О фактор-кольцах полных топологических колец*

В. И. АРНАУТОВ
Молдавский государственный университет,
Институт математики и информатики им. В. А. Андрунакиевича
e-mail: arnautov@math.md

С. Т. ГЛАВАЦКИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: glavatsky_st@mail.ru

Г. Н. ЕРМАКОВА
Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
e-mail: galla0808@yandex.ru

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.556

Ключевые слова: топологическое кольцо, полное топологическое кольцо, фактор-кольцо топологического кольца, локально ограниченное топологическое кольцо, базис фильтра окрестностей нуля, прямая сумма колец, хаусдорфова топология.

Аннотация

Любое локально ограниченное топологическое кольцо с хаусдорфовой топологией изоморфно фактор-кольцу некоторого полного топологического кольца по некоторому идеалу.

Abstract

V. I. Arnautov, S. T. Glavatsky, G. N. Ermakova, A. V. Mikhalev, On factor-rings of complete topological rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 3, pp. 3—9.

Any locally bounded topological ring with Hausdorff topology is isomorphic to a factor-ring of a complete topological ring by some ideal.

Введение

Вопрос о связи полноты кольца и его фактор-кольца является важным в теории топологических колец. Для абелевых групп он изучался в разделе 3.2 монографии [1] (см. 3.19—3.22). В разделе 4.1 из [1] этот вопрос исследовался для топологических колец. К сожалению, в доказательстве теоремы 4.1.49

*Работа четвёртого автора финансово поддержана Российским научным фондом, грант 22-11-00052.

была допущена ошибка (заданное в нём отображение p не является кольцевым гомоморфизмом). Об этой ошибке нам любезно сообщил профессор Пейс Нильсен. В настоящей статье приводится доказательство упомянутой теоремы для случая, когда топологическое кольцо (R, τ) является локально ограниченным кольцом.

1. Предварительные сведения

Теорема 1.1 (см. [1, теорема 1.2.4]). *Непустая совокупность $\mathcal{B}$ подмножеств абелевой группы $G(+)$ является базисом фильтра окрестностей нуля для некоторой групповой топологии, если $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $0 \in U$ *для любого множества* $U \in \mathcal{B}$;
2) *для любых множеств U и V из $\mathcal{B}$ существует множество $W \in \mathcal{B}$, такое что* $W \subseteq U \cap V$;
3) *для любого множества $U \in \mathcal{B}$ существует множество $W \in \mathcal{B}$, такое что* $W + W \subseteq U$;
4) *для любого множества $U \in \mathcal{B}$ существует множество $W \in \mathcal{B}$, такое что* $-W \subseteq U$.

Теорема 1.2 (см. [1, теорема 1.6.46]). *Если $(R(+, \cdot), \tau)$ — локально ограниченное топологическое кольцо, то в топологическом кольце (R, τ) существует окрестность нуля U_0, которая является подполугруппой мультипликативной полугруппы $R(\cdot)$ кольца R, и существует базис $\mathcal{B}$ фильтра окрестностей нуля топологического кольца (R, τ), который состоит из идеалов полугруппы $U_0(\cdot)$.*

Теорема 1.3 (см. [1, теорема 1.2.20]). *Пусть $\Sigma = \{\tau_\gamma \mid \gamma \in \Omega\}$ — некоторое множество групповых топологий на абелевой группе $G(+)$ и для каждого $\gamma \in \Omega$ задан некоторый базис фильтра окрестностей нуля $\mathcal{B}_\gamma$ в топологической группе $(G(+), \tau_\gamma)$. Если $\tau = \sup\{\tau_\gamma \mid \gamma \in \Omega\}$, то базисом фильтра окрестностей нуля в топологической группе $(G(+), \tau)$ является совокупность $\mathcal{B}$ всех подмножеств $W \subseteq G$ следующего вида: существует конечное подмножество $S \subseteq \Sigma$, такое что для каждого $\gamma \in S$ найдется окрестность нуля $U_\gamma \in \mathcal{B}_\gamma$ в топологической группе $(G(+), \tau_\gamma)$, такая что $W = \bigcap\limits_{\gamma \in S} U_\gamma$.*

Замечание 1.4 (см. [1, доказательство теоремы 4.1.48]). Пусть $(X(+), \tau)$ — топологическая абелева группа, наделенная хаусдорфовой топологией и $\mathcal{B}$ — некоторый базис фильтра окрестностей нуля в $(X(+), \tau)$. Для любого натурального числа i рассмотрим топологическую группу $(X_i(+), \tau_i) = (X(+), \tau)$ и прямое произведение

$$Z(+) = \prod_{i=1}^{\infty} X_i(+)$$

групп $X_i(+)$.

Для каждого натурального числа k рассмотрим на группе $X_i(+)$ групповую топологию $\tau_{i,k}$:

$$\tau_{i,k} = \begin{cases} \tau_i, & \text{если } k \neq i, \\ \text{дискретная топология}, & \text{если } k = i. \end{cases}$$

Рассмотрим на $Z(+)$ кирпичную топологию $\hat{\tau}_k$, базисом фильтра окрестностей нуля которой является множество всех подмножеств вида $\prod\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_k = \{0\}$ и $U_i \in \mathcal{B}$ для всех натуральных чисел $i \neq k$. Очевидно, что топология $\hat{\tau}_k$ является хаусдорфовой.

Пусть $\hat{\tau} = \sup\big\{\hat{\tau}_k \mid k \in \{1, 2, \ldots\}\big\}$. Тогда в силу теоремы 1.3 базисом фильтра окрестностей нуля в топологической группе $(Z(+), \hat{\tau})$ является множество всех подмножеств $\hat{W}$, для каждого из которых существуют натуральное число n и подмножество $\{U_{n+1}, U_{n+2}, \ldots\} \subseteq \mathcal{B}$, такие что $\hat{W} = \prod\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i = \{0\}$ для $i \leqslant n$.

Далее, пусть

$$Y(+) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(+) -$$

прямая сумма групп $X_i(+)$ и $\bar{\tau}$ — сужение топологии $\hat{\tau}$ на группу $Y(+)$. Тогда $(Y(+), \bar{\tau})$ — полная хаусдорфова группа, а отображение $p\colon (Y(+), \bar{\tau}) \to (X(+), \tau)$, заданное правилом $p\big((x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\big) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, является непрерывным и открытым групповым гомоморфизмом.

2. Основной результат

Теорема 2.1. *Любое локально ограниченное топологическое кольцо $(R(+, \cdot), \tau)$ с хаусдорфовой топологией τ изоморфно фактор-кольцу некоторого полного топологического кольца по некоторому идеалу.*

Доказательство. Для каждого натурального числа i рассмотрим группу $R_i(+) = R(+)$ и прямую сумму $\tilde{R}(+) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} R_i(+)$ счётного числа групп $R_i(+)$.

Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов.

Этап I. Определим на группе $\tilde{R}(+)$ операцию умножения $*$ и проверим, что $\tilde{R}(+, *)$ будет кольцом.

Пусть $\tilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, \ldots)$ и $\tilde{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, \ldots)$ — произвольные элементы из $\tilde{R}(+)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $k = n$ (в противном случае положим $a_i = 0$, если $k < i \leqslant \max\{k, n\}$, и $b_i = 0$, если $n < i \leqslant \max\{k, n\}$).

Для любого натурального числа i положим $d_i = 0$, если $i > n = k$, и

$$d_i = \sum_{j=1}^{i} a_j \cdot b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_i \cdot b_j \in R,$$

если $i \leqslant n = k$.

Далее определим $\tilde{a} * \tilde{b} = (d_1, d_2, \ldots)$.

Пусть теперь $\tilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, \ldots)$, $\tilde{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, \ldots)$ и $\tilde{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m, 0, \ldots)$ — произвольные элементы из $\tilde{R}(+)$. Не нарушая общности рассуждений (как и выше), можем считать, что $k = n = m$. Тогда

$$(\tilde{a} + \tilde{b}) * \tilde{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_k + b_k, 0, \ldots) * (c_1, c_2, \ldots, c_k, 0, \ldots) = \\ = (g_1, g_2, \ldots, g_k, 0, \ldots)$$

и

$$g_i = \sum_{j=1}^{i} (a_j + b_j) \cdot c_i + \sum_{j=1}^{i-1} (a_i + b_i) \cdot c_j = \\ = \left(\sum_{j=1}^{i} a_j \cdot c_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_i \cdot c_j \right) + \left(\sum_{j=1}^{i} b_j \cdot c_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_i \cdot c_j \right),$$

если $i \leqslant k$. Так как $\tilde{a} * \tilde{c} = (g'_1, g'_2, \ldots, g'_k, 0, \ldots)$ и $\tilde{b} * \tilde{c} = (g''_1, g''_2, \ldots, g''_k, 0, \ldots)$, где

$$g'_i = \sum_{j=1}^{i} a_j \cdot c_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_i \cdot c_j$$

и

$$g''_i = \sum_{j=1}^{i} b_j \cdot c_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_i \cdot c_j,$$

если $i \leqslant k$, то

$$(\tilde{a} + \tilde{b}) * \tilde{c} = (\tilde{a} * \tilde{c}) + (\tilde{b} * \tilde{c}).$$

Аналогично доказывается, что

$$\tilde{c} * (\tilde{a} + \tilde{b}) = (\tilde{c} * \tilde{a}) + (\tilde{c} * \tilde{b}).$$

Несложно также проверить, что

$$(\tilde{a} * \tilde{b}) * \tilde{c} = \tilde{a} * (\tilde{b} * \tilde{c}).$$

Из произвольности выбора элементов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ из $\tilde{R}(+)$ следует, что $\tilde{R}(+, *)$ является ассоциативным кольцом.

Этап II. Теперь зададим на кольце $\tilde{R}(+, *)$ топологию $\tilde{\tau}$.

Так как топологическое кольцо $(R(+, \cdot), \tau)$ является локально ограниченным, то согласно теореме 1.2 в $(R(+, \cdot), \tau)$ найдется окрестность нуля U_0, которая является подполугруппой мультипликативной полугруппы $R(\cdot)$ кольца $R(+,\cdot)$, и найдется базис $\mathcal{B}$ фильтра окрестностей нуля топологического кольца $(R(+,\cdot),\tau)$, состоящий из идеалов $U_1, U_2, \ldots$ полугруппы $U_0(\cdot)$.

Для любой последовательности $\Delta = \{U_1, U_2, \ldots\}$ окрестностей $U_i \in \mathcal{B}$ и любого натурального числа n рассмотрим множество

$$\tilde{W}(\Delta, n) = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid a_j \in U_i \text{ для } j > n \text{ и } a_j = 0 \text{ для } j \leqslant n\} \subseteq \tilde{R}.$$

Легко заметить, что совокупность всех множеств вида $\tilde{W}(\Delta, n)$ удовлетворяет условию теоремы 1.1 и, значит, является базисом фильтра окрестностей нуля для некоторой групповой топологии $\tilde{\tau}$ на группе $\tilde{R}(+)$. Также легко заметить, что для каждого натурального числа i найдется множество $U'_i \in \mathcal{B}$, такое что $U'_i + U'_i + U'_i \subseteq U_i$. Если $\Delta' = \{U'_1, U'_2, \ldots\}$, то

$$\tilde{W}(\Delta', n) + \tilde{W}(\Delta', n) + \tilde{W}(\Delta', n) \subseteq \tilde{W}(\Delta, n).$$

Проверим, что операция $*$ является непрерывной в аддитивной топологической группе $(\tilde{R}(+), \tilde{\tau})$.

Пусть $\tilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, \ldots)$ и $\tilde{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, \ldots)$ — произвольные элементы из $\tilde{R}(+)$, и пусть $\tilde{W}$ — произвольная окрестность элемента $\tilde{a} * \tilde{b}$ в топологической группе $(\tilde{R}(+), \tilde{\tau})$.

Существует окрестность $\tilde{W}(\Delta, m)$ нуля в топологической группе $(\tilde{R}(+), \tilde{\tau})$, такая что $(\tilde{a} * \tilde{b}) + \tilde{W}(\Delta, m) \subseteq \tilde{W}$. Также для каждого натурального числа i найдется окрестность нуля $U''_i \in \mathcal{B}$, такая что верны следующие включения:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot U''_i \subseteq U'_i,$$
$$\sum_{j=1}^{n} U''_i \cdot b_j \subseteq U'_i,$$
$$\underbrace{U''_i + U''_i + \ldots + U''_i}_{2i \text{ слагаемых}} \subseteq U'_i.$$

Пусть $\Delta'' = \{U''_1, U''_2, \ldots\}$ и $m' = \max\{m, k, n\}$. Тогда $\tilde{W}(\Delta'', m')$ является окрестностью нуля в топологической группе $(\tilde{R}(+), \tilde{\tau})$ и, значит, множества $\tilde{a} + \tilde{W}(\Delta'', m')$ и $\tilde{b} + \tilde{W}(\Delta'', m')$ будут соответственно окрестностями элементов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в топологической группе $(\tilde{R}(+), \tilde{\tau})$. Проверим, что

$$\big(\tilde{a} + \tilde{W}(\Delta'', m')\big) * \big(\tilde{b} + \tilde{W}(\Delta'', m')\big) \subseteq (\tilde{a} * \tilde{b}) + \tilde{W}(\Delta, m) \subseteq \tilde{W}.$$

Действительно, пусть $\tilde{a}' \in \tilde{a} + \tilde{W}(\Delta'', m')$ и $\tilde{b}' \in \tilde{b} + \tilde{W}(\Delta'', m')$. Найдутся элементы $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ из $\tilde{W}(\Delta'', m')$, такие что $\tilde{a}' = \tilde{a} + \tilde{c}$ и $\tilde{b}' = \tilde{b} + \tilde{d}$. Тогда

$$\tilde{a}' * \tilde{b}' = (\tilde{a} + \tilde{c}) * (\tilde{b} + \tilde{d}) = \tilde{a} * \tilde{b} + \tilde{a} * \tilde{d} + \tilde{c} * \tilde{b} + \tilde{c} * \tilde{d}.$$

Пусть $\tilde{c} = (c_1, c_2, \ldots)$. Тогда $c_i \in U''_i$ для каждого i, причем $c_i = 0$ для $i \leqslant m'$. Аналогично если $\tilde{d} = (d_1, d_2, \ldots)$, то $d_i \in U''_i$ для каждого i, причем $d_i = 0$ для

$i \leqslant m'$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{i} a_j \cdot d_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_i \cdot d_j = 0 \in U'_i$$

для $i \leqslant m'$. Так как $a_i = 0$ для $i > k$, то

$$\sum_{j=1}^{i} a_j \cdot d_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_i \cdot d_j = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot d_i \in \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot U''_i \subseteq U'_i$$

для $i > m'$. Тем самым мы доказали, что $\tilde{a} * \tilde{d} \in \tilde{W}(\Delta', m')$.

Аналогично доказывается, что $\tilde{c} * \tilde{b} \in \tilde{W}(\Delta', m')$.

Так как для любого натурального числа i множество U''_i является идеалом в полугруппе $U_0(\cdot)$, то $U''_j \cdot U''_k \subseteq U''_{\max\{j,k\}}$.

Если $\tilde{c} * \tilde{d} = (h_1, h_2, \ldots)$, то

$$h_i = \sum_{j=1}^{i} c_j \cdot d_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_i \cdot d_j,$$

и значит, $h_i = 0$ для $i \leqslant m'$ и

$$h_i = \left(\sum_{j=1}^{i} c_j \cdot d_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{i-1} c_i \cdot d_j\right) \in \\ \in \underbrace{(U''_i + U''_i + \ldots + U''_i)}_{\text{i слагаемых}} + \underbrace{(U''_i + U''_i + \ldots + U''_i)}_{\text{i слагаемых}} \subseteq U'_i$$

для $i > m'$. Тогда $\tilde{c} * \tilde{d} \in \tilde{W}(\Delta', m')$ и, значит,

$$\tilde{a}' * \tilde{b}' = \tilde{a} * \tilde{b} + \tilde{a} * \tilde{d} + \tilde{c} * \tilde{b} + \tilde{c} * \tilde{d} \in \\ \in \tilde{a} * \tilde{b} + \tilde{W}(\Delta', m') + \tilde{W}(\Delta', m') + \tilde{W}(\Delta', m') \subseteq \tilde{W}(\Delta, m') \subseteq \tilde{W}.$$

Из произвольности выбора элементов a' и b' следует, что

$$\big(\tilde{a} + \tilde{W}(\Delta'', m')\big) * \big(\tilde{b} + \tilde{W}(\Delta'', m')\big) \subseteq (\tilde{a} * \tilde{b}) + \tilde{W}(\Delta, m) \subseteq \tilde{W}.$$

Тем самым доказано, что $(\tilde{R}(+, *), \tilde{\tau})$ является топологическим кольцом.

Этап III. Заметим, что заданная нами на $\tilde{R}(+, *)$ топология $\tilde{\tau}$ совпадает с топологией $\bar{\tau}$ на $Y(+)$, указанной в замечании 1.4, и значит, топологическое кольцо $(\tilde{R}(+, *), \tilde{\tau})$ является полным кольцом с хаусдорфовой топологией. Так как

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} a_j \cdot b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_i \cdot b_j\right)$$

и

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n, 0, 0, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) * (b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, 0, \ldots),$$

где

$$c_i = \sum_{j=1}^{i} a_j \cdot b_i + \sum_{j=1}^{i-1,} a_i \cdot b_j,$$

то непрерывное и открытое отображение $p\colon \tilde{R}(+,*) \to R(+,\cdot)$ (см. замечание 1.4), при котором

$$p\big((a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) * (b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, 0, \ldots)\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i,$$

является кольцевым гомоморфизмом.

Итак, мы доказали, что топологическое кольцо $(R(+,\cdot), \tau)$, наделённое хаусдорфовой топологией, является непрерывным и открытым гомоморфным образом полного топологического кольца $(\tilde{R}(+,*), \tilde{\tau})$ с хаусдорфовой топологией, и значит, топологическое кольцо $(R(+,\cdot), \tau)$ изоморфно фактор-кольцу топологического кольца $(\tilde{R}(+,*), \tilde{\tau})$ по некоторому идеалу.

Этим теорема полностью доказана. □

Литература

[1] Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. — New York: Marcel Dekker, 1996.