Вещественные алгебры с делением, содержащие инволюцию в группе автоморфизмов

Д. ГОКАЛ
Филиал Университета Торонто в Миссиссоге, Канада
e-mail: dev.gokal@mail.utoronto.ca

Е. НАПЕДЕНИНА
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
e-mail: katernap@gmail.com

М. ТВАЛАВАДЗЕ
Филиал Университета Торонто в Миссиссоге, Канада
e-mail: marina.tvalavadze@utoronto.ca

УДК 512.554.2

Ключевые слова: вещественные алгебры с делением, группы автоморфизмов, инволюции.

Аннотация

В работе рассматриваются унитальные вещественные алгебры с делением размерности 4, группы автоморфизмов которых содержат нетривиальную инволюцию. В случае когда такая алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathbb{C}$-бимодулем, получен явный вид таблицы умножения $\mathcal{A}$ и выведены условия наличия деления. Также предложен новый способ построения семейств вещественных алгебр с делением размерности 4 с тривиальной алгеброй производных, которые в общем случае не обладают степенной ассоциативностью порядка 3 и, следовательно, не являются квадратичными. При некоторых ограничениях на параметры алгебр из построенного класса описаны группы автоморфизмов этих алгебр.

Abstract

D. Gokal, E. Napedenina, M. Tvalavadze, Real division algebras with a nontrivial reflection, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2022), no. 2, pp. 23—35.

In this note, we consider four-dimensional unital real division algebras $\mathcal{A}$ with $\operatorname{Aut}(\mathcal{A})$ containing a nontrivial reflection φ (i.e., an automorphism of order two). If such an algebra $\mathcal{A}$ is a $\mathbb{C}$-bimodule, then we describe its multiplication table and state division conditions in terms of certain polynomials. Finally, we suggest a new method (different from the duplication process) that can be used to construct families of four-dimensional division algebras $\mathcal{A}$ with $\mathfrak{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$, which are generally not third power-associative or quadratic. Under some restrictions on algebra coefficients, we have listed all possible types of their automorphism groups.

1. Введение

Один из наиболее значимых результатов в теории вещественных алгебр с делением устанавливает, что возможными размерностями таких алгебр являются только 1, 2, 4, 8 [6,14,15,17]. Для различных значений d размерности из этого набора классификация таких алгебр выполнена в следующих случаях:

— $d = 1$ [20, утверждение 1.2],

— $d = 2$ [2,13,16],

— $d \in \{4, 8\}$ (частично).

А именно, классификация для случая размерности 4 проведена для

— алгебр с нормированием [8,18,20],

— алгебр с коммутирующими степенями [11,12],

— алгебр $\mathcal{A}$, для которых $\mathfrak{Der}(\mathcal{A}) = \mathrm{su}(2)$ [4,5].

Задача классификации для размерности 8 представляется более сложной и в настоящее время решена лишь для

— алгебр с нормированием [8,19],

— эластичных алгебр (алгебр с соотношением $a \cdot (b \cdot a) = (a \cdot b) \cdot a$) [3,9,10].

В [7, (15.7), с. 179] Р. Брук построил шестипараметрическое семейство вещественных алгебр с делением размерности 4, в которых умножение задаётся таблицей

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	γk	$-\beta' j$
j	j	$-\gamma' k$	-1	αi
k	k	βj	$-\alpha' i$	-1

для отличных от нуля вещественных чисел α, β, γ, α', β', γ'. Такие алгебры обозначают $\mathcal{H} = H_{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')}$ и называют *алгебрами Брука*.

В [1] получен следующий результат для алгебр, группы автоморфизмов которых содержат две различные коммутирующие инволюции.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{A}$ — *вещественная алгебра с делением размерности* 4 *с единицей. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *содержит две различные коммутирующие инволюции*;

2) $\mathcal{A}$ *изоморфна алгебре Брука* $\mathcal{H} = H_{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')}$ *для некоторых не равных нулю* α, β, γ, α', β', γ';

3) $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *содержит группу Клейна* $K_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

До сих пор не установлено, всякая ли вещественная алгебра с делением обладает нетривиальной инволюцией. Другими словами, не известен пример, опровергающий гипотезу о существовании такого автоморфизма в группе автоморфизмов такой алгебры.

2. Алгебры с нетривиальной инволюцией

Определение 1. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над $\mathbb{R}$ и $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ — некоторый её автоморфизм. Если f нетождественный и выполнено условие $f^2 = \mathcal{I}d_{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{I}d_{\mathcal{A}}$ — тождественное отображение, то f называют *инволюцией* на $\mathcal{A}$.

Для линейного отображения $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ обозначим через $E_\lambda(\varphi)$ подпространство собственных векторов $\mathcal{A}$, принадлежащих (соответствующих) собственному значению $\lambda \in \mathbb{R}$.

Приведём следующий полезный результат.

Лемма 1 [12, лемма 1]. *Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$. Тогда для подалгебр $E_1(\varphi)$, $E_1(\varphi) + E_{-1}(\varphi)$, $E_1(\varphi^2)$ алгебры $\mathcal{A}$ выполняются включения*

$$E_1(\varphi) \subseteq E_1(\varphi) + E_{-1}(\varphi) \subseteq E_1(\varphi^2).$$

Кроме того, если $\varphi \neq \mathcal{I}d_{\mathcal{A}}$, то следующие утверждения эквивалентны:

1) φ — *инволюция алгебры* $\mathcal{A}$;
2) φ — *диагонализуемое линейное отображение*;
3) $\mathcal{A} = E_1(\varphi) \oplus E_{-1}(\varphi)$.

Пусть φ — инволюция алгебры $\mathcal{A}$. Обозначим $\mathcal{B} = E_1(\varphi)$ и $\mathcal{C} = E_{-1}(\varphi)$. Из приведённой леммы следует, что $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$. Кроме того, несложно видеть, что

$$\mathcal{BB} = \mathcal{B}, \quad \mathcal{BC} = \mathcal{CB} = \mathcal{C}, \quad \mathcal{CC} = \mathcal{B}. \tag{1}$$

Далее полагаем, что $\mathcal{A}$ — вещественная алгебра с делением размерности 4 с единицей 1. Ясно, что $1 \in \mathcal{B}$, так как $\varphi(1) = 1$. Следовательно, $\mathcal{B}$ является унитальной подалгеброй с делением алгебры $\mathcal{A}$. Тогда размерность $\dim(\mathcal{B})$ может только 1 или 2. Если $\dim(\mathcal{B}) = 1$, то $\dim(\mathcal{C}) = 3$. В частности, можно выбрать два линейно независимых элемента $\mathcal{C}$, скажем w_1 и w_2. Так как $\mathcal{CC} = \mathcal{B}$, то w_1^2 и w_1w_2 лежат в $\mathcal{B}$. По предположению они линейно независимы, и значит, существуют $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такие что $\alpha w_1^2 + \beta w_1 w_2 = 0$. Сокращая на w_1, получаем $w_1(\alpha w_1 + \beta w_2) = 0$. Поскольку $\mathcal{A}$ — алгебра с делением, а $w_1 \neq 0$, имеем $\alpha w_1 + \beta w_2 = 0$, что противоречит линейной независимости. Следовательно, $\dim(\mathcal{B}) = \dim(\mathcal{C}) = 2$.

Хорошо известен факт, что унитальная алгебра с делением размерности 2 изоморфна алгебре комплексных чисел $\mathbb{C}$. Следовательно, $\mathcal{B} \cong \mathbb{C}$.

Ниже, если не будет дополнительных оговорок, мы будем рассматривать алгебры с делением $\mathcal{A}$ размерности 4 с инволюцией φ, являющиеся бимодулями над подпространством всех инвариантных относительно φ элементов $\mathcal{A}$. Как показано выше, это подпространство — подалгебра $\mathcal{A}$, изоморфная $\mathbb{C}$.

Выберем в $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ подходящий базис $\{1, i, w, v\}$, где $\mathcal{B} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{1, i\}$, $\mathcal{C} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{w, v\}$, $i^2 = -1$ и $v = wi$.

Лемма 2. *Если $\{1, i, w, v\}$ — выбранный выше базис алгебры $\mathcal{A}$, то либо $iw = wi$, либо $iw = -wi$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{BC} = \mathcal{C}$, то $iw = \alpha w + \beta wi$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. По нашему предположению $\mathcal{A}$ является $\mathbb{C}$-бимодулем, и следовательно,

$$i(wi) = (iw)i = (\alpha w + \beta wi)i = \alpha wi + \beta(wi)i = \alpha wi + \beta wi^2 = \alpha wi - \beta w.$$

Таким образом, $i(wi) = -\beta w + \alpha wi$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} -w &= i^2 w = i(iw) = i(\alpha w + \beta wi) = \alpha iw + \beta i(wi) = \alpha iw + \beta(-\beta w + \alpha wi) = \\ &= \alpha(\alpha w + \beta wi) - \beta^2 w + \alpha\beta wi = \alpha^2 w + \alpha\beta wi - \beta^2 w + \alpha\beta wi = \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)w + 2\alpha\beta wi. \end{aligned}$$

Тогда $\alpha^2 - \beta^2 = -1$ и $\alpha\beta = 0$. Следовательно, $\alpha = 0$ и $\beta = \pm 1$, откуда следует $iw = \pm wi$, что и требовалось. □

Учитывая соотношение (1) и доказанную лемму, получаем следующий результат.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — вещественная алгебра с делением размерности 4 и φ — нетривиальная инволюция $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$, где $\mathcal{B} \cong \mathbb{C}$. Если дополнительно $\mathcal{A}$ является бимодулем над $\mathcal{B}$ (т. е. $\mathbb{C}$-бимодулем), то $\mathcal{A}$ имеет базис $\{1, i, w, v\}$, такой что $iw = \pm wi$.*

Если i и w не коммутируют, то таблица умножения алгебры $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & i & w & v \\ \hline 1 & 1 & i & w & v \\ i & i & -1 & -v & w \\ w & w & v & \alpha_1 1 + \alpha_2 i & \beta_1 1 + \beta_2 i \\ v & v & -w & \gamma_1 1 + \gamma_2 i & \delta_1 1 + \delta_2 i \end{array}, \tag{$\mathrm{T_N}$}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$.

Если i и w коммутируют, то таблица умножения алгебры $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & i & w & v \\ \hline 1 & 1 & i & w & v \\ i & i & -1 & v & -w \\ w & w & v & \alpha_1 1 + \alpha_2 i & \beta_1 1 + \beta_2 i \\ v & v & -w & \gamma_1 1 + \gamma_2 i & \delta_1 1 + \delta_2 i \end{array}, \tag{$\mathrm{T_C}$}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$.

Наоборот, если таблица умножения $\mathcal{A}$ имеет вид $\mathrm{T_N}$ или $\mathrm{T_C}$, то $\mathcal{A}$ имеет нетривиальную инволюцию.

Возникает естественный вопрос, являются ли алгебры с таблицами умножения $\mathrm{T_N}$ и $\mathrm{T_C}$ алгебрами с делением. На этот вопрос отвечают две следующие леммы.

Лемма 3. *Алгебра $\mathcal{A}$ с таблицей умножения $\mathrm{T_N}$ является алгеброй с делением, если*

$$p(x,y) = q^2(x,y) - 4s(x,y) < 0 \quad \textit{для всех} \quad (x,y) \neq (0,0),$$

где $q(x,y) = Ax^2 + Bxy - Cy^2$, $s(x,y) = Dx^4 + Exy(x^2+y^2) + Fy^4$ *и*

$$\begin{gathered} A=\gamma_2-\beta_1, \quad B=\delta_2+\gamma_1-\alpha_1-\beta_1, \quad C=\delta_1+\alpha_2, \\ D=\beta_2\gamma_1-\beta_1\gamma_2, \quad E=\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2+\delta_1\beta_2-\beta_1\delta_2, \quad F=\delta_1\alpha_2-\alpha_1\delta_2. \end{gathered} \tag{2}$$

Доказательство. Матрица правого умножения на произвольный элемент

$$x = x_0 1 + x_1 i + x_2 w + x_3 v$$

в базисе $\{1, i, w, v\}$ имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & x_2\alpha_1 + x_3\beta_1 & x_2\gamma_1 + x_3\delta_1 \\ x_1 & x_0 & x_2\alpha_2 + x_3\beta_2 & x_2\gamma_2 + x_3\delta_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственное вычисление определителя матрицы M приводит к результату

$$\det(M) = (x_0^2 + x_1^2)^2 + (x_0^2 + x_1^2)q(x_2, x_3) + s(x_2, x_3),$$

где $q(x_2, x_3) = Ax_2^2 + Bx_2x_3 - Cx_3^2$, $s(x_2, x_3) = Dx_2^4 + Exy(x_2^2 + x_3^2) + Fx_3^4$, а A, B, C, D, E, F определяются равенствами (2). Тогда $\mathcal{A}$ — алгебра с делением тогда и только тогда, когда $\det M$ не равен нулю для всех наборов $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$, что равносильно неравенству для дискриминанта $q(x_2, x_3)^2 - 4s(x_2, x_3) < 0$, что и требовалось. □

Доказательство следующей леммы проводится аналогично.

Лемма 4. *Алгебра $\mathcal{A}$ с таблицей умножения $\mathrm{T_C}$ является алгеброй с делением, если*

$$p(x,y) = q^2(x,y) - 4s(x,y) + t^2(x,y) < 0 \quad \text{для всех} \quad (x,y) \neq (0,0),$$

где $q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, $s(x,y) = Dx^4 - Ex^2y^2 + Fy^4 + Gxy(x^2 + y^2)$, $t(x,y) = Mx^2 + Nxy - Ky^2$ и

$$\begin{gathered} A=\gamma_2+\alpha_1, \quad B=\alpha_2-\delta_2-\gamma_1-\beta_1, \quad C=\beta_2-\delta_1, \quad D=\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1, \\ E=\delta_1+\gamma_1, \quad F=\beta_1\delta_2-\beta_2\delta_1, \quad G=\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2+\alpha_1\delta_2-\delta_1\alpha_2, \\ M=\gamma_1-\alpha_2, \quad N=\delta_1-\alpha_1-\beta_2-\gamma_2, \quad K=\beta_1+\delta_2. \end{gathered}$$

3. Новые примеры алгебр размерности 4

Пусть $\mathcal{A} = (\mathbb{C}, \diamond)$ — алгебра размерности 2 с умножением, определяемым соотношением

$$x \diamond y = \varphi(x) \cdot \psi(y),$$

где $\cdot$ обозначает обычное комплексное умножение, а линейные функции $\varphi, \psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ задаются соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Зададим на векторном пространстве $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ произведение $*$ следующим образом:

$$(x,y)*(x',y') = (xx' + \bar{y'}y,\ y\bar{x'} + y'\diamond x).$$

Тогда $(\mathbb{C}\times\mathbb{C},*)$ — алгеброй, мы обозначим её через $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, её размерность равна 4. Заметим, что $\mathcal{A}$, вообще говоря, не является подалгеброй $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Если в качестве базисных векторов алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ выбрать

$$\mathbf{1}=(1,0),\quad \mathbf{i}=(i,0),\quad \mathbf{j}=(0,1),\quad \mathbf{k}=(0,i),$$

то таблица умножения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ примет вид

	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{1}$	$(1,0)$	$(i,0)$	$\big(0,(ae-cg)+i(ag+ce)\big)$	$\big(0,(be-dg)+i(bg+de)\big)$
$\mathbf{i}$	$(i,0)$	$(-1,0)$	$\big(0,(af-ch)+i(ah+cf)\big)$	$\big(0,(bf-dh)+i(bh+df)\big)$
$\mathbf{j}$	$(0,1)$	$(0,-i)$	$(1,0)$	$(-i,0)$
$\mathbf{k}$	$(0,i)$	$(0,1)$	$(i,0)$	$(1,0)$

Введя обозначения $a'=ae-cg$, $b'=ag+ce$, $c'=be-dg$, $d'=bg-de$, $e'=af-ch$, $f'=ah+cf$, $g'=bf-dh$, $h'=bh+df$, перепишем эту таблицу в более компактном виде:

$*$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$a'\mathbf{j}+b'\mathbf{k}$	$c'\mathbf{j}+d'\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$	$e'\mathbf{j}+f'\mathbf{k}$	$g'\mathbf{j}+h'\mathbf{k}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{1}$

(3)

Замечание 1.

1. Как следует из приведённой таблицы умножения, элемент $\mathbf{1}$ не является, вообще говоря, единицей $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, хотя является правой единицей. Более того, такая конструкция не является результатом процесса «дупликации» по [21], т. е. алгебра $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ не является дублированной алгеброй $\mathcal{A}$.
2. Построенная алгебра $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — правый $\mathbb{C}$-модуль, который, в свою очередь, является прямой суммой двух изоморфных правых $\mathbb{C}$-подмодулей, т. е. $\mathcal{D}(\mathcal{A})=\mathbb{C}\oplus\mathbf{j}\mathbb{C}$, где $\mathbb{C}=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1},\mathbf{i}\}$ и $\mathbf{j}\mathbb{C}=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{j},\mathbf{k}\}$.

Будем обозначать через L_x оператор левого умножения на произвольный элемент $x=\alpha_1\mathbf{1}+\alpha_2\mathbf{i}+\alpha_3\mathbf{j}+\alpha_4\mathbf{k}$ из $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда оператор L_x в базисе $\{\mathbf{1},\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 a' + \alpha_2 e' & \alpha_1 c' + \alpha_2 g' \\ \alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_1 b' + \alpha_2 f' & \alpha_1 d' + \alpha_2 h' \end{pmatrix}.$$

Непосредственное вычисление определителя оператора L_x приводит к результату

$$\det(L_x) = \alpha_1^4 A + \alpha_2^4 B + (\alpha_3^2 + \alpha_4^2)^2 + \alpha_1\alpha_2(\alpha_2^2 + \alpha_1^2)C + \alpha_1^2\alpha_2^2 D + \\ + (\alpha_3^2 + \alpha_4^2)(E\alpha_1^2 + F\alpha_2^2) + \alpha_1\alpha_2(\alpha_3^2 + \alpha_4^2)G,$$

где

$$A = a'd' - b'c', \quad B = e'h' - f'g', \quad C = a'h' - b'g' - c'f' + d'e',$$
$$D = a'd' - b'c' + e'h' - f'g', \quad E = -a' - d',$$
$$F = -f' + g', \quad G = -e' - b' - h' + c'.$$

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — определённая выше алгебра. Тогда $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ является алгеброй с делением тогда и только тогда, когда для всех $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*

$$q_1^2(\alpha_1, \alpha_2) - 4q_2(\alpha_1, \alpha_2) < 0,$$

где

$$q_1(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^2 E + \alpha_2^2 F + \alpha_1\alpha_2 G,$$
$$q_2(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^4 A + \alpha_2^4 B + \alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)C + \alpha_1^2\alpha_2^2 D$$

и коэффициенты A, B, C, D, E, F, G определены выше.

Доказательство. Пусть $X = \alpha_3^2 + \alpha_4^2$. Тогда выражения для $\det(L_x)$ может быть переписано следующим образом:

$$\det(L_x) = X^2 + q_1(\alpha_1, \alpha_2)X + q_2(\alpha_1, \alpha_2),$$

где многочлены $q_1(\alpha_1, \alpha_2)$ и $q_2(\alpha_1, \alpha_2)$ определены выше. Тогда $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — алгебра с делением тогда и только тогда, когда $\det(L_x) \neq 0$ для всех $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$. Неравенство $\det(L_x) \neq 0$ эквивалентно тому, что

$$D = q_1^2(\alpha_1, \alpha_2) - 4q_2(\alpha_1, \alpha_2) < 0,$$

что и требовалось. □

Обозначение. Пусть $\Delta = e'h' - (g'+1)(f'-1)$ и $\Delta' = (a'+1)(d'+1) - c'b'$.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — алгебра с делением, умножение в которой задано таблицей* (3)*. Пусть при этом $\Delta \neq 0$. Если B — подалгебра алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, изоморфная $\mathbb{C}$, то B совпадает с $A_0 = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}\}$.*

Доказательство. Пусть существует подалгебра B алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, изоморфная $\mathbb{C}$ и отличная от A_0. Тогда $A_0 \cap B$ — подалгебра алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ размерности меньше 2. Рассмотрим два случая: $\dim(A_0 \cap B) = 1$ и $\dim(A_0 \cap B) = 0$.

Случай 1. Пусть $\dim(A_0 \cap B) = 1$. Тогда, согласно имеющейся классификации, $A_0 \cap B$ изоморфна $\mathbb{R}$. Тогда $A_0 \cap B = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{u\}$, где u — идемпотент $A_0 \cap B \cong \mathbb{R}$, и значит, $u = \mathbf{1}$. Следовательно, можно записать $B = \mathbb{R}\mathbf{1} \oplus W$, где $W = B \cap \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. По условию $B \cong \mathbb{C}$, следовательно, можно выбрать

$w \in W$, такое что $w^2 = -\mathbf{1}$. Непосредственные вычисления показывают, что если $w = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, где $x, y, z \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию $w^2 = -\mathbf{1}$, то

$$\begin{aligned}
&-x^2 + y^2 + z^2 = -1,\\
&x\big(ye' + z(1+g')\big) = 0,\\
&x(y(f'-1) + zh') = 0.
\end{aligned}$$

Если $x = 0$, то первое уравнение приведённой системы несовместно. Следовательно, $x \neq 0$. Поскольку согласно предположению $\Delta \neq 0$, оставшиеся два уравнения имеют единственное решение $y = z = 0$. Отсюда следует, что $w = x\mathbf{i}$, где $x = \pm 1$. В обоих случаях B совпадает с A_0, что противоречит предположению.

Случай 2. Пусть $\dim(A_0 \cap B) = 0$. Следовательно, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = A_0 \oplus B$. Рассмотрим два подслучая.

1. Предположим, что B не является правым $\mathbb{C}$-подмодулем (напомним, что мы отождествляем A_0 с $\mathbb{C}$). Тогда BA_0 не является подмножеством B. Принимая во внимание то, что $\mathbf{1}$ является правой единицей $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $A_0 = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}\}$, получаем, что $B\mathbf{i}$ не является подмножеством B. Следовательно, $C = B + B\mathbf{i}$ — правый $\mathbb{C}$-подмодуль размерности больше 2. Тогда $\dim(C \cap A_0) \geqslant 1$. Тогда существует ненулевое $z \in C \cap A_0$. В частности, $z = \alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{i} \in A_0$. Значит, $z\mathbf{i} \in A_0$ и $\{z, z\mathbf{i}\}$ линейно независимы. С другой стороны, $z\mathbf{i}$ является элементом C, так как C инвариантно относительно умножения на $\mathbf{i}$. Таким образом, C и A_0 одновременно содержат z и $z\mathbf{i}$, следовательно, $\dim(C \cap A_0) \geqslant 2$. Отсюда следует, что $A_0 \subseteq C \cap A_0$. В частности, $A_0 \subseteq C$. Тогда $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = A_0 \oplus B \subseteq C$, и следовательно, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = C$. Пусть $\{e, u\}$ — базис B, где e — единица B (напомним, что $B \cong \mathbb{C}$). Так как $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = B \oplus B\mathbf{i}$, то $\mathbf{1} = a + b\mathbf{i}$, где $a, b \in B$. Следовательно,

$$\begin{gathered}
e \cdot \mathbf{1} = e, \quad e(a + b\mathbf{i}) = e, \quad ea + e(b\mathbf{i}) = e,\\
a + e(b\mathbf{i}) = e, \quad a = e - e(b\mathbf{i}), \quad a = ee - e(b\mathbf{i}),\\
a = e(e - b\mathbf{i}), \quad ea = e(e - b\mathbf{i}), \quad a = e - b\mathbf{i},
\end{gathered}$$

так как $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — алгебра с делением. Поскольку $\mathbf{1} = a + b\mathbf{i}$, то $\mathbf{1} = e - b\mathbf{i} + b\mathbf{i}$, $\mathbf{1} = e$. Но это противоречит тому, что $\dim(B \cap A_0) = 0$.

2. Предположим, что B является $\mathbb{C}$-подмодулем. В частности, это означает, что $B\mathbf{i} = B$. Рассмотрим подпространство $S = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Из соображений размерности $\dim(S \cap B) \geqslant 1$. Следовательно, можно найти $x = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{j} + x_2\mathbf{k}$ в пересечении S и B. Так как B инвариантно относительно правого умножения на $\mathbf{i}$, то $x\mathbf{i}$ также лежит в B. При этом $x\mathbf{i} = x_0\mathbf{i} - x_1\mathbf{k} + x_2\mathbf{j}$. Так как B — коммутативная алгебра, то $x(x\mathbf{i}) = (x\mathbf{i})x$. Непосредственные вычисления показывают, что последнее возможно тогда и только тогда, когда $x = 0$, что приводит к противоречию. □

4. Описание автоморфизмов алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$

Лемма 7. *Пусть* Δ *и* Δ' *отличны от* 0. *Если* $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\backslash\{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\}$ *удовлетворяет соотношению* $x^2 = \mathbf{1}$, *то* $x \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Доказательство. Элемент x запишем в виде $x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}\}$ и $x_1 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Тогда $x^2 = (x_0^2 + x_1^2) + (x_0x_1 + x_1x_0)$. Из таблицы (3) получаем, что $x_0^2 + x_1^2 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}\}$ и $x_0x_1 + x_1x_0 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Таким образом, если $x^2 = \mathbf{1}$, то

$$x_0^2 + x_1^2 = \mathbf{1}, \tag{4}$$

$$x_0x_1 = -x_1x_0. \tag{5}$$

Если $x_0 = \alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{i}$ и $x_1 = \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, то (4) принимает вид

$$(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)\mathbf{1} + 2\alpha\beta\mathbf{i} = \mathbf{1},$$

и следовательно, $\alpha\beta = 0$.

Вначале рассмотрим случай $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Если $\alpha = 0$ и $\beta \neq 0$, то $x_0 = \beta\mathbf{i}$. Из равенства (5) следует, что $\mathbf{i}x_1 = -x_1\mathbf{i}$. Тогда имеем систему из двух уравнений:

$$\gamma e' + \delta(g' + 1) = 0,$$
$$\gamma(f' - 1) + \delta h' = 0.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то $\gamma = \delta = 0$ и $x = \beta\mathbf{i}$. Но тогда $x^2 = -\beta^2 \neq \mathbf{1}$, что противоречит условию.

Если $\alpha \neq 0$ и $\beta = 0$, то $x = \alpha\mathbf{1}$. Из равенства (5) следует, что

$$\mathbf{1} \cdot x_1 = -x_1 \cdot \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} \cdot x_1 = -x_1.$$

Это приводит к системе

$$\gamma(a' + 1) + \delta c' = 0,$$
$$\gamma b' + \delta(d' + 1) = 0.$$

Поскольку $\Delta' \neq 0$, то $\gamma = \delta = 0$ и $x = \alpha\mathbf{1}$. Так как $x^2 = \alpha^2\mathbf{1} = \mathbf{1}$, то $\alpha = \pm 1$, откуда получаем, что $x = \pm\mathbf{1}$, что также противоречит условию.

Таким образом, $\alpha = \beta = 0$ и $x = x_1 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, что и требовалось. □

Согласно лемме 6 если $\Delta \neq 0$ и $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — алгебра с делением, то $A_0 = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}\}$ является единственной подалгеброй алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, изоморфной $\mathbb{C}$. Значит, для любого автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}\big(\mathcal{D}(\mathcal{A})\big)$ имеем $\varphi(A_0) = A_0$. Так как $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ содержит только тривиальный автоморфизм $\mathcal{I}d$ и комплексное сопряжение σ, то $\varphi|_{A_0} = \mathcal{I}d_{A_0}$ либо $\varphi|_{A_0} = \sigma$.

Любой элемент $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ может быть представлен в виде $x = a + \mathbf{j}b$ для некоторых $a, b \in A_0$. Тогда $\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi(\mathbf{j})\varphi(b)$. Обозначая $\varphi(\mathbf{j})$ через w_0, имеем

$$\varphi(x) = \varphi(a) + w_0\varphi(b).$$

Для описания автоморфизмов алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ необходимо выяснить, какие значения может принимать w_0. Согласно таблице (3) $\mathbf{j}^2 = \mathbf{1}$, поэтому

$$\mathbf{1} = \varphi(\mathbf{j}^2) = \varphi(\mathbf{j})^2 = w_0^2, \quad w_0^2 = 1.$$

Из соображений размерности вытекает, что $w_0 \neq \pm\mathbf{1}$. Из леммы 7 следует, что $w_0 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, значит, $w_0 = \gamma\mathbf{k} + \delta\mathbf{j}$, где $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Тогда из равенства $w_0^2 = 1$ следует, что $\gamma^2 + \delta^2 = 1$. Из таблицы (3) получаем, что

$$\varphi(\mathbf{k}) = \varphi(-\mathbf{j}\mathbf{i}) = -\varphi(\mathbf{j})\varphi(\mathbf{i}) = -w_0\varphi(\mathbf{i}).$$

Если $\varphi|_{A_0} = \mathcal{I}d$, то $\varphi(\mathbf{k}) = -w_0\mathbf{i}$. Если $\varphi|_{A_0} = \sigma$, то $\varphi(\mathbf{k}) = w_0\mathbf{i}$. В любом случае $\varphi(\mathbf{k})^2 = \varphi(\mathbf{k}^2) = \varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Найдём автоморфизмы алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, соответствующие случаю $w_0 = \gamma\mathbf{k}+\delta\mathbf{j}$, где $\gamma^2 + \delta^2 = 1$, γ и δ отличны от 0.

Пусть $\varphi|_{A_0} = \mathcal{I}d_{A_0}$. Тогда

$$\varphi(\mathbf{i}) = \mathbf{i}, \quad \varphi(\mathbf{j}) = w_0 = \gamma\mathbf{k} + \delta\mathbf{j}, \quad \varphi(\mathbf{k}) = -w_0\mathbf{i} = -\gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k}.$$

Необходимым и достаточным условием того, что φ — автоморфизм, является соотношение

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \tag{6}$$

где $a, b \in \{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Применяя соотношение (6) для $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{j}$ и затем для $a = \mathbf{i}$, $b = \mathbf{j}$, получаем следующие равенства для коэффициентов:

$$a' = d', \quad b' = -c', \quad e' = h', \quad f' = -g'. \tag{$*$}$$

Несложно убедиться в том, что придание элементам a и b других возможных значений не приводит к новым ограничениям на коэффициенты.

Пусть $\varphi|_{A_0} = \sigma$. Тогда

$$\varphi(\mathbf{i}) = -\mathbf{i}, \quad \varphi(\mathbf{j}) = w_0 = \gamma\mathbf{k} + \delta\mathbf{j}, \quad \varphi(\mathbf{k}) = w_0\mathbf{i} = \gamma\mathbf{j} - \delta\mathbf{k}.$$

Применяя соотношение (6) для $a = \mathbf{1}$ и $b = \mathbf{j}$ и затем для $a = \mathbf{i}$ и $b = \mathbf{j}$, получаем следующие равенства для коэффициентов:

$$b' = c', \quad e' = -h', \quad 2b'\delta = \gamma(a' - d'), \quad 2h'\delta = \gamma(f' + g'), \tag{$**$}$$

где $\gamma, \delta \neq 0$ и $\gamma^2 + \delta^2 = 1$. Аналогично придание элементам a и b других возможных значений не приводит к новым ограничениям на коэффициенты.

Остаётся найти автоморфизмы алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, соответствующие тем значениям w_0, для которых $\gamma = 0$ или $\delta = 0$ и $\gamma^2 + \delta^2 = 1$. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $\varphi|_{A_0} = \mathcal{I}d_{A_0}$. Если $\delta = 0$, то $\gamma = \pm 1$. Тогда $\varphi(a + \mathbf{j}b) = a \pm \mathbf{k}b$. Действуя аналогично предыдущим рассуждениям, получаем необходимые и достаточные условия того, что φ является автоморфизмом:

$$a' = d', \quad b' = -c', \quad e' = h', \quad f' = -g'.$$

2. Пусть $\varphi|_{A_0} = \mathcal{I}d_{A_0}$. Если $\gamma = 0$, то $\delta = \pm 1$. Эти условия приводят к двум возможным отображениям: тождественному $\mathcal{I}d$ и отображению τ, определённому равенством
$$\tau(a + \mathbf{j}b) = a - \mathbf{j}b.$$
Несложно видеть, что это автоморфизмы алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.
3. Пусть $\varphi|_{A_0} = \sigma$. Если $\delta = 0$, то $\gamma = \pm 1$. Эти условия приводят к двум возможным отображениям: $\varphi_1(a + \mathbf{j}b) = \bar{a} + \mathbf{k}\bar{b}$ и $\varphi_2(a + \mathbf{j}b) = \bar{a} - \mathbf{k}\bar{b}$. Получаем необходимые и достаточные условия того, что эти отображения являются автоморфизмами:
$$a' = d', \quad b' = c', \quad e' = -h', \quad f' = -g'. \tag{$***$}$$
4. Пусть $\varphi|_{A_0} = \sigma$. Если $\gamma = 0$, то $\delta = \pm 1$. Тогда $\varphi(a + \mathbf{j}b) = \bar{a} \pm \mathbf{j}\bar{b}$. Применяя равенство (6) для различных значений a, b, получаем соотношения
$$b' = c' = e' = h' = 0.$$

Проведённые рассуждения позволяют получить следующий результат.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — алгебра с делением, определённая выше, причём $\Delta, \Delta' \neq 0$ и $(b', c', e', h') \neq (0, 0, 0, 0)$. Если $a' = d'$, $b' = -c'$, $e' = h'$, $f' = -g'$, то $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \cong \mathbf{U}(1)$ (группа комплексных чисел, равных по модулю единице). В противном случае $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ изоморфна группе Клейна K_4 или группе $\mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. По условию $(b', c', e', h') \neq (0, 0, 0, 0)$. Поэтому условия $(*)$, $(**)$ и $(***)$ являются взаимно исключающими.

Если выполняется условие $(*)$, то всякий автоморфизм φ имеет вид $\varphi(x) = a + w_0 b$, где $x = a + \mathbf{j}b$, $w_0 = \gamma\mathbf{k} + \delta\mathbf{j}$, $\gamma^2 + \delta^2 = 1$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Тогда выражение для φ может быть переписано в виде
$$\varphi(x) = a + \mathbf{j}e^{i\alpha}b,$$
где $e^{i\alpha} = \delta\mathbf{1} - \gamma\mathbf{i}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Очевидно, что в этом случае все такие автоморфизмы образуют группу, изоморфную группе комплексных чисел, равных по модулю единице, $\mathbf{U}(1)$.

Теперь предположим, что $c' = b'$ и $h' = -e'$. Заметим, что $\mathcal{I}d, \tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$. Рассмотрим возможные случаи. Если одно из чисел $a' - d'$ и $f' - g'$ отлично от 0, то автоморфизмы, описанные в пункте 3 невозможны. Если дополнительно выполнены условия $(**)$, то имеем ещё два автоморфизма:
$$\varphi_0(x) = \bar{a} + \mathbf{j}e^{i\alpha_0}\bar{b}, \quad \varphi_0'(x) = \bar{a} - \mathbf{j}e^{i\alpha_0}\bar{b},$$
где $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $e^{i\alpha_0} = \delta_0\mathbf{1} - \gamma_0\mathbf{i}$, и δ_0, γ_0 удовлетворяют последним двум равенствам условия $(**)$.

Непосредственная проверка показывает, что
$$\varphi_0^2 = \varphi_0'^2 = \mathcal{I}d, \quad \tau\varphi_0 = \varphi_0\tau = \varphi_0',$$
$$\tau\varphi_0' = \varphi_0'\tau = \varphi_0.$$

Поэтому в этом случае $\mathrm{Aut}\big(\mathcal{D}(\mathcal{A})\big) = \{\mathcal{I}d, \tau, \varphi_0, \varphi_0'\}$, и эта группа изоморфна группе Клейна K_4.

Если условия $(**)$ не выполняются, то $\mathrm{Aut}\big(\mathcal{D}(\mathcal{A})\big)$ содержит только $\mathcal{I}d$ и τ, следовательно, эта группа изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

Наконец, если выполняются условия $(***)$, то φ_1 и φ_2, описанные в пункте 3 являются автоморфизмами алгебры $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Кроме того,

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1 = \tau, \quad \tau\varphi_1 = \varphi_1\tau = \varphi_2, \quad \tau\varphi_2 = \varphi_2\tau = \varphi_1.$$

Следовательно, группа $\mathrm{Aut}\big(\mathcal{D}(\mathcal{A})\big) = \{\mathcal{I}d, \tau, \varphi_1, \varphi_2\}$ изоморфна группе Клейна K_4.

В заключение отметим, что так как $(b', c', e', h') \neq (0, 0, 0, 0)$, то автоморфизмы, описанные в пункте 4 невозможны. $\square$

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — алгебра с делением, определённая выше, при этом $\Delta, \Delta' \neq 0$ и $(b', c', e', h') \neq (0, 0, 0, 0)$. Если $a' = d'$, $b' = -c'$, $e' = h'$, $f' = -g'$, то алгебра производных $\mathfrak{Der}\big(\mathcal{D}(\mathcal{A})\big)$ является алгеброй Ли размерности 1. В противном случае $\mathfrak{Der}\big(\mathcal{D}(\mathcal{A})\big)$ тривиальна.*

Замечание 2. $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ в общем случае не обладает степенной ассоциативностью порядка 3, а значит, не является квадратичной. Например, если $(a', b') \neq (0, 0)$, то $\mathbf{j}\mathbf{j}^2 \neq \mathbf{j}^2\mathbf{j}$.

Литература

[1] Фаиз У., Напеденина Е., Рочди А., Твалавадзе М. Вещественные алгебры с делением размерности 4 // Фундамент. и прикл. матем. — 2021. — Т. 23, вып. 4. — С. 177—207.

[2] Althoen S. C., Kugler L. D. When is $\mathbb{R}^2$ a division algebra ? // Amer. Math. Mon. — 1983. — Vol. 90. — P. 625—635.

[3] Benkart G. M., Britten D. J., Osborn J. M. Real flexible division algebras // Can. J. Math. — 1982. — Vol. 34. — P. 550—588.

[4] Benkart G. M., Osborn J. M. An investigation of real division algebras using derivations // Pacific J. Math. — 1981. — Vol. 96. — P. 265—300.

[5] Benkart G. M., Osborn J. M. The derivation algebra of a real division algebra // Amer. J. Math. — 1981. — Vol. 103. — P. 1135—1150.

[6] Bott R., Milnor J. On the parallelizability of the spheres // Bull. Amer. Math. Soc. — 1958. — Vol. 64. — P. 87—89.

[7] Bruck R. H. Some results in the theory of linear non-associative algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1944. — Vol. 56. — P. 141—199.

[8] Calderón A., Kaïdi A., Martín C., Morales A., Ramírez M., Rochdi A. Finite-dimensional absolute valued algebras // Israël J. Math. — 2011. — Vol. 184. — P. 193—220.

[9] Cuenca J. A., de los Santos Villodres R., Kaïdi A., Rochdi A. Real quadratic flexible division algebras // Linear Algebra Appl. — 1999. — Vol. 290. — P. 1—22.

[10] Darpö E. On the classification of the real flexible division algebras // Colloq. Math. — 2006. — Vol. 105, No. 1. — P. 1—17.

[11] Darpö E., Rochdi A. Classification of the four-dimensional power-commutative real division algebras // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2011. — Vol. 141. — P. 1207—1223.

[12] Diankha O., Traoré M., Ramírez M. I., Rochdi A. Four-dimensional real third power associative division algebras // Commun. Algebra. — 2016. — Vol. 44. — P. 3397—3406.

[13] Dieterich E. Classification, automorphism groups and categorical structure of the two-dimensional real division algebras // J. Algebra Its Appl. — 2005. — Vol. 4. — P. 517—538.

[14] Hirzebruch F., Koecher M., Remmert R. Numbers. — New York: Springer, 1990. — (Grad. Texts Math.; Vol. 123).

[15] Hopf H. Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra // Comment. Math. Helvet. — 1940. — Vol. 13. — P. 219—239.

[16] Hübner M., Petersson H. P. Two-dimensional real division algebras revisited // Beitr. Algebra Geom. — 2004. — Vol. 45. — P. 29—36.

[17] Kervaire M. Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$ // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1958. — Vol. 44. — P. 280—283.

[18] Ramírez M. I. On four-dimensional absolute-valued algebras // Proc. of the Int. Conf. on Jordan Structures (Malaga, 1997). — 1999. — P. 169—173.

[19] Rochdi A. Eight-dimensional real absolute valued algebras with left unit whose automorphism group is trivial // Int. J. Math. Math. Sci. — 2003. — No. 70. — P. 4447—4454.

[20] Rodríguez Palacios A. Absolute valued algebras and absolute valuable Banach spaces // Advanced Courses of Mathematical Analysis I. — Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2004. — P. 99—155.

[21] Tvalavadze M., Motya N., Rochdi A. Duplication methods for embeddings of real division algebras // J. Algebra Its Appl. — 2020. — Vol. 20, No. 8. — 2250063.