Интерполяционные псевдоупорядоченные алгебры над частично упорядоченными полями

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: aamikhalev@mail.ru

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический
государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченное кольцо, выпуклая подгруппа, направленная группа.

Аннотация

Рассматриваются частично псевдоупорядоченные (K-упорядоченные) алгебры над частично упорядоченными полями. Исследуются свойства множества $L(A)$ всех выпуклых направленных идеалов частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями. Под выпуклостью идеала псевдоупорядоченной алгебры понимается абелева выпуклость, опирающаяся на определение выпуклой подгруппы частично упорядоченной группы. Доказано, что если A является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй над частично упорядоченным полем, то в решётке $L(A)$ операция объединения вполне дистрибутивна относительно операции пересечения. Исследуются свойства решётки $L(A)$ в псевдо решёточно псевдоупорядоченных алгебрах над частично упорядоченными полями. Доказываются вторая и третья теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями. Получены некоторые результаты, касающиеся свойств главных выпуклых направленных идеалов в интерполяционных псевдоупорядоченных алгебрах над направленными полями. Главным выпуклым направленным идеалом I_a частично псевдоупорядоченной алгебры A является наименьший выпуклый направленный идеал алгебры A, содержащий данный элемент $a \in A$. Для главных выпуклых направленных идеалов в интерполяционных псевдоупорядоченных алгебрах над направленными полями доказан аналог третьей теоремы о порядковых изоморфизмах алгебр.

Abstract

A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova, Interpolation pseudo-ordered algebras over partially ordered fields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2022), no. 2, pp. 181—196.

Characteristics of partially pseudo-ordered (K-ordered) algebras over partially ordered fields are considered. Properties of the set $L(A)$ of all convex directed ideals in pseudo-ordered algebras over partially ordered fields are described. The convexity of ideals means the Abelian convexity, which is based on the definition of a convex subgroup for a partially ordered group. It is proved that if A is an interpolation pseudo-ordered algebra over a partially ordered field, then, in the lattice $L(A)$, the union operation is completely distributive with respect to the intersection. Properties of the lattice $L(A)$ for pseudo-lattice pseudo-ordered algebras over partially ordered fields are investigated. The second and third theorems of algebra order isomorphisms for interpolation pseudo-ordered algebras over partially ordered fields are proved. Some theorems are proved for principal convex directed ideals of interpolation pseudo-ordered algebras over directed fields. The principal convex directed ideal I_a of a partially pseudo-ordered algebra A is the smallest convex directed ideal of the algebra A that contains the element $a \in A$. The analog for the third theorem of algebra order isomorphisms for principal convex directed ideals is demonstrated for interpolation pseudo-ordered algebras over directed fields.

1. Введение

Пусть $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ — произвольное кольцо (возможно, неассоциативное). Говорят, что R — *частично упорядоченное кольцо*, если $\langle R, +, \leqslant \rangle$ является частично упорядоченной группой, удовлетворяющей условию:

из $a \leqslant b$ и $0 < c$ следуют неравенства $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$ для всех $a, b, c \in R$.

Частично упорядоченная группа G называется *направленной*, если для любых элементов a и b из G существует элемент $u \in G$, для которого верны неравенства $a, b \leqslant u$.

Определение 1. Пусть F — частично упорядоченное тело. Если группа $\langle F, +, \leqslant \rangle$ является направленной (решёточно упорядоченной, линейно упорядоченной), то F называют направленным (решёточно упорядоченным, линейно упорядоченным) телом.

Замечание 1. Будем считать до конца статьи, что F — частично упорядоченное тело нулевой характеристики с положительной единицей (иначе порядок окажется тривиальным).

Определение 2 [9]. Левое линейное пространство

$$_F V = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant \rangle$$

над частично упорядоченным телом F называется частично упорядоченным линейным пространством, если $\langle V, +, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

из $0 \leqslant v$ следует $0 \leqslant \alpha v$ для всех $v \in V$ и $\alpha > 0$ из тела F.

Частично упорядоченное линейное пространство $_F V$ над частично упорядоченным телом F называют *направленно* (*линейно или решёточно*) *упорядоченным пространством*, если группа $\langle V, +, \leqslant \rangle$ является направленной (линейно или решёточно упорядоченной) группой.

Свойства частично упорядоченных линейных пространств над частично упорядоченными телами изучались авторами в [9, 10].

Определение 3 [1]. Кольцо R называется частично псевдоупорядоченным кольцом, если аддитивная группа $\langle R, +, \leqslant\rangle$ кольца R является частично упорядоченной группой и удовлетворяет условию

из неравенства $0 \leqslant a$ следует верность неравенств

$$ab \leqslant a \text{ и } ba \leqslant a \text{ для всех элементов } b \in R. \quad (1)$$

Свойства частично псевдоупорядоченных колец изучались в [1, 7, 8, 11].

Определение 4 [8]. Алгебра $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant\rangle$ над частично упорядоченным полем F называется частично псевдоупорядоченной алгеброй, если выполняются следующие условия:

1) ${}_F A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ является частично упорядоченным линейным пространством над полем F;
2) $\langle A, +, \cdot, \leqslant\rangle$ является частично псевдоупорядоченным кольцом.

Если группа $\langle A, +, \leqslant\rangle$ является направленной (решёточно упорядоченной, линейно упорядоченной), то частично псевдоупорядоченную алгебру A называют направленно (решёточно, линейно) псевдоупорядоченной алгеброй.

Понятие частично псевдоупорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем было введено Ю. В. Кочетовой и Е. Е. Ширшовой в [5]. Первоначально данные алгебры были названы частично $\mathcal{K}$-упорядоченными алгебрами. Свойства таких алгебр исследовались в [5, 6, 16]. Некоторые свойства направленно псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями исследовались в [8].

Мотивацией для рассмотрения $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры послужило понятие частично упорядоченной алгебры Ли, введённое В. М. Копытовым (см. [3, 4]).

Напомним, что алгебра Ли $L = \langle L, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot\rangle$ над частично упорядоченным полем F называется *частично упорядоченной алгеброй Ли*, если структура $\langle L, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ является частично упорядоченным линейным пространством над полем F, удовлетворяющим условию:

$$\text{если } a \leqslant b, \text{ то } a + ac \leqslant b + bc \text{ для всех элементов } a, b, c \in L. \quad (2)$$

Если алгебра Ли L является частично упорядоченным линейным пространством над частично упорядоченным полем F, то условия (1) *и* (2) *равносильны.*

Действительно, если $a \leqslant b$ в L, то $0 \leqslant b - a$, откуда по условию (1) следует, что $(b-a)(-c) \leqslant b - a$ для любого элемента $c \in L$. Значит, $-bc + ac \leqslant b - a$, т. е. $a + ac \leqslant b + bc$.

С другой стороны, если $0 \leqslant a$, то по условию (2) $0 \leqslant a + a(-b)$ для любого элемента $b \in L$, т. е. $ab \leqslant a$. Из свойства антикоммутативности следует справедливость условия (1).

Таким образом, частично упорядоченные алгебры Ли образуют подкласс частично псевдоупорядоченных алгебр.

Отметим, что частично псевдоупорядоченная алгебра A не может содержать единицу. Действительно, если $1 \in A$, из $0 < a \in A$ по условию (1) следует верность неравенства $(1+1)a \leqslant a$, т. е. $a \leqslant 0$.

Целью данной работы является исследование свойств выпуклых направленных идеалов в классе интерполяционных псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями.

В статье используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных алгебраических систем (см. [2, 4, 12]).

Напомним, что подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ всегда следует $g \in M$. Линейное подпространство M частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F называется *выпуклым*, если группа $\langle M, +, \leqslant\rangle$ является выпуклой подгруппой частично упорядоченной абелевой группы $\langle V, +, \leqslant\rangle$.

Пусть $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant\rangle$ — частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F.

Определение 5. Идеал I частично псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F называется выпуклым идеалом алгебры A, если I — выпуклое подпространство линейного пространства ${}_FA$.

Будем обозначать через A^+ множество $\{a \in A \mid 0 \leqslant a\}$ всех положительных элементов алгебры A.

Определение 6 [8]. Пусть

$$A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant_1\rangle$$

и

$$B = \langle B, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant_2\rangle \text{ —}$$

частично псевдоупорядоченные алгебры над частично упорядоченным полем F. Отображение f алгебры A в алгебру B называется o-гомоморфизмом (порядковым гомоморфизмом) псевдоупорядоченных алгебр, если выполняются следующие условия:

1) f — гомоморфизм кольца $\langle A, +, \cdot\rangle$ в кольцо $\langle B, +, \cdot\rangle$;
2) f — гомоморфизм линейного пространства $\langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}\rangle$ в линейное пространство $\langle B, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}\rangle$;
3) $f(A^+) \subseteq B^+$;

при этом f называется строгим o-гомоморфизмом алгебр, если выполняется условие

4) $f(A^+) = B^+ \cap f(A)$.

Если для o-гомоморфизма псевдоупорядоченных алгебр f существует o-гомоморфизм псевдоупорядоченных алгебр f^{-1}, то f называется o-изоморфизмом псевдоупорядоченных алгебр.

Отметим, что если f — o-гомоморфизм псевдоупорядоченных алгебр, являющийся изоморфизмом алгебр, то он не обязан быть o-изоморфизмом.

Например, пусть A — ассоциативная алгебра строго верхнетреугольных матриц порядка 3 над линейно упорядоченным полем $\mathbb{R}$. Будем обозначать матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

через $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Упорядочим группу $\langle A, +\rangle$, считая, что $(0,0,0) \leqslant_1 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, если $0 < \alpha_1$ и $0 < \alpha_2$ или если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $0 \leqslant \alpha_3$. Получим частично псевдоупорядоченную алгебру $A_1 = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \cdot, \leqslant_1\rangle$ над полем $\mathbb{R}$.

Упорядочим группу $\langle A, +\rangle$, считая, что $(0,0,0) \leqslant_2 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, если $0 < \alpha_1$, или $0 < \alpha_2$, или $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $0 \leqslant \alpha_3$. Получим частично псевдоупорядоченную алгебру $A_2 = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \cdot, \leqslant_2\rangle$ над полем $\mathbb{R}$.

Определим функцию $f\colon A_1 \to A_2$ по правилу $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)f = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Тогда f — изоморфизм алгебр. Кроме того, $f({A_1}^+) \subset {A_2}^+$, т. е. f — o-гомоморфизм псевдоупорядоченных алгебр. С другой стороны, $(-2, 3, 1) \in {A_2}^+$, но $(-2,3,1)f^{-1} \parallel (0,0,0)$ в алгебре A_1. Следовательно, f^{-1} не является o-гомоморфизмом псевдоупорядоченных алгебр.

В [8] приводится доказательство первой теоремы об o-изоморфизмах произвольных частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями (см. теорему 1). Там доказано, что если $f\colon A \to B$ — строгий o-гомоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченным полем F, то существует o-изоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр $\varphi\colon A/\ker f \to \operatorname{Im} f$ над полем F, где $\varphi(a + \ker f) = f(a)$ для всех $a \in A$.

Заметим, что для произвольных частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями справедливы не все аналоги теорем об изоморфизмах для алгебр.

Например, определим новый порядок на группе матриц $\langle A, +\rangle$, полагая, что $(0,0,0) \leqslant_3 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, если $0 \leqslant \alpha_1$ и $0 < \alpha_2$ или если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $0 \leqslant \alpha_3$. Получим частично псевдоупорядоченную алгебру $A_3 = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \cdot, \leqslant_3\rangle$ над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим в частично псевдоупорядоченной алгебре A_3, выпуклые идеалы

$$I = \{(\alpha_1, 0, \alpha_3)\}, \quad J = \{(0, \alpha_2, \alpha_3)\}, \quad K = I \cap J.$$

В этом случае фактор-алгебра I/K упорядочена тривиально, а A_3/J — линейно псевдоупорядоченная алгебра.

Учитывая вышесказанное, для доказательства некоторых следствий из упомянутой теоремы (второй и третьей теорем об o-изоморфизмах псевдоупорядоченных алгебр) нам пришлось рассмотреть более узкий класс частично псевдоупорядоченных алгебр.

Напомним, что частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств

$a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$ (см. [13, 14]). Класс интерполяционных групп включает классы решёточно упорядоченных групп, линейно упорядоченных групп и групп Рисса.

Определение 7. Частично псевдоупорядоченную алгебру

$$A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant \rangle$$

над частично упорядоченным полем F будем называть интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй, если аддитивная группа $\langle A, +, \leqslant \rangle$ является интерполяционной группой.

Во втором разделе данной статьи содержится доказательство второй теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями.

Теорема 1. *Пусть A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, I и J — выпуклые направленные идеалы алгебры A, $I \subset J$. Тогда существует o-изоморфизм интерполяционной псевдоупорядоченной алгебры A/J над полем F на интерполяционную псевдоупорядоченную алгебру $A/I/J/I$ над полем F.*

Обозначим через $L(A)$ множество всех выпуклых направленных идеалов частично псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F. Свойства множества $L(A)$ исследуются в третьем разделе статьи.

Пусть A — произвольная алгебра над полем, $\{I_s \mid s \in S\}$ — семейство идеалов алгебры A. Объединением $\bigvee\limits_{s\in S} I_s$ идеалов будем считать их сумму $\sum\limits_{s\in S} I_s$, а пересечением $\bigwedge\limits_{s\in S} I_s$ идеалов будем считать их теоретико-множественное пересечение $\bigcap\limits_{s\in S} I_s$.

Для интерполяционных псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, то множество $L(A)$ образует подрешётку в решётке всех идеалов алгебры A. Кроме того,*

1) *$L(A)$ — полная подрешётка сверху;*
2) *в решётке $L(A)$ операция объединения вполне дистрибутивна относительно операции пересечения, т. е.*

$$J \wedge \left(\bigvee_{s\in S} I_s \right) = \bigvee_{s\in S} (J \wedge I_s)$$

для всех выпуклых направленных идеалов J и I_s псевдоупорядоченной алгебры A.

Положительные элементы a и b частично упорядоченной группы $G = \langle G, +, \leqslant \rangle$ называются *почти ортогональными* в G, если из неравенств

$g \leqslant a, b$ следует верность неравенств $ng \leqslant a, b$ для всех элементов $g \in G$ и всех целых чисел $n > 0$ [17]. Частично упорядоченная группа $G = \langle G, +, \leqslant \rangle$ называется *группой с условием почти ортогональности*, если любой элемент $g \in G$ представи́м в виде $g = a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b группы G.

Определение 8. Интерполяционную псевдоупорядоченную алгебру $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant \rangle$ над частично упорядоченным полем F будем называть будем называть псевдорешёточно псевдоупорядоченной алгеброй, если абелева частично упорядоченная группа $\langle A, +, \leqslant \rangle$ является группой с условием почти ортогональности.

В случае псевдорешёточно псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Множество $L(A)$ всех выпуклых направленных идеалов псевдорешёточно псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F — полная дистрибутивная решётка с единицей и нулём, являющаяся брауэровой решёткой.*

Решётку S называют *брауэровой решёткой*, если для любых элементов a и b из S множество $\{x \in S \mid a \wedge x \leqslant b\}$ содержит наибольший элемент.

Четвёртый раздел данной статьи содержит доказательство третьей теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями.

Теорема 4. *Пусть A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, I и J — выпуклые направленные идеалы в алгебре A. Тогда*

1) *существует строгий o-гомоморфизм интерполяционной псевдоупорядоченной алгебры I над частично упорядоченным полем F на интерполяционную псевдоупорядоченную алгебру $I + J/J$ над частично упорядоченным полем F с ядром $I \cap J$;*
2) *существует строгий o-гомоморфизм интерполяционной псевдоупорядоченной алгебры J над частично упорядоченным полем F на интерполяционную псевдоупорядоченную алгебру $I + J/I$ над частично упорядоченным полем F с ядром $I \cap J$;*
3) *интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра $I/I \cap J$ над полем F o-изоморфна интерполяционной псевдоупорядоченной алгебре $I + J/J$ над полем F;*
4) *интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра $J/I \cap J$ над полем F o-изоморфна интерполяционной псевдоупорядоченной алгебре $I + J/I$ над полем F.*

Определение 9. Наименьший выпуклый направленный идеал I_a частично псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F (если он существует), содержащий элемент $a \in A$, назовём главным выпуклым направленным идеалом для элемента $a \in A$.

Оказалось, что в частично псевдоупорядоченных алгебрах над направленными полями главные выпуклые направленные идеалы существуют для всех положительных элементов этих алгебр (см. [8, лемма 10; 16, теорема 1).

Свойства главных выпуклых направленных идеалов интерполяционных псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями рассматриваются в пятом разделе данной статьи. В частности, там содержится доказательство следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F. Если $a > 0$ и $b > 0$ в A, то*

1) *существует строгий o-гомоморфизм интерполяционной псевдоупорядоченной алгебры I_a над полем F на интерполяционную псевдоупорядоченную алгебру I_{a+b}/I_b над полем F с ядром $I_a \cap I_b$;*
2) *существует строгий o-гомоморфизм интерполяционной псевдоупорядоченной алгебры I_b над полем F на интерполяционную псевдоупорядоченную алгебру I_{a+b}/I_a над полем F с ядром $I_a \cap I_b$;*
3) *интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра $I_a/I_a \cap I_b$ над полем F o-изоморфна интерполяционной псевдоупорядоченной алгебре I_{a+b}/I_b над полем F;*
4) *интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра $I_b/I_a \cap I_b$ над полем F o-изоморфна интерполяционной псевдоупорядоченной алгебре I_{a+b}/I_a над полем F.*

2. Вторая теорема об o-изоморфизмах интерполяционных псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями

Напомним некоторые свойства частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями.

Лемма 6. *Если I — выпуклое направленное подпространство частично псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F, то I является идеалом алгебры A.*

Доказательство. См. [6, предложение 2.2.3]. □

Лемма 7. *Если I — выпуклый идеал частично псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F, то A/I — частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F.*

Доказательство. См. [8, теорема 1]. □

Лемма 8. *Пусть G — интерполяционная группа, M — выпуклая направленная нормальная подгруппа в G. Тогда фактор-группа G/M является интерполяционной группой.*

Доказательство. См. [13, лемма 1; 14, лемма 2]. □

Лемма 9. *Если I — выпуклый направленный идеал интерполяционной псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F, то A/I — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F.*

Доказательство. По лемме 7 фактор-алгебра A/I — частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. В силу леммы 8 абелева группа $\langle A/I, +\rangle$ является интерполяционной группой. Остаётся применить определение 7. □

Лемма 10. *Пусть G — интерполяционная группа, M — выпуклая направленная нормальная подгруппа в G, $\pi\colon G \to G/M$ — естественный o-гомоморфизм групп. Если H — выпуклая направленная подгруппа группы G, то $\pi(H) = \{hM \mid h \in H\}$ — выпуклая направленная подгруппа фактор-группы G/M.*

Доказательство. См. [14, теорема 1]. □

Лемма 11. *Пусть A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, I — выпуклый направленный идеал в алгебре A, $\pi\colon A \to A/I$ — естественный o-гомоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр (определённый правилом $\pi(a) = a + I$). Если J — выпуклый направленный идеал алгебры A, то $\pi(J) = \{a + I \mid a \in J\}$ — выпуклый направленный идеал в алгебре A/I.*

Доказательство. По лемме 9 фактор-алгебра A/I — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Из леммы 10 следует, что $\langle \pi(J), +\rangle$ — выпуклая направленная подгруппа абелевой интерполяционной группы $\langle A/I, +\rangle$.

Рассмотрим $\alpha \in F$ и $c + I \in \pi(J)$ для некоторого $c \in J$. Из правил действий в алгебре A/I следует, что $\alpha(c + I) = \alpha c + I$. Так как J — идеал алгебры A, то $\alpha c \in J$. Поэтому $\alpha(c + I) \in \pi(J)$. Значит, $\pi(J)$ — линейное подпространство в линейном пространстве ${}_F A/I$. По лемме 6 $\pi(J)$ — идеал алгебры A/I. □

Лемма 12. *Пусть A является частично псевдоупорядоченной алгеброй над частично упорядоченным полем F. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если I — выпуклый идеал алгебры A, то канонический гомоморфизм алгебр $\pi\colon A \to A/I$ является строгим o-гомоморфизмом псевдоупорядоченных алгебр.*
2. *Если $f\colon A \to B$ — строгий o-гомоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр, то существует o-изоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр $\varphi\colon A/\ker f \to \operatorname{Im} f$, где $\varphi(a + \ker f) = f(a)$ для всех $a \in A$.*

Доказательство. См. [8, теорема 1]. □

Замечание 2. Пусть $f\colon A \to B$ — строгий сюръективный o-гомоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр. Тогда $f(A^+) = B^+$.

Доказательство теоремы 1. По лемме 7 существуют частично псевдоупорядоченные алгебры A/I и A/J над частично упорядоченным полем F. По лемме 9 они являются интерполяционными псевдоупорядоченными алгебрами.

Рассмотрим отображение $f\colon A/I \to A/J$, определённое следующим правилом: для любого элемента $a \in A$ положим $f(a+I) = a+J$. Из свойств смежных классов следует, что f — сюръективный гомоморфизм алгебр. Докажем, что f — строгий o-гомоморфизм псевдоупорядоченных алгебр.

Из пункта 1 леммы 12 следует существование строгих сюръективных o-гомоморфизмов псевдоупорядоченных алгебр $\pi_1\colon A \to A/I$ и $\pi_2\colon A \to A/J$. С учётом замечания 2 имеем

$$\pi_1(A^+) = (A/I)^+, \tag{$*$}$$

$$\pi_2(A^+) = (A/J)^+. \tag{$**$}$$

Рассмотрим смежный класс $a + I \in (A/I)^+$. По $(*)$ существует элемент $b \in A^+$, для которого $a + I = b + I$. Тогда по $(**)$ $f(a + I) = b + J \in (A/J)^+$. Значит, $f\big((A/I)^+\big) \subseteq (A/J)^+$. Следовательно, f — o-гомоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр.

Пусть $c + J \in (A/J)^+$. Тогда по условию $(**)$ существует элемент $d \in A^+$, для которого $c+J = d+J$. Согласно $(*)$ $d+I \in (A/I)^+$, т. е. $c+J \in f\big((A/I)^+\big)$. Таким образом, $(A/J)^+ \subseteq f\big((A/I)^+\big)$. Следовательно, $f\big((A/I)^+\big) = (A/J)^+$, и f — строгий o-гомоморфизм частично псевдоупорядоченных алгебр.

Из леммы 11 следует, что в алгебре A/I существует выпуклый направленный идеал $\pi(J) = \{a + I \mid a \in J\} = J/I$. Если $a + I \in J/I$, то $f(a + I) = J$. Значит, $J/I \subseteq \ker f$. Если $a + I \in \ker f$, то $f(a + I) = J$, т. е. $a \in J$. Таким образом, $\ker f \subseteq J/I$ Следовательно, $\ker f = J/I$.

Из пункта 2 леммы 12 следует, что $A/I/\ker f \cong \operatorname{Im} f$, где $\operatorname{Im} f = A/J$. □

3. Идеалы частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями, доказательство теорем 2 и 3

Лемма 13. *Если A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, то множество $L(A)$ образует подрешётку в решётке всех идеалов алгебры A. Кроме того, $L(A)$ — полная подрешётка сверху.*

Доказательство. См. [16, теорема 7]. □

Нам понадобится определение.

Определение 10 [9]. Частично упорядоченное линейное пространство ${}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ над частично упорядоченным телом F называется интерполяционным линейным пространством, если абелева группа $\langle V, +, \leqslant\rangle$ является интерполяционной группой.

Лемма 14. *Множество $L(V)$ всех выпуклых направленных линейных подпространств интерполяционного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F образует подрешётку в решётке всех подпространств линейного пространства ${}_FV$. Кроме того,*

1) *$L(V)$ является полной решёткой сверху;*
2) *в решётке $L(V)$ операция объединения вполне дистрибутивна относительно операции пересечения, т. е.*

$$N \wedge \left(\bigvee_{j \in J} M_j \right) = \bigvee_{j \in J} (N \wedge M_j)$$

для всех выпуклых направленных линейных подпространств N и M_j частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$.

Доказательство. См. [9, теорема 5]. □

Лемма 15. *Пусть $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant \rangle$ — частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Подмножество I множества A является выпуклым направленным идеалом алгебры A в том и только в том случае, когда I — выпуклое направленное подпространство пространства ${}_FA = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant \rangle$.*

Доказательство. Утверждение является следствием леммы 6 и определения 5. □

Доказательство теоремы 2. По лемме 13 множество $L(A)$ образует полную подрешётку сверху в решётке всех идеалов алгебры A. Следовательно, первое утверждение теоремы справедливо.

Из леммы 15 следует, что $L(A)$ — множество всех выпуклых направленных подпространств пространства ${}_FA = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant \rangle$. Справедливость второго утверждения теоремы следует из леммы 14. □

Напомним определение.

Определение 11 [9]. Интерполяционное линейное пространство ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F называется псевдорешёточно упорядоченным линейным пространством, если абелева группа $\langle V, +, \leqslant \rangle$ — группа с условием почти ортогональности.

Лемма 16. *Пусть ${}_FV$ — псевдо решёточно упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, $\{M_j \mid j \in J\}$ — семейство выпуклых направленных линейных подпространств линейного пространства ${}_FV$, $M = \bigcap\limits_{j \in J} M_j$. Тогда M — выпуклое направленное линейное подпространство в частично упорядоченном пространстве ${}_FV$.*

Доказательство. См. [9, лемма 22]. □

Теорема 17. *Пусть $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant \rangle$ — псевдо решёточно псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, $\{I_s \mid s \in S\}$ —*

семейство выпуклых направленных идеалов алгебры A. Если $I = \bigcap_{s\in S} I_s$, то I — выпуклый направленный идеал алгебры A.

Доказательство. Учитывая определения 8 и 11, по условию теоремы заключаем, что линейное пространство ${}_F A$ является псевдо решёточно упорядоченным линейным пространством. Согласно лемме 15, идеалы I_s для всех $s \in S$ являются выпуклыми направленными линейными подпространствами в линейном пространстве ${}_F A$. Из леммы 16 следует, что I является выпуклым направленным линейным подпространством в линейном пространстве ${}_F A$. Остаётся применить лемму 6. □

Лемма 18. *Полная решётка является брауэровой тогда и только тогда, когда операция объединения в ней вполне дистрибутивна относительно пересечения.*

Доказательство. См. [2, гл. V, § 10, теорема 24]. □

Доказательство теоремы 3. Из теоремы 2 следует, что $\langle L(A), \vee, \wedge\rangle$ — полная решётка сверху. Кроме того, по теореме 2 в решётке $L(A)$ операция объединения вполне дистрибутивна относительно пересечения. В силу теоремы 17 $L(A)$ — полная решётка снизу. Значит, $L(A)$ — полная решётка. Нулём решётки является идеал $\{0\}$, а единицей решётки является идеал A. Из леммы 18 следует, что $L(A)$ — брауэрова решётка. □

4. Третья теорема об o-изоморфизмах интерполяционных псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями

Лемма 19. *Если ${}_F V$ — интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, M — выпуклое линейное подпространство в линейном пространстве ${}_F V$, то M — интерполяционное линейное пространство над телом F.*

Доказательство. См. [10, лемма 2]. □

Лемма 20. *Пусть A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Если I и J — выпуклые направленные идеалы алгебры A, то*

1) *$I+J$ — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F;*
2) *$I \cap J$ — выпуклый направленный идеал алгебры A.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $I + J$ — выпуклый направленный идеал псевдоупорядоченной алгебры A. Согласно лемме 15 $I + J$ — выпуклое направленное линейное подпространство в интерполяционном линейном пространстве ${}_F A$. Из леммы 19 следует, что $I + J$ — интерполяционное линейное пространство над полем F. Учитывая определения 7 и 10, заключаем, что первое утверждение леммы справедливо. Второе утверждение верно в силу теоремы 2. □

Лемма 21. *Пусть ${}_FV$ — интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F. Если M и N — выпуклые направленные линейные подпространства в ${}_FV$, то*

1) *M, N, $M \cap N$ — выпуклые направленные линейные подпространства в частично упорядоченном линейном пространстве ${}_F(M+N)$;*
2) *M и N — интерполяционные линейные пространства над F;*
3) *$M \cap N$ — выпуклое направленное линейное подпространство в частично упорядоченных линейных пространствах ${}_FM$ и ${}_FN$.*

Доказательство. См. [10, лемма 12]. □

Лемма 22. *Пусть A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Если I и J — выпуклые направленные идеалы алгебры A, то*

1) *I, J, $I \cap J$ — выпуклые направленные идеалы в интерполяционной псевдоупорядоченной алгебре $I+J$ над полем F;*
2) *I и J — интерполяционные псевдоупорядоченные алгебры над полем F;*
3) *$I \cap J$ — выпуклый направленный идеал в алгебрах I и J.*

Доказательство. Из леммы 20 следует, что $I+J$ — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Так как по лемме 15 I и J — выпуклые направленные линейные подпространства в частично упорядоченном линейном пространстве ${}_FA$, то согласно лемме 21 справедливы следующие утверждения:

1) I, J, $I \cap J$ — выпуклые направленные линейные подпространства в частично упорядоченном линейном пространстве ${}_F(I+J)$;
2) I и J — интерполяционные линейные пространства над F;
3) $I \cap I$ — выпуклое направленное линейное подпространство в частично упорядоченных линейных пространствах ${}_FI$ и ${}_FJ$.

Осталось применить леммы 6 и 19. □

Лемма 23. *Пусть ${}_FV$ — интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, M и N — выпуклые направленные линейные подпространства в ${}_FV$. Если $0 \leqslant v \in M+N$, то существуют элементы $m \in M^+$ и $n \in N^+$, для которых $v = m+n$.*

Доказательство. См. [10, лемма 15]. □

Лемма 24. *Пусть A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, I и J — выпуклые направленные идеалы алгебры A. Если $0 \leqslant x \in I+J$, то существуют элементы $a \in I^+$ и $b \in J^+$, для которых $x = a+b$.*

Доказательство. Так как по лемме 15 I и J — выпуклые направленные линейные подпространства в частично упорядоченном линейном пространстве ${}_F A$, справедливость утверждения следует из леммы 23. □

Доказательство теоремы 4. По лемме 20 существует интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра $I + J$ над частично упорядоченным полем F. По лемме 22 идеалы I и J выпуклые и направленные в алгебре $I + J$.

Докажем первое утверждение теоремы.

Из леммы 12 следует существование строгого сюръективного o-гомоморфизма частично псевдоупорядоченных алгебр $\pi\colon I + J \to I + J/J$ над частично упорядоченным полем F, действующего по правилу $\pi(x) = x + J$ для каждого элемента $x \in I + J$.

Рассмотрим отображение $f\colon I \to I + J/J$, определённое правилом $f(a) = \pi(a) = a + J$ для каждого $a \in I$. Пусть смежный класс $K \in I + J/J$. Тогда $K = x + J$, где $x = u + v$ для некоторых элементов $u \in I$ и $v \in J$. Значит, $K = u + J$, т. е. $f(u) = K$. Следовательно, f — сюръективный гомоморфизм алгебр.

Из замечания 2 следует, что $\pi\big((I + J)^+\big) \subseteq (I + J/J)^+$. Так как $f(I) = \pi(I)$, то $f(I^+) \subseteq (I + J/J)^+$. Таким образом, f — o-гомоморфизм псевдоупорядоченных алгебр.

Пусть $K \in (I + J/J)^+$. Тогда $K = c + J$ для некоторого элемента $c \in (I + J)^+$. По лемме 24 найдутся элементы $a \in I^+$ и $b \in J^+$, для которых $c = a + b$. Значит, $K = a + J = f(a)$. Таким образом, $K \in f(I^+)$, т. е. $(I + J/J)^+ \subseteq f(I^+)$.

Из равенства $(I + J/J)^+ = f(I^+)$ следует, что f — строгий o-гомоморфизм псевдоупорядоченных алгебр. Кроме того,

$$\ker f = \{a \in I \mid a + J = J\} = \{a \in R \mid a \in I \cap J\} = I \cap J.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Третье утверждение является следствием первого утверждения теоремы и леммы 12.

Четвёртое утверждение является следствием второго утверждения и леммы 12. □

5. Главные выпуклые направленные идеалы интерполяционных псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями, доказательство теоремы 5

Лемма 25. *Пусть A — частично псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, $a \in A$ и $a > 0$. Тогда в алгебре A существует выпуклый* *направленный идеал алгебры I_a, для которого*

$$I_a{}^+ = \{x \in A^+ \mid x \leqslant \alpha a \text{ для некоторых } \alpha > 0 \text{ из поля } F\}.$$

I_a является наименьшим выпуклым идеалом алгебры, содержащим элемент a.

Доказательство. См. [16, теорема 1; 8, лемма 10]. □

Лемма 26. *Пусть ${}_FV$ — интерполяционное линейное пространство над направленным телом F, $a > 0$ и $b > 0$ в пространстве ${}_FV$. Тогда $I_{a+b} = I_a + I_b$.*

Доказательство. См. [10, лемма 20]. □

Лемма 27. *Пусть A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, $a, b \in A$ и $a > 0$, $b > 0$. Тогда $I_{a+b} = I_a + I_b$.*

Доказательство. По лемме 15 к интерполяционному линейному пространству ${}_FA$ над направленным телом F можно применить лемму 26. □

Доказательство теоремы 5. Так как $0 < a+b$, по лемме 25 в алгебре A существуют выпуклые направленные идеалы I_a, I_b, I_{a+b}. По лемме 20 существует интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра $J = I_a + I_b$ над направленным полем F. По лемме 22 в алгебре J существуют выпуклые направленные идеалы I_a, I_b, $I_a \cap I_b$. Из первого утверждения теоремы 4 следует существование строгого o-гомоморфизма интерполяционной псевдоупорядоченной алгебры I_a над полем F на интерполяционную псевдоупорядоченную алгебру $I_a + I_b/I_b$ над полем F. Согласно лемме 27 $I_{a+b} = I_a + I_b$. Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Третье утверждение является следствием третьего утверждения теоремы 4 и леммы 27.

Четвёртое утверждение является следствием четвёртого утверждения теоремы 4 и леммы 27. □

Литература

[1] Бибаева В. Н, Ширшова Е. Е. О линейно K-упорядоченных кольцах // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 13—23.

[2] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[3] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, вып. 3. — С. 295—325.

[4] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[5] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 53—63.

[6] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 85—158.

[7] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных колец // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 4. — С. 147—166.

[8] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями // Фундамент. и прикл. матем. — 2020. — Т. 23, вып. 3. — С. 215—230.

[9] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Проективная геометрия над частично упорядоченными телами // Фундамент. и прикл. матем. — 2020. — Т. 23, вып. 2. — С. 231—245.

[10] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Проективная геометрия над частично упорядоченными телами. II // Чебышёвский сб. — 2021. — Т. 22, вып. 1. — С. 213—224.

[11] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Интерполяционные псевдоупорядоченные кольца // Фундамент. и прикл. матем. — 2022. — Т. 24, вып. 1. — С. 177—191.

[12] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[13] Ширшова Е. Е. О выпуклых подгруппах групп с интерполяционным условием // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 187—199.

[14] Ширшова Е. Е. О свойствах интерполяционных групп // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 2. — С. 295—304.

[15] Ширшова Е. Е. О частично K-упорядоченных кольцах // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 1. — С. 225—239.

[16] Ширшова Е. Е. О частично упорядоченных алгебрах над полями // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 4. — С. 249—263.

[17] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.