Основные $\mathbb{T}$-пространства в относительно свободной алгебре Грассмана без единицы

Л. М. ЦЫБУЛЯ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

УДК 512.552

Ключевые слова: $\mathbb{T}$-пространство, относительно свободная алгебра Грассмана без единицы, n-слово.

Аннотация

В работе изучается $\mathbb{T}$-пространственная структура относительно свободной алгебры Грассмана $\mathbb{F}^{(3)}$ без единицы над бесконечным полем простой и нулевой характеристики. При этом основное внимание уделяется $\mathbb{T}$-пространствам $\mathbb{W}_n$, порождённым всевозможными так называемыми n-словами. Исследуется вопрос о взаимосвязях $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$ для различных натуральных чисел r и n. Доказанная теорема об этих взаимосвязях позволяет построить диаграммы включений, проясняющие в некоторой степени структуру рассматриваемой алгебры: основные $\mathbb{T}$-пространства образуют бесконечные строго убывающие цепочки включений в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$.

Abstract

L. M. Tsybulya, Basic $\mathbb{T}$-spaces in the relatively free Grassmann algebra without unity, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2022), no. 1, pp. 193—208.

In this paper, we consider the $\mathbb{T}$-space structure of the relatively free Grassmann algebra $\mathbb{F}^{(3)}$ without unity over an infinite field of prime and zero characteristic. Our work is focused on $\mathbb{T}$-spaces $\mathbb{W}_n$ generated by all so-called n-words. A question about connections between $\mathbb{W}_r$ and $\mathbb{W}_n$ for different natural numbers r and n is investigated. The proved theorem on these connections allows us to construct the diagrams of inclusions, which, to some extent, clarify the structure of the algebra: the basic $\mathbb{T}$-spaces produce infinite strictly descending chains of inclusions in the algebra $\mathbb{F}^{(3)}$.

Введение

В [5, 6] была довольно хорошо изучена структура унитарно замкнутых T-пространств в *относительно свободной алгебре Грассмана*

$$F^{(3)} = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle / T^{(3)},$$

где $F = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — свободная счетнопорождённая ассоциативная алгебра с 1 над бесконечным полем k простой характеристики p, $T^{(3)}$ — унитарно замкнутый T-идеал, порождённый тождеством $\big[[x_1, x_2], x_3\big] = 0$. Интерес к этой

Фундаментальная и прикладная математика, 2022, том 24, № 1, с. 193—208.

алгебре возник в связи с решением аналога проблемы Шпехта в характеристике p: в ней, по существу, были даны все основные известные контрпримеры к этой проблеме. При этом весьма важную роль в алгебре $F^{(3)}$ играло T-пространство W_n, порождённое всеми одночленами, содержащими каждую переменную с кратностью n, так называемыми *n-словами*. Именно это T-пространство послужило в некотором смысле основой для построения контрпримеров: из бесконечно базируемых T-подпространств, найденных в W_n, потом были сконструированы бесконечно базируемые T-идеалы $[1, 2, 4, 8, 10]$. Отметим, что содержательная структурная теория в алгебре $F^{(3)}$ возникает, если n делится на p^l, l — натуральное число. В случае же, когда n взаимно просто с характеристикой, и в случае характеристики нуль T-пространство W_n просто совпадает с алгеброй $F^{(3)}$. Естественной представляется задача о построении аналогичной теории в этой же алгебре, но без единицы, решение которой начато в [7].

Напомним некоторые обозначения и определения. Алгебра F содержит подалгебру $\mathbb{F} = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ без 1. Через T обозначается полугруппа эндоморфизмов (подстановок) алгебры F, а через $\mathbb{T}$ её подполугруппа эндоморфизмов алгебры $\mathbb{F}$, где подстановка $\tau \in T$ определяется соответствиями $x_i \mapsto g_i$, $g_i \in F$ (для $\tau \in \mathbb{T}$ элементы g_i лежат в $\mathbb{F}$). Рассмотрим $\mathbb{T}$-идеал в $\mathbb{F}$, порождённый тем же многочленом, что и $T^{(3)}$ в F. Очевидно, он является унитарно замкнутым $\mathbb{T}$-идеалом в $\mathbb{F}$ и совпадает с T-идеалом $T^{(3)}$.

В свою очередь, алгебра $F^{(3)}$ содержит подалгебру $\mathbb{F}^{(3)} = \mathbb{F}/T^{(3)}$ *без единицы*, которую будем также называть *относительно свободной алгеброй Грассмана* и рассматривать *над бесконечным полем k характеристики не только p, но и нуль*. Алгебра $\mathbb{F}^{(3)}$ естественным образом наделяется структурой унитарного правого $k\mathbb{T}$-модуля, т. е. *$\mathbb{T}$-пространства* [3], где $k\mathbb{T}$ — полугрупповая k-алгебра полугруппы $\mathbb{T}$. Отметим, что $k\mathbb{T}$ содержится в kT, поэтому $\mathbb{T}$-пространство $\mathbb{V}$ в $\mathbb{F}^{(3)}$, порождённое теми же многочленами, что и T-пространство V в $F^{(3)}$, вообще говоря, меньше. Однако, как уже было отмечено, $T^{(3)} = \mathbb{T}^{(3)}$.

Образы свободных переменных алгебры $\mathbb{F}$ в $\mathbb{F}^{(3)}$ обозначаются теми же буквами. Кроме того, часть переменных иногда для удобства обозначается другими буквами, например y_i и z_i. Как принято в [9], $S^{\mathbb{T}}$ — $\mathbb{T}$-пространство, порождённое подмножеством S некоторого $\mathbb{T}$-пространства. Через $\mathbb{N}$, как обычно, обозначается множество всех натуральных чисел, а через $\subset$, $\supset$ — строгие включения. В статье имеются диаграммы, в вертикальных столбцах которых символы $\cup$ и $\cap$ также обозначают строгие включения.

В силу бесконечности поля k если многочлен принадлежит $\mathbb{T}$-пространству, то и любая полиоднородная компонента данного многочлена принадлежит этому $\mathbb{T}$-пространству.

При отсутствии единицы строение $\mathbb{T}$-пространств в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ в некоторой степени отличается. Если в $F^{(3)}$ практически основные структурные вопросы, как уже отмечалось выше, сводятся к T-пространствам W_{p^l}, в частности, при $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, выполнено $W_n = W_{p^l}$ и

$$F^{(3)} = W_1 = W_{n_1} \supset W_p \supset W_{p^2} \supset \ldots \supset W_{p^l} \supset \ldots,$$

то в $\mathbb{F}^{(3)}$ в этом случае $\mathbb{W}_n \subset \mathbb{W}_{p^l}$ (см. [7]). Поэтому возник вопрос о связи между $\mathbb{T}$-пространствами $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$ при различных r и n, изучение которого начато в [7]. В продолжение этого исследования нашей целью является нахождение ответа на этот вопрос.

Работа состоит из трёх разделов. В первом даны основные определения, соотношения, применяемые при вычислениях в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$, и некоторые вспомогательные результаты из предыдущих работ, необходимые для приводимых в настоящей статье доказательств.

Во втором разделе изложены технические леммы, используемые в доказательстве основного результата. Также с помощью них конструируется диаграмма строгих включений для основных $\mathbb{T}$-подпространств $\mathbb{T}$-пространства $\mathbb{W}_n$ в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$. Эта диаграмма имеет свои отличительные особенности, если сравнивать с представленной здесь же диаграммой включений для аналогичных T-подпространств, но уже в алгебре $F^{(3)}$.

Третий раздел посвящён доказательству основной теоремы. Найденное здесь решение поставленного выше вопроса позволяет построить диаграммы включений, выражающие связи между $\mathbb{T}$-пространствами $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$ и открывающие новые интересные задачи для дальнейших исследований.

1. Основные обозначения, определения и соотношения в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$. Базовые утверждения

Отметим некоторые из основных соотношений, применяемых при вычислениях в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ (см. [9]).

1. *Коммутаторные соотношения* (вытекающие из тождества $[[x_1, x_2], x_3] = 0$):

$$[x_1, x_2][x_1, x_3] = 0, \tag{1}$$

$$[xy^n, y] = y^n[x, y], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2}$$

$$[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Из последнего соотношения получаем, что p-я степень переменной коммутирует с любым элементом алгебры $\mathbb{F}^{(3)}$ над полем характеристики p, т. е.

$$[x^p, y] = 0. \tag{4}$$

2. *Соотношения Фробениуса* в характеристике p:

$$(x_1 \cdots x_t)^{p^l} = x_1^{p^l} \cdots x_t^{p^l}, \quad (x_1 + \ldots + x_t)^{p^l} = x_1^{p^l} + \ldots + x_t^{p^l}, \tag{5}$$

где $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$.

Если $p = 2$, $l = 1$, то вместо соотношений Фробениуса выполнены равенства

$$(x_1x_2)^2 = x_1^2x_2^2 + x_1x_2[x_1, x_2], \quad (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + [x_1, x_2], \tag{6}$$

которые несложно обобщаются на случай более двух переменных.

Из результатов и методов работы [7] следует, что $\mathbb{T}$-пространство $\mathbb{W}_n$ с помощью коммутаторных соотношений можно представить в виде суммы своих подпространств (компонент):

$$\mathbb{W}_n = \mathbb{D}_n + \mathbb{C}_n + \mathbb{CD}_n,$$

где

$$\mathbb{D}_n = \{d_t(n) = z_1^n \cdots z_t^n \mid t \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}} \text{ —}$$

диагональная компонента $\mathbb{W}_n$;

$$\mathbb{C}_n = \{c_m(n) = x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{n-1}y_m^{n-1}[x_m, y_m] \mid m \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}} \text{ —}$$

чисто коммутаторная компонента $\mathbb{W}_n$;

$$\mathbb{CD}_n = \{c_m(n)d_t(n) \mid m, t \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}} \text{ —}$$

коммутаторная компонента $\mathbb{W}_n$.

Отметим, что для $n = 1$ выполнено

$$\mathbb{F}^{(3)} = \mathbb{W}_1 = \mathbb{D}_1 \supset \mathbb{C}_1 + \mathbb{C},$$

где $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}$ — $\mathbb{T}$-пространство и $\mathbb{T}$-идеал соответственно, порождённые коммутатором $[x_1, y_1]$, т. е. $\mathbb{C}_1 = \{[x_1, y_1]\}^{\mathbb{T}}$ и $\mathbb{C} = ([x_1, y_1])^{\mathbb{T}}$.

Согласно [7] строение $\mathbb{T}$-пространства $\mathbb{W}_n$ и его компонент $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{C}_n$ и $\mathbb{CD}_n$ при $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, зависит от связи между n и характеристикой основного поля. Эту зависимость отражает приведённая ниже таблица 1.

Непосредственно из фактов, представленных в данной таблице, следует, что для характеристики p в случае $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$ (случай 1) чисто коммутаторная и коммутаторная компоненты являются, в свою очередь,

Таблица 1

Случаи	Хар-ка поля k	Неприводимые системы порождающих $\mathbb{T}$-пр-в			Структура $\mathbb{T}$-пр-ва $\mathbb{W}_n$
		$\mathbb{C}_n$	$\mathbb{CD}_n$	$\mathbb{D}_n$	
1. $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$	p	$c_m(n)$, $m \in \mathbb{N}$	$c_m(n)z_1^n$, $m \in \mathbb{N}$	x_1^n	$\mathbb{W}_n = \mathbb{D}_n \oplus$ $\oplus\, \mathbb{C}_n + \mathbb{CD}_n$
2. $l = 1$	$p = 2$	$c_m(2n_1)$, $m \in \mathbb{N}$	$c_1(2n_1)d_t(2n_1)$, $t \in \mathbb{N}$	$d_t(2n_1)$, $t \in \mathbb{N}$	$\mathbb{W}_{2n_1} = \mathbb{D}_{2n_1} \supset$ $\supset \mathbb{C}_{2n_1} + \mathbb{CD}_{2n_1}$
3. $l = 0$	p	$c_1(n_1)$	$c_1(n_1)z_1^{n_1}$	$x_1^{n_1}$	$\mathbb{W}_{n_1} = \mathbb{D}_{n_1} \supset$ $\supset \mathbb{C}_{n_1} + \mathbb{CD}_{n_1}$
4. $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	0	$c_1(n)$	$c_1(n)z_1^n$	x_1^n	$\mathbb{W}_n = \mathbb{D}_n \supset$ $\supset \mathbb{C}_n + \mathbb{CD}_n$

бесконечными суммами однопорождённых $\mathbb{T}$-подпространств $\mathbb{C}_n^{(m)} = \{c_m(n)\}^{\mathbb{T}}$ и $\mathbb{CD}_n^{(m)} = \{c_m(n)z_1^n = g_m(n)\}^{\mathbb{T}}$ соответственно, т. е.

$$\mathbb{C}_n = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{C}_n^{(m)} \quad \text{и} \quad \mathbb{CD}_n = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{CD}_n^{(m)}.$$

Назовём $\mathbb{T}$-подпространства $\mathbb{C}_n^{(m)}$ и $\mathbb{CD}_n^{(m)}$ *элементарными составляющими*. В случае же $p = 2$, $l = 1$ (случай 2) элементарные составляющие примут вид $\mathbb{C}_n^{(m)} = \{c_m(n)\}^{\mathbb{T}}$ и $\mathbb{CD}_n^{(t)} = \{c_1(n)d_t(n)\}^{\mathbb{T}}$. А в случае $(n,p) = 1$ (случай 3) или для характеристики 0 (случай 4) элементарные составляющие — это сами компоненты $\mathbb{C}_n$ и $\mathbb{CD}_n$, так как они однопорождённы.

Для удобства положим $r = p^s r_1$, $(r_1, p) = 1$ и $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, где $s, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ясно, что без потери общности можно считать $r > n$. Таким образом, для решения вопроса о взаимосвязи $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$, как видно из таблицы 1, имеет смысл рассматривать следующие случаи.

Случай I. Числа r и n делятся на характеристику p, т. е. $s, l \in \mathbb{N}$, при этом выделяются следующие подслучаи:

(a) степень вхождения числа p в числа r и n одинакова, т. е. $s = l$;

(b) степень вхождения числа p в r больше, чем в n, т. е. $s > l$;

(c) степень вхождения числа p в r меньше, чем в n, т. е. $s < l$.

Случай II. Числа r и n не делятся на характеристику p, т. е. $s = l = 0$.

Случай III. Поле нулевой характеристики, здесь r и n — произвольные натуральные числа, удовлетворяющие неравенству $r > n$.

Случай IV. Число r делится на характеристику p, а число n взаимно просто с ней, т. е. $s \in \mathbb{N}$, $l = 0$.

Случай V. Число r взаимно просто с характеристикой p, а n делится на неё, т. е. $s = 0$, $l \in \mathbb{N}$.

Естественно найти сначала покомпонентную связь между основными $\mathbb{T}$-подпространствами $\mathbb{T}$-пространств $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$ для всех этих случаев. Для некоторых из них эта связь была установлена в [7]. Следуя её результатам, сформулируем ниже имеющиеся на данный момент факты об этой связи.

Итак, случай I.

(a) 1. *Для $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$ выполнены следующие строгие включения*:

$$\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_n, \quad \mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n,$$

если при этом r делится на n, то

$$\mathbb{C}_r \subset \mathbb{C}_n \text{ и, следововательно, } \mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n.$$

2. *Для $p = 2$, $l = 1$*

$$\mathbb{W}_r = \mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_n = \mathbb{W}_n, \quad \mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n,$$

если при этом r делится на n, то

$$\mathbb{C}_r \subset \mathbb{C}_n.$$

Замечание 1.1. В силу специфики характеристики 2 включение $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$ приходится рассматривать в указанных здесь случаях 1 и 2. Оно имеет место в случае 1, если только выполнена делимость r на n, а в случае 2 для справедливости утверждения $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$ эта делимость не важна. Хотя нужно отметить, что включение $\mathbb{C}_r \subset \mathbb{C}_n$ выполнено для 2, так же как и для 1, только если присутствует делимость r на n. Вопрос о связи чисто коммутаторных компонент в случае, когда делимости нет, остаётся открытым (см. также замечание 2.2), но одна из лемм следующего раздела утверждает, что пересечение чисто коммутаторных компонент будет ненулевым.

Пункт (b) почти не изучен. Известна лишь связь между чисто коммутаторными компонентами.

Если r делится на n, то

$$\mathbb{C}_r \not\subset \mathbb{C}_n, \quad \mathbb{C}_n \not\subset \mathbb{C}_r.$$

Пункт (c) не исследован.

Замечание 1.2. В случае (b), так же как и в утверждении 1 пункта (a), если только выполнена делимость r на n, то, как будет показано в основной теореме, $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$. Включение $\mathbb{C}_r \subset \mathbb{C}_n$ не выполнено, но мы докажем, что в этом случае $\mathbb{C}_r \subset \mathbb{CD}_n$ и поэтому возможен положительный ответ. Как связаны $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$, если r не делится на n, пока не известно. Ответ на вопрос, является ли пересечение $\mathbb{C}_r \cap \mathbb{C}_n$ ненулевым, будет дан в одной из лемм следующего раздела. Подслучай (c) рассмотрим в основной теореме.

Для случаев II и III ответ одинаков (см. [7]):

$$\mathbb{C}_r \subset \mathbb{C}_n, \quad \mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n, \quad \mathbb{W}_r = \mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_n = \mathbb{W}_n.$$

Перейдём к случаю IV.

1. *Пусть $p = 2$, $s > 1$ или $p > 2$, $s \in N$. Тогда в характеристике p*

$$\mathbb{W}_r \neq \mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_n = \mathbb{W}_n, \quad \mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n.$$

2. *Для $p = 2$, $s = 1$ в характеристике* 2

$$\mathbb{D}_r = \mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n = \mathbb{D}_n, \quad \mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n.$$

3. *В любой характеристике p*

$$\mathbb{C}_r \not\subset \mathbb{C}_n, \quad \mathbb{C}_n \not\subset \mathbb{C}_r.$$

Случай V в [7] не изучался.

Замечание 1.3. Случай IV, как и случай I (см. утверждение 2 пункта (a)), как видим, не зависит от делимости r на n для $p = 2$, $s = 1$, так как в этом случае уже доказано $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$. Нужно отметить, что здесь бесконечно базируемое $\mathbb{T}$-пространство $\mathbb{W}_r$ содержится в конечно базируемом $\mathbb{T}$-пространстве $\mathbb{W}_n$. Делимость r на n потребуется для доказательства включения $\mathbb{C}_r \subset \mathbb{CD}_n$ в случае, когда $p = 2$, $s > 1$ или $p > 2$, $s \in N$, чтобы установить, что $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$. Последний случай и случай V будут рассмотрены в основной теореме. Можно показать, что в случае IV пересечение $\mathbb{C}_r \cap \mathbb{C}_n$ отлично от нуля.

В следующем разделе мы исследуем некоторых случаи из замечаний 1.1—1.3, необходимые для доказательства основного результата.

2. Некоторые связи между основными компонентами $\mathbb{T}$-пространств $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$

Для изучения связей, указанных в заголовке раздела, нам понадобятся некоторые результаты работы [7] о строении T-пространства W_n в алгебре $F^{(3)}$ над полем характеристики p, где $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$.

Для T-пространства $W_n = W_{p^l}$ в характеристике $p > 2$ имеет место разложение в прямую сумму:

$$W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}. \tag{7}$$

Диагональная компонента D_p содержит бесконечную строго убывающую цепочку включений:

$$D_p \supset \ldots \supset D_{p^l} \supset \ldots . \tag{8}$$

Коммутаторная компонента CD_{p^l} для всех $l \in \mathbb{N}$ содержит коммутаторную компоненту C_{p^s} для любого $s \in \mathbb{N}$. Более подробно связь между чисто коммутаторными и коммутаторными компонентами T-пространства W_n и их элементарными составляющими показывает диаграмма 1.

Самая верхняя и самая нижняя строки представляют собой бесконечные строго убывающие с ростом m цепочки T-идеалов $C^{(m)}$ и T-пространств $C_1^{(m)}$ соответственно, порождённых произведением из m коротких коммутаторов $[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]$, а все вертикальные цепочки включений строго возрастающие. Кроме того, все её элементы не зависят (т. е. не исчезают после факторизации) от всех остальных, кроме тех, что находятся выше по столбцу.

Замечание 2.1. Для $p = 2$ в случае $l = 1$ выполняется

$$W_2 = D_2 \supset CD_2 \supset C_2,$$

а в случае $l > 1$ имеет место разложение W_{2^l} в прямую сумму (7). Также имеют место цепочка включений (8) для D_2 и диаграмма 1. Самый левый столбец последней имеет вид

$$C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_{2^l} \subset \ldots \subset CD_{2^l} \subset \ldots \subset CD_2 \subset C. \tag{9}$$

Кроме того, все элементы диаграммы не зависят (т. е. не исчезают после факторизации) от всех остальных, кроме тех, что находятся выше по столбцу, если не брать в рассмотрение вторую сверху строку, имеющую вид

$$CD_2 \supset CD_2^{(1)} + CD_2^{(2)} + \ldots + CD_2^{(m)} + \ldots,$$

так как однопорождённые T-пространства $CD_2^{(m)} = \{g_m(2)\}^T$ для всех $m \in \mathbb{N}$ не порождают всё T-пространство

$$CD_2 = \{c_1(2) z_1^2 \cdots z_t^2 \mid t \in \mathbb{N}\}^T.$$

Диаграмма 1

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
C & = & C^{(1)} & \supset & C^{(2)} & \supset & \dots & \supset & C^{(m)} & \supset & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
CD_p & = & CD_p^{(1)} & + & CD_p^{(2)} & + & \dots & + & CD_p^{(m)} & + & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
CD_{p^2} & = & CD_{p^2}^{(1)} & + & CD_{p^2}^{(2)} & + & \dots & + & CD_{p^2}^{(m)} & + & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & & & \dots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
CD_{p^l} & = & CD_{p^l}^{(1)} & + & CD_{p^l}^{(2)} & + & \dots & + & CD_{p^l}^{(m)} & + & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & & & \dots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_{p^l} & = & C_{p^l}^{(1)} & + & C_{p^l}^{(2)} & + & \dots & + & C_{p^l}^{(m)} & + & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & & & \dots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_p & = & C_p^{(1)} & + & C_p^{(2)} & + & \dots & + & C_p^{(m)} & + & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_1 & = & C_1^{(1)} & \supset & C_1^{(2)} & \supset & \dots & \supset & C_1^{(m)} & \supset & \dots
\end{array}
$$

Следующие леммы позволяют в некоторой степени выявить покомпонентную связь $\mathbb{T}$-пространств $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$ в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$.

Лемма 2.1. *Пусть r и n делятся на p и r имеет степень вхождения по p, большую либо равную степени вхождения этого числа в n. Если $r > n$, то в характеристике p*

$$\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_n, \quad \mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n.$$

Доказательство. Напомним, что $r = p^s r_1$, $(r_1, p) = 1$, $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, где $s \geqslant l \geqslant 1$. Тогда $r > n$ означает, что $p^{s-l} r_1 > n_1$.

Пусть $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$. Отметим, что утверждение леммы для $s = l$ было доказано в [7] (см. также утверждение 1 пункта (a) случая I из предыдущего раздела). Ниже мы приведём доказательство для общего случая $s \geqslant l$.

Докажем первое включение. Имеем $\mathbb{D}_r = \{z_1^r\}^{\mathbb{T}}$ и $\mathbb{D}_n = \{z_1^n\}^{\mathbb{T}}$ (см. табл. 1). Осуществим в одночлен z_1^n подстановку $z_1 \mapsto z_1 + z_2$. Используя второе равенство из соотношений Фробениуса (5), получаем многочлен $(z_1^{p^l} + z_2^{p^l})^{n_1}$. Выделим из него полиоднородную компоненту типа $(p^l(n_1 - 1), p^l)$ по переменным z_1, z_2. В силу коммутаторного соотношения (4) она равна $n_1 (z_1^{p^l})^{n_1 - 1} z_2^{p^l}$.

Подставим в неё вместо z_2 одночлен $z_1^{p^{s-l}r_1-n_1+1}$:

$$n_1 z_1^{p^l n_1 - p^l}(z_1^{p^{s-l}r_1-n_1+1})^{p^l} = n_1 z_1^{p^s r_1} = n_1 z_1^r.$$

Отсюда и из $(n_1,p)=1$ следует, что $z_1^r \in \mathbb{D}_n$. Значит, $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_n$.

Докажем второе включение. Согласно табл. 1 имеем

$$\mathbb{CD}_r = \{g_m(r) = c_m(r) z_1^r \mid m \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}}$$

и

$$\mathbb{CD}_n = \{g_m(n) = c_m(n) z_1^n \mid m \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}}.$$

Осуществим в многочлене $g_m(n)$ подстановку $z_1 \mapsto z_1 + z_2$, используя второе соотношение Фробениуса (5), получим многочлен $c_m(n)(z_1^{p^l}+z_2^{p^l})^{n_1}$. Снова выделим полиоднородную компоненту типа $(p^l(n_1-1), p^l)$ по переменным z_1, z_2, равную $n_1 c_m(n)(z_1^{p^l})^{n_1-1} z_2^{p^l}$. Применим к ней подстановку

$$z_2 \mapsto z_1^{p^{s-l}r_1-n_1+1} x_1^{p^{s-l}r_1-n_1} y_1^{p^{s-l}r_1-n_1} \cdots x_m^{p^{s-l}r_1-n_1} y_m^{p^{s-l}r_1-n_1}.$$

В силу коммутаторного соотношения (1) после этой подстановки мы придём к многочлену $n_1 c_m(r) z_1^r = n_1 g_m(r)$. Так как $(n_1,p)=1$, то порождающий многочлен $g_m(r)$ для любого $m \in \mathbb{N}$ лежит в $\mathbb{CD}_n$ и $\mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n$.

Пусть теперь $p=2$, $l=1$. Оба включения для $s=l$ были доказаны ранее в [7] (см. также утверждение 2 пункта (a) случая I), поэтому, чтобы избежать громоздкости доказательства, ниже рассмотрим случай $s>l$.

Покажем сначала, что выполнено первое включение

$$\mathbb{D}_r = \{z_1^r\}^{\mathbb{T}} \subset \mathbb{D}_n = \{z_1^n \cdots z_t^n \mid t \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}}.$$

Осуществим в одночлене $z_1^n \in \mathbb{D}_n$ подстановку $z_1 \mapsto z_1 + z_2$. Тогда в силу второго равенства из соотношений (6) получим $(z_1^2+z_2^2+[z_1,z_2])^{n_1}$. Выделим из этого многочлена полиоднородную компоненту типа $(2(n_1-1),2)$ по переменным z_1, z_2. Из коммутаторного соотношения (4) следует, что она равна $n_1(z_1^2)^{n_1-1}z_2^2$. Применяя к ней подстановку $z_2 \mapsto z_1^{2^{s-1}r_1-n_1+1}$, приходим к одночлену

$$n_1 z_1^{2n_1-2}(z_1^{2^{s-1}r_1-n_1+1})^2 = n_1 z_1^{2^s r_1} = n_1 z_1^r.$$

Следовательно, $z_1^r \in \mathbb{D}_n$, так как $(n_1,p)=1$, и $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_n$.

Перейдём к коммутаторным компонентам. Напомним, что

$$\mathbb{CD}_r = \{c_m(r) z_1^r \mid m \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}}$$

и

$$\mathbb{CD}_n = \{c_1(n) z_1^n \cdots z_t^n \mid t \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}}$$

в случае $s>l$. Покажем сначала, что многочлен $c_m(n)z_1^n \in \mathbb{CD}_n$. Так как $\mathbb{C}_n \subset \mathbb{D}_n$ (см. табл. 1), то путём некоторых $k\mathbb{T}$ действий на порождающие $z_1^n \cdots z_t^n$ $\mathbb{T}$-пространства $\mathbb{D}_n$ получается многочлен $c_m(n)$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Тогда, применяя подходящие подстановки из $k\mathbb{T}$ к переменным $z_1,\ldots,z_t$ многочленов $c_1(n)z_1^n \cdots z_t^n$, мы получаем многочлен $c_m(n)z_1^n$. Далее действуем так же, как при доказательстве предыдущего включения, где подстановка суммы $z_1 + z_2$ осуществляется в переменную z_1 многочлена $c_m(n)z_1^n$, а на последнем этапе, чтобы получить многочлен $c_m(r)z_1^r$ для любого $m \in \mathbb{N}$, применяется подстановка

$$z_2 \mapsto z_1^{2^{s-1}r_1-n_1+1} x_1^{2^{s-1}r_1-n_1} y_1^{2^{s-1}r_1-n_1} \cdots x_m^{2^{s-1}r_1-n_1} y_m^{2^{s-1}r_1-n_1},$$

и включение $\mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n$ доказано.

Строгость всех включений следует из условия $r > n$ и из соображений степени. □

Лемма 2.2. *Пусть r и n делятся на p, причём r делится на n. Тогда в характеристике p*

$$\mathbb{C}_r \subset \mathbb{CD}_n.$$

Доказательство. Итак, пусть $r = nq$, $q > 1$. Как и в предыдущей лемме, рассмотрим два случая.

Первый случай: $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$. Тогда

$$\mathbb{C}_r = \{c_m(r) \mid m \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}},$$

а

$$\mathbb{CD}_n = \{c_m(n)z_1^n \mid m \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}}.$$

Применим к $c_m(n)z_1^n$ подстановку

$$z_1 \mapsto x_1^{q-1} y_1^{q-1} \cdots x_m^{q-1} y_m^{q-1}.$$

Используя коммутаторное соотношение (1), получаем многочлен

$$x_1^{n-1} y_1^{n-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{n-1} y_m^{n-1} [x_m, y_m] (x_1^{q-1})^n (y_1^{q-1})^n \cdots (x_m^{q-1})^n (y_m^{q-1})^n,$$

равный $c_m(nq) = c_m(r)$. В силу произвольности m выполнено требуемое включение. Для доказательства строгости включения достаточно показать, что элемент $c_m(n)z_1^n$ не принадлежит $\mathbb{C}_r$. Предположив противное, мы получим $CD_{p^l}^{(m)} \subset C_{p^s}$ в алгебре $F^{(3)}$ (напомним, что $r = p^s r_1$, $(r_1, p) = 1$, $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, и тогда в алгебре $F^{(3)}$ выполнены равенства $C_r = C_{p^s}$, $CD_n^{(m)} = CD_{p^l}^{(m)}$). Это включение противоречит диаграмме 1.

Второй случай: $p = 2$, $l = 1$. Рассмотрим $\mathbb{T}$-пространства

$$\mathbb{C}_r = \{c_m(r) \mid m \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}}$$

и

$$\mathbb{CD}_n = \{c_1(n)z_1^n \cdots z_t^n \mid t \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}}.$$

Снова (так же как при доказательстве $\mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n$ для $p = 2$, $l = 1$ предыдущей леммы) из многочленов $c_1(n)z_1^n \cdots z_t^n$ подходящими подстановками получим многочлен $c_m(n)z_1^n$. Далее повторяем рассуждения из первого случая этой леммы, тем самым доказывая, что $c_m(r) \in \mathbb{CD}_n$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Включение строгое, так как, например, $c_1(n)z_1^n \notin \mathbb{C}_m(r)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, что следует из условия $r = nq$, $q > 1$, и из соображений степени. □

Лемма 2.3. *Для любых r и n, делящихся на характеристику p, имеет место соотношение*

$$\mathbb{C}_r \cap \mathbb{C}_n \neq \{0\}.$$

Доказательство. Пусть R_1 — такое натуральное число, что $R_1 > r$, $R_1 > n$ и $(R_1, p) = 1$. Покажем, что

$$x_1^{2R_1-1} y_1^{2R_1-1}[x_1, y_1] \in \mathbb{C}_r \cap \mathbb{C}_n. \tag{10}$$

Осуществим подстановку $x_1 \mapsto x_1 + y_1$ в каждый из многочленов $x_1^{r-1} y_1^{r-1}[x_1, y_1] \in \mathbb{C}_r$ и $x_1^{n-1} y_1^{n-1}[x_1, y_1] \in \mathbb{C}_n$. Выделим полиоднородные компоненты типа $(1, r-1)$ и $(1, n-1)$ по переменным x_1, y_1 соответственно в многочленах, полученных после этой подстановки. В силу коммутаторного соотношения (1) они равны многочленам $(r-1)x_1 y_1^{2r-3}[x_1, y_1]$ и $(n-1)x_1 y_1^{2n-3}[x_1, y_1]$. Применим к этим многочленам соответственно подстановки $x_1 \mapsto x_1^{R_1} y_1^{R_1-r+1}$ и $x_1 \mapsto x_1^{R_1} y_1^{R_1-n+1}$. В результате, используя соотношения (2) и (3), имеем

$$(r-1)R_1 x_1^{2R_1-1} y_1^{2R_1-2r+2+2r-3}[x_1, y_1] = (r-1)R_1 x_1^{2R_1-1} y_1^{2R_1-1}[x_1, y_1]$$

и

$$(n-1)R_1 x_1^{2R_1-1} y_1^{2R_1-2n+2+2n-3}[x_1, y_1] = (n-1)R_1 x_1^{2R_1-1} y_1^{2R_1-1}[x_1, y_1].$$

Отсюда в силу $(r-1, p) = 1$, $(n-1, p) = 1$ и $(R_1, p) = 1$ следует справедливость (10). □

Лемма 2.4. *Пусть r и n делятся на p, причём r имеет бóльшую степень вхождения по p, чем n. Тогда при $r > n$ в характеристике p*

$$\mathbb{C}_r \not\subset \mathbb{C}_n, \quad \mathbb{C}_n \not\subset \mathbb{C}_r, \quad \mathbb{C}_r \cap \mathbb{C}_n \neq \{0\}.$$

Доказательство. Пусть $r = p^s r_1$, $(r_1, p) = 1$, $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$ и $s > l$. Предположив, что $\mathbb{C}_r \subset \mathbb{C}_n$, в алгебре $F^{(3)}$ получим $C_{p^s} \subset C_{p^l}$. Последнее включение противоречит диаграмме 1 (см. также цепочку включений (9) из замечания 2.1), следовательно, наше предположение не верно и $\mathbb{C}_r \not\subset \mathbb{C}_n$. Обратное включение также не выполняется, что следует из соображений степени. По лемме 2.3 требуемое пересечение ненулевое. □

Замечание 2.2. Случай $s = l$, не рассмотренный в этой лемме, был разобран в пункте (a) случая I из предыдущего раздела, где важно, что r делится на n. Если r и n не связаны отношением делимости, то вопрос о включении $\mathbb{C}_r \subset \mathbb{C}_n$ в общем случае не исследован для $0 \leqslant s \leqslant l$ (кроме $s = l = 0$, см. случаи II и III для характеристик p и 0). Хотя имеются положительные примеры (можно показать, что в характеристике 2 при $s = l$ выполнены строгие включения $\mathbb{C}_{10} \subset \mathbb{C}_6$ и $\mathbb{C}_{20} \subset \mathbb{C}_{12}$), выполнено ли включение $\mathbb{C}_{14} \subset \mathbb{C}_{10}$, не известно. Для $s < l$, например, также в характеристике 2 можно показать, что $\mathbb{C}_6 \subset \mathbb{C}_4$, а имеет ли место включение $\mathbb{C}_{14} \subset \mathbb{C}_{12}$, не ясно.

Резюмируем результаты этого раздела. Можно построить диаграмму 2 строгих включений для чисто коммутаторной и коммутаторной компонент в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ в характеристике $p > 2$, где $(n_1, p) = 1$, аналогичную диаграмме 1. Для случая $p = 2$ диаграмма 2 также имеет место, только однопорождённые $\mathbb{T}$-подпространства $\mathbb{CD}_2^{(m)}$ и $\mathbb{CD}_{2n_1}^{(m)}$ для всех $m \in \mathbb{N}$ не порождают всё $\mathbb{T}$-пространство $\mathbb{CD}_2$ и всё $\mathbb{T}$-пространство $\mathbb{CD}_{2n_1}$ соответственно, поэтому знаки равенств в третьей и четвёртой строках заменяются на знаки включений $\supset$.

Диаграмма 2

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{C}_1 & = & \mathbb{C}_1^{(1)} & \supset & \ldots & \supset & \mathbb{C}_1^{(m)} & \supset & \ldots \\
\cap & & \cap & & & & \cap & & \\
\mathbb{C} & = & \mathbb{C}^{(1)} & \supset & \ldots & \supset & \mathbb{C}^{(m)} & \supset & \ldots \\
\cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\mathbb{C}_p + \mathbb{CD}_p & = & \mathbb{C}_p^{(1)} + CD_p^{(1)} & + & \ldots & + & \mathbb{C}_p^{(m)} + \mathbb{CD}_p^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\mathbb{C}_{pn_1} + \underset{\cup}{\mathbb{CD}_{pn_1}} & = & \mathbb{C}_{pn_1}^{(1)} + \underset{\cup}{\mathbb{CD}_{pn_1}^{(1)}} & + & \ldots & + & \mathbb{C}_{pn_1}^{(m)} + \underset{\cup}{\mathbb{CD}_{pn_1}^{(m)}} & + & \ldots \\
\overbrace{\mathbb{C}_{p^2n_1} + \underset{\cup}{\mathbb{CD}_{p^2n_1}}} & = & \overbrace{\mathbb{C}_{p^2n_1}^{(1)} + \underset{\cup}{\mathbb{CD}_{p^2n_1}^{(1)}}} & + & \ldots & + & \overbrace{\mathbb{C}_{p^2n_1}^{(m)} + \underset{\cup}{\mathbb{CD}_{p^2n_1}^{(m)}}} & + & \ldots \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
\overbrace{\mathbb{C}_{p^ln_1} + \underset{\cup}{\mathbb{CD}_{p^ln_1}}}^{\cup} & = & \overbrace{\mathbb{C}_{p^ln_1}^{(1)} + \underset{\cup}{\mathbb{CD}_{p^ln_1}^{(1)}}}^{\cup} & + & \ldots & + & \overbrace{\mathbb{C}_{p^ln_1}^{(m)} + \underset{\cup}{\mathbb{CD}_{p^ln_1}^{(m)}}}^{\cup} & + & \ldots \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Из диаграммы 2 видны существенные отличия строения чисто коммутаторных и коммутаторных компонент пространства $\mathbb{W}_n$ в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ от строения аналогичных компонент пространства W_n в алгебре $F^{(3)}$. Например, самая верхняя строка диаграммы 2 показывает, что элементарные составляющие $\mathbb{C}_1^{(m)}$ не лежат в соответствующих элементарных составляющих $\mathbb{CD}_{p^ln_1}^{(m)}$, хотя, так же как и в диаграмме 1, лежат в $\mathbb{T}$-идеалах $\mathbb{C}^{(m)}$. А в диаграмме 1 эта строка является самой нижней и показывает, что $C_1^{(m)} \subset C^{(m)} \cap CD_{p^l}^{(m)}$. Кроме того, коммутаторные компоненты $\mathbb{CD}_{p^ln_1}$ содержат чисто коммутаторные компоненты $\mathbb{C}_{p^sn_1}$ не для всех $s \in \mathbb{N}$, например, для $s = l$, в отличие от аналогичных компонент T-пространства W_n в алгебре $F^{(3)}$ (см. диаграмму 1).

3. Основная теорема. Диаграммы включений для $\mathbb{T}$-пространств $\mathbb{W}_n$ в $\mathbb{F}^{(3)}$

Цель этого раздела доказать следующий основной результат.

Теорема 3.1. *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$. Тогда в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ при $r > n$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Если r и n делятся на характеристику p, то*
   (a) *в случае, когда степень вхождения числа p в r и n одинакова и r делится на n, то выполнено включение $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$;*
   (b) *в случае, когда степень вхождения числа p в r больше степени вхождения числа p в n и r делится на n, то $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$;*
   (c) *в случае, когда степень вхождения числа p в r меньше, чем степень вхождения этого числа в n, то $\mathbb{W}_r \not\subset \mathbb{W}_n$, $\mathbb{W}_r \not\supset \mathbb{W}_n$ и $\mathbb{W}_r \cap \mathbb{W}_n \neq \{0\}$.*
2. *Если r и n не делятся на характеристику p, то $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$.*
3. *Над полем нулевой характеристики $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$.*
4. *Если r делится на характеристику p и на n, а n и p взаимно просты, то $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$.*
5. *Если r и p взаимно просты, а n делится на характеристику p, то $\mathbb{W}_r \not\subset \mathbb{W}_n$, $\mathbb{W}_r \not\supset \mathbb{W}_n$ и $\mathbb{W}_r \cap \mathbb{W}_n \neq \{0\}$.*

Доказательство. Пусть ниже $r = p^s r_1$, $(r_1, p) = 1$, $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $s, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Случай (1) (a), $s = l \geqslant 1$. Включение $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$ прямо следует из утверждения 1 пункта (a) случая I перед замечанием 1.1, так как выполнено покомпонентное включение всех основных подпространств для $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$: $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_n$, $\mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n$ и $\mathbb{C}_r \subset \mathbb{C}_n$.

Случай (1) (b), $s > l \geqslant 1$. Из леммы 2.4 следует, что $\mathbb{C}_r \not\subset \mathbb{C}_n$. Но в силу леммы 2.2 имеет место включение $\mathbb{C}_r \subset \mathbb{CD}_n$. Отсюда и из включений $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_n$, $\mathbb{CD}_r \subset \mathbb{CD}_n$, выполненных по лемме 2.1, получаем, что $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$.

Случай (1) (c), $1 \leqslant s < l$. Предположим противное: $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$. Рассмотрим случаи, когда $p > 2$, $s \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $s > 1$ и когда $p = 2$, $s = 1$. Согласно табл. 1 в первом случае получим $\mathbb{C}_r + \mathbb{CD}_r \oplus \mathbb{D}_r \subset \mathbb{C}_n + \mathbb{CD}_n \oplus \mathbb{D}_n$. Из предположения о включении следует, в частности, что $\mathbb{CD}_r \subset \mathbb{C}_n + \mathbb{CD}_n$ ($\mathbb{CD}_r \not\subset \mathbb{D}_n$, так как $\mathbb{D}_n$ — прямое слагаемое). Тогда $CD_{p^s} \subset CD_{p^l}$ при $1 \leqslant s < l$ в алгебре $F^{(3)}$, что противоречит диаграмме 1. Во втором случае имеем

$$\mathbb{D}_{2r_1} = \mathbb{W}_{2r_1} \subset \mathbb{W}_n = \mathbb{D}_n \oplus \mathbb{C}_n + \mathbb{CD}_n.$$

Тогда в алгебре $F^{(3)}$ выполнено $D_2 \subset W_{2^l} = D_{2^l} \oplus CD_{2^l}$ при $l > 1$. Отсюда в силу того, что D_{2^l} — прямое слагаемое, приходим к включению $D_2 \subset D_{2^l}$, что противоречит цепочке включений (8).

Обратное включение $\mathbb{W}_r \supset \mathbb{W}_n$ также не выполняется. Действительно, например, $x_1^n \in \mathbb{W}_n$ не лежит в $\mathbb{W}_r$, что следует из соображений степени. Согласно лемме 2.3 требуемое пересечение ненулевое.

Случаи (2) и (3) были доказаны в [7] (см. также утверждение для случаев II и III перед замечанием 1.3).

Случай (4), $s > l = 0$. Согласно утверждению 3) случая IV из первого раздела мы не можем воспользоваться включением $\mathbb{C}_r \subset \mathbb{C}_n$. Но при $p = 2$, $s = 1$ оно и не требуется для того, чтобы включение $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$ было выполнено, в силу утверждения 2 случая IV. Пусть $p > 2$, $s \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $s > 1$. Мы покажем, что в этом случае при дополнительном условии $r = nq$, $q > 1$, выполнено включение $\mathbb{C}_r \subset \mathbb{CD}_n$ (из приводимых рассуждений будет видно, что это включение имеет место и при $p = 2$, $s = 1$). Тогда отсюда и из утверждения 1 случая IV будет следовать требуемое включение $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$. Действительно, рассмотрим $\mathbb{T}$-пространства $\mathbb{C}_r = \{c_m(r) \mid m \in \mathbb{N}\}^{\mathbb{T}}$ и $\mathbb{CD}_n = \{c_1(n)z_1^n\}^{\mathbb{T}}$. Из многочлена $c_1(n)z_1^n$ подходящими подстановками в z_1^n (так как $\mathbb{D}_n = \{z_1^n\}^{\mathbb{T}} \supset \mathbb{C}_n = \{c_1(n)\}^{\mathbb{T}} \supset \mathbb{C}_n^{(m)} = \{c_m(n)\}^{\mathbb{T}}$ для любого $m \in \mathbb{N}$) получим многочлен $c_m(n)z_1^n$. Применим к $c_m(n)z_1^n$ подстановку

$$z_1 \mapsto x_1^{q-1}y_1^{q-1}\cdots x_m^{q-1}y_m^{q-1}.$$

Используя коммутаторное соотношение (1), приходим к многочлену

$$x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1,y_1]\cdots x_m^{n-1}y_m^{n-1}[x_m,y_m](x_1^{q-1})^n(y_1^{q-1})^n\cdots(x_m^{q-1})^n(y_m^{q-1})^n,$$

равному $c_m(nq) = c_m(r)$. В силу произвольности m выполнено требуемое включение. Для доказательства строгости включения достаточно показать, что элемент $c_1(n)z_1^n$ не принадлежит $\mathbb{C}_r$. Предположив противное, мы получим, что в алгебре $F^{(3)}$ тогда T-идеал C лежит в C_{p^s}, что противоречит диаграмме 1.

Случай (5), $0 = s < l$. Предположив противное, получим, что $\mathbb{D}_{r_1} = \mathbb{W}_{r_1} \subset \mathbb{W}_n$. Тогда в алгебре $F^{(3)}$ в силу $(r_1, p) = 1$ будет выполняться $W_{r_1} = W_1 = F^{(3)} \subset W_{p^l} = W_n$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, что невозможно.

Обратное включение $\mathbb{W}_r \supset \mathbb{W}_n$ также не выполняется. Действительно, например, $x_1^n \in \mathbb{W}_n$ не лежит в $\mathbb{W}_r$, что следует из соображений степени. Пересечение ненулевое, достаточно рассмотреть одночлен $x_1^{p^l n_1 r_1}$, очевидно лежащий в этом пересечении. Теорема доказана. $\square$

Хотелось бы ещё раз отметить, что алгебра F^3 в характеристике p устроена достаточно просто:

$$F^{(3)} = W_1 = W_{n_1} \supset W_p = W_{pn_1} \supset W_{p^2} = W_{p^2n_2} \supset W_{p^3} = W_{p^3n_3} \supset \ldots$$

для любых n_i, взаимно простых с p, а в нулевой характеристике ещё проще: $F^{(3)} = W_1 = W_2 = W_3 = W_4 \ldots$.

Диаграмма 3

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{F}^{(3)} = & \mathbb{W}_1 & \supset & \mathbb{W}_{n_1} & \supset & \mathbb{W}_{n_2} & \supset & \mathbb{W}_{n_3} & \supset & \ldots \\
& \cup & & ? & & ? & & ? & & \\
& \mathbb{W}_p & \supset & \mathbb{W}_{pr_1} & ? & \mathbb{W}_{pr_2} & ? & \mathbb{W}_{pr_3} & ? & \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \mathbb{W}_{p^2} & \supset & \mathbb{W}_{p^2r_1} & ? & \mathbb{W}_{p^2r_2} & ? & \mathbb{W}_{p^2r_3} & ? & \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & &
\end{array}$$

Как показывает теорема 3.1, структура рассматриваемых $\mathbb{T}$-пространств в относительно свободной алгебре Грассмана без 1 несколько сложнее. В характеристике $p > 2$ она, если учесть также диаграмму 2, выражается диаграммой 3 строгих включений, где $n_1 > 1$, $(n_i, p) = 1$, $(r_i, p) = 1$, $n_i < pr_i$, $n_i < n_j$, $r_i < r_j$ при $i < j$, $i, j = 1, 2, \ldots$.

Знаки вопроса означают, что связь не выяснена в общем случае для произвольных r и n, где r имеет степень вхождения по p, бо́льшую либо равную степени вхождения этого числа в n. Однако если $r_i \,\vdots\, n_i$ и $r_j \,\vdots\, r_i$ при $i < j$, то знаки вопроса по теореме 3.1 всюду заменяются на знаки включений: $\supset$ по горизонтали (в строках) и $\cup$ по вертикали (в столбцах).

В характеристике $p = 2$ согласно доказанной теореме строится диаграмма 4, аналогичная диаграмме 3, с некоторыми отличиями (см. замечания 1.1 и 1.3).

Диаграмма 4

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{F}^{(3)} = & \mathbb{W}_1 & \supset & \mathbb{W}_{N_1} & \supset & \mathbb{W}_{N_2} & \supset & \mathbb{W}_{N_3} & \supset & \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \mathbb{W}_2 & \supset & \mathbb{W}_{2n_1} & \supset & \mathbb{W}_{2n_2} & \supset & \mathbb{W}_{2n_3} & \supset & \ldots \\
& \cup & & ? & & ? & & ? & & \\
& \mathbb{W}_4 & \supset & \mathbb{W}_{4r_1} & ? & \mathbb{W}_{4r_2} & ? & \mathbb{W}_{4r_3} & ? & \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \mathbb{W}_8 & \supset & \mathbb{W}_{8r_1} & ? & \mathbb{W}_{8r_2} & ? & \mathbb{W}_{8r_3} & ? & \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & &
\end{array}
$$

Здесь $N_1 > 1$, $(N_i, 2) = 1$, $(n_i, 2) = 1$, $(r_i, 2) = 1$, $N_i < 2n_i$, $n_i < 2r_i$, $N_i < N_j$, $n_i < n_j$, $r_i < r_j$ при $i < j$, $i, j = 1, 2, \ldots$. Как и выше, знаки вопроса означают, что связь не выяснена в общем случае для произвольных r и n, где r имеет степень вхождения по p, бо́льшую либо равную степени вхождения этого числа в n. Однако если $r_i \,\vdots\, n_i$ и $r_j \,\vdots\, r_i$ при $i < j$, то знаки вопроса по теореме 3.1 всюду заменяются на знаки включений: $\supset$ по горизонтали (в строках) и $\cup$ по вертикали (в столбцах).

В нулевой характеристике

$$\mathbb{F}^{(3)} = \mathbb{W}_1 \supset \mathbb{W}_2 \supset \mathbb{W}_3 \supset \mathbb{W}_4 \supset \ldots .$$

Как видим, основные $\mathbb{T}$-подпространства образуют бесконечные строго убывающие цепочки включений в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$.

В связи с построенными бесконечными строго убывающими цепочками $\mathbb{T}$-пространств в $\mathbb{F}^{(3)}$ в дальнейшем представляется интересным изучение строения фактор-$\mathbb{T}$-пространств по соответствующим $\mathbb{T}$-подпространствам и других конструкций.

Литература

[1] Аладова Е. В., Гришин А. В., Киреева Е. А. T-пространства. История вопроса, приложения и последние результаты // Чебышёвский сб. — 2004. — Т. 5, № 4 (12). — С. 39—57.

[2] Белов А. Я. О нешпехтовых многообразиях // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 47—66.

[3] Гришин А. В. О конечной базируемости абстрактных T-пространств // Фундамент. и прикл. матем. — 1995. — Т. 5, вып. 3. — С. 669—700.

[4] Гришин А. В. Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 101—118.

[5] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О (p, n)-проблеме // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная сер. Математика. — 2007. — Т. 57, № 7. — С. 35—55.

[6] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О T-пространственном и мультипликативном строении относительно свободной алгебры Грассмана // Матем. сб. — 2009. — Т. 200, № 9. — С. 41—80.

[7] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О структуре относительно свободной алгебры Грассмана // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 8. — С. 3—93.

[8] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых T-идеалов // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 307—312.

[9] Grishin A. V., Shchigolev V. V. On T-spaces and their applications // J. Math. Sci. — 2006. — Vol. 134, no. 1. — P. 1799—1878.

[10] Gupta C. K., Krasilnikov A. N. A non-finitely based system of polynomial identities which contains the identity $x^6 = 0$ // Quart. J. Math. — 2002. — Vol. 53. — P. 173—183.