Некоторые свойства коэффициентов размерностного многочлена Колчина

М. В. КОНДРАТЬЕВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: marina.kondratieva@math.msu.ru

УДК 512.628.2

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, дифференциальные многочлены, размерностный многочлен Колчина, минимизирующие коэффициенты.

Аннотация

В статье представлена формула, выражающая константы Маколея целозначного многочлена через его минимизирующие коэффициенты. Её следствием является тот факт, что константы Маколея размерностных многочленов Колчина не убывают. Для минимального дифференциального размерностного многочлена $\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ (это понятие ввёл В. Зит) мы докажем критерий того, что константы Маколея постоянны. В этом случае, как показывает наш пример, нет ограничений сверху на константы Маколея многочлена $\omega_{\xi/\mathcal{F}}$ для $\mathcal{G} = \mathcal{F}\langle\xi\rangle$.

Abstract

M. V. Kondratieva, Some properties of coefficients of the Kolchin dimension polynomial, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2022), no. 1, pp. 165—176.

This paper presents a formula expressing Macaulay constants of a numerical polynomial through its minimizing coefficients. From this, we obtain that Macaulay constants of Kolchin dimension polynomials do not decrease. For the minimal differential dimension polynomial $\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ (this concept was introduced by W. Sitt) we will prove a criterion for Macaulay constants to be equal. In this case, as our example shows, there are no bounds from above to the Macaulay constants of the polynomial $\omega_{\xi/\mathcal{F}}$ for $\mathcal{G} = \mathcal{F}\langle\xi\rangle$.

1. Введение

Одним из основных объектов изучения в дифференциальной алгебре является дифференциальный размерностный многочлен, введённый Э. Колчиным [3]. Это аналог размерности в алгебраической геометрии, и его роль аналогична роли многочлена Гильберта в коммутативной алгебре.

Сам размерностный многочлен не является инвариантом дифференциального поля, но содержит некоторые инварианты, например степень и старший коэффициент. В этой статье мы рассматриваем ещё один малоизученный инвариант, введённый В. Зитом [5], — минимальный размерностный многочлен.

Фундаментальная и прикладная математика, 2022, том 24, № 1, с. 165—176.

Отметим, что начиная с 80-х годов прошлого века возрос интерес к компьютерной алгебре. Если говорить об истории, одним из первых ученых, чьи работы закладывали фундамент конструктивной теории идеалов в кольце многочленов, является Ф. Маколей (20-е годы XX века). Он доказал, в частности, критерий равенства целозначной функции функции Гильберта однородного идеала в кольце коммутативных многочленов. В 1990 г. Т. Дюбе использовал в доказательстве оценки степени элементов базиса Грёбнера числа, названные в честь Маколея константами Маколея.

Функция Гильберта для достаточно больших значений аргумента становится многочленом, который рассматривается в этой статье, причём множество всех многочленов Гильберта однородных идеалов совпадает с множеством размерностных многочленов Колчина. В [4, утверждение 2.4.10] доказан критерий равенства целозначного многочлена некоторому многочлену Гильберта, не использующий результаты Маколея. В настоящей статье мы представим этот результат в терминах констант Маколея.

2. Предварительные факты

Основные понятия и факты изложены в [3, 4].

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, через $\mathbb{N}_0$ неотрицательные целые числа. Пусть $e = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Тогда число

$$\sum_{k=0}^{m} i_k$$

будем называть порядком элемента e и обозначать через $\operatorname{ord} e$. Обозначим также через $\binom{n}{k}$ биномиальные коэффициенты,

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Отметим, что любой целозначный (т. е. принимающий в целых точках целые значения) полином $v(s)$ может быть записан в виде

$$v(s) = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{s+i}{i},$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$. Будем называть числа $(a_d, \dots, a_0)$ *стандартными коэффициентами* многочлена $v(s)$. Следующее определение впервые появилось в [1].

Определение 1 (см. [4, определение 2.4.9]). Пусть $\omega = \omega(s)$ — целозначный многочлен степени d от переменной s. Назовём последовательностью *минимизирующих коэффициентов* многочлена ω вектор $b(\omega) = (b_d, \dots, b_0) \in \mathbb{Z}^{d+1}$, определяемый индуктивно по d следующим образом. Если $d = 0$ (т. е. ω является константой), то положим $b(\omega) = (\omega)$. Пусть $d > 0$ и $(a_d, \dots, a_0)$ —

стандартные коэффициенты многочлена ω, т. е.

$$\omega(t)=\sum_{i=0}^{d}a_i\binom{t+i}{i}.$$

Введём обозначение

$$v(s)=\omega(s+a_d)-\binom{s+d+1+a_d}{d+1}+\binom{s+d+1}{d+1}.$$

Так как $\deg v<d$, можно вычислить последовательность минимизирующих коэффициентов $b(v)=(b_k,\ldots,b_0)$ $(0\leqslant k<d)$ многочлена $v(s)$. Теперь положим $b(\omega)=(a_d,0,\ldots,0,b_k,\ldots,b_0)\in\mathbb{Z}^{d+1}$.

Теперь дадим определение размерностного многочлена Колчина подмножества $E\subset\mathbb{N}_0^m$. Определим частичный порядок на $\mathbb{N}_0^m$ следующим образом: отношение $(i_1,\ldots,i_m)\leqslant(j_1,\ldots,j_m)$ равносильно $i_k\leqslant j_k$ для всех $k=1,\ldots,m$. Рассмотрим функцию $\omega_E(s)$, принимающую в точке s значение $\operatorname{Card}V_E(s)$, где $V_E(s)$ — множество точек $x\in\mathbb{N}_0^m$, таких что $\operatorname{ord}x\leqslant s$ и для каждого $e\in E$ не выполняется условие $e\leqslant x$. Тогда (см., например, [3, с. 115] или [4, теорема 5.4.1]) функция $\omega_E(s)$ для всех достаточно больших s является целозначным многочленом. Будем называть её *размерностным многочленом Колчина* множества E и обозначать через $\omega_E(s)$.

Определение 2. Оператор ∂, действующий на коммутативном кольце $\mathbb{K}$ с единицей, называется *дифференциальным оператором* (или *дифференцированием*), если он линеен, $\partial(a+b)=\partial(a)+\partial(b)$, и выполняется правило Лейбница $\partial(ab)=\partial(a)b+a\partial(b)$ для всех элементов $a,b\in\mathbb{K}$.

Дифференциальным кольцом (или Δ-кольцом) будем называть коммутативное кольцо $\mathbb{K}$ с конечным множеством $\Delta=\{\partial_1,\ldots,\partial_m\}$ попарно коммутирующих дифференцирований на $\mathbb{K}$.

Пусть

$$\Theta=\Theta(\Delta)=\{\partial_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\partial_m^{i_m}\mid i_j\geqslant 0,\ 1\leqslant j\leqslant m\}.$$

Для $\theta=\partial_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\partial_m^{i_m}$ определим *порядок дифференциального оператора* θ

$$\operatorname{ord}(\theta)=i_1+\ldots+i_m$$

и

$$\Theta(s)=\{\theta\in\Theta\mid\operatorname{ord}(\theta)\leqslant s\}.$$

Пусть

$$R=\mathbb{K}\{y_j\mid 1\leqslant j\leqslant n\}:=\mathbb{K}[\theta y_j\mid\theta\in\Theta,\ 1\leqslant j\leqslant n] —$$

кольцо коммутативных многочленов с коэффициентами в $\mathbb{K}$ от от бесконечного числа неизвестных $\Theta Y=\Theta(y_j)_{j=1}^n$ и

$$R_s=\mathbb{K}[\Theta(s)y_j],\quad s\geqslant 0.$$

Кольцо R называется *кольцом дифференциальных многочленов* от дифференциальных неизвестных $y_1,\ldots,y_n$ с коэффициентами в $\mathbb{K}$.

Кольцо R является дифференциальным кольцом с множеством дифференцирований $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$.

Определение 3. Для дифференциального поля $\mathcal{F}$ с множеством дифференцирований $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ определим (в общем случае некоммутативное) кольцо $D = \mathcal{F}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ косых многочленов от переменных $\partial_1, \ldots, \partial_m$ с коэффициентами в $\mathcal{F}$ так, что выполняется $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$, $\partial_i a = a\partial_i + \partial_i(a)$ для всех $a \in \mathcal{F}$, $\partial_i, \partial_j \in \Delta$. Кольцо D называется кольцом (*линейных*) *дифференциальных* (или Δ-) *операторов* над $\mathcal{F}$.

Если дифференцирования из множества Δ действуют на $\mathcal{F}$ тривиально, D является кольцом коммутативных многочленов.

Всюду в дальнейшем мы полагаем, что кольцо $\mathbb{K}$ является дифференциальным полем $\mathcal{F}$ характеристики 0. Идеал I в кольце $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ называется *дифференциальным*, если $\partial f \in I$ для всех $f \in I$ и $\partial \in \Delta$. Будем обозначать через $\{I\}$ наименьший радикальный дифференциальный идеал, содержащий I. По [3, теорема 1, с. 126] существует разложение $\{I\} = \bigcap P_i$ в пересечение конечного числа наименьших простых дифференциальных идеалов (называемых компонентами $\{I\}$).

Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{F}\langle\phi_1, \ldots, \phi_n\rangle$ — конечно порождённое Δ-расширение дифференциального поля $\mathcal{F}$. Определим *дифференциальный размерностный полином* (*Колчина*) $\omega_{\phi_1,\ldots,\phi_n}(s)$ следующим условием:

$$\omega_{\phi_1,\ldots,\phi_n}(s) = \operatorname{trdeg} \mathcal{F}(\Theta(s)\phi_1, \ldots, \Theta(s)\phi_n)/\mathcal{F}$$

(здесь trdeg — степень трансцендентности расширения поля). Иными словами, мы присоединяем к исходному полю $\mathcal{F}$ все производные элементов $\phi_1, \ldots, \phi_k$ порядка $1, \ldots, s$ и ищем мощность максимального алгебраически независимого над $\mathcal{F}$ множества элементов полученного поля. Для достаточно больших s эта зависимость будет полиномиальной; точнее говоря (см. [3, теорема 7, с. 115]), он равен сумме

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_{E_j}(s)$$

многочленов Колчина некоторых подмножеств $\mathbb{N}_0^m$. Отметим, что дифференциальный размерностный многочлен является *полиномом Гильберта* фильтрованного модуля дифференциалов расширения $\mathcal{G}$ над $\mathcal{F}$.

Этот многочлен содержит некоторые Δ-инварианты поля G над F (в частности, степень и старший коэффициент), но сам многочлен может изменяться при выборе другой системы образующих $\mathcal{G} = \mathcal{F}\langle\psi_1, \ldots, \psi_l\rangle$. Например,

$$\omega_{\mathcal{F}\langle\psi_1,\ldots,\psi_n\rangle}(s+1) = \omega_{\mathcal{F}\langle\Theta(1)\psi_1,\ldots,\Theta(1)\psi_n\rangle}(s).$$

Одним из инвариантов является введённый В. Зитом в [5] минимальный размерностный многочлен.

Определение 4 (см. [5]). Многочлен $\omega_{\eta_1,\ldots,\eta_n/\mathcal{F}}(s)$ называется *минимальным дифференциальным размерностным многочленом* для Δ-расширения

$\mathcal{G} = \mathcal{F}\langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle$, если для любой системы Δ-образующих $\mathcal{G} = \mathcal{F}\langle \psi_1, \ldots, \psi_k \rangle$ выполняется $\omega_{\psi_1,\ldots,\psi_k/\mathcal{F}}(s) \geqslant \omega_{\eta_1,\ldots,\eta_n/\mathcal{F}}(s)$ для всех достаточно больших s. В этом случае многочлен $\omega_{\eta_1,\ldots,\eta_n/\mathcal{F}}(s)$ будет обозначаться через $\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(s)$.

В [5, утверждение 5] доказано существование $\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(s)$.

3. Основные результаты

3.1. Константы Маколея целозначного многочлена

В [1] доказан критерий равенства целозначного многочлена некоторому многочлену Колчина $\omega_E(s)$. Обозначим через W множество всех возможных многочленов $\{\omega_E(s) \colon E \subset \mathbb{N}_0^m,\ m = 1, \ldots\}$.

Теорема 1 [4, утверждение 2.4.10]. *Целозначный многочлен $\omega(s)$ тогда и только тогда принадлежит W, когда его последовательность минимизирующих коэффициентов состоит только из неотрицательных целых чисел.*

Отметим (см. [1]), что множество многочленов Колчина замкнуто относительно сложения.

Теорема 2 [4, утверждение 2.4.13]. *Пусть $\omega_1(s), \omega_2(s) \in W$. Тогда многочлен $\omega(s) = \omega_1(s) + \omega_2(s)$ также принадлежит W.*

Как следует из этих теорем, дифференциальный размерностный многочлен расширения поля $\omega_{\eta_1,\ldots,\eta_n/\mathcal{F}}(s)$ имеет неотрицательные минимизирующие коэффициенты.

Теорема 3. *Пусть $\omega(s)$ — целозначный многочлен степени d, $b(\omega) = (b_d, \ldots, b_0) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ — последовательность его минимизирующих коэффициентов. Тогда*

$$\omega(s) = \binom{s+d+1}{d+1} - \sum_{i=0}^{d+1} \binom{s+i-1-c_i}{i}, \tag{1}$$

где

$$c_i = \sum_{j=i-1}^{j=d} b_i, \quad i = 0, \ldots, d+1$$

(*значение c_0 можно задать произвольным образом*).

Доказательство. Будем доказывать это утверждение индукцией по d.

Если $d = 0$, $\omega(s) = b_0$, нужно проверить равенство

$$b_0 = (s+1) - \left(\binom{s-1-c_0}{0} + \binom{s-c_1}{1} \right) = (s+1) - \big(1 + (s-c_1)\big),$$

которое следует из определения $c_1 = b_0$.

Пусть теперь $d > 0$, $b(\omega) = (b_d, \ldots, b_0) \in \mathbb{Z}^{d+1}$. Согласно определению 1 обозначим

$$v(s) = \omega(s + b_d) - \binom{s+d+1+b_d}{d+1} + \binom{s+d+1}{d+1}. \tag{2}$$

Тогда $\deg v < d$, $b(v) = (b_{d-1}, \ldots, b_0) \in \mathbb{Z}^d$ и по индукции можно считать, что

$$v(s) = \binom{s+d}{d} - \sum_{i=0}^{d} \binom{s+i-1-c_i'}{i}, \tag{3}$$

где

$$c_i' = \sum_{j=i-1}^{j=d-1} b_i, \quad i = 0, \ldots, d.$$

Сделаем в выражении (2) замену $s' = s + b_d$:

$$v(s' - b_d) = \omega(s') - \binom{s'+1+d}{d+1} + \binom{s'-b_d+d+1}{d+1}.$$

Тогда с учётом формулы (3) будем иметь

$$\begin{aligned}
\omega(s') &= \binom{s'+d+1}{d+1} - \binom{s'-b_d+d+1}{d+1} + v(s'-b_d) = \\
&= \binom{s'+d+1}{d+1} - \binom{s'-b_d+d+1}{d+1} + \binom{s'-b_d+d}{d} - \\
&- \sum_{i=0}^{d} \binom{s'-b_d+i-1-c_i'}{i} = \\
&= \binom{s'+d+1}{d+1} - \left(\binom{s'-b_d+d+1}{d+1} - \binom{s'-b_d+d}{d}\right) - \\
&- \sum_{i=0}^{d} \binom{s'-b_d+i-1-c_i'}{i}.
\end{aligned}$$

Из равенства

$$\binom{k+1}{l+1} - \binom{k}{l} = \binom{k}{l+1}$$

имеем

$$\begin{aligned}
\omega(s') &= \binom{s'+d+1}{d+1} - \binom{s'-b_d+d}{d+1} - \sum_{i=0}^{d} \binom{s'-b_d+i-1-c_i'}{i} = \\
&= \binom{s'+d+1}{d+1} - \binom{s'+d-c_{d+1}}{d+1} - \sum_{i=0}^{d} \binom{s'-b_d+i-1-c_i'}{i} = \\
&= \binom{s'+d+1}{d+1} - \sum_{i=0}^{d+1} \binom{s'+i-1-c_i}{i},
\end{aligned}$$

так как $c_i' + b_d = c_i$ для $i = 0, \ldots, d$, $c_{d+1} = b_d$. □

Значения c_i в выражении (1) называют *константами Маколея* (см., например [2, формула $(*)$, с. 768]). Неопределённое значение c_0 для $w \in W$ можно считать равным наименьшему числу, для которого значение функции Гильберта равно значению многочлена. Для $E = (e_{ij}) \subset \mathbb{N}_0^m$, $i = 1, \ldots, n$, это число равно

$$\sum_{i=1}^{m} \max_{j=1,\ldots,n} e_{ij}.$$

Итак, теорема 3 устанавливает связь между значениями минимизирующих коэффициентов многочлена и его константами Маколея. Отсюда и из теоремы 1 сразу получаем следствие.

Следствие 1. *Целозначный многочлен является размерностным многочленом Колчина тогда и только тогда, когда последовательность его констант Маколея является неубывающей.*

Далее в этой статье, поскольку у нас не будет использоваться значение младшей константы Маколея c_0, мы будем рассматривать только значения $c_{d+1}, \ldots, c_1$ и для удобства нумеровать их, так же как и минимизирующие коэффициенты, от нуля: $(c_d, \ldots, c_0)$, d — степень многочлена.

Пример 1. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\partial_1^2\partial_2\xi = 0,\\
&\partial_1\partial_2^2\xi = 0,\\
&\partial_1\partial_2\partial_3^2\xi = 0,\\
&\quad\ldots\\
&\partial_1\partial_2\partial_3\ldots\partial_m^2\xi = 0.
\end{aligned}$$

Найдём размерностный многочлен этой системы и его константы Маколея.

Поскольку уравнения линейны и образуют базис Грёбнера в кольце дифференциальных операторов, нам нужно вычислить размерностный многочлен нижнетреугольной матрицы $E \subset \mathbb{N}_0^m$ с 2 на диагонали и 1 под ней:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & 2 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления размерностного многочлена будем применять индукцию и формулу изменения многочлена при добавления элемента (см. [4, теорема 2.2.10]).

Пусть $m = 2$, $e = (1, 0)$,

$$\omega_E(s) = \omega_{E\cup e}(s) + \omega_H(s-1), \tag{4}$$

где H — матрица, полученная вычитанием из каждой строки E вектора e, $\operatorname{ord} e = 1$. Имеем

$$\omega_E(s) = \omega_e(s) + \omega_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}(s-1) = (s+1) + 1.$$

В частности, последовательность минимизирующих коэффициентов равна $b(\omega_E) = (1, 1)$.

Теперь предположим, что $m > 2$. Пусть $e = (1, 0, \dots, 0)$. Применим ту же формулу $\omega_E(s) = \omega_e(s) + \omega_H(s-1)$, где H — матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что размерностный многочлен матрицы H равен размерностному многочлену матрицы $E' \subset \mathbb{N}_0^{m-1}$, для которой по индуктивному предположению $b(\omega_{E'}) = (1, \dots, 1) \subset \mathbb{N}_0^{m-1}$. По определению 1 минимизирующих коэффициентов из условия

$$\omega_e(s) = \binom{s+m-1}{m-1}$$

получаем $b(\omega_E) = (1, \dots, 1) \subset \mathbb{N}_0^m$. Из теоремы 3 константы Маколея равны $(1, 2, \dots, m)$.

Вычислим теперь стандартные коэффициенты размерностного многочлена. Пусть для $E \subset \mathbb{N}_0^m$ стандартные коэффициенты есть числа $a(\omega_E) = (a_{m-1}, \dots, a_0)$, что означает представление

$$\omega_E(s) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \binom{s+i}{i}.$$

Обозначим размерностный многочлен матрицы $m \times m$ через $\omega_m(s)$. Как показано выше, для $m = 2$ размерностный многочлен равен $(s+1)+1$, поэтому последовательность стандартных коэффициентов — это $(1, 1)$. Пусть $m > 2$. Обозначим через ∇ разностный оператор, действующий на многочленах: $\nabla f(s) = f(s) - f(s-1)$. Принимая во внимание формулу

$$\nabla \binom{s+i}{i} = \binom{s+i-1}{i-1}$$

и теорему 3 о представлении многочлена через его константы Маколея, видим, что $\nabla \omega_m(s)$ — многочлен, константы Маколея которого равны $c_{m-1}, \dots, c_1$, и мы можем использовать индуктивное предположение для вычисления стандартных коэффициентов $\omega_m(s)$: $a_i(\omega_m) = a_{i-1}(\omega_{m-1})$, $i = m-1, \dots, 1$. Нам осталось вычислить младший стандартный коэффициент, $a_0(\omega_m)$. Для этого используем формулу (4)

$$\omega_m(s) = \binom{s+m-1}{m-1} + \omega_{m-1}(s-1).$$

Подставим в эту формулу $s = -1$, из равенства

$$\left.\binom{s+i}{i}\right|_{s=-1} = 0$$

для $i > 0$ получим

$$a_0(\omega_m) = \sum_{i=0}^{m-2} a_i(\omega_{m-1})\binom{-1+i}{i}.$$

Вычислим

$$\binom{s+i-1}{i}\bigg|_{i=-1} = \binom{i-2}{i} = \frac{(i-2)(i-3)\dots}{i!},$$

где в произведении сверху ровно i сомножителей. Ясно, что если $i > 1$, это произведение равно нулю. Имеем

$$a_0(\omega_m) = a_1(\omega_{m-1})(1-2) + a_0(\omega_{m-1}) = -a_2(\omega_m) + a_1(\omega_m).$$

Имея такую рекуррентную формулу, можно вычислить все стандартные коэффициенты многочлена ω_m: для $m = 3$ это $(1,1,0)$, для $m = 4$ — $(1,1,0,-1)$, далее $(1,1,0,-1,-1,0,1,\dots,)$.

3.2. Константы Маколея минимального размерностного многочлена

Согласно теореме Зита [5, утверждение 5] множество W является вполне упорядоченным относительно рассмотренного выше (определение 4) порядка. Отметим, что этот порядок эквивалентен лексикографическому порядку на последовательности минимизирующих коэффициентов (от старшего к младшему) и на последовательности констант Маколея. При этом, если нужно сравнить последовательности различной длины, более короткая последовательность должна быть дополнена слева нулями.

Простейший пример расширения дифференциального поля, для которого удаётся указать минимальный размерностный многочлен, — это расширение, заданное одним уравнением.

Теорема 4. *Пусть $F \in \mathcal{F}\{y_1\}$. Тогда для любой простой дифференциальной компоненты P идеала $\{F\}$ выполняется*

$$\omega_P(s) = \binom{s+m}{m} - \binom{s+m-d_j}{m} \tag{5}$$

и константы Маколея минимального размерностного многочлена для каждой компоненты постоянны (могут быть разными для различных простых компонент). Верно и обратное: если константы Маколея дифференциального размерностного многочлена расширения поля $\omega_{\xi_1,\dots,\xi_n/\mathcal{F}}$ постоянны и $\deg(\omega_{\xi_1,\dots,\xi_n/\mathcal{F}}) = |\Delta| - 1$, то этот многочлен является минимальным $\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ и простой идеал, определяющий поле $\mathcal{G}$, является главной компонентой одного дифференциального многочлена $F \in \mathcal{F}\{y_1\}$.

Доказательство. По теореме о компонентах [3, теорема 5, с. 185] каждый минимальный простой дифференциальный идеал, содержащий $\{F\}$, представляется в виде $P_j = [G_j] : H_{G_j}^{\infty}$, где $G_j \in \mathcal{F}\{y_1\}$ — неразложимый дифференциальный многочлен. Обозначив через $d_j = \operatorname{ord} G_j$ порядок этого многочлена, получим

$$\omega_{\xi_1}(s) = \binom{s+m}{m} - \binom{s+m-d_j}{m},$$

где ξ_1 — общий нуль идеала P_j, откуда следует

$$\omega_{P_j}(s) \leqslant \binom{s+m}{m} - \binom{s+m-d_j}{m}.$$

Последовательность минимизирующих коэффициентов полинома (5) равна $(d, 0, \ldots, 0)$, и поэтому неравенство

$$\omega_{P_j} \geqslant \binom{s+m}{m} - \binom{s+m-d_j}{m}$$

будет следовать из теоремы об инвариантности дифференциального типа и типовой Δ-размерности (см., например, [4, следствие 5.4.7]). Согласно теореме 3 константы Маколея многочлена (4) равны $(d_j, \ldots, d_j)$.

Обратно, пусть все константы Маколея минимального размерностного многочлена $\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ одинаковы и равны d, дифференциальный тип $\mathcal{G}$ над $\mathcal{F}$ равен $m-1$ (это условие означает, что многочлен $\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ имеет степень $m-1$, см. [3, с. 118]) и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — общий нуль, для которого выполняется

$$\omega_{\xi_1,\ldots,\xi_n/\mathcal{F}}(s) = \omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(s) = \binom{s+m}{m} - \binom{s+m-d}{m}.$$

По [3, теорема 7, с. 115]

$$\omega_{\xi_1,\ldots,\xi_n/\mathcal{F}} = \sum_{j=1}^{n} \omega_{E_j},$$

а поскольку все минимизирующие коэффициенты многочленов ω_{E_j} неотрицательны, из условия

$$\omega_{\xi_1,\ldots,\xi_n/\mathcal{F}} = \binom{s+m}{m} - \binom{s+m-d}{m}$$

следует, что $\omega_{E_j} = 0$ для всех j, кроме одного (можно считать, что для всех $j > 1$). Так как $\omega_{E_j} = 0$ для $j > 1$, элементы $\xi_2, \ldots, \xi_n$ алгебраичны над $\mathcal{F}\langle\xi_1\rangle$ и $\mathcal{F}\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle = \mathcal{F}\langle\xi_1\rangle$. Поскольку E_1 состоит из одного элемента, простой идеал, определяющий $\mathcal{F}\{y_1\}$, является главной компонентой некоторого дифференциального многочлена. □

Если степень $\omega_{\psi_1,\ldots,\psi_n/\mathcal{F}}(s)$ меньше m, а поле $\mathcal{F}$ содержит $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_m)$ (поле рациональных функций от неизвестных $x_1, \ldots, x_m$), то (см. [3, ч. II, \$ 8, утверждение 9]) в $\mathcal{G}$ есть примитивный элемент ξ (т. е. такой, что $\mathcal{G} = \mathcal{F}\langle\xi\rangle$). Более того, ξ можно выбрать в виде комбинации

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi_j, \quad \lambda_j \in \mathcal{F}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

При такой замене дифференциальный размерностный многочлен не увеличивается, т. е. $\omega_{\xi/\mathcal{F}}(s) \leqslant \omega_{\psi_1,\ldots,\psi_n/\mathcal{F}}(s)$ для всех достаточно больших s, и поэтому проблема нахождения минимального дифференциального размерностного многочлена связана с поиском примитивного элемента поля (хотя и не решает её, см. [4, пример 5.7.7]). И задача вычисления многочлена $\omega_{\psi_1,\ldots,\psi_n/\mathcal{F}}(s)$, и поиск ξ «в принципе» решаются использованием алгоритма Розенфельда—Грёбнера, входящего в пакет diffag системы компьютерной алгебры Maple.

Предположим, что в расширении найден примитивный элемент, $b(\omega_{\xi/\mathcal{F}}) = (b_d, b_{d-1}, \ldots, b_0)$, но $b_i \neq 0$ для некоторого $i < d$. Нас интересует, есть ли такие значения b_i, при котором выполнение условия $b\big(\omega_{\mathcal{G}}/\mathcal{F})(s)\big) = (b_d, 0, \ldots, 0)$ невозможно. Следующий пример даёт отрицательный ответ на поставленный вопрос.

Пример 2. Пусть $\mathcal{F} = \mathbb{C}(x_1, x_2)$, $k \geqslant 2$ и Δ-расширение $\mathcal{G}$ задано системой

$$\begin{cases} \partial_1\partial_2^2\varphi = 0, \\ x_1x_2\partial_1^k\partial_2\varphi - x_1\partial_1^k\varphi + x_2\partial_1^{k-1}\partial_2\varphi + \partial_1\partial_2\varphi - \partial_1^{k-1}\varphi = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения образуют базис Грёбнера, поэтому

$$\omega_{\varphi/\mathcal{F}}(t) = \omega_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ k & 1 \end{smallmatrix}\right)}(s) = 2s + k$$

и $b(\omega_{\varphi/\mathcal{F}}) = (2, k-1)$. Пусть $\psi = \varphi - x_1x_2(\partial_1^{k-1}\varphi - x_2\partial_1^{k-1}\partial_2\varphi)$. Эта замена переменных обратима, так как $\varphi = (1 + x_1x_2\partial_1^{k-1})\psi$. В то же время $\partial_1\partial_2\psi = 0$, следовательно, $\omega_{\psi/\mathcal{F}}(s) = \omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(s) = 2s + 1$ и $b(\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}) = (2, 0)$.

В примере 2 поле содержит элементы, не являющиеся константами. Это условие, как показывает следующее утверждение, существенно.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{G}$ определяется системой Σ линейных дифференциальных уравнений от одной переменной с коэффициентами, являющимися константами поля $\mathcal{F}$. Если*

$$\omega_{\xi/\mathcal{F}}(s) \neq \binom{s+m}{m} - \binom{s+m-d}{m},$$

то

$$\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(s) \neq \binom{s+m}{m} - \binom{s+m-d}{m}.$$

Доказательство. Рассмотрим $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ — модуль дифференциалов (см., например, [4, с. 38]), и пусть $J = [\Sigma]$ — идеал кольца $D = \mathcal{G}[\Delta]$ дифференциальных операторов. Имеем точную последовательность D-модулей

$$0 \to_D J \to D \to \Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}} \to 0.$$

Предположим, что

$$\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(s) = \binom{s+m}{m} - \binom{s+m-d}{m}.$$

По [4, теорема 5.7.8] для модуля дифференциалов существует точная последовательность
$$0 \to_D D \to D \to \Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}} \to 0.$$
Из этих представлений следует, что ${}_DJ \oplus D = D \oplus D$. Тогда идеал J является проективным D-модулем. В условиях теоремы можно считать, что кольцо D является кольцом коммутативных многочленов над полем, и тогда J должен быть свободным (главным идеалом в кольце многочленов). Тогда по теореме 4
$$\omega_{\xi/\mathcal{F}} = \binom{s+m}{m} - \binom{s+m-d}{m},$$
что противоречит условию. □

Как следует из доказательства, в примере 2 представлен проективный идеал некоммутативного кольца $D = \mathbb{C}(x_1, x_2)[\partial_1, \partial_2]$, не являющийся свободным.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект»

Литература

[1] Кондратьева М. В. Описание множества минимальных дифференциальных разностных многочленов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1988. — № 1. — С. 35—39.

[2] Dubé T. The structure of polynomial ideals and Gröbner bases // SIAM J. Comput. — 1990. — Vol. 19, no. 4. — P. 750—773.

[3] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — Academic Press, 1973.

[4] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Kluwer Academic, 1999.

[5] Sit W. Well-ordering of certain numerical polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 212. — P. 37—45.

[6] Stanley R. Hilbert functions of graded algebras // Adv. Math. — 1978. — Vol. 28. — P. 57—83.