Радикалы параградуированных колец

М. ВУКОВИЧ
Академия наук и искусств Боснии и Герцеговины
e-mail: mvukovic@anubih.ba

УДК 512.552.12

Ключевые слова: параградуированные кольца и модули, первичный радикал, радикал Бэра, радикал Джекобсона, специальные и нормальные радикалы, теория радикалов Куроша—Амицура.

Аннотация

Статья посвящена теории параградуированных колец, берущей своё начало с серии заметок М. Краснера и М. Вукович, опубликованных в конце 1980-х годах в Proceedings of the Japan Academy. В работе представлены радикалы Бэра и Джекобсона, общая теория радикалов Куроша—Амицура параградуированных колец, установлено, что для параградуированных колец справедлива теорема Андерсона—Дивинского—Сулинского, охарактеризованы параградуированные нормальные радикалы и доказано, что все специальные параградуированные радикалы параградуированных колец могут быть описаны соответствующими классами их градуированных модулей.

Abstract

M. Vuković, Radicals of paragraded rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2022), no. 2, pp. 3—22.

This paper is concerned with the theory of paragraded rings, which begins with a series of Krasner and Vuković's notes in *Proceedings of the Japan Academy*, which first appeared in late 1980s. We present prime and Jacobson radicals, discuss the general Kurosh—Amitsur theory of radicals of paragraded rings, establish that the theorem of Anderson, Divinsky, and Suliński holds for paragraded rings, characterise paragraded normal radicals, and prove that all special paragraded radicals of paragraded rings can be described by appropriate classes of their graded modules.

Эту статью я от всей души посвящаю
одному из величайших российских математиков,
профессору Московского университета А. В. Михалёву
в честь его 80-летия

1. Введение

В данной работе мы представим некоторые результаты о различных типах радикалов, введённых автором в совместных работах с её учеником Э. Иличем-Георгиевичем [16, 17] (см. также [2, 3]) в классе параградуированных колец — наиболее общем классе градуированных колец, введённом М. Краснером и М. Вукович [22—25].

Фундаментальная и прикладная математика, 2022, том 24, № 2, с. 3—22.

Стоит отметить, что абстрактная теория радикалов берёт своё начало в теории колец, восходящей к 1940-м годам, и что в теории колец многие структурные результаты были получены с помощью теории радикалов.

Обобщая классическое представление о радикале кольца, различные авторы, в том числе С. А. Амицур, Г. Адзумая, Р. Бэр, Б. Браун, Н. Джекобсон, Г. Кёте, Я. Левицкий и Н. Х. Маккой, определяли различные виды радикалов; значительный вклад в развитие теории внесли математики России и СССР: А. Г. Курош, А. И. Мальцев, В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин, А. И. Ширшов, Л. А. Скорняков, А. И. Кострикин, А. В. Михалёв и их ученики.

Следует подчеркнуть, что существенную роль в развитии теории радикалов сыграли А. Г. Курош и С. А. Амицур, которые в начале 50-х годов прошлого века независимо друг от друга представили общую теорию радикалов в различных алгебраических структурах. В. А. Андрунакиевич и Ю. М. Рябухин определили специальную теорию радикалов и показали, что каждый радикал Куроша—Амицура ассоциативного кольца можно описать на языке модулей аналогично радикалу Джекобсона.

Хотя абстрактная теория радикалов начинается с колец, а другие алгебраические структуры (группы, алгебры) упомянуты только в фундаментальных работах А. Г. Куроша и С. А. Амицура 1950-х годов, изучение математической литературы СССР показывает, что на развитие абстрактной теории радикалов большое влияние оказала теория групп. А именно, А. Г. Курош и С. А. Амицур отметили, что общая теория радикалов может быть развита в любой алгебраической системе, в которой имеет смысл понятие ядра гомоморфизма с обычными свойствами, т. е. в «хороших» категориях.

Аналогично случаю градуированных колец в [16, 17] было введено и исследовано абстрактное понятие радикального класса для параградуированных колец. В данной работе мы, в частности, представим некоторые результаты из радикальной теории параградуированных колец, начиная с радикалов Бэра и Джекобсона, применим общую теорию радикалов Куроша—Амицура к нормальным радикалам и специальным радикалам Андрунакиевича—Рябухина [2, 3, 16, 17].

Теперь кратко остановимся на содержании статьи.

Первый раздел представляет собой введение в предмет. Во втором разделе мы напомним некоторые понятия и основные факты о параградуированных кольцах и параградуированных модулях [22—25].

В разделах 3 и 4 мы исследуем свойства некоторых конкретных радикалов: радикала Бэра и Джекобсона параградуированного кольца и их параградуированных версий. В частности, в разделе 3 мы доказываем, что параградуированный радикал Бэра параградуированного кольца совпадает с наибольшим однородным идеалом, который содержится в классическом радикале Бэра параградуированного кольца.

Аналогичные результаты получены в разделе 4 для радикала Джекобсона. Опираясь на результаты Э. Хальберштадта о градуированных кольцах [14], мы устанавливаем связь между параградуированным радикалом Джекобсона и радикалом Джекобсона кольца, соответствующего идемпотенту, при условии, что параградуированное кольцо является регулярным и что каждый элемент из его набора степеней является либо идемпотентом, либо нильпотентным элементом степени 2 относительно минимального умножения.

В разделе 5 изучается общая теория радикалов параградуированных колец в смысле Куроша—Амицура и устанавливается, что для ассоциативных параградуированных колец справедлива теорема Андерсона—Дивинского—Сулинского.

Отметим, что все общие понятия и утверждения теории радикалов Куроша—Амицура для параградуированных колец определены и сформулированы с помощью квазиоднородных гомоморфизмов и идеалов [25].

В шестом разделе мы определяем специальные параградуированные радикалы параградуированных колец. Известно, что любой специальный радикал кольца может быть определён с помощью некоторого класса модулей над этим кольцом. Наша цель — показать, что все специальные параградуированные радикалы параградуированных колец могут быть описаны соответствующим классом их параградуированных модулей, что уже сделано для градуированных колец И. Н. Балабой в [7].

2. Предварительные сведения

Этот раздел имеет исторический характер и посвящён параградуированным кольцам и параградуированным модулям; о них известно очень мало. Дан краткий обзор общих градуированных колец Краснера [14] и модулей, которые приводят к параградуированным кольцам Краснера—Вукович [23, 25].

М. Краснер, исследуя нормированные тела и их связь с кольцами нормирования, используя эквивалентность нормы, пришёл к абстрактному понятию корпоида [20], с которого начала своё развитие общая теория градуированных структур [10, 14, 21] — теория гомогруппоидов, кольцоидов и модулоидов, более общая, чем у Бурбаки [8], поскольку во множествах, задающих градуировку, не предполагается ни ассоциативности, ни коммутативности, ни наличия нейтрального элемента. Корпоид является частным случаем кольцоида и рассматривается как однородная часть градуированного тела. Кроме того, градуированные структуры Краснера изучались с трёх разных точек зрения: как неоднородные, полуоднородные и однородные.

Категория градуированных структур (групп, колец, модулей) не обладает свойством замыкания по отношению к прямому произведению и прямой сумме: прямое произведение и прямая сумма гомогруппоидов, кольцоидов и модулоидов не обязательно должны быть гомогруппоидами, кольцоидами и модулоидами. Это послужило мотивацией для М. Краснера и М. Вукович сосредоточиться на этой проблеме, и они были первыми, кто сумел её решить. М. Краснер и М. Вукович развили теорию параградуированных структур (групп, колец, модулей) [22—25], которая обобщает не только понятие градуированных структур, как они были представлены Бурбаки [8], но и предыдущие результаты М. Краснера [21] и его учеников М. Шадейра [10] и Э. Хальберштадта [14].

В этом разделе нас особенно интересуют результаты исследований, касающихся структуры параградуированных колец и параградуированных модулей, первые из которых появились в конце 1980-х годов в трёх заметках М. Краснера и М. Вукович [22—24] и монографии [25].

Анализ связи между градуированными и параградуированными кольцами можно найти в [25, с. 70, 71].

Напомним понятия параградуированного кольца и модуля [22—25].

Определение 2.1 ([25]). Кольцо R называется *параградуированным*, если существует отображение

$$\pi\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(R,+), \quad \pi(\delta) = R_\delta \quad (\delta \in \Delta),$$

частично упорядоченного множества $(\Delta, <)$, являющегося полной полурешёткой снизу и индуктивным упорядоченным множеством сверху, во множество $\mathrm{Sg}(R,+)$ подгрупп аддитивной группы кольца $(R,+)$, называемой *параградуировкой*, удовлетворяющее следующим аксиомам.

(г1) $\pi(0) = R_0 = \{0\}$, где $0 = \inf\Delta$; $\delta < \delta'$ влечёт $R_\delta \subseteq R_{\delta'}$.

Замечание 2.1. $A = h(R) = \bigcup\limits_{\delta\in\Delta} R_\delta$ называется *однородной частью* R относительно π, а элементы A — *однородными* элементами.

Замечание 2.2. Если $x \in A$, будем говорить, что $\delta(x) = \inf\{\delta\in\Delta \mid x\in R_\delta\}$ — *степень* x. Ясно, что $\delta(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Элементы $\delta(x)$, $x \in A$, называются *главными степенями*, множество, которое они образуют будем обозначать через Δ_p.

(г2) $\theta \subseteq \Delta$ влечёт $\bigcap\limits_{\delta\in\theta} R_\delta = R_{\inf\theta}$.

(г3) Однородная часть A порождает $(R,+)$ с помощью A-внутренних соотношений $x + y = z$.

(г4) Если $B \subseteq A$ — такое подмножество, что для всех $x, y \in B$ степени $\delta(x)$, $\delta(y)$ ограничены сверху, то существует верхняя грань всех $\delta(x)$, $x \in B$.

(г5) Для всех $\xi, \eta \in \Delta$ существует такой элемент $\zeta \in \Delta$, для которого $R_\xi R_\eta \subseteq R_\zeta$.

Это определение задаёт на множестве Δ бинарную операцию

$$\xi\eta = \sup\{\delta(x) \mid x \in R_\xi R_\eta\} \quad (\xi, \eta, \zeta \in \Delta),$$

называемую *минимальным умножением* [24, 25], для которой $R_\xi R_\eta \subseteq R_{\xi\eta}$.

Определение 2.2 [25]. Идеал I параградуированного кольца R называется *однородным*, если I порождается множеством $I \cap A$ с помощью A-внутренних соотношений, где A — однородная часть R.

Мы рассмотрим первичный радикал и радикал Джекобсона параградуированных колец и в качестве основных результатов получим, что параградуированные аналоги первичного радикала и радикала Джекобсона являются наибольшими параградуированными идеалами, содержащимися в них. Понятие радикала Джекобсона, введённое в [16], является более общим, чем в [3], где мы рассматривали категорию параградуированных колец с таким же набором степеней.

В работе мы будем использовать понятия *квазикольцоид*, *параградуированный модуль* и *квазимодулоид* [25], определения которых напомним далее.

Если R — параградуированное кольцо с однородной частью A, то можно рассмотреть ограничения операций из R на A. Индуцированное сложение является частичным, и мы будем писать $x \# y$ в том и только том случае, если $x+y \in A$. Полученная структура называется *паракольцоидом* [25]. Для $x \in A$ обозначим

$$A(x) = \{y \in A \mid x \# y\}.$$

Паракольцоид удовлетворяет следующим условиям.

(a1) Существует элемент $0 \in A$, такой что $A = A(0)$ и для всех $x \in A$ имеем $0 + x = x$.

(a2) Если $a \in A$, то $x + y$ всегда определено на множестве

$$g(a) = \{x \in A \mid A(x) \supseteq A(a)\}$$

и $(g(a), +)$ является абелевой группой.

(a3) Если $B \subseteq A$ таково, что для всех $x, y \in B$ имеем $x \# y$, то существует подмножество $G \subseteq A$, такое что $x + y \in G$ для всех $x, y \in G$; для $x \in G$ имеем, что $g(x) \subseteq G$ и $B \subseteq G$.

(a4) $A^2 \subseteq A$.

(a5) Если $x \# x'$ и $y \# y'$, то $xy \# x'y'$.

Структура $(A, +, \cdot)$, удовлетворяющая аксиомам (a1)—(a5), называется *квазикольцоидом* [25]. Заметим, что в общем случае квазикольцоид не является паракольцоидом, но он им является при некоторых дополнительных предположениях (см. [25]). В этом случае паракольцоид A может быть *линеаризован* в параградуированное кольцо, обозначаемое через $\bar{A}$, однородной частью которого он является [25].

Напомним, что такое линеаризация $\bar{A}$. Пусть A — паракольцоид, т. е. однородная часть некоторого параградуированного кольца R. Если A также является однородной частью некоторого другого кольца R', то кольца R и R' будут A-изоморфны, т. е. кольцо с однородной частью A определено с точностью до A-изоморфизма, будем обозначать его $\bar{A}$ и называть линеаризацией паракольцоида A.

Пусть R — параградуированное кольцо с параградуировкой $\pi\colon \Delta \ni \delta \mapsto R_\delta$ и M — правый R-модуль. Тогда M называется *параградуированным R-модулем* [24, 25] с параградуировкой π' и множеством степеней D, если $(M, +)$ удовлетворяет аксиомам (r1)—(r4) для π' вместо π, D вместо Δ, M вместо R и $N = h(M) = \bigcup\limits_{d \in D} M_d$ вместо $A = h(R)$ и если, кроме того, для всех $d \in D$ и $\delta \in \Delta$ существует элемент $t \in D$, такой что $\pi'(d)R_\delta \subseteq \pi'(t)$.

Если мы рассмотрим ограничение сложения из M на N и внешнего умножения $M \times R \to M$ на $N \times A \to N$, то получим новую структуру, называемую *парамодулоидом* [25]. Парамодулоид N над паракольцоидом A удовлетворяет следующим условиям.

(m1) $x(ab) = (xa)b$ $(a, b \in A,\ x \in N)$.
(m2) Если $a, a' \in A$ и $x, x' \in N$ таковы, что $a \# a'$ и $x \# x'$, то $xa \# x'a'$.
(m3) Если $a \# a'$ $(a, a' \in A)$ и $x \in N$, то $x(a + a') = xa + xa'$.
(m4) Если $x \# x'$ $(x, x' \in N)$ и $a \in A$, то $(x + x')a = xa + x'a$.

Квазимодулоид N над *квазикольцоидом* A — это структура, удовлетворяющая аксиомам (m1)—(m4). В общем случае он не является парамодулоидом. Он будет парамодулоидом при некоторых дополнительных предположениях (см. [24, 25]). В этом случае N может быть линеаризован в параградуированный модуль, обозначаемый через $\bar{N}$, однородной частью которого он является.

Подмножество $K \subseteq N$ A-квазимодулоида N называется *подквазимодулоидом* [25], если

1) $x \in K$ влечёт $-x \in K$;
2) из $x, y \in K$ и $x \# y$ следует $x + y \in K$;
3) из $a \in A$ и $x \in K$ следует $xa \in K$.

Подквазимодулоид квазикольцоида A, рассматриваемого как A-квазимодулоид, называется *правым идеалом квазикольцоида* A [25].

Фактор-структуры определяются обычным образом (более подробное изложение можно найти в [25] и [2]).

3. Первичный радикал

Первичный спектр параградуированного кольца был введён в [15]. Здесь мы переформулируем это понятие для *квазикольцоида*.

Определение 3.1. Пусть A — квазикольцоид. Собственный идеал P в A является *первичным*, если для любых идеалов I, J в A включение $IJ \subseteq P$ влечёт $I \subseteq P$ или $J \subseteq P$.

Как и в случае колец, можно показать, что идеал P в A является первичным тогда и только тогда, когда из того, что $xAy \subseteq P$, следует, что $x \in P$ или $y \in P$, где $x, y \in A$.

Множество всех первичных идеалов в A обозначается через $\mathrm{Spec}(A)$ и называется *первичным спектром квазикольцоида* A.

Первичный радикал, или *радикал Бэра, квазикольцоида* A определяется как множество $\bigcap(P \mid P \in \mathrm{Spec}(A))$ и обозначается через $\beta(A)$.

Предложение 3.1. *Пусть A — паракольцоид, и пусть A линеаризуется в параградуированное кольцо $\bar{A}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *если $\bar{P} \in \mathrm{Spec}(\bar{A})$, то $\bar{P} \cap A \in \mathrm{Spec}(A)$, где через $\mathrm{Spec}(\bar{A})$ обозначается спектр $\bar{A}$, рассматриваемого как кольцо;*
б) *если $Q \in \mathrm{Spec}(A)$, то существует $\bar{P} \in \mathrm{Spec}(\bar{A})$, такой что $Q = \bar{P} \cap A$;*

в) *первичный радикал A совпадает с $\beta(\bar{A}) \cap A$, где через $\beta(\bar{A})$ обозначается первичный радикал $\bar{A}$, рассматриваемого как кольцо.*

Доказательство. Утверждения а) и б) могут быть доказаны так же, как в случае обычного градуированного кольца (см. [11, 26]), а утверждение в) сразу следует из а) и б). $\square$

Рассмотрим теперь параградуированное кольцо R со множеством степеней Δ. Вспоминая хорошо известное понятие полугруппы с однозначным произведением [19], множество степеней относительно минимального умножения будем называть *однозначно представимым*, если для любых двух непустых подмножеств Θ и Λ множества Δ, ни одно из которых не является множеством, состоящим из одного элемента, существует элемент, единственным образом представленный относительно минимального умножения в виде $\theta\lambda$, где $\theta \in \Theta$, $\lambda \in \Lambda$.

Теорема 3.1. *Первичный радикал $\beta(R)$ параградуированного кольца R с однозначно представимым множеством степеней Δ является однородной частью R.*

Доказательство. Следуя доказательству леммы 1.1 из [19], докажем сначала, что если $I \neq 0$ является первичным идеалом в R, а само кольцо R первичным не является, то I содержит ненулевой однородный идеал. Действительно, пусть a, b — ненулевые элементы в R, такие что $aRb = 0$. Тогда существуют элементы $a_{\xi_i} \in R_{\xi_i}$, $b_{\eta_j} \in R_{\eta_j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, такие что

$$a = a_{\xi_1} + \ldots + a_{\xi_n}, \quad b = n_{\eta_1} + \ldots + a_{\eta_m}.$$

Так как R является параградуированным кольцом, то эти представления не являются единственными, но можно выбрать их так, чтобы n и m были минимальными. Выберем элементы a и b минимальной длины, такие что $aRb = 0$. Поскольку Δ — однозначно представимое множество, для каждого $\delta \in \Delta$ существует единственное представление элемента $\xi_i\delta\eta_j$ множества $\{\xi_1\delta, \ldots, \xi_n\delta\} \cdot \{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ относительно минимального умножения. Теперь, как и при доказательстве леммы 1.1 из [19], получим, что из $a_{\xi_1}Rb_{\eta_1} = 0$ следует, что $a_{\xi_1} \in I$ или $b_{\eta_1} \in I$, поэтому I является однородным идеалом. Отсюда сразу следует, что любой минимальный первичный идеал в R является однородным, что и требовалось доказать. $\square$

4. Радикал Джекобсон

Радикал Джекобсона кольцоида, однородной части градуированного кольца с индуцированными операциями, был подробно рассмотрен Э. Хальберштадтом в [14].

В этом разделе мы покажем, что аналогичные результаты справедливы и для квазикольцоидов при некоторых модификациях в формулировках и в доказательствах.

Квазимодулоид будем для удобства обозначать через M.

Пусть A — *квазикольцоид*, M — правый A-*квазимодулоид*, N — *подквазимодулоид* M и S — подмножество в M. Обозначим через $(N : S)$ множество элементов $a \in A$, таких что $Sa \subseteq N$. Легко проверить, что $(N : S)$ является правым идеалом A. В частности, если $x \in M$, то $(0 : x)$ — *правый идеал* в A.

Определение 4.1 [25]. *Сердцевиной* A-квазимодулоида M называется множество

$$C = \{x \in M \mid x \# y \text{для каждого } y \in M\}.$$

Определение 4.2 [25]. A-квазимодулоид M называется *регулярным*, если для любых $a, b \in A$ и $x \in M$, $xa, xb \notin C$, где C — сердцевина M, из того, что $xa \# xb$, следует $a \# b$.

Квазикольцоид A называется *регулярным справа* (*слева*), если он регулярен как правый (левый) A-квазимодулоид. Квазикольцоид регулярен, если он регулярен справа и слева.

Определение 4.3 [25]. Если M и M' — два A-квазимодулоида, то отображение $f\colon M \to M'$ называется *квазигомоморфизмом*, если для всех $x, y \in M$ и $a \in A$ выполнены следующие соотношения:

а) из $x \# y$ следует $f(x) \# f(y)$ и $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

б) $f(xa) = f(x)a$.

Если, кроме этого, из $f(x) \# f(y)$ и $f(x), f(y) \notin C'$, где C' — сердцевина M', следует $x \# y$, то f называется *гомоморфизмом*.

Лемма 4.1. *Если M — регулярный A-квазимодулоид и $0 \neq x \in M$, то $A/(0 : x) \cong xA$.*

Доказательство. Пусть $f\colon A \to xA$ — отображение, определённое формулой $f(a) = xa$ $(a \in A)$. Если $a, b \in A$ и $a \# b$, то $xa \# xb$ и $x(a + b) = xa + xb$, откуда следует, что $f(a + b) = f(a) + f(b)$. С другой стороны, $f(ab) = x(ab) = (xa)b = f(a)b$. Следовательно, f — квазигомоморфизм A-квазимодулоидов. Он является гомоморфизмом, так как если $f(a) \# f(b)$ и $f(a), f(b) \notin C$, то $xa \# xb$, $xa, xb \notin C$, а из регулярности M выводим $a \# b$.

Ядро гомоморфизма f является правым идеалом в A, а именно $(0 : x)$, а его образ равен xA. Из первой теоремы об изоморфизме [25] получаем $A/(0 : x) \cong xA$. □

Определение 4.4. A-квазимодулоид M называется *неприводимым*, если $MA \neq 0$ и M имеет лишь два подквазимодулоида: 0 и M.

Определение 4.5. *Радикалом Джекобсона* $J(A)$ квазикольцоида (паракольцоида) A называется пересечение аннуляторов всех неприводимых регулярных A-квазимодулоидов (A-парамодулоидов).

Определение 4.6. Пересечение аннуляторов всех неприводимых A-квазимодулоидов (A-парамодулоидов) называется *большим радикалом Джекобсона* квазикольцоида (паракольцоида) A и обозначается через $J_l(A)$.

Замечание 4.1. Ясно, что большой радикал Джекобсона квазикольцоида содержится в его радикале Джекобсона, а первичный радикал квазикольцоида — в большом радикале Джекобсона.

Определение 4.7. Правый идеал квазикольцоида I в A называется *модулярным* если существует элемент $u \in A$, такой что $a \sim ua \,(\mathrm{mod}\, I)$ для всех $a \in A$. Будем называть такой идеал I *модулярным идеалом относительно* u.

Замечание 4.2. Заметим, что если I — собственный модулярный идеал относительно u, то $\delta(u)$ и $\delta(u^2)$ имеют общую верхнюю грань. Действительно, так как I — собственный идеал и $u \notin I$, то $u \# u^2$ и $u - u^2 \in I$. Следовательно, $u^2 \notin I$, поэтому $u^2 \neq 0$, что и требуется.

Определение 4.8. Квазимодулоид M над квазикольцоидом A называется *строго циклическим*, если существует элемент $x \in M$, такой что $M = xA$. Этот элемент x называется *строгим образующим* M.

Определение 4.9. Говорят, что A-квазимодулоид M квазимодулоидом *без сердцевины*, если

$$C = \{x \in M \mid x \# y \text{ для каждого } y \in M\} = 0.$$

Лемма 4.2. *Регулярный A-квазимодулоид M без сердцевины, являющийся строго циклическим, изоморфен A/I, где I — модулярный правый идеал в A. Каждый модулярный правый идеал I в A имеет вид $(0 : x)$, где x — строгий образующий A-квазимодулоида M.*

Доказательство. Пусть M — строго циклический регулярный A-квазимодулоид без сердцевины и x — его строгий образующий. Тогда по лемме 4.1 $M = xA \cong A/(0 : x)$.

Докажем, что $(0 : x)$ — модулярный идеал. Так как $x \in xA$ и M регулярен, существует $u \in A$, такой что $x = xu$.

Для произвольного $a \in A$ имеем $xa = xua$. Возможны два случая. Если $xa = 0$, то оба a и ua принадлежат идеалу $(0 : x)$. Если $xa = xua \neq 0$, то, поскольку M является регулярным и без сердцевины, $a \# ua$ и $0 = xa - xua = x(a - ua)$, откуда следует, что $a - ua \in (0 : x)$.

Следовательно, u является левой единицей по модулю идеала $(0 : x)$, и поэтому идеал $(0 : x)$ модулярен.

Второе утверждение очевидно. □

Аналогично кольцевому случаю можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.1.

1. *Если M — неприводимый регулярный A-квазимодулоид без сердцевины, то $M \cong A/I$, где I — максимальный модулярный правый идеал в A.*
2. *Обратно, если I — максимальный модулярный правый идеал регулярного квазикольцоида A без сердцевины, то A/I является неприводимым регулярным A-квазимодулоидом без сердцевины.*

Теорема 4.2. *Радикал Джекобсона регулярного квазикольцоида A без сердцевины совпадает с пересечением всех максимальных модулярных правых идеалов A.*

Доказательство. Пусть A — регулярный квазикольцоид без сердцевины и I — максимальный модулярный правый идеал A. Тогда A/I — регулярный A-квазимодулоид без сердцевины, и утверждение следует из предыдущей теоремы. □

Хотя доказательство следующей теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для кольцоидов [14], приведём его здесь для полноты изложения.

Теорема 4.3. *Пусть A — паракольцоид, $\bar{A}$ — его линеаризация. Если $J_l(A)$ — большой радикал Джекобсона A, а $J(\bar{A})$ — обычный радикал Джекобсона кольца $\bar{A}$, то $J_l(A) = J(\bar{A}) \cap A$.*

Доказательство. Так как каждый неприводимый $\bar{A}$-модуль M можно рассматривать как неприводимый A-парамодулоид M и $(0 : M)_A \subseteq (0 : M)_{\bar{A}}$, получаем, что $J_l(A) \subseteq J(\bar{A}) \cap A$. Пусть M — неприводимый A-парамодулоид и $a \in J(\bar{A}) \cap A$. Достаточно доказать, что $a \in (0 : M)$.

Если $a \notin (0 : M)$, то существует $x \neq 0$, такой что $xa \neq 0$. Из-за неприводимости M элемент xa является строгим образующим для M, и следовательно, $\bar{M} = xa\bar{A}$, где $\bar{M}$ — линеаризация M. Пусть элемент $\bar{b} \in \bar{A}$ такой, что $x = xa\bar{b}$. Тогда для всех $\bar{y} \in \bar{A}$ $x(\bar{y} - a\bar{b}\bar{y}) = 0$, или $\bar{y} - a\bar{b}\bar{y} \in (0 : x)$.

Так как $a \in J(\bar{A})$, то $a\bar{b} \in J(\bar{A})$. Если $\bar{z}$ — квазиобратный для $a\bar{b}$ в $\bar{A}$, то, поскольку $\bar{z} - a\bar{b}\bar{z} \in (0 : x)$, получаем, что $a\bar{b} \in (0 : x)$, поэтому $xa\bar{b} = 0$, и следовательно, $x = 0$ — противоречие.

Таким образом, $J(\bar{A}) \cap A \subseteq J_l(A)$ и $J(\bar{A}) \cap A = J_l(A)$. □

Лемма 4.3. *Пусть A — регулярный паракольцоид без сердцевины, такой что для каждого элемента δ из соответствующего множества степеней Δ^* либо $\delta^2 = 0$, либо $\delta^2 = \delta$ относительно минимального умножения. Тогда степени всех единиц по модулю собственного модулярного правого идеала A имеют общую идемпотентную верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть I — собственный модулярный правый идеал в A и u, u' — две единицы по модулю I. Рассмотрим каноническое отображение $f\colon A \to A/I$. Легко видеть, что

$$0 \neq f(x) = f(ux) = f(u'x) \quad \text{для всех} \quad x \in A \setminus I.$$

Так как f является гомоморфизмом, а A — паракольцоид без сердцевины, то $ux \# u'x$. Поскольку A регулярен, без сердцевины и элементы ux и $u'x$ ненулевые, то $u \# u'$. Это означает, что $\delta(u)$ и $\delta(u')$ имеют общую верхнюю грань, обозначим её через ξ. Тогда $0 < \delta(u) < \xi$, $0 < \delta(u') < \xi$ и $u \# u^2 \neq 0$. Следовательно, $0 < \delta(u) = \delta(u)\delta(u) < \xi^2$. А это, с учётом нашего предположения, влечёт $\xi^2 = \xi$. □

Замечание 4.3. Как показывает следующий пример, паракольцоид, удовлетворяющий условиям предыдущей леммы, существует. Это кольцо

$$R = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

верхних треугольных матриц вместе с отображением

$$\pi \colon \Delta \to \mathrm{Sg}(R,+), \quad \pi(\delta) = R_\delta \quad (\delta \in \Delta),$$

где

$$R_{\delta_1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R_{\delta_2} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R_{\delta_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \ R_{\delta_4} = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\Delta = \{\delta_i \mid i = 0,1,2,3,4\}$.

Частично упорядоченное множество Δ является полной полурешёткой снизу и индуктивным упорядоченным множеством сверху относительно следующего порядка:

$$\delta_i < \delta_j \text{ тогда и только тогда, когда } R_{\delta_i} \subseteq R_{\delta_j}, \quad i,j = 0,1,2,3,4.$$

Ясно, что R является параградуированным кольцом.

Из следующей таблицы видно, что каждый элемент $\delta \in \Delta$ является либо идемпотентом, либо нильпотентным степени нильпотентности 2 относительно минимального умножения.

$\cdot$	0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
0	0	0	0	0	0
δ_1	0	δ_1	δ_2	0	δ_4
δ_2	0	0	0	δ_2	0
δ_3	0	0	0	δ_3	0
δ_4	0	δ_1	δ_2	δ_2	δ_4

Определение 4.10. Пусть I — собственный модулярный правый идеал регулярного паракольцоида без сердцевины, такой что для каждого элемента δ из соответствующего множества степеней Δ^* выполнено либо $\delta^2 = 0$, либо $\delta^2 = \delta$ относительно минимального умножения. Наименьшая общая верхняя грань всех единиц по модулю I называется *степенью идеала* I.

Теорема 4.4. *Пусть A — регулярный паракольцоид без сердцевины, такой что для каждого элемента δ из соответствующего множества степеней Δ^* выполнено либо $\delta^2 = 0$, либо $\delta^2 = \delta$ относительно минимального умножения, и пусть $\xi \in \Delta^*$ — идемпотентный элемент. Предположим также, что Δ^* является сократимым частичным группоидом относительно минимального умножения. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между максимальными модулярными правыми идеалами паракольцоида A степени ξ и максимальными модулярными правыми идеалами кольца $A(\xi) = \bar{A}_\xi$.*

Доказательство. С этими допущениями мы можем действовать так же, как для регулярного кольцоида в [14]. Соответствие строится следующим образом: если I — максимальный модулярный правый идеал в $A(\xi)$, то $\hat{I} = \{x \in A \mid xA \cap A(\xi) \subseteq I\}$. Как и в [14], можно доказать, что $\hat{I}$ является максимальным модулярным правым идеалом в A степени ξ. Обратно, если I — максимальный модулярный правый идеал в A степени ξ, то легко проверить, что $I \cap A(\xi)$ — максимальный модулярный правый идеал в $A(\xi)$. □

Замечание 4.4. Как показывает следующий пример, паракольцоид, удовлетворяющий условиям предыдущей теоремы, существует. Ясно, что подкольцо

$$\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

параградуированного кольца

$$\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

из замечания 4.3 также является параградуированным относительно параградуировки

$$R_{\delta_1} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{\delta_2} = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта параградуировка индуцирует минимальное умножение, которое делает множество степеней Δ сократимым частичным группоидом.

Определение 4.11. Элемент a паракольцоида A называется *правым* (*левым*) *квазирегулярным*, если a не является левой (правой) единицей по модулю любого собственного правого идеала кольца A. Правый идеал A называется *квазирегулярным*, если каждый его элемент является правым квазирегулярным.

Следующая характеризация правого квазирегулярного элемента следует из предыдущей теоремы. Аналогичный результат для регулярного кольцоида был получен Э. Хальберштадтом (см. [14]).

Теорема 4.5. *Пусть A — регулярный паракольцоид без сердцевины, такой что для каждого элемента δ из соответствующего множества степеней Δ^* выполнено либо $\delta^2 = 0$, либо $\delta^2 = \delta$ относительно минимального умножения, и предположим, что Δ^* является сократимым частичным группоидом относительно минимального умножения. Элемент $a \in A$ является правым квазирегулярным в том и только том случае, если выполнено одно из следующих двух условий:*

1) *степень a не является идемпотентным элементом множества Δ^*;*
2) *если степень a является идемпотентным элементом $\xi \in \Delta^*$, то a — правый квазирегулярный элемент кольца $A(\xi)$.*

Как в классическом случае [18] и в случае регулярного кольцоида [14] можно доказать, что в условиях теоремы 4.4 радикал Джекобсона регулярного паракольцоида A является квазирегулярным идеалом, содержащим все правые квазирегулярные идеалы A. Отсюда и из теоремы 4.4 следует следующая теорема (см. [14] для случая регулярного кольцоида).

Теорема 4.6. *В условиях теоремы 4.4 имеет место равенство*

$$J\big(A(\xi)\big) = J(A) \cap A(\xi),$$

где через $J\big(A(\xi)\big)$ и $J(A)$ обозначены радикалы Джекобсона колец $A(\xi)$ и A соответственно.

5. Общая теория радикалов

В этом разделе мы рассмотрим общую теорию радикалов в категории $\mathcal{K}$ параградуированных колец, определяемую квазиоднородными гомоморфизмами и идеалами (см. [25]).

Будем рассматривать кольца, содержащиеся в фиксированном универсальном классе $\mathcal{K}$, т. е. непустом подклассе γ всех параградуированных колец, который содержит все квазиоднородные гомоморфные образы и идеалы каждого кольца $A \in \gamma$.

Основываясь на определении Куроша—Амицура и хорошо известной теории колец (см., например, [13]), определим общую теорию радикалов для параградуированных колец.

Пусть γ — непустой класс колец из $\mathcal{K}$, такой что

а) γ замкнут относительно квазиоднородных гомоморфных образов, т. е. если $A \in \gamma$ и B — гомоморфный образ A для некоторого квазиоднородного гомоморфизма, то $B \in \gamma$;

б) для каждого параградуированного кольца A сумма однородных идеалов $\gamma(A) = \sum\{I \lhd A \mid I \in \gamma\}$ принадлежит классу γ;

в) $\gamma\big(A/\gamma(A)\big) = 0$ для каждого параградуированного кольца A.

Определение 5.1. Класс γ параградуированных колец из $\mathcal{K}$, удовлетворяющий условиям а), б) и в), называется *параградуированным радикальным классом* или *радикальным классом параградуированных колец* в смысле Куроша—Амицура. $\gamma(A)$ называется *параградуированным γ-радикалом* кольца A. Параградуированное кольцо A называется *параградуированным γ-радикальным кольцом*, если $A \in \gamma$, т. е. $\gamma(A) = A$.

Легко доказать следующую теорему.

Теорема 5.1. *Непустой класс γ параградуированных колец является параградуированным радикальным классом в том и только том случае, если*

а$'$) *γ замкнут относительно квазиоднородных гомоморфных образов*;

б$'$) *γ обладает индуктивным свойством*: *если $I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_\lambda \subseteq \ldots$ — возрастающая цепочкой однородных идеалов параградуированного кольца A и каждый I_λ принадлежит γ, то $\bigcup\limits_{\lambda} I_\lambda \in \gamma$;*

в$'$) *γ замкнут относительно расширений*: *если I — однородный идеал параградуированного кольца A, а I и A/I принадлежат γ, то $A \in \gamma$.*

Лемма 5.1. *Пусть $A \in \mathcal{K}$, K — однородный идеал в I, I — однородный идеал в A и $a \in A$ — однородный элемент. Тогда*

а) $aK + K \lhd I$;
б) $(aK + K)^2 \subseteq K$;
в) *отображение $f\colon K \to (aK+K)/K$, определённое формулой $f(x) = ax+K$, для любого $x \in K$ является сюръективным квазиоднородным гомоморфизмом*;
г) $\operatorname{Ker} f \lhd I$.

Доказательство. Как и в случае ассоциативных колец, утверждения а), б) и г) проверяются непосредственно и доказывается, что отображение f из в) является сюръективным гомоморфизмом. Поскольку ясно, что при отображении f однородный элемент отображается на однородный, то f также является квазиоднородным. □

В качестве следствия получаем, что в классе $\mathcal{K}$ справедлива теорема Андерсона—Дивинского—Сулинского [6].

Теорема 5.2. *Для любого параградуированного радикала γ и любого $A \in \mathcal{K}$ если I является однородным идеалом кольца A, то $\gamma(I) \lhd A$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству для случая колец (см., например, [13]).

6. Специальные радикалы

В. А. Андрунакиевич и Ю. М. Рябухин показали, что любой радикал кольца может быть определён с помощью подходящего класса модулей над этим кольцом [1]; это верно и для градуированных по группе колец (см. [7]).

Основная цель данного раздела — показать, что любой параградуированный радикал (в частности, любой специальный параградуированный радикал) параградуированного кольца можно определить с помощью некоторого класса параградуированных модулей над этим кольцом. Для доказательства используем методы, разработанные в [1, 7].

Для ассоциативного параградуированного кольца A со множеством степеней Δ будем обозначать через Σ_A некоторый класс параградуированных A-модулей.

Определение 6.1. Однородный идеал параградуированного кольца A, порождённый множеством

$$\bigcup_{\delta\in\Delta}\{x \in A_\delta \mid Mx = 0\},$$

называется *параградуированным аннулятором* $\operatorname{Ann}_A(M)$ параградуированного A-модуля M.

Далее параградуированный аннулятор параградуированного A-модуля будем называть просто аннулятором.

Определение 6.2. Множество

$$\operatorname{Ker}\Sigma_A = \bigcap\{\operatorname{Ann}_A(M) \mid M \in \Sigma_A\}$$

называется *ядром класса* Σ_A.

Если $\Sigma_A = \varnothing$, то положим $\operatorname{Ker}\Sigma_A = A$.

Определение 6.3. Класс Σ, содержащий классы Σ_A параградуированных модулей, называется *общим классом параградуированных модулей*, если выполнены следующие условия.

P1. Если $M \in \Sigma_{A/B}$ для некоторого однородного идеала B в A, то $M \in \Sigma_A$.

P2. Если $M \in \Sigma_A$ и $B \subseteq \operatorname{Ann}_A(M)$, то $M \in \Sigma_{A/B}$.

P3. $\operatorname{Ker}\Sigma_A = 0$ тогда и только тогда, когда $\Sigma_B \neq \varnothing$ для любого ненулевого однородного идеала B в A.

Определение 6.4. Σ-*параградуированным радикалом* $\gamma(\Sigma, A)$ параградуированного кольца A называется множество

$$\gamma(\Sigma, A) = \operatorname{Ker}\Sigma_A,$$

где $\Sigma = \bigcup \Sigma_A$ — общий класс параградуированных модулей.

Теорема 6.1. *Пусть Σ — общий класс параградуированных модулей. Тогда Σ-параградуированный радикал является радикалом в категории параградуированных колец. Обратно, если γ — радикал в категории параградуированных колец, то существует общий класс параградуированных модулей Σ, такой что γ совпадает с Σ-радикалом.*

Доказательство. Первая часть доказывается аналогично неградуированному случаю (см. [1]). Вторая часть также доказывается аналогично, но после того как мы установим существование *расширение Дорроха параградуированного кольца*.

Для параградуированного кольца A со множеством степеней Δ определим расширение Дорроха A^1 как расширение Дорроха A, рассматриваемого как кольцо, а именно $A^1 = A \times \mathbb{Z}$ с покомпонентным сложением и умножением

$$(a, n)(b, m) = (ab + ma + nb, nm),$$

параградуировка на котором определена следующим образом:

$$A^1_\delta = \{(a, 0) \mid a \in A_\delta\}, \quad A^1_1 = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Легко проверить, что A^1 — параградуированное кольцо со множеством степеней $\Delta \cup \{1\}$, причём 1 является единицей относительно минимального умножения. □

Теперь рассмотрим *специальные параградуированные радикалы*.

Пусть $\mathcal{M}$ — класс параградуированных колец. Однородный идеал I параградуированного кольца A называется $\mathcal{M}$-*идеалом*, если $A/I \in \mathcal{M}$.

Определение 6.5. Класс $\mathcal{M}$ параградуированных колец называется *специальным*, если он удовлетворяет следующим условиям.

M1. Если B — однородный идеал параградуированного кольца A и P — $\mathcal{M}$-идеал в A, который не содержит B, то $P \cap B$ — собственный $\mathcal{M}$-идеал в B.

M2. Если Q — собственный $\mathcal{M}$-идеал в B и B — однородный идеал в A, то существует единственный $\mathcal{M}$-идеал P в A, такой что $P \cap B = Q$.

Следующая лемма может быть доказана так же, как в случае градуированных колец (см. [7]).

Лемма 6.1.

A. *Пусть $\mathcal{M}$ — специальный класс параградуированных колец, Σ — общий класс параградуированных модулей, таких что специальный радикал $\gamma_{\mathcal{M}}$ совпадает с Σ-радикалом. Тогда однородный идеал P параградуированного кольца A является $\mathcal{M}$-идеалом в том и только том случае, если $P = \mathrm{Ann}_A(M)$ для некоторого параградуированного A-модуля $M \in \Sigma_A$.*

B. *Наибольший специальный класс параградуированных колец совпадает с классом всех параградуированных первичных колец.*

Следовательно, класс $\mathcal{M}$ параградуированных колец является специальным в том и только том случае, если он удовлетворяет следующим условиям.

1. Все кольца, принадлежащие классу $\mathcal{M}$, являются параградуированными первичными кольцами.
2. Если $A \in \mathcal{M}$ и I — ненулевой однородный идеал в A, то $I \in \mathcal{M}$.
3. Если B — однородный идеал параградуированного первичного кольца A и $B \in \mathcal{M}$, то $A \in \mathcal{M}$.

Класс специальных параградуированных модулей, который задаёт специальный радикал данного параградуированного кольца, определяется аналогично неградуированному случаю [1] (см. также [13]).

Пример 6.1. Параградуированный A-модуль M называется *параградуированным первичным*, если для каждого ненулевого однородного подмодуля N модуля M и каждого однородного идеала I в A из условия $NI = 0$ следует, что $I \subseteq \mathrm{Ann}_A(M)$.

В [16] параградуированный первичный радикал параградуированного кольца A определялся как пересечение всех однородных первичных идеалов кольца A. Непосредственная проверка показывает, что класс Σ всех параградуированных первичных A-модулей определяет параградуированный первичный радикал кольца A.

В [3] параградуированный радикал Джекобсона параградуированного кольца определялся как пересечение аннуляторов всех параградуированных неприводимых модулей над этим кольцо с тем же множеством степеней. Это понятие было обобщено в [16], а именно параградуированный радикал Джекобсона (большой радикал Джекобсона) параградуированного кольца A определялся как пересечение аннуляторов всех регулярных (не обязательно регулярных) параградуированных неприводимых A-модулей.

В [16] с использованием метода, представленного в [14] для градуированных колец, было доказано, что большой радикал Джекобсона параградуированного кольца является наибольшим однородным идеалом, содержащимся в обычном радикале Джекобсона этого кольца.

Аналогичный результат был доказан для первичного радикала [16] с помощью известного результата для градуированных колец [26].

Докажем следующую теорему.

Теорема 6.2. *Пусть Σ^p — общий класс специальных параградуированных модулей, содержащийся в классе параградуированных неприводимых модулей, и Σ — соответствующий класс непараградуированных модулей. Если $\gamma^p(A)$ — Σ^p-радикал параградуированного кольца A и $\gamma(A)$ — Σ-радикал A, рассматриваемого как обычное кольцо, то $\gamma^p(A)$ является наибольшим однородным идеалом кольца A, содержащимся в $\gamma(A)$.*

Доказательство. Поскольку каждый A-модуль M можно рассматривать как параградуированный A-модуль, то $\gamma^p(A)$ содержится в наибольшем однородном идеале, содержащемся в $\gamma(A)$. Пусть a — произвольный элемент из наибольшего однородного идеала A, который содержится в $\gamma(A)$, и пусть M — параградуированный A-модуль, принадлежащий Σ^p. Докажем, что $a \in \mathrm{Ann}_A(M)$. Предположим, что $a \notin \mathrm{Ann}_A(M)$. Тогда существует $x \neq 0$, такой что $xa \neq 0$. Так как Σ^p содержится в классе параградуированных неприводимых модулей, то M неприводим. Следовательно, xa — строгий образующий в M, откуда следует, что $M = xaA$. Пусть $b \in A$ такой, что $x = xab$. Но $a \in \gamma(A)$, откуда следует, что $ab \in \gamma(A)$. Это означает, что $\{y - aby \mid y \in A\}$ не содержится ни в каком γ-идеале кольца A. Следовательно, наибольший однородный идеал, содержащийся в $\{y - aby \mid y \in A\}$, не содержится в $\mathrm{Ann}_A(M)$. Таким образом, существуют $y \in A$ и $k \in \mathrm{Ann}_A(M)$, такие что $y - aby + k = -ab$. Тогда

$$0 = x - xab - (x - xab)y = x - x(ab + y - aby) = x + xk,$$

откуда следует, что $x = 0$, получили противоречие. Следовательно, a содержится в $\gamma^p(A)$. $\square$

7. Параградуированный нормальный радикал

В [12] для градуированных по группе колец были рассмотрены *нормальные радикалы* как обобщение результатов из [27]. Чтобы определить параградуированный нормальный радикал, нам понадобятся некоторые предварительные понятия.

Определение 7.1. Параградуированный радикал γ параградуированного кольца A называется *параградуированный сильным слева* (*справа*), если для любого левого (правого) идеала I в A из того, что $I \in \gamma$, следует, что $I \subseteq \gamma(A)$.

Пусть A и B — параградуированные кольца со множеством степеней Δ и Δ' соответственно и V и W — параградуированный (A,B)-бимодуль и параградуированный (B,A)-бимодуль со множеством степеней D и D', соответственно.

Определение 7.2. Контекст Мориты (A,V,W,B) называется *параградуированным контекстом Мориты*, если

$$\text{для любых } d\in D \text{ и } d'\in D' \text{ найдётся } \delta\in\Delta, \text{ для которого } V_dW_{d'}\subseteq A_\delta,$$

и

$$\text{для любых } d\in D \text{ и } d'\in D' \text{ найдётся } \delta'\in\Delta', \text{ для которого } W_{d'}V_d\subseteq B_{\delta'}.$$

Теорема 7.1. *Пусть (A,V,W,B) — контекст Мориты. Тогда множество матриц*

$$R=\begin{pmatrix} A & V\\ W & B\end{pmatrix}$$

является параградуированным кольцом с матричными сложением и умножением. В частности, если данный контекст Мориты является параградуированным, то R — параградуированное кольцо.

Доказательство. Используя доказательство теоремы 2.1 из [16], сделаем кольцо R параградуированным подобным образом. Возьмём

$$R_1=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix} A & V\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad R_3=\begin{pmatrix} A & 0\\ W & 0\end{pmatrix},\quad R_4=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

и т. д. □

Определение 7.3. Радикал γ параградуированного кольца называется *параградуированным нормальным*, если

$$V\gamma(B)W\subseteq\gamma(A)$$

для каждого параградуированного контекста Мориты (A,V,W,B).

Используя параградуированное расширение Дорроха из доказательства теоремы 6.1, докажем следующий результат тем же образом, что и в случае колец [27].

Предложение 7.1. *Если γ — параградуированный нормальный радикал, то γ является сильным слева и справа.*

Определим параградуированный наследственный в главном слева (справа) радикал.

Определение 7.4. Параградуированный радикал γ является *параградуированным наследственным в главном слева* (*справа*), если из того, что $A\in\gamma$, следует, что $Aa\in\gamma$ ($aA\in\gamma$) для каждого однородного элемента $a\in A$.

Предложение 7.2. *Каждый параградуированный нормальный радикал γ является параградуированным наследственным в главном слева и справа.*

Доказательство. Пусть $A \in \gamma$ и $a \in A$ — однородный элемент. Как и в случае колец, рассмотрим параградуированный контекст Мориты (Aa, A^1, Aa, A) и покажем, что $A^2a \subseteq \gamma(Aa)$.

Действительно, отображение $f\colon A \to Aa/\gamma(Aa)$, определённое как $f(x) = xa + \gamma(Aa)$ для всех $x \in A$, является квазиоднородным гомоморфизмом, и дальнейшее доказательство аналогично доказательству, приведённому для случая колец. $\square$

Наконец, с учётом предыдущих результатов соответствующей модификацией доказательства, приведённого в [27] для колец, получим следующую теорему.

Теорема 7.2. *Параградуированный радикал γ является параградуированным нормальным в том и только том случае, если γ является параградуированным сильным слева и параградуированным наследственным в главном слева (или параградуированным сильным справа и параградуированный наследственным в главном справа).*

Литература

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Специальные модули и специальные радикалы // ДАН СССР. — 1962. — Т. 147, № 6. — С. 1274—1277.

[2] Вукович М., Илич-Георгиевич Э. Параградуированные кольца и их идеалы // Фундамент. прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 83—93.

[3] Илич-Георгиевич Э., Вукович М. Теорема Веддербёрна—Артина для параградуированных колец // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 6. — С. 125—139.

[4] Курош А. Г. Радикалы колец и алгебр // Матем. сб. — 1953. — Т. 33, № 1. — С. 3—26.

[5] Amitsur S. A. A general theory of radicals. II // Amer. J. Math. — 1954. — Vol. 76. Radicals in Rings and Bicategories. — P. 100—125.

[6] Anderson R., Divinsky N., Suliński A. Hereditary radicals in associative and alternative rings // Can. J. Math. — 1965. — Vol. 7. — P. 594—603.

[7] Balaba I. N. Special radicals of graded rings // Bul. Acad. Şti. Rep. Mold. Mat. — 2004. — Vol. 44, no. 1. — P. 26—33.

[8] Bourbaki N. Algèbre. — Paris: Herman, 1962.

[9] Brown B., McCoy N. H. Radicals and subdirect sum // Amer. J. Math. Soc. — 1947. — Vol. 67. — P. 46—48.

[10] Chadeyras M. Essai d'une théorie noetherienne pour les anneaux commutatifs, dont la graduation est aussi générale que possible // Bull. Soc. Math. Fr. Suppl. Mém. — 1970. — No. 22. — P. 3—143.

[11] Cohen M., Montgomery S. Group-graded rings, smash products, and group actions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 282, no. 1. — P. 237—258.

[12] Fang H., Stewart P. Radical theory for graded rings // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. — 1992. — Vol. 52. — P. 143—153.

[13] Gardner B. J., Wiegandt R. Radical Theory of Rings. — Marcel Dekker, 2004.

[14] Halberstadt E. Théorie artinienne homogène des anneaux gradués à grades non commutatifs réguliers. — PhD Thesis. — Univ. Piere and Marie Curie. — Paris, 1971.

[15] Ilić-Georgijević E., Vuković M. Sheaves of paragraded rings // Sarajevo J. Math. — 2011. — Vol. 7 (20). — P. 153—161.

[16] Ilić-Georgijević E., Vuković M. A note on radicals of paragraded rings // Sarajevo J. Math. — 2016. — Vol. 12 (25), no. 2. — P. 307—316.

[17] Ilić-Georgijević E., Vuković M. A note on general radicals of paragraded rings // Sarajevo J. Math. — 2016. — Vol. 12 (25), no. 2. — P. 317—324.

[18] Jacobson N. The radical and semi-simplicity for arbitrary rings // Amer. J. Math. — 1945. — Vol. 78. — P. 300—320.

[19] Jespers E., Krempa J., Puczy-lowski E. R. On radicals of graded rings // Commun. Algebra. — 1980. — Vol. 10 (17). — P. 1849—1854.

[20] Krasner M. Une généralisation de la notion de corps-corpoíde. Un corpoíde remarquable de la théorie des corps valués // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1944. — Vol. 219. — P. 345—347.

[21] Krasner M. Anneaux gradués généraux // Colloq. d'Algèbre. — Rennes, 1980. — P. 209—308.

[22] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). I // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1986. — Vol. 62, no. 9. — P. 350—352.

[23] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). II // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1986. — Vol. 62, no. 10. — P. 389—391.

[24] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). III // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1987. — Vol. 63, no. 1. — P. 10—12.

[25] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). — Kingston: Queen's University, 1987. — (Queen's Papers Pure Appl. Math.; No. 77).

[26] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Methods of Graded Rings. — Springer, 2004. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1836).

[27] Sands A. D. On normal radicals // J. London Math. Soc. — 1975. — Vol. 11. — P. 361—365.

[28] Vuković M. Structures graduées et paragraduées: Prepublication de l'Institut Fourier. Université de Grenoble I. No. 536. — 2001.

[29] Vuković M. From Krasner's corpoid and Bourbaki's graduations to Krasner's graduations and Krasner—Vuković's paragraduations // Sarajevo J. Math. — 2018. — Vol. 14 (27), No. 2. — P. 175—190.