэтому $\exp(tD)|_{R((t))'}$ локально конечен. □

Следствие 3.26. *Если D — локально конечное дифференцирование алгебры R над алгеброй F, $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд подалгебр R, то $\{R_\beta((t))'(\exp(tD))_0 \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд D-инвариантных подалгебр R.*

Доказательство. Так как $\{R_\beta((t))' \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд подалгебр алгебры $R((t))'$, $\{R_\beta((t))'(\exp(tD)) \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд её $\langle\exp(tD)\rangle_\infty$-инвариантных подалгебр (см. замечания 3.9, 3.25, 3.24), которому отвечает нормальный ряд подалгебр $\bigl\{R_\beta(D) = R_\beta((t))'\bigl(\exp(tD)\bigr)_0 \bigm| \beta \leqslant \alpha\bigr\}$ алгебры R. Для любых $\beta \leqslant \alpha$, $0 \neq x \in R_\beta(D)$ найдётся $\sum\limits_{j\geqslant p} t^j x_j \in R_\beta((t))'\bigl(\exp(tD)\bigr)$,

$x_p = x$, и

$$\exp(tD)\Big(\sum_{j\geqslant p} t^j x_j\Big) - \sum_{j\geqslant p} t^j x_j =$$
$$= \sum_{j\geqslant p+1} t^j y_j \in R_\beta((t))'\big(\exp(tD)\big), \quad y_{p+1} = Dx \in R_\beta(D). \quad \square$$

Назовём подалгебру A алгебры Ли R *компонентой элемента* $x \in R$, если $\mathrm{ad}_x(A) \subseteq A$ и $\mathrm{ad}_x^k y \in A$ для любого $y \in R$ при некотором $k = k(y) \geqslant 0$. Например, если $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — нормальный ряд подалгебр R, то каждая R_β — компонента своих элементов, так как для любых $x \in R_\beta$, $y \in R$, $k \geqslant 1$, $\mathrm{ad}_x^k y \in R_{\beta_k}$ для $\beta_k = \min\{\beta \leqslant \gamma \leqslant \alpha \mid \mathrm{ad}_x^k y \in R_\gamma\}$, β_k не предельный, $\beta_{k+1} < \beta_k$ при $\beta_k > \beta$, и потому $\min\{\beta_k \mid k \geqslant 1\} = \beta$. Элементам локально конечных идеалов R (и её элементам с конечными компонентами, если основное кольцо нётерово) отвечают локально конечные внутренние дифференцирования.

Напомним, что любая алгебра Ли R содержит наибольший локально конечный и разрешимый идеал $LSF(R) = \mathrm{Rad}_{L(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S})}(R)$.

Теорема 3.27. *Для любой алгебры Ли R над алгеброй F*

1) *элемент $x \in LSF(R) \cap RN^*(R)$ имеет конечную разрешимую компоненту, если и только если $x \in A$ для некоторой конечной разрешимой $A \operatorname{asc} R$;*
2) *если F — полулокальная алгебра Джекобсона, то $B \operatorname{asc} R$ для любой конечной разрешимой подалгебры $B \subseteq RN^*(R)$, которая является компонентой всех своих элементов, $MSF^*(R)$ — наибольший среди идеалов R, состоящих из элементов $LSF(R) \cap RN^*(R)$ с конечными разрешимыми компонентами.*

Доказательство. Если элемент $x \in LSF(R) \cap RN^*(R)$ имеет конечную разрешимую компоненту A, то из локальной конечности конечных алгебр (см. [6, лемма 7, с. 131]) и [4, следствие 2.8 (замечание 2.6)] следует, что $B = \langle [x, A] \rangle$, $C = \langle [x, B] \rangle$ — конечные нильпотентные компоненты x,

$$C \subseteq \big(LSF(R) \cap RN^*(R)\big)^2 \subseteq LN(R) \cap RN^*(R),$$

идеал $LSF(R) \cap RN^*(R)$ содержит нормальный ряд подалгебр $\{N_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ с $N_1 = C$ (см. [14, теорема 5.4, с. 126—128]). Этот ряд с RN^*-радикальными факторами можно уплотнить до нормального ряда $\{N'_\tau \mid \tau \leqslant \sigma\}$ с $N'_1 = N_1$ и абелевыми факторами. Так как дифференцирование ad_x локально конечно, $[x, N'_1] \subseteq N'_1$ и

$$N'_{\delta+1}((t))'\big(\exp(t\,\mathrm{ad}_x)\big)^2 \subseteq$$
$$\subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \exp(it\,\mathrm{ad}_x)(N'_{\delta+1}((t))'^2) \subseteq N'_\delta((t))\big(\exp(t\,\mathrm{ad}_x)\big) \quad (1 \leqslant \delta < \sigma),$$

$\big\{N'_\tau(x) = N'_\tau((t))'\big(\exp(t\,\mathrm{ad}_x)\big)_0 \mid \tau \leqslant \sigma\big\}$ — нормальный ряд $LSF(R) \cap RN^*(R)$ из компонент x с $N'_1(x) = N'_1$ и абелевыми факторами (см. следствие 3.26). При любом $1 \leqslant \delta < \sigma$ алгебра $N'_{\delta+1}(x)$ содержит нормальный ряд подалгебр

$$\{0\} \subseteq N'_\delta(x) = N'_{\delta,0} \subseteq \ldots \subseteq N'_{\delta,k} \subseteq \ldots \subseteq N'_{\delta+1}(x) = N'_{\delta,\omega} = \bigcup_{k \geqslant 0} N'_{\delta,k},$$

$$N'_{\delta,k} = \{y \in N'_{\delta+1}(x) \mid \mathrm{ad}_x^k\, y \in N'_\delta(x)\}, \quad [x, N'_{\delta,k+1}] \subseteq N'_{\delta,k} \quad (k \geqslant 0),$$

где ω — начальный трансфинит счётной мощности. Уплотняя элементами этих рядов ряд $\{N'_\tau(x) \mid \tau \leqslant \sigma\}$, можно получить нормальный ряд $\{N''_\eta \mid \eta \leqslant \nu\}$ с $N''_1 = N'_{1,0} = N'_1(x)$, абелевыми факторами, $[x, N''_{\eta+1}] \subseteq N'_\eta$, $1 \leqslant \eta < \nu$. Как следствие, $\{Fx + N''_\eta \mid 1 \leqslant \eta \leqslant \nu\}$ — нормальный ряд от $Fx + N''_1 = Fx + C$ до $LSF(R) \cap RN^*(R)$, x входит в конечную разрешимую подалгебру $Fx + C \operatorname{asc} R$, $x \in ASF(R)$.

По доказанному $I \in (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S})_{\mathrm{asc}}$, $I \subseteq MSF^*(R)$ для всех $I \lhd R$, состоящих из элементов $LSF(R) \cap RN^*(R)$ с конечными разрешимыми компонентами. Если конечная разрешимая подалгебра $B \subseteq RN^*(R)$ — компонента всех своих элементов, то B^2 — конечная нильпотентная компонента элементов B, элементы B^2 — ниль-элементы алгебры R, $B^2 \operatorname{asc} R$ (см. [4, замечание 2.6; 14, теорема 5.4, с. 126—128] с учётом субинвариантной замкнутости класса конечных нильпотентных алгебр Ли над F), $Fx + B^2 \operatorname{asc} R$, $x \in B$ (см. предыдущее рассуждение для $x \in B$, $C = B^2$), $B = \langle B' \subseteq B \mid B' \operatorname{asc} R,\ B' \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}\rangle$. Поэтому если F — полулокальная алгебра Джекобсона, $B \operatorname{asc} R$, $MSF^*(R) \subseteq LSF(R)$,

$$MSF^*(R)^2 \subseteq LN(R) \cap MSF^*(R) = LN(R) \cap RN^*(R),$$
$$MSF^*(R) \subseteq LSF(R) \cap RN^*(R),$$

$MSF^*(R)$ — наибольший из входящих в множество $LSF(R) \cap RN^*(R) \cap ASF(R)$ всех элементов $LSF(R) \cap RN^*(R)$ с конечными разрешимыми компонентами идеалов R (см. следствие 3.23, [4, следствие 2.8; 14, теорема 5.4, с. 126—128]). Кроме того, поскольку радикал $RN^*(R)$ слабо разрешим (см. [11]), $MSF^*(R)$ — наибольший среди входящих в $RN^*(R)$ локально конечных идеалов R, элементы которых имеют конечные разрешимые компоненты. $\square$

Следствие 3.23 позволяет получить следствие 3.28.

Следствие 3.28. *Если R — алгебраическая или слабо идеально алгебраическая алгебра Ли над полулокальной алгеброй Джекобсона F, то $ASF(R) = MSF^*(R)$ — множество всех элементов $LSF(R) \cap RN^*(R)$ с конечными разрешимыми компонентами.*

Исследование выполнено за счёт гранта МЦФПМ в МГУ им. М. В. Ломоносова «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем».

Литература

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин В. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[2] Бейдар К. И. Лемма Андрунакиевича и йордановы алгебры // УМН. — 1990. — Т. 45, № 4(274). — С. 137—138.

[3] Голубков А. Ю. Конструкции специальных радикалов алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 1. — С. 57—133.

[4] Голубков А. Ю. Слабо разрешимый радикал и локально сильно алгебраические дифференцирования локально обобщённо специальных алгебр Ли // Фундамент. и прикл. матем. — 2020. — Т. 23, № 2. — С. 89—99.

[5] Голубков А. Ю. Локально конечный радикал алгебраических алгебр Мальцева. — В печати.

[6] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[7] Жевлаков К. А., Шестаков И. П. О локальной конечности в смысле Ширшова // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 43—73.

[8] Левич Е. М. О простых и строго простых кольцах // Изв. АН Лат. ССР. Сер. физ.-тех. наук. — 1965. — № 6. — С. 53—58.

[9] Марковичев А. С. Наследственность радикалов колец типа (γ, δ) // Алгебра и логика. — 1978. — Т. 17, № 1. — С. 33—55.

[10] Никитин А. А. Наследственность радикалов колец // Алгебра и логика. — 1978. — Т. 17, № 3. — С. 303—315.

[11] Парфёнов В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли // Сиб. матем. журн. — 1971. — Т. 12, № 1. — С. 171—176.

[12] Роомельди Р. Э. Нильпотентность идеалов в $(-1, 1)$-кольцах с условием минимальности // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 3. — С. 333—348.

[13] Симонян Л. А. О двух радикалах алгебр Ли // ДАН СССР. — 1964. — Т. 157, № 2. — С. 281—283.

[14] Amayo R. K., Stewart I. N. Infinite Dimensional Lie Algebras. — Leyden: Noordhoof, 1974.

[15] Hartley B. Locally nilpotent ideals of a Lie algebra // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1967. — Vol. 63, pt. 2. — P. 257—272.

[16] Hentzel I. R., Slater M. On the Andrunakievich lemma for alternative rings // J. Algebra. — 1973. — Vol. 27. — P. 243—256.

[17] Lewand R. Hereditary radicals in Jordan rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 33, no. 2. — P. 302—306.

[18] Stewart I. N. The minimal condition for subideals of Lie algebras implies that every ascendant subalgebra is a subideal // Hiroshima Math. J. — 1979. — Vol. 9, no. 1. — P. 35—36.

[19] Stewart I. N. Structure theorems for a class of locally finite Lie algebras // Proc. London Math. Soc., Ser. 3. — 1972. — Vol. 24, № 1. — P. 79—100.

[20] Sulinski A., Anderson T., Divinsky N. Lower radical properties for associative and alternative rings // J. London Math. Soc. — 1966. — Vol. 41. — P. 417—424.

[21] Tôgô S., Kawamoto N. Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebras // Hiroshima Math. J. — 1972. — Vol. 2, no. 2. — P. 253—261.

[22] Widarma G. Nondegenerate radicals of right alternative rings // Acta Math. Hungarica. — 2003. — Vol. 10, no. 1-2. — P. 19—30.