Панорамный взгляд на градуированные структуры от Эйлера и Бурбаки—Краснера до Краснера—Вукович

М. ВУКОВИЧ
Академия наук и искусств Боснии и Герцеговины
e-mail: mvukovic@anubih.ba

УДК 512.552

Ключевые слова: (пара)градуированные группы, кольца, корпоиды, общие алгебраические системы, группоиды, категория.

Аннотация

Статья начинается заметкой об А. В. Михалёве и кратким вступлением к некоторым историческим фактам о градуированных структурах, введённых М. Краснером. Далее даётся обзор более общих градуированных групп Краснера, определяются параградуированные группы Краснера—Вукович и приводятся результаты из теории параградуированных групп.

Abstract

M. Vuković, Panoramic view of graded structures from Euler and Bourbaki–Krasner to Krasner–Vuković, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 3, pp. 23—37.

The paper begins with a note about A. V. Mikhalev and a short introduction to some historic facts about graded structures that are *old as well new* by M. Krasner. Later, we give a panoramic view of more general Krasner graded groups and introduce Krasner–Vuković's paragraded groups and conclude with some results in the theory of paragraded groups.

Посвящается памяти А. В. Михалёва

1. Несколько слов об Александре Васильевиче Михалёве

Несмотря на то что Александр Васильевич ещё совсем маленьким мальчиком пережил все ужасы Великой Отечественной войны вместе со своим героическим народом, ухаживая за ранеными воинами, подбадривая их и читая им новости с поля боя, улыбка не сходила с его лица на протяжении всей жизни, а добро и мудрость светились в его глазах.

Фундаментальная и прикладная математика, 2023, том 24, № 3, с. 23—37.

Ещё в раннем детстве Александр Васильевич почувствовал сильную любовь к математике. После окончания войны, закончив школу с золотой медалью, 15-летним мальчиком он приехал из Брянска в Москву и поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. По словам учителей, Александр Васильевич был незаурядным учеником. Он блестяще, с красным дипломом, закончил обучение и был оставлен работать ассистентом на кафедре высшей алгебры. Благодаря своим успехам А. В. Михалёв стал одним из ярких представителей алгебраической школы, был избран профессором и даже стал проректором университета.

Для меня было большой честью и удачей познакомиться с Александром Васильевичем Михалёвым в 1975 году, когда я приехала из Сараево — бывшей Югославии — на кафедру высшей алгебры механико-математического факультета МГУ в качестве стипендиата правительства СССР. Мне посчастливилось принимать участие в научных семинарах кафедры высшей алгебры под руководством великих математиков: А. И. Кострикина, Л. А. Скорнякова, А. П. Мишиной, А. В. Михалёва, Е. С. Голода и др.

На этих семинарах, а также на заседаниях Московского математического общества, куда собирались многочисленные математики со всей Москвы, а также гости из Европы и всего мира, передо мной открылся новый, невероятно увлекательный мир алгебры (теории колец и модулей, гомологической алгебры, алгебраической геометрии, алгебраической K-теории и т. д.). Я была восхищена и счастлива. Хотя я с самого начала знала, что не смогу в короткие сроки защитить в Москве докторскую диссертацию, я понимала, что многому научусь, и это действительно так. Я вспоминаю те времена с гордостью.

А. В. Михалёв стал основоположником многих новых направлений теоретической и компьютерной алгебры. Я лишь кратко сформулирую те блестящие и тщательно отобранные хорошо известные проблемы, которые он решил один или со своими многочисленными учениками: проблема Бэра—Капланского об описании изоморфизмов и антиизоморфизмов колец эндоморфизмов, проблема Шрайера—Ван дер Вардена об автоморфизмах линейных и унитарных групп над кольцами, проблема Герштейна о лиевских изоморфизмах первичных колец с инволюцией, теория дифференциальных и разностных размерностных полиномов Гильберта—Эйнштейна—Колчина, проблема Рисса—Радона об интегральном представлении мер в топологическом пространстве, проблемы Мальцева об элементарной эквивалентности линейных и алгебраических групп, а также теория градуированных колец и алгебр. Под его руководством более 120 человек защитили кандидатские и докторские диссертации.

И наконец, что ещё можно сказать об Александре Васильевиче?

Мы будем помнить его многие десятилетия как великого учёного, одного из ведущих профессоров алгебры и информатики МГУ, видного деятеля золотого века российской и советской математики, а также великого человека и друга, настоящего великана, который держит в одной руке флаг своей Родины, а в другой факел — символ образования и науки, человека, с лица которого не сходит улыбка.

2. Историческая подоплёка и мотивация

После заметки об Александре Васильевиче Михалёве (раздел 1) и краткой исторической справки и мотивации относительно градуированных структур [3,5,9] (см. также [4,7,10,11,13,14,22]) (раздел 2), окинем «панорамным взглядом» более общие градуированные группы Краснера (раздел 3), определим ещё более общие градуированные группы, называемые параградуированными, которые впервые появились в наших совместных работах с известным французским математиком Марком Краснером в статьях [17—19] и монографии [20], рассмотрим примеры параградуировок, которые не являются градуировками (раздел 4), и, наконец, приведём некоторые важные результаты из теории параградуированных групп (раздел 5).

Начну со слов М. Краснера из введения к французскому изданию его работы «Le viex qui est neuf» [16]: «Градуировки бывают как старые, так и новые».

Действительно, определение градуировки, по крайней мере в свете некоторых примеров, довольно старое. Обычно считается, что градуированные структуры берут своё начало в восемнадцатом веке, в работах Эйлера. А именно, само понятие градуировки было введено Эйлером [6] при определении понятий многочленов и вещественных однородных функций, хотя для случая одной переменной оно было знакомо математикам задолго до Эйлера (Диофант, некоторые арабские математики, а также Виет, Декарт). Следует отметить, что понятие однородности можно найти уже в ранней греческой математике (умножение отрезков) и в некоторых документах вавилонских времен (см. [16]).

Однородность и соответствующие ей степени после Эйлера рассматривались в различных алгебраических структурах (некоторые из этих структур хорошо известны): веса полиномов и функций, размерность геометрических и топологических объектов, порядок дифференциальных операторов и т. д.

Позже понятие $\mathbb{Z}$-градуированного кольца (или, в более общем смысле, $\mathbb{Z}_2$-градуированного, $\mathbb{Z}_3$-градуированного,...) рассматривалось в алгебраической геометрии и топологии (см., например, [21]). Кольца, градуированные абелевой группой, изучались К. Шевалле [5].

Хотя первое относительно общее определение групп, градуированных посредством абелевой группы, было дано Бурбаки в 1960-х годах [3], следует подчеркнуть, что важную роль в развитии теории градуированных структур сыграл Марк Краснер, который гораздо раньше, в 1940-е годы, первым ввёл понятие однородности. А именно, исследуя нормированные поля и связь между их кольцами нормирования, используя эквивалентность нормирований, он пришёл к абстрактному понятию корпоида, с которого и началось развитие понятия однородности [10,11] (см. также [13—15]).

Корпоид, являющийся развитием идей М. Краснера, связанных с понятием однородности, впервые появился в серии его заметок «Comptes Rendus» 1940-х годов, но остался незамеченным. М. Краснер был неприятно удивлён тем, что об этом ничего не было сказано в книге Бурбаки [3].

3. Градуированные группы в смысле Краснера

Абстрактное понятие корпоида [9] (см. также [10—12]) и определение градуировки Бурбаки [3] без требования коммутативности привело Краснера к разработке общей градуированной теории и теории гомогруппоидов, кольцоидов и модулоидов — однородных частей групп, колец и модулей соответственно, где корпоид, как частный случай кольцоида, рассматривался как однородная часть градуированного поля (см. [15]).

Далее будем рассматривать градуированные поля только с тривиальными градуировками.

Приведём введённые М. Краснером определения градуированной группы с «неоднородной» точки зрения и гомогруппоида.

Определение 3.1 [15]. Пусть G — мультипликативная группа с нейтральным элементом e, Δ — непустое множество. Отображение

$$\gamma\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(G), \quad G_\delta = \gamma(\delta) \quad (\delta \in \Delta), \tag{3.1}$$

такое что

$$G = \bigoplus_{\delta\in\Delta} G_\delta,$$

где $\mathrm{Sg}(G)$ — множество всех подгрупп G_δ, $\delta \in \Delta$, группы G, называется градуировкой группы G по Краснеру.

Группа G с заданной градуировкой называется *градуированной* группой.

Градуированная группа называется *абелевой*, если она абелева как абстрактная группа.

Замечание 3.1. Из (3.1), в частности, следует, что

i) G_δ $(\delta \in \Delta)$ является нормальной подгруппой группы G;

ii) если две подгруппы G_δ и $G_{\delta'}$ различны для $\delta, \delta' \in \Delta$, $\delta \neq \delta'$, то элементы $x \in G_\delta$ и $x' \in G_{\delta'}$ перестановочны и $G_\delta \cap G_{\delta'} = \{e\}$.

Определение 3.2 [15]. Градуировка γ группы G называется *строгой*, если $G_\delta \neq \{e\}$, для всех $\delta \in \Delta$.

Обозначим через $\Delta^* = \big\{\delta \in \Delta \mid G_\delta \neq \{e\}\big\}$. Тогда отображение $\gamma^* = \gamma|_{\Delta^*}$ является строгой градуировкой группы G и эта градуировка называется *строгим ядром* градуировки γ.

Определение 3.3 [15]. Элементы $\delta \in \Delta$ называются *типами* или *степенями* (градуировки γ), а соответствующие подгруппы G_δ — *однородными компонентами*.

Определение 3.4 [15].

$$H = \bigcup_{\delta\in\Delta} G_\delta = \Bigg(\bigcup_{\delta\in\Delta^*} G_\delta, \quad \text{если} \quad G \neq \{e\}\Bigg)$$

называется однородной частью градуированной группы G, а элементы $x \in H$ — однородными элементами этой группы.

Определение 3.5 [15]. Для однородного элемента $x \in H$, $x \neq e$, единственный элемент $\xi \in \Delta^*$, для которого $x \in G_\xi$, называется *типом* (или *степенью*) элемента x и обозначается через $\delta(x)$.

Замечание 3.2. Элемент e вообще не имеет типа (степени). Элементы множества $\Delta \setminus \Delta^*$ будем называть пустыми степенями. Если $\Delta \neq \Delta^*$, то один из элементов из $\Delta \setminus \Delta^*$ обозначим через 0, назовём *нулевой степенью* и будем рассматривать его как степень элемента e, т. е. примем, что $\delta(e) = 0$.

Определение 3.6 [15]. Говорят, что градуировка $\gamma\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(G)$ *строгая*, если $\Delta = \Delta^*$, и *собственная*, если $\Delta = \Delta^* \cup \{0\}$.

Легко видеть, что справедливы следующие леммы.

Лемма 3.1. *Градуировка $\gamma\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(G)$ является инъективным отображением тогда и только тогда, когда γ — строгая или собственная градуировка.*

Лемма 3.2. *Пусть G — градуированная группа с градуировкой* (3.1)*. Отображение $\delta\colon H \to \Delta$, где $\delta(x) = \delta$ $(x \in H)$, является инъективным отображением тогда и только тогда, когда градуировка γ является собственной.*

Определение 3.7 ([15], см. также [22]). Пусть G — градуированная группа с двумя градуировками: градуировкой (3.1) и

$$\gamma'\colon \Delta' \to \mathrm{Sg}(G), \quad \gamma'(\delta') = G_{\delta'} \quad (\delta' \in \Delta').$$

Будем говорить, что эти градуировки являются

i) *эквивалентными*, если существует биективное отображение

$$\varphi\colon \Delta \to \Delta', \quad \text{такое что} \quad \gamma(\delta) = \gamma'\bigl(\varphi(\delta)\bigr) \quad \text{для всех} \quad \delta \in \Delta;$$

ii) *слабо эквивалентными*, если их строгие ядра эквивалентны, т. е. существует биективное отображение $\varphi\colon \Delta \to \Delta'$, такое что

$$\gamma^*(\delta) = \gamma'^*\bigl(\varphi(\delta)\bigr) \quad \text{для всех} \quad \delta \in \Delta.$$

Другими словами, градуировки эквивалентны, если их существенные части совпадают вместе со степенями.

Очевидно, что строгие градуировки определяются с точностью до эквивалентности множеством $\{G_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, в то время как нестрогие определяются с точностью до слабой эквивалентности множеством $\{G_\delta \mid \delta \in \Delta^*\}$.

Однородная часть H градуированной группы G вместе со структурой группы G определяет соответствующую градуировку с точностью до слабой эквивалентности. Действительно, если $e \neq a$, $b \in H$ и $a \in G_\delta$, то $b \in G_\delta$ тогда и только тогда, когда $ab \in H$, т. е. множество

$$\bigl\{G(a) := \{x \in H \mid ax \in H\} \mid a \in H^* = H \setminus \{e\}\bigr\}$$

совпадает с множеством $\{G_\delta \mid \delta \in \Delta^*\}$.

Это наблюдение привело к идее определения градуированной группы G из так называемого полуоднородного подхода как упорядоченной пары (G, H), где

$H \subseteq G$ является однородной частью относительно некоторой градуировки группы G, определённой выше. Нам понадобится следующая характеристика однородной части.

Теорема 3.1 ([15], см. также [22]). *Непустое подмножество H группы G является однородной частью G относительно некоторой градуировки группы G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

i) $e \in H$;
ii) $x \in H$ *влечёт* $x^{-1} \in H$;
iii) $x, y, z, xy, yz \in H$ *и* $y \neq e$ *влечёт* $xz \in H$;
iv) $x, y \in H$ *и* $xy \notin H$ *влечёт* $xy = yx$;
v) H *порождает* G;
vi) *если* $n \geqslant 2$ *и элементы* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ *таковы, что для всех* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $x_i x_j \notin H$, *имеем* $x_1 x_2 \ldots x_n \neq e$.

Мультипликативная операция на G индуцирует частичную операцию в H, а именно если $x, y \in H$, то xy определено в H тогда и только тогда, когда $xy \in G$ и xy является элементом H. В этом случае мы говорим, что элементы x, y являются *составляемыми* или *добавляемыми* (в случае аддитивной операции); будем обозначать xy через $x \# y$ [15] (см. также [22, 24]).

Ясно, что $x \# y$ определён тогда и только тогда, когда x, y принадлежат к одной и той же подгруппе $G(a) = \{x \in H \mid ax \in H\}$, $a \in H^* = H \setminus \{e\}$.

Такие частичные структуры $(H, \cdot)$ называются *гомогруппоидами*, а соответствующие градуированные группы $G \supseteq H$ называются (градуированными) *групповыми замыканиями*.

В случае когда H задана вместе с индуцированной операцией из G, мы можем восстановить G с точностью до H-изоморфизма. Действительно, если $a \in H^*$, то $G(a)$ может быть определено как $G(a) = \{x \in H \mid a \# x\}$. В этом случае G является прямой суммой различных подгрупп $G(a)$, а H — однородной частью группы G. Группа G, полученная таким образом, называется линеаризацией структуры $(\bar{H}, \cdot)$, будем обозначать её через $\bar{H} = \bigoplus\limits_{\delta \in H^*} G(a)$ [15] (см. также [22]).

Теперь естественно определить градуированную группу, используя соответствующую однородную часть с точностью до H-изоморфизма, с помощью так называемого однородного подхода. Чтобы сделать это, необходимо охарактеризовать структуру $(H, \cdot)$, являющуюся однородной частью некоторой градуированной группы с частичной операцией, индуцированной операцией, определённой в этой группе.

Теорема 3.2 ([15], см. также [22]). *Структура $(H, \cdot)$ является однородной частью некоторой градуированной группы G с частичной операцией, индуцированной с помощью этой группы, тогда и только тогда, когда*

i) *найдётся* $e \in H$, *такое что для всех* $x \in H$ $x \# e$ *и* $x \cdot e = x$;
ii) $x \# x$ *для всех* $x \in H$;

iii) *для всех* $x, y, z \in H$ $x \# y$, $y \# z$ *и* $y \neq e$ *влечёт* $x \# z$;

iv) *для всех* $a \in H^*$ $H(a) = \{x \in H \mid a \# x\}$ *является группой относительно операции* $\cdot$, *где* $x \# y$ *означает, что* $x \cdot y$ *существует.*

Определение 3.8 ([15], см. также [22]). Структура $(H, \cdot)$ удовлетворяющая теореме 3.2, называется *гомогруппоидом*.

Следовательно, градуированные структуры Краснера более общие, чем структуры Бурбаки, поскольку они не требуют от множества Δ ни ассоциативности, ни коммутативности, ни наличия нейтрального элемента, требуется лишь, чтобы множество Δ было непустым.

Кроме того, градуированные структуры Краснера характеризуются только определяющей абстрактной группой и однородным множеством (или даже только однородным подмножеством) и снабжены операцией (операциями), индуцируемой операцией (операциями) структуры.

Точнее, аксиомы, определённые в градуированных группах Краснера, дают возможность использовать три метода исследования, которые в принципе эквивалентны:

1) *неоднородный*, при котором G рассматривается как группа с определённой градуировкой;
2) *полуоднородный*, при котором G рассматривается как пара $\{G, H\}$, состоящая из группы и её однородной части $H \subseteq G$, называемой *гомогруппоидом*, причём градуировка группы G может быть определёна (с точностью до эквивалентности) с помощью однородной части H;
3) *однородный*, при котором рассматривается гомогруппоид $(H, \cdot)$ и может быть определена его линеаризация $(\overline{H, \cdot})$, т. е. градуированная группа, для которой $(H, \cdot)$ является её однородной частью.

Безусловно, следует подчеркнуть, что ни градуированные структуры, которые определили Бурбаки, ни более общие градуированные структуры Краснера: группы, кольца, модули, а также их однородные части: гомогруппоиды, кольцоиды и модулоиды соответственно не образуют категорий, замкнутых относительно взятия прямых произведений и прямых сумм.

Это послужило мотивацией для Марка Краснера и меня сосредоточиться на этой очень интересной проблеме.

4. Параградуированные группы Краснера—Вукович

Было много значительных открытых проблем, которые естественным образом возникали в теории градуированных структур, но нет никаких сомнений в том, что на протяжении более двадцати лет одной из важных проблем в теории градуированных структур была проблема замкнутости относительно взятия прямых произведений и прямых сумм.

Поэтому целью наших совместных исследований с М. Краснером было найти градуированные структуры: группы, кольца, модули, которые обобщают классические градуированные структуры и в то же время обладают замыканием относительно взятия прямой суммы и прямого произведения в том смысле, что носителем однородного подмножества композиции (прямой суммы или прямого произведения) является прямая сумма или прямое произведение компонент.

Новые подходы к теории градуированных структур помогли нам с М. Краснером преодолеть, казалось бы, трудные препятствия, привели нас к решению этой проблемы и, таким образом, заложили основы новой теории — наиболее общих градуированных структур, называемых параградуированными, — которая обобщает не только теорию градуированных структур, представленную Бурбаки [3], но также и предыдущие результаты М. Краснера [15], М. Шадейра [5] и других.

Этот раздел посвящён неоднородному подходу к понятию параградуированных групп, который впервые появился в моих статьях [17—19] и монографии [20], написанной совместно с известным французским математиком М. Краснером.

Сначала мы представим обзор основных определений и результатов, а затем рассмотрим примеры, в которых параградуировки не являются градуировками.

Определение 4.1 ([20], см. также [17,22]). Пусть G — мультипликативная группа с нейтральным элементом e. Отображение

$$\pi\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(G), \quad \pi(\delta) = G_\delta \quad (\delta \in \Delta),$$

частично упорядоченного множества $(\Delta, <)$, которое является полной полурешёткой (снизу) и индуктивно упорядоченно сверху, во множество $\mathrm{Sg}(G)$ подгрупп группы G называется параградуировкой, если оно удовлетворяет следующим шести аксиомам.

(i) $\pi(0) = G_0 = \{e\}$, где $0 = \inf\{\Delta\}$; $\delta < \delta'$ влечёт $G_\delta \subseteq G_{\delta'}$.

Замечание 4.1.

r1. $H = \bigcup\limits_{\delta\in\Delta} G_\delta$ называется однородной частью группы G относительно π, а элементы $x \in H$ — однородными элементами группы G.

r2. Для каждого элемента $x \in H$ определим его тип (степень)

$$\delta(x) = \inf\{\delta \in \Delta \mid x \in G_\delta\}.$$

Ясно, что $\delta(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = e$. Элементы $\delta(x)$, $x \in H$, называемые главными степенями, образуют множество Δ_p, которое называется главной частью Δ. Ограничение $\pi|_{\Delta_p}$ называется собственным ядром π.

(ii) Если $\theta \subseteq \Delta$, то $\bigcap\limits_{\delta\in\Delta} G_\delta = G_{\inf\theta}$.

(iii) Если $x, y \in H$ и $yx = zxy$, то $z \in H$ и $\delta(z) \leqslant \inf\big(\delta(x), \delta(y)\big)$.

Замечание 4.2. $z = yxy^{-1}x^{-1}$ — коммутатор элементов y и x — будем обозначать через $z(x, y)$.

(iv) Однородная часть H является порождающим множеством для G.

(v) Пусть $A \subseteq H$ — такое подмножество, что для всех $x, y \in A$ существует верхняя грань для $\delta(x), \delta(y)$. Тогда существует верхняя грань для всех $\delta(x)$, $x \in A$.

(vi) Группа G порождается H с помощью множества $\boldsymbol{R}$ H-внутренних и левых перестановочных соотношений:

— $xy = z$ (H-внутренние соотношения),
— $yx = z(x, y)xy$ (левые перестановочные соотношения).

Группа с заданной параградуировкой называется параградуированной группой.

Определение 4.2 ([20], см. также [22]). Отображение π из определения 4.1, удовлетворяющее аксиомам (i)—(v) и аксиоме

(vi′) если $\delta_1, \ldots, \delta_s \in \Delta_p$ попарно несравнимы и если $x_i, x_i' \in H$, $i = 1, \ldots, s$, таковы, что $x_1x_2 \ldots x_s = x_1'x_2' \ldots x_s'$ и $x_i, x_i' \in G_\delta$ для каждого $i = 1, \ldots, s$, то $\delta(x_i^{-1}x_i') < \delta_i$,

называется экстраградуировкой.

Группа с заданной экстраградуировкой называется экстраградуированной группой.

Замечание 4.3. Аксиома (v) эквивалентна аксиоме

(v′) пусть $A \subseteq H$ — такое подмножество, что для всех $x, y \in A$ имеем $xy \in H$. Тогда существует такой элемент $\delta \in \Delta$, для которого $A \subseteq G_\delta$.

Следующее утверждение очень важное.

Теорема 4.1 ([20], см. также [17, 24]). *Экстраградуированная группа является параградуированной группой, т. е. экстраградуированная группа G порождается H с помощью отношений $\boldsymbol{R}$.*

Из данной теоремы следует, что каждая экстраградуировка является в то же время параградуировкой.

Хорошо известно, что существует большой класс экстраградуировок (параградуировок), которые являются градуировками [20]. Однако существуют примеры параградуировок, не являющихся градуировками.

Сначала рассмотрим примеры параградуировок, являющихся градуировками [20].

Пример 4.1. Предположим, что $\Delta = \Delta^* \cup \{0\}$ является множеством, в котором все элементы $\delta \in \Delta^*$ больше 0 и попарно несравнимы. Тогда

$$\inf(\delta, \delta') = 0 \quad \text{для всех} \quad \delta \neq \delta' \quad (\delta, \delta' \in \Delta^*).$$

Следовательно, $G_\delta \cap G_{\delta'} = \{e\}$ и для $x \in G_\delta$, $y \in G_{\delta'}$ справедливо $\delta\big(z(x, y)\big) = 0$, следовательно, $z(x, y) = e$, т. е. $yx = xy$.

Если $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ — различные элементы Δ^* и

$$x_1 x_2 \dots x_n = x_1' x_2' \dots x_n' \quad (x_i, x_i' \in H) \quad \text{и} \quad \delta(x_i), \delta(x_i') < \delta_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

то согласно определению 4.2 (vi′) получим, что $\delta(x_i^{-1} x_i') < \delta_i$, следовательно, $\delta(x_i^{-1} x_i') = 0$, и $x_i^{-1} x_i' = e$, следовательно, $x_i = x_i'$. Значит, G является прямой суммой подгрупп:

$$G = \bigoplus_{\delta \in \Delta^*} G_\delta = \bigoplus_{\delta \in \Delta} G_\delta.$$

Это означает, что такая экстраградуировка являются градуировкой, все пустые степени которой можно принять равными e.

Обратно, градуировка, которая имеет все однородные элементы со степенями, является экстраградуировкой с соответствующим набором степеней.

Пример 4.2. Предположим, что $\Delta = \Delta^* \cup \{\omega, 0\}$, где все элементы $\delta \in \Delta^*$ больше ω, попарно несравнимы и $\omega > 0$. Следовательно, если элементы $\delta, \delta' \in \Delta^*$ различны, то $\inf(\delta, \delta') = \omega$, поэтому $G_\delta \cap G_{\delta'} = G_\omega$, и следовательно, если $x \in G_\delta$, $y \in G_{\delta'}$, $\delta\bigl(z(x,y)\bigr) \leqslant \omega$, следовательно, $z(x,y) \in G_\omega$.

Поэтому элементы множества G_ω перестановочны со всеми элементами из G_δ для любого $\delta \in \Delta^*$, а значит и со всеми элементами из $H = \bigcup\limits_{\delta \in \Delta^*} G_\delta$, а так как H порождает группу G, то они перестановочны со всеми элементами из G. Поэтому G_ω — нормальная подгруппа группы G.

С другой стороны, все элементы $x, y \in G$ перестановочны по модулю G_ω. Следовательно,

$$G/G_\omega = \bigoplus_{\delta \in \Delta^*} (G_\delta / G_\omega).$$

Это означает, что G является квазиградуированной группой, центром которой является множество $C = G_\omega$ и $\pi\colon \Delta_p \to \mathrm{Sg}(G)$ — квазиградуировка [20]. С другой стороны, очевидно, что экстраградуировка квазиградуированной группы имеет данный вид.

Далее приведём пример параградуировки, которая не является градуировкой.

Пример 4.3. Пусть A — кольцо. Рассмотрим кольцо верхнетреугольных матриц

$$R = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

и положим

$$R_{\delta_1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{\delta_2} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{\delta_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad R_{\delta_4} = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через Δ множество $\{0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, где для удобства положим $\delta_0 = 0$. Множество Δ частично упорядоченно и является полной полурешёткой снизу и индуктивно упорядоченным относительно порядка

$$\delta_i < \delta_j \Longleftrightarrow R_{\delta_i} \subseteq R_{\delta_j}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Легко видеть, что отображение $\pi\colon \delta_i \to R_{\delta_i}$, $\delta_i \in \Delta$, является параградуировкой, но оно не является градуировкой, так как $R_{\delta_1} \cap R_{\delta_3} = R_{\delta_1} \neq R_0$.

Таким образом, мы видим, что существуют параградуировки, не являющиеся градуировками.

Однако каждая градуировка представляет собой особую параградуировку. Для этого достаточно, если набор пустых степеней был хорошо упорядочен, взять пустую степень 0 в качестве первого элемента, а остальные положить взаимно несравнимыми существенными степенями.

5. Некоторые важные результаты, касающиеся параградуированных групп

Для семейства параградуированных групп естественным образом определяются прямое произведение и прямая сумма. Это снова параградуированные группы, при этом прямая сумма является однородной подгруппой прямого произведения.

Прямое произведение и прямая сумма параградуированных групп являются экстраградуированными группами тогда и только тогда, когда все сомножители являются экстраградуированными группами. Однако прямое произведение градуированных групп является лишь экстраградуированной группой, за исключением случаев, когда не более одного сомножителя имеют нетривиальную градуировку, т. е. $\Delta_\alpha \neq \{0\}$.

Определим прямое произведение и прямую сумму для параградуированных групп.

Пусть $\{(G_\alpha, \cdot, \pi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ — семейство параградуированных групп с параградуировками $\pi_\alpha\colon \Delta_\alpha \to \mathrm{Sg}(G_\alpha)$, $\alpha \in A$, где $(\Delta_\alpha, <)$ — множество степеней $(G_\alpha, \cdot, \pi_\alpha)$ и e_α — нейтральные элементы.

Определим прямое произведение $G = \prod\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ и прямую сумму $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ параградуированных групп $(G_\alpha \mid \alpha \in A)$ соответственно с нейтральным элементом $e = (e_\alpha \mid \alpha \in A)$.

Ясно, что и прямое произведение, и прямая сумма являются группами относительно операции $\cdot$, определённой для $x = (x_\alpha \mid \alpha \in A)$, $y = (y_\alpha \mid \alpha \in A) \in G$ по правилу

$$x \cdot y = (x_\alpha \cdot y_\alpha \mid \alpha \in A).$$

Согласно следующей теореме, приведённой в [20] без доказательства (см. также [25]), эти группы являются параградуированными.

Теорема 5.1. *Группы*

$$\prod_{\alpha\in A} G_\alpha \quad \text{и} \quad \bigoplus_{\alpha\in A} G_\alpha$$

являются параградуированными с параградуировками

$$\pi\colon \Delta = \prod_{\alpha\in A} \Delta_\alpha \to \mathrm{Sg}\biggl(\prod_{\alpha\in A}(G_\alpha, +)\biggr),$$

где

$$\pi(\delta) = (\pi_\alpha(\delta_\alpha) \mid \alpha \in A) = \prod_{\alpha\in A} \pi_\alpha(\delta_\alpha).$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, мы введём ещё несколько понятий и докажем следующую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть* $\Delta = \prod\limits_{\alpha\in A} \Delta_\alpha$ *— прямое произведение множеств* Δ_α, $\alpha \in A$, *со следующим порядком: если*

$$\delta = (\delta_\alpha \in \Delta_\alpha \mid \alpha \in A),\ \delta' = (\delta'_\alpha \in \Delta_\alpha \mid \alpha \in A) \in \Delta,$$

то

$$\delta \leqslant \delta' \Longleftrightarrow \delta_\alpha \leqslant \delta'_\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha \in A.$$

Множество $(\Delta, <)$ *является упорядоченным, так как упорядоченны* Δ_α, $\alpha \in A$.

Доказательство. Действительно, если $\bar{\Delta} \subseteq \Delta$, то

$$\{\inf\{\delta_\alpha \mid \delta = (\delta_\beta \mid \beta \in A) \in \bar{\Delta}\} \mid \alpha \in A\} = \inf_{\delta\in\bar{\Delta}} \delta,$$

и если m_α, $\alpha \in A$, — верхняя грань $\{\delta_\alpha \mid \delta = (\delta_\beta \mid \beta \in A) \in T\}$, где T — цепь в Δ, то $m = (m_\alpha \mid \alpha \in A)$ — верхняя грань для T. □

Вернёмся к доказательству теоремы 5.1.

Доказательство. Осталось доказать, что отображение $\pi\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(G)$ удовлетворяет аксиомам (i)—(vi) определения 4.1.

Имеем

$$\pi(0_\alpha \in \Delta_\alpha \mid \alpha \in A) = \prod_{\alpha\in A} \pi_\alpha(0_\alpha) = \prod_{\alpha\in A} e_\alpha = (e_\alpha \mid \alpha \in A) = e.$$

Пусть $\delta = (\delta_\alpha \in \Delta_\alpha \mid \alpha \in A)$, $\delta' = (\delta'_\alpha \in \Delta_\alpha \mid \alpha \in A) \in \Delta$ и $\delta < \delta'$. Тогда

$$\delta_\alpha < \delta'_\alpha, \quad \alpha \in A,$$

и поэтому

$$\pi_\alpha(\delta_\alpha) \subseteq \pi_\alpha(\delta'_\alpha), \quad \alpha \in A.$$

Следовательно,

$$\pi(\delta) \subseteq \pi(\delta').$$

Таким образом, (i) выполнено.

Δ — частично упорядоченный набор степеней, который является полной полурешёткой снизу и индуктивно упорядочен, и

$$\bigcap_{\delta_\alpha \in \theta_\alpha} G_{\delta_\alpha} = G_{\inf\ \theta_\alpha}$$

поскольку

$$\theta = \prod_{\alpha \in A} \theta_\alpha \subseteq \Delta.$$

Таким образом, (ii) выполнено.

Пусть $x, y \in H = \prod\limits_{\alpha \in A} H_\alpha$ и

$$yx = zxy, \quad x = (x_\alpha \mid \alpha \in A),\ y = (y_\alpha \mid \alpha \in A),\ z = (z_\alpha \mid \alpha \in A).$$

Тогда

$$y_\alpha x_\alpha = z_\alpha x_\alpha y_\alpha \quad (\alpha \in A),$$

откуда следует, что

$$z_\alpha \in H_\alpha \quad (\alpha \in A)$$

и

$$\delta(z_\alpha) \leqslant \inf\bigl(\delta(x_\alpha), \delta(y_\alpha)\bigr) \quad (\alpha \in A).$$

Следовательно,

$$\delta(z) \leqslant \inf\bigl(\delta(x), \delta(y)\bigr),$$

что означает, что (iii) выполнено.

Так как множество H_α является порождающим для G_α, то H является порождающим для G. Таким образом, справедливо (iv).

Пусть $A \subseteq H$ — подмножество, такое что

$$xy \in H, \quad x = (x_\alpha \mid \alpha \in A), y = (y_\alpha \mid \alpha \in A) \in H.$$

Следовательно, $x_\alpha y_\alpha \in H_\alpha$ $(\alpha \in A)$ и существует $\delta_\alpha \in \Delta_\alpha$, такое что $A_\alpha \subseteq G_{\delta_\alpha}$. Таким образом,

$$A \subseteq G_\delta, \quad \delta = \prod_{\alpha \in A} \delta_\alpha,$$

и эквивалентные (v′) и (v) выполняются.

Каждая G_α порождается H_α с помощью соотношений $\boldsymbol{R}$, что означает, что те же самые соотношения порождают G. □

Теперь мы сформулируем и докажем одно из основных свойств параградуированных групп.

Теорема 5.2. *Однородная часть H прямого произведения и прямой суммы параградуированных групп является соответственно прямым произведением и прямой суммой однородных частей сомножителей.*

Доказательство. Действительно, пусть H_α — однородная часть G_α, $\alpha \in A$. Тогда

$$H = \bigcup_{\delta\in\Delta} \pi(\delta) = \bigcup_{\delta\in\Delta} (\pi_\alpha(\delta_\alpha) \mid \alpha \in A) = \bigcup_{\delta\in\prod_{\alpha\in A}\Delta_\alpha} \big(\pi_\alpha(\delta_\alpha) \mid \alpha \in A\big) = \\ = \prod_{\alpha\in A} \bigcup_{\delta_\alpha\in\Delta_\alpha} \big(\pi_\alpha(\delta_\alpha)\big) = \prod_{\alpha\in A} H_\alpha,$$

что несправедливо в категории градуированных групп [15]. □

Литература

[1] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[2] Balaba I. N., Mikhalev A. V. Graded division rings // Sarajevo J. Math. — 2018. — Vol. 15, no. 1. — P. 1—8.

[3] Bourbaki N. Algèbre. Chap. I. — Paris: Herman, 1962.

[4] Chadeyras M. Essai d'une théorie noethérienne homogène pour les anneaux commutatifs dont la graduation est aussi générale que possible // Bull. Soc. Math. France. Mémoire No. 22, Suppl. — 1970. — P. 1—143.

[5] Chevalley C. The Construction and Study of Certain Important Algebras. — Tokyo: Publ. Math. Soc. Japan, 1955.

[6] Euler L. Arithmetique universelle. — Saint Pétersbourg, 1768, 1769.

[7] Halberstadt E. Théorie artinienne homogène des anneaux gradués à grades non commutatifs réguliers: Thèse doct. sci. math. — Paris: Univ. Pierre et Marie Curie, 1971.

[8] Ilić-Georgijević E., Vuković M. The Wedderburn–Artin Theorem for Paragraded Rings // J. Math. Sci. — 2017. — Vol. 221, no. 3. — P. 391—400.

[9] Krasner M. Une généralisation de la notion de corps-corpoïde. Un corpoïde remarquable de la théorie des corps values // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1944. — Vol. 219. — P. 345—347.

[10] Krasner M. Hypergroupes moduliformes et extramoduliformes // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1944. — Vol. 219. — — P. 473—476.

[11] Krasner M. Théorie de la ramification dans les extensions finies des corps values: Hyper-groupe d'inertie et de ramification; Théorie extrinsèque de la ramification // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1945. — Vol. 220. — P. 28—30.

[12] Krasner M. Quelques méthodes nouvelles dans la théorie des corps values complets // in: Algèbre et théorie des nombres. — - Colloq. Int. C. N. R. S. 24, Paris, 1949. — Paris: C. N. R. S., 1950. — P. 29—39.

[13] Krasner M. Congruences multiplicatives, Squelettes et corpoïdes // Séminaire Krasner, 1953—54. Vol. 1, no. 4. — Paris: Secrétariat Math. Fac. Sci., 1955.

[14] Krasner M. Théorie élémentaire des corpoïdes commutatifs sans torsion // in: Séminaire Krasner, 1953—54. Vol. 2, no. 5. — Paris: Secrétariat Math. Fac. Sci., 1956.

[15] Krasner M. Anneaux gradués généraux // Colloque d'algèbre. — Univ. Rennes I, 1980. — P. 209—308.

[16] Krasner M. Le vieux qui est noef // Rev. Roum. Math. Pures Appl. — 1982. — Vol. 27. — P. 443—472.

[17] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). I // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1986. — Vol. 62, no. 9. — P. 350—352.

[18] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). II // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1986. — Vol. 62, no. 10. — P. 389—392.

[19] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). III // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1987. — Vol. 63, no. 1, — P. 10—12.

[20] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules) // Queen's Papers Pure Appl. Math., No. 77. — Kingston: Queen's Univ. Press, 1987.

[21] Samuel P., Zarisky O. Commutative Algebra. Vol. 2. — Prinston: D. Van Nostrand, 1960.

[22] Vuković M. Structures graduées et paragraduées: Prepubl. de l'Institut Fourier, Univ. de Grenoble I. No. 536. — 2001.

[23] Vuković M. From Bourbaki's and Krasner's graduations to Krasner—Vuković's paragraduations // 14th General Conf. European Woman in Mathematics, Novi Sad, Serbia, 2009. Book of Abstracts, II. — P. 25—28.

[24] Vuković M. Od graduiranih do paragraduiranih grupa i prstena // Hommage to Acad. Veselin Perić. — Banja Luka, 2011. — P. 69—119.

[25] Vuković M. From Krasner's corpoid and Bourbaki's graduations to Krasner's graduations and Krasner—Vuković's paragraduations // Sarajevo J. Math. — 2018. — Vol. 14 (27), no. 2. — P. 175—190.

[26] Vuković M. Paragraded rings and some open questions in this theory // Contemp. Math. Problems. Conf. Dedicated to Prof. M. Pikula, Trebinje, 12—13. october 2018. — P. 1—11.

[27] Vuković M. On noncommutative paragraded rings // Sarajevo J. Math. — 2020. — Vol. 16, no. 1. — P. 5—11.

[28] Vuković M. Radicals of paragraded rings // J. Math. Sci. — 2023. — Vol. 275, no. 4. — P. 373—392.

[29] Vuković M. Graded Structures in Krasner's and Paragraded in Krasner—Vuković's Sense. — Monograph in preparation.

[30] Vuković M., Ilić-Georgijević E. Paragraded rings and their ideals // J. Math. Sci. — 2013. — Vol. 191, no. 5. — P. 654—660.