Топологические радикалы Джекобсона. III*

С. Т. ГЛАВАЦКИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: glavatsky_st@mail.ru

А. Ю. ГОЛУБКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: artgolub@hotmail.com

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.556+512.556.2+512.556.5

Ключевые слова: левое (правое) представление алгебры в многообразии, ассоциативный слева (справа) элемент, радикал Джекобсона (Смайли—Клейнфелда—Жевлакова) альтернативных алгебр, топологически α-квазирегулярный элемент, α-ограниченная алгебра, α-модулярный подмодуль, топологически квазирегулярный элемент альтернативной (линейной йордановой) алгебры, слабо Σ-разрешимая алгебра, Σ-2-ниль-алгебра, Σ-алгебраический элемент над идеалом.

Аннотация

В работе приводятся варианты топологических радикалов Джекобсона алгебр в квазирегулярном и модульном вариантах определения, которые используют идеи конструкции радикала Брауна—Маккоя и описания радикала Джекобсона альтернативных алгебр.

Abstract

S. T. Glavatsky, A. Yu. Golubkov, A. V. Mikhalev, Topological Jacobson radicals. III, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 3, pp. 39—103.

This paper presents variants of the topological Jacobson radical of algebras in quasi-regular and modular versions of the definition, which use the ideas of the construction of the Brown–McCoy radical and the descriptions of the Jacobson radical of alternative algebras.

1. Введение

Обобщение конструкции топологического радикала Джекобсона ассоциативных колец из [1, 2] с использованием понятия модуля в многообразии требует в первую очередь построения неассоциативного модульного варианта радикала Джекобсона. Радикалы такого рода приведены во второй части работы. Вместе с тем топологический радикал Джекобсона из [1] также требует уточнений, так

*Работа третьего автора финансово поддержана Российским научным фондом, грант 22-11-00052.

Фундаментальная и прикладная математика, 2023, том 24, № 3, с. 39—103.

как стандартный для ассоциативной ситуации переход от неприводимого модуля над идеалом к неприводимому модулю над алгеброй в [1] не обсуждается (это не позволяет говорить об отображении из [1] как о радикале в смысле Куроша—Амицура). Одно из решений данной задачи — наложение дополнительных ограничений на алгебры и модули, предложенное в четвёртой части работы. Переход от ассоциативных алгебр к другим многообразиям алгебр исключает в общем случае рассмотрение неприводимого модуля над алгеброй как неприводимого модуля над её идеалами, не входящими в аннулятор модуля, и вынуждает требовать включение радикалов идеалов в радикал алгебры. Выполнение этого можно обеспечить поэлементными (квазирегулярными) описаниями радикала для многообразий алгебр с вариантами леммы Андерсона—Дивинского—Сулиньского. Необходимые сведения о топологической квазирегулярности получены напрямую из построений [4] и рассмотрены в третьей части работы, там же выведены топологические аналоги результатов [5, гл. 10, 14] для альтернативных и линейных йордановых алгебр.

Всюду далее F — любое ассоциативное коммутативное (топологическое в третьей и четвёртой частях работы) кольцо с 1. Рассматриваемые левые (правые) F-модули унитарны и по умолчанию снабжены структурой правого (левого) F-модуля с идентичным левым и правым действием, все классы F-алгебр содержат нулевую алгебру и замкнуты относительно взятия изоморфных копий (гомеоморфных изоморфных копий для классов топологических F-алгебр). Если R — F-алгебра, то

$$Z(R) = \{x \in R \mid [x, y] = (x, y, z) = (y, x, z) = (y, z, x) = 0 \text{ для любых } y, z \in R\} \text{ —}$$

центр R, где $[a, b] = ab - ba$, $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$, FX, $\langle X\rangle$ и $(X)_R$ — F-подмодуль, подалгебра и идеал R, порождённые множеством $X \subseteq R$, $R^1 = F \oplus R$ — алгебра, полученная присоединением 1 к R ($R, F \subset R^1$). Для любой подалгебры $A \subseteq R$ выделим в алгебре $\mathrm{End}_F(R)$ эндоморфизмов F-модуля R подалгебры

$$M^R(A) = \langle L^R(A), R^R(A)\rangle, \quad T^R(A) = \langle t_a \mid a \in A\rangle, \quad S_1^R(A) = F\,\mathrm{Id}_R + S^R(A),$$

$(t, T) = (l, L), (r, R)$, $S = L, R, M$, где Id_R — тождественный изоморфизм R, $l_a\colon r \mapsto ar$, $r_a\colon r \mapsto ra$, $r \in R$, — операторы левого и правого умножения на элемент $a \in A$ в R, $S^R(R) = S(R)$, $S = M, L, R$, — алгебра умножений, левых умножений, правых умножений R.

По определению любой класс F-алгебр $\mathfrak{M}$, на котором определён радикал в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$, замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Радикал $\mathcal{T}$ на $\mathfrak{M}$ называется *наднильпотентным*, если алгебры с нулевым умножением из $\mathfrak{M}$ $\mathcal{T}$-радикальны, и *идеально наследственным*, если $\mathcal{T}(I) = I \cap \mathcal{T}(R)$, $I \lhd R \in \mathfrak{M}$.

Напомним, что многообразие F-алгебр $\mathfrak{M}$ называется *унитарно замкнутым*, если $R^1 \in \mathfrak{M}$ для всех $R \in \mathfrak{M}$.

В отличие от основной массы источников отделимость топологии рассматриваемых алгебраических структур не является обязательным условием в данной работе и будет накладываться по необходимости. Использование отделимости вместо первой аксиомы отделимости обусловлено их равносильностью для топологических абелевых групп. Для краткости далее *компакт* — отделимое (хаусдорфово) компактное пространство.

Топологические модули над топологическими ассоциативными кольцами определяются аналогично линейным топологическим пространствам. В четвёртой части работы вводится более общее понятие топологического модуля в многообразии алгебр (для ассоциативных алгебр топологического ассоциативного модуля), которое отлично от данного для недискретных ассоциативных колец и модулей, так как не требует непрерывности отображения произведения алгебры и модуля в модуль, определяющего действие алгебры.

Алгебра R над топологическим кольцом F с топологией, в которой непрерывны операции сложения, умножения и умножения на элементы F, называется *топологической F-алгеброй*. Её расширение R^1 — топологическая алгебра с топологией произведения F и R, топологии F и R индуцированы топологией R^1. Как и в линейных топологических пространствах, $B+V = \{b+v \mid b \in B,\ v \in V\}$, fV, $xV = Vx$ открыты в R для любых непустых $B \subseteq R$ и открытого $V \subseteq R$, обратимых $f \in F$ и $x \in Z(R)$ (для R с 1). Замыкание $B \subseteq X$ в топологическом пространстве X мы будем обозначать через $[B]$ ($[B]_X$, если требуется указание X).

Понятие топологического радикала на замкнутом относительно взятия идеалов (с топологией, индуцированной топологией алгебры) и непрерывных гомоморфных образов (образов при действии непрерывных гомоморфизмов) классе топологических F-алгебр $\mathfrak{M}$ вводится по аналогии с радикалом алгебр в смысле Куроша—Амицура с заменой гомоморфизмов алгебр на их непрерывные гомоморфизмы, рассмотрением фактор-алгебр с фактор-топологией и наложением требования замкнутости радикала алгебры.

Топологическая F-алгебра R называется *Σ-нильпотентной* (*Σ-разрешимой*), если для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдётся такой $n = n(U) \geqslant 1$ ($n \geqslant 0$), что $R^n \subseteq U$ ($R^{(n)} \subseteq U$). Назовём топологический радикал $\mathcal{T}$ на классе $\mathfrak{M}$ *Σ-наднильпотентным* (*Σ-надразрешимым*), если Σ-нильпотентные (Σ-разрешимые) алгебры из $\mathfrak{M}$ $\mathcal{T}$-радикальны. Идеальная наследственность топологических радикалов определяется как и ранее для дискретных радикалов в смысле Куроша—Амицура.

2. Радикал Джекобсона, модульная версия

Начнём с модульной версии определения радикала Джекобсона, построенной на выводах [5, гл. 10, 11]. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие F-алгебр, $F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle$ — свободная алгебра в $\mathfrak{M}$ с множеством свободных порождающих $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $T(F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle)$ — тензорная алгебра F-модуля $F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle$, ${}_lI_{\mathfrak{M}}$ — *идеал L-тождеств* $\mathfrak{M}$, т. е. ядро гомоморфизма алгебр

$$T(F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle) \ni f\cdot 1 + \sum_i f_1^{(i)}\otimes\ldots\otimes f_{n_i}^{(i)} \mapsto f\,\mathrm{Id}_{F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle} + \sum_i l_{f_1^{(i)}}\cdots l_{f_{n_i}^{(i)}} \in \mathrm{End}(F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle)_F,$$

$f \in F$, $f_j^{(i)} \in F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle$, продолжающего гомоморфизм F-модулей $l\colon g \mapsto l_g$, $g \in F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle$ (*идеал* ${}_rI_{\mathfrak{M}}$ *R-тождеств* $\mathfrak{M}$ определяется аналогично для $r\colon g \mapsto r_g$, $g \in F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle$). Для любой алгебры $A \in \mathfrak{M}$ обозначим через ${}_lI_{\mathfrak{M}}[A]$ сумму образов ${}_lI_{\mathfrak{M}}$ при действии гомоморфизмов $T(F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle) \to T(A)$, которые продолжают гомоморфизмы $F_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle \to A$ (${}_lI_{\mathfrak{M}}[A]$ составляют образы элементов ${}_lI_{\mathfrak{M}}$ при действии таких гомоморфизмов). Если M — правый F-модуль, $\alpha\colon A \to \mathrm{End}(M)_F$ и $\phi\colon \mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A) = T(A)/{}_lI_{\mathfrak{M}}[A] \to \mathrm{End}(M)_F$ — гомоморфизмы F-модулей и алгебр с единицей, такие что $\alpha(a) = \phi(a + {}_lI_{\mathfrak{M}}[A])$, $a \in A$, то α называется *левым представлением* A *в* $\mathfrak{M}$, $M = {}_AM_F$ с композицией $ax = \alpha(a)x$, $a \in A$, $x \in M$, — *левым* A*-модулем в* $\mathfrak{M}$. Обозначим через $K_\alpha(A)$ наибольший из $I \lhd A$, $I \subseteq \mathrm{Ker}\,\alpha = \mathrm{Ann}_A M$. Если $K_\alpha(A) = \{0\}$ ($\mathrm{Ann}_A M = \{0\}$), M называется *почти точным* (*точным*). Понятия неприводимого и унитарного (для A с 1) A-модуля в $\mathfrak{M}$ вводятся как в ассоциативном случае. По умолчанию во всех утверждениях работы условия на неприводимые модули накладываются при их наличии.

Назовём элемент $x \neq 0$ левого A-модуля M в $\mathfrak{M}$ *ассоциативным слева* (*справа*), если $a(bx) = (ab)x$ ($a(bx) = (ba)x$), $a, b \in A$. Если $\mathfrak{M}$ унитарно замкнуто, $x \in M$ ассоциативен справа, то x ассоциативен справа в правом A-модуле $M' = Fx + Ax$ в $\mathfrak{M}$ с $z \cdot a = az$, $z \in M'$, $a \in A$ (см. [5, предложение 4, с. 263] для гомоморфизма алгебр с единицей

$$R_1^{A^1}(A) \ni \psi \mapsto \psi' \in \mathrm{End}_F(M'), \quad (fx + ax)\psi' = \big((f + a)\psi\big)x \quad (f \in F,\ a \in A)$$

с учётом $(\mathrm{Ann}_{A^1} x)A \subseteq \mathrm{Ann}_{A^1} x = \{f + a \mid f \in F,\ a \in A,\ fx + ax = 0\}$ (корректность определения ψ') и отождествления левого и правого действия F на M). Если $x \in Ax = M'$, условие унитарной замкнутости $\mathfrak{M}$ можно опустить и заменить A^1 на A.

Если $I \lhd A$, x — ассоциативный слева (справа) элемент левого I-модуля M в $\mathfrak{M}$ и $I(A\,\mathrm{Ann}_I x) \subseteq \mathrm{Ann}_I x$ $\big(\big((\mathrm{Ann}_I x)A\big)I \subseteq \mathrm{Ann}_I x\big)$, то такой x мы будем называть *сильно ассоциативным слева* (*справа*). Данное условие существенно для $I \neq A$.

Положим $\mathcal{J}_l(A)$ ($\mathcal{J}_r(A)$) равным пересечению идеалов $K_\alpha(A)$ алгебры $A \in \mathfrak{M}$ для всех её неприводимых левых (правых) представлений α в $\mathfrak{M}$ при их наличии и A в противном случае, $\mathcal{J}(A) = \mathcal{J}_l(A) \cap \mathcal{J}_r(A)$.

Элемент a F-алгебры A называется α_S*-квазирегулярным*, если $\tau(1 - a) = 1 \in A^1$ для некоторого $\tau \in S(A^1)$, $S = L, R, M$. Алгебры, состоящие из таких элементов (α_S*-квазирегулярные алгебры*), формируют радикальный подкласс класса всех F-алгебр, которому соответствует нижний радикал (α_S*-квазирегулярный радикал*) $\mathcal{J}_{\alpha_S}$ (см. [4, теорема 2.1]). Любая F-алгебра A содержит наибольший идеал $\mathcal{J}'_{\alpha_S}(A)$ среди идеалов A, состоящих из её α_S-квазирегулярных элементов, $\mathcal{J}'_{\alpha_S}(A) = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{P}_{\alpha_S}(A)} \hat{M}$, где $\mathcal{P}_{\alpha_L}(A)$ ($\mathcal{P}_{\alpha_R}(A)$) — множество всех максимальных модулярных левых (правых) идеалов A и $\mathcal{P}_{\alpha_M}(A)$ — множество всех максимальных идеалов среди тех идеалов A, фактор-алгебры по которым имеют 1, $\hat{M}$ — наибольший из $I \lhd A$, $I \subseteq M$, $M \in \mathcal{P}_{\alpha_S}(A)$, если $\mathcal{P}_{\alpha_S}(A) \neq \varnothing$, и $\mathcal{J}'_{\alpha_S}(A) = A$ иначе, $\mathcal{J}_{\alpha_S}(A) \subseteq \mathcal{J}'_{\alpha_S}(A)$, $\mathcal{J}'_{\alpha_S}(A/\mathcal{J}'_{\alpha_S}(A)) = \{0\}$ и $\phi\bigl(\mathcal{J}'_{\alpha_S}(A)\bigr) \subseteq \subseteq \mathcal{J}'_{\alpha_S}\bigl(\phi(A)\bigr)$ для любого гомоморфизма $\phi\colon A \to A'$ (см. [4, замечание 2.3]).

Теорема 2.1. *Если $\mathfrak{M}$ — многообразие F-алгебр, такое что $\mathcal{J}'_{\alpha_L}(I) \subseteq \mathcal{J}'_{\alpha_L}(A)$ и неприводимые левые I-модули в $\mathfrak{M}$ содержат сильно ассоциативные слева элементы для всех $I \lhd A \in \mathfrak{M}$, то на $\mathfrak{M}$ определён идеально наследственный наднильпотентный радикал $\mathcal{J}_l = \mathcal{J}_{\alpha_L} = \mathcal{J}'_{\alpha_L}$.*

Доказательство. Если M — неприводимый левый A-модуль в $\mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M}$, с ассоциативным слева (справа) элементом x, то $M = Ax$, так как $A^\perp = \bigl\{z \in M \mid Az = \{0\}\bigr\}$ — A-подмодуль M, $A^\perp \neq M$ и потому $A^\perp = \{0\}$, $x = ex$ для некоторого $e \in A$, $a - ae \in \operatorname{Ann}_A x$ ($a - ea \in \operatorname{Ann}_A x$), $a \in A$, $\operatorname{Ann}_A x = \{a \in A \mid ax = 0\}$ — максимальный левый (правый) модулярный идеал A, $M \cong A/\operatorname{Ann}_A x$ ($M \cong A^{\mathrm{op}}/\operatorname{Ann}_A x$, A^{op} — A с инверсным умножением $a \cdot b = ba$, $a, b \in A$, и $M \cong A/\operatorname{Ann} x_A$, если рассматривать M как правый A-модуль), $K_\alpha(A)$ — наибольший из $I \lhd A$, $I \subseteq \operatorname{Ann}_A x$, где α — левое представление A в $\mathfrak{M}$ с A-модулем M. Поскольку $\{0\} \neq Ix$ — подмодуль M над идеалами A для любого левого (правого) идеала $I \subseteq A$, $I \not\subseteq \operatorname{Ann}_A x$, $M = Ix$, $A = I + \operatorname{Ann}_A x$ ($x = e'x$, $e' \in I$, $e - e' \in \operatorname{Ann}_A x$ (см. [5, лемма 12, с. 281])). Если $J, J' \lhd A$ и $JJ' \subseteq K_\alpha(A) \subsetneqq J, J'$, то $J, J' \not\subseteq \operatorname{Ann}_A x$, $J(J'x) = (JJ')x = JM = \{0\}$ ($J'(Jx) = J'M = \{0\}$)?! Поэтому $K_\alpha(A)$ — первичный идеал A.

Если I — максимальный модулярный левый идеал A с модулем e, $ae - a \in I$, $a \in A$, то A/I — левый A-модуль в $\mathfrak{M}$ с $a(b+I) = aa'+I$, $a, b \in A$, ассоциативным слева элементом $e + I$ ($a(be) + I = ab + I = (ab)e + I$, $a, b \in A$) и без ненулевых собственных A-подмодулей, $\operatorname{Ann}_A(e + I) = \{a \in A \mid ae \in I\} = I$ (см. [5, теорема 3, с. 282]). Значит, $\mathcal{J}_l = \mathcal{J}'_{\alpha_L}$ на $\mathfrak{M}$.

Если $\{0\} \neq J \lhd A$, N — неприводимый левый J-модуль в $\mathfrak{M}$ с сильно ассоциативным слева элементом y, то $N = Jy$ можно рассматривать как неприводимый A-модуль в $\mathfrak{M}$ с $a(by) = (ab)y$, $a \in A$, $b \in J$. Действительно, ввиду максимальности в J его левого идеала $\operatorname{Ann}_J x$, $J(A\operatorname{Ann}_J y) \subseteq \operatorname{Ann}_J y$, если $A\operatorname{Ann}_J y \not\subseteq \operatorname{Ann}_J y$, то $J = \operatorname{Ann}_J y + A\operatorname{Ann}_J y$, элемент $u \in J$, $uy = y$, имеет вид $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in \operatorname{Ann}_J y$, $u_2 \in A\operatorname{Ann}_J x$, и значит, $b - bu, bu \in \operatorname{Ann}_J y$ для всех $b \in J$, $J = \operatorname{Ann}_J y$?! К противоречию можно также прийти быстрее: $(A\operatorname{Ann}_J y)y \subseteq J^\perp = \{0\}$?! Поэтому $A\operatorname{Ann}_J y \subseteq \operatorname{Ann}_J y$ и N — неприводимый левый A-модуль в $\mathfrak{M}$ для $\alpha(a) = \phi(l_a)$, $a \in A$,

$$\phi\colon L(A) + F\operatorname{Id}_A \ni \psi \mapsto \psi' \in \operatorname{End}(N)_F, \quad \psi' by = (\psi b)y \quad (b \in J)$$

(см. [5, предложение 4, с. 263]; A-подмодули N — его J-подмодули, $A^\perp \subseteq J^\perp = \{0\}$). Таким образом, $J \cap \mathcal{J}_l(A) \subseteq \mathcal{J}_l(J)$ и по доказанному $\mathcal{J}_l(J) = \mathcal{J}'_{\alpha_L}(J) \subseteq \subseteq \mathcal{J}_l(A) = \mathcal{J}'_{\alpha_L}(A)$, $\mathcal{J}_l(J) = J \cap \mathcal{J}_l(A)$ для всех $J \lhd A$, $\mathcal{J}_l(A)$ — наибольший среди $J \lhd A$, $J = \mathcal{J}_l(J)$. Другие два радикальных свойства $\mathcal{J}_l$ на $\mathfrak{M}$ следуют из [5, упражнение 3, с. 267]. Как следствие, $\mathcal{J}_l = \mathcal{J}'_{\alpha_L} = \mathcal{J}_{\alpha_L}$ на $\mathfrak{M}$. $\square$

Если неприводимый левый A-модуль M в $\mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M}$, содержит ассоциативный слева элемент x, такой что $(a(bc))x \in (Fb(ac) + F(ab)c + F(ba)c)x$ для всех

$a, b, c \in A$, то для любых $J \lhd A$, $ax \in J^{\perp}$, $a, b \in A$, $c \in J$

$$c\big(b(ax)\big) = \big(c(ba)\big)x \in (Fb(ca) + F(cb)a + F(bc)a)x \subseteq AJ(ax) + J(ax) = \{0\},$$

$J^{\perp}$ — A-подмодуль M, $J^{\perp} = \{0\}$ или $J \subseteq K_\alpha(A)$.

Условие $\mathcal{J}'_{\alpha_L}(I) \subseteq \mathcal{J}'_{\alpha_L}(A)$, $I \lhd A \in \mathfrak{M}$, выполняется, например, если $(I)_A/I$ — 2-ниль-алгебра для всех $I \lhd J \lhd A \in \mathfrak{M}$, т. е. $a^{(n)} = 0$ для каждого $a \in (I)_A/I$ при некотором $n = n(a) \geqslant 0$, где $a^{(0)} = a$, $a^{(k+1)} = (a^{(k)})^2$, $k \geqslant 0$. Достаточно заметить, что из $a^{(n)} = 0$ следует α_L-квазирегулярность a, $l_{1+a^{(n-1)}} \cdots l_{1+a}(1-a) = 1 - a^{(n)} = 1 \in A^1$. Поэтому

$$\big(\mathcal{J}'_{\alpha_L}(I)\big)_A / \mathcal{J}'_{\alpha_L}(I) \subseteq \mathcal{J}'_{\alpha_L}\big(I/\mathcal{J}'_{\alpha_L}(I)\big) = \{0\},$$
$$\mathcal{J}'_{\alpha_L}(I) \lhd A, \quad \mathcal{J}'_{\alpha_L}(I) \subseteq \mathcal{J}'_{\alpha_L}(A) \quad (I \lhd A \in \mathfrak{M})$$

(см. [4, доказательство теоремы 2.1]). Данному условию удовлетворяет ряд многообразий алгебр с идеально наследственными наследственными радикалами и, в частности, альтернативные алгебры (см. [3]).

Если в теореме 2.1 выполняется также правая версия её условий (для $\mathcal{J}'_{\alpha_R}$ и правых неприводимых модулей над идеалами), то на $\mathfrak{M}$ определёны, помимо $\mathcal{J}_l$, идеально наследственные наднильпотентные радикалы $\mathcal{J}_r$ и $\mathcal{J}$.

В ходе доказательства теоремы 2.1 было получено следствие.

Следствие 2.2. *Ассоциативный слева элемент x неприводимого левого I-модуля M в многообразии $\mathfrak{M}$, $I \lhd A \in \mathfrak{M}$, сильно ассоциативен, если и только если $\operatorname{Ann}_I x$ — левый идеал A.*

Следствие 2.3. *Если $\mathcal{J}'_{\alpha_L}(I) \cap \mathcal{J}'_{\alpha_R}(I) \subseteq \mathcal{J}'_{\alpha_L}(A) \cap \mathcal{J}'_{\alpha_R}(A)$ и любой неприводимый I-модуль в многообразии $\mathfrak{M}$ содержит сильно ассоциативный слева или справа элемент для всех $I \lhd A \in \mathfrak{M}$, то на $\mathfrak{M}$ определён идеально наследственный наднильпотентный радикал $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}(A) = \mathcal{J}'_{\alpha_L}(A) \cap \mathcal{J}'_{\alpha_R}(A)$, $A \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что любой неприводимый левый (правый) I-модуль M в $\mathfrak{M}$, $I \lhd A \in \mathfrak{M}$, с сильно ассоциативным справа (слева) элементом x можно рассматривать как неприводимый правый (левый) I-модуль в $\mathfrak{M}$ с таким элементом x (см. замечание перед теоремой 2.1). □

Лемма 2.4. *Если M — неприводимый почти точный левый A-модуль в однородном многообразии $\mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M}$, с ассоциативным слева элементом x, $S = Z(A) \setminus \{0\} \neq \varnothing$, то это верно для M как $S^{-1}A$-модуля.*

Доказательство. Первичная алгебра A не имеет $Z(A)$-кручения, $S^{-1}A \in \mathfrak{M}$ (см. [5, теорема 6, с. 24]). Поскольку $Z(A) \cap \operatorname{Ann}_A x \subseteq K_\alpha(A) = \{0\}$, $Z(A)$ вкладывается в тело $\operatorname{End}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A)}(M)$, представление α с A-модулем $M = Ax$ можно продолжить до представления $S^{-1}A$ в $\mathfrak{M}$ с тем же модулем, полагая $\alpha(s^{-1}a) = \phi(l_{s^{-1}a})$, $a \in A$, $s \in S$,

$$\phi\colon L(S^{-1}A) \ni \psi \mapsto \psi' \in \operatorname{End}(M)_F, \quad \psi'(bx) = (\psi b)x = \alpha(t)^{-1}\big((\psi'' b)x\big) \quad (b \in A),$$

где $\alpha(t)^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A)}(M)$, $\psi = l_{t^{-1}}\psi''$ для некоторых $t \in S$, $\psi'' \in L^{S^{-1}A}(A)$ (см. [5, предложение 4, с. 263]). Остаётся заметить, что $S^{-1}A$-модуль M наследует неприводимость, ассоциативность слева x и $K_\alpha(S^{-1}A) = S^{-1}K_\alpha(A) = \{0\}$. $\square$

Лемма 2.5. *Если M — неприводимый левый I-модуль в однородном многообразии $\mathfrak{M}$, $I \lhd A \in \mathfrak{M}$, с ассоциативным слева элементом x, $J = K_\alpha(I) \lhd A$, $Z(\bar{A}) \cap \bar{I} \neq \{0\}$, где $\bar{B} = (B+K)/K$ для всех $B \subseteq A$, K — наибольший из $I' \lhd A$, $I' \subseteq \{a \in A \mid aI \subseteq \mathrm{Ann}_I\, x\}$, то x сильно ассоциативен и M — неприводимый A-модуль в $\mathfrak{M}$ с $a(bx) = (ab)x$, $a \in A$, $b \in I$, $K_\alpha(A) = K$.*

Доказательство. По условию $J = K \cap I$ и если Z — прообраз $Z(A/J) \cap I/J$ в A, то $Z \subseteq J$ равносильно $Z \subseteq K$, $\bar{Z} \subseteq Z(\bar{A}) \cap \bar{I}$. Отождествляя I/J и $\bar{I}$, можно рассматривать M как почти точный $\bar{I}$-модуль в $\mathfrak{M}$ с $\bar{a}z = az$, $a \in I$, $z \in M$ (см. [5, упр. 3, с. 267]). Если $cb \in \mathrm{Ann}_I\, x$ для некоторых $c \in A$, $\bar{c} \in Z(\bar{A})$, $b \in I \setminus \mathrm{Ann}_I\, x$, то ввиду $I^\perp = \{0\}$, $M = \big(L(I)(b)\big)x$

$$\big((c)_A I\big)\big(L(I)(b)\big) \subseteq (Ic+J)\big(L(I)(b)\big) \subseteq L(I)(cb) + J \subseteq \mathrm{Ann}_I\, x,$$
$$(c)_A I \subseteq J \subseteq \mathrm{Ann}_I\, x,$$

$c \in (c)_A \subseteq K$. Поскольку

$$b(ab') - (ba)b' \in J, \quad \big(b(ab')\big)x = \big((ba)b'\big)x = 0 \qquad (b \in I,\ a \in A,\ \bar{a} \in Z(\bar{A}),\ b' \in \mathrm{Ann}_I\, x),$$

$Z(\bar{A})\,\mathrm{Ann}_{\bar{I}}\, x \subseteq \mathrm{Ann}_{\bar{I}}\, x = \overline{\mathrm{Ann}_I\, x}$, M можно рассматривать как $(Z(\bar{A})+\bar{I})$-модуль в $\mathfrak{M}$ без $Z(\bar{A})$-кручения (см. вторую часть доказательства теоремы 2.1), и, как следствие, $Z(\bar{A})$ вкладывается в тело $\mathrm{End}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(\bar{I})}(M)$. Если $ca \in K$ для некоторых $c, a \in A \setminus K$, $\bar{c} \in Z(\bar{A})$, то $(aI)x = \alpha(\bar{c})^{-1}\Big(\big(c(aI)\big)x\Big) = \{0\}$ $(c(ab) - (ca)b \in J$, $b \in I$; $\alpha(\bar{c})^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(\bar{I})}(M))$, $a \in K$?! Поэтому $\bar{A}$ не имеет $Z(\bar{A})$-кручения, $S^{-1}\bar{A} = S^{-1}\bar{I}$, $S = Z(\bar{A}) \setminus \{0\}$, и, как в лемме 2.4, M можно рассматривать как почти точный $S^{-1}\bar{I}$-модуль в $\mathfrak{M}$ с ассоциативным слева элементом x. Так как

$$\overline{A\,\mathrm{Ann}_I\, x} \subseteq \bar{I} \cap \mathrm{Ann}_{S^{-1}\bar{I}}\, x = \overline{\mathrm{Ann}_I\, x}, \quad A\,\mathrm{Ann}_I\, x \subseteq \mathrm{Ann}_I\, x + J = \mathrm{Ann}_I\, x,$$

x сильно ассоциативен слева в I-модуле M. Ввиду почти точности $S^{-1}\bar{I}$-модуля M и [5, упр. 3, с. 267] M является также A-модулем в $\mathfrak{M}$ с ассоциативным слева x и $a(bx) = \bar{a}(bx) = \alpha(\bar{c})^{-1}\big((db)x\big) = (ab)x$, $a, c \in A$, $b, d \in I$, $\bar{c} \in S$, $\bar{a} = \bar{c}^{-1}\bar{d}$, $K_\alpha(A) = K$. $\square$

Лемма 2.6. *Если M — неприводимый левый A-модуль в многообразии $\mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M}$, с ассоциативным слева элементом x, то $\mathrm{Ann}_A\, x$ содержит все левые идеалы алгебры A, состоящие из её α_L-квазирегулярных элементов.*

Доказательство. Модуль $M = Ax$ можно рассматривать как унитарный ассоциативный $L(A^1)$-модуль с $\psi(ax) = (\psi a)x$, $a \in A$, $\psi \in L(A^1)$, и, если $\mathfrak{M}$ унитарно замкнуто, как A^1-модуль в $\mathfrak{M}$ с $a'(ax) = (a'a)x$, $a \in A$, $a' \in A^1$ (см. [5, предложение 4, с. 263]), где $\psi x = (\psi e)x = \big((\psi 1)e\big)x$, $\psi \in L(A^1)$,

$x = ex$, $e \in A$. Если все элементы левого идеала $I \subseteq A$ α_L-квазирегулярны в A, $I \not\subseteq \operatorname{Ann}_A x$, то $A = I + \operatorname{Ann}_A x$, $e = a + b$, $a \in I$, $b \in \operatorname{Ann}_A x$, $l_{1-e} \in \operatorname{Ann}_{L(A^1)} x$, $l_{1-a} \in \operatorname{Ann}_{L(A^1)} x$, $\tau(1-a) = 1$ для подходящего $\tau \in L(A^1)$, и значит,

$$x = \big((\tau l_{1-a}1)e\big)x = (\tau l_{1-a}e)x = \tau(l_{1-a}x) = \tau 0 = 0?! \qquad \square$$

Лемма 2.7. *Если M — неприводимый левый A-модуль в многообразии $\mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M}$, с ассоциативным слева (справа) элементом x, тогда $K_\alpha(A)$ содержит все $I \lhd A$, такие, что для любого $b \in I$ найдётся $n = n(b) \geqslant 1$, $l_b^n b = 0$ ($r_b^n b = 0$).*

Доказательство. Если такой $I \lhd A$ не входит в $K_\alpha(A)$, то $M = Ix$ — неприводимый I-модуль в $\mathfrak{M}$, $x = ex$ для некоторого $e \in I$, $x = (t_e^{n(e)}e)x = 0$, где $t = l$ (r) для ассоциативного слева (справа) x (см. первую часть доказательства теоремы 2.1)?! $\square$

Поэтому в теореме 2.1 радикал $\mathcal{J}_l(A)$ содержит все слабо энгелевы (состоящие из слабо энгелевых элементов) идеалы алгебры $A \in \mathfrak{M}$, все 2-ниль-идеалы A и, в частности, все её локально и слабо разрешимые идеалы.

Пусть A — F-алгебра, M — неприводимый левый $T_1^{A^1}(A)$-модуль (унитарный, так как $M' = \{z - \operatorname{Id}_{A^1} z \mid z \in M\}$ — подмодуль M, $T_1^{A^1}(A)M' = \{0\}$, $M' = \{0\}$), $K_t(A, M)$ — наибольший среди $I \lhd A$, $I \subseteq \{a \in A \mid t_a \in \operatorname{Ann}_{T_1^{A^1}(A)} M\}$, $(t, T) = (l, L), (r, R)$. Ввиду первичности примитивной ассоциативной алгебры $T = T_1^{A^1}(A)/\operatorname{Ann}_{T_1^{A^1}(A)} M$ алгебра $\bar{A} = A/K_t(A, M)$ первична $\big((T^{A^1}(I))_{T_1^{A^1}(A)}(T^{A^1}(J))_{T_1^{A^1}(A)} = \{0\}$, если $I, J \lhd A$, $IJ = \{0\}\big)$, $Z(T)$ входит в тело $\operatorname{End}_T(M)$ и M — точный неприводимый $(Z(T) \setminus \{0\})^{-1}T$-модуль. Естественный эпиморфизм $\pi\colon A \to \bar{A}$ индуцирует эпиморфизм $\pi'\colon M(A^1) \to M(\bar{A}^1)$, $\pi' s_{f+a} = s_{f+\pi a}$, $s = l, r$, $f \in F$, $a \in A$, $\operatorname{Ker}\pi' = \{\phi \in M(A^1) \mid \phi(A^1) \subseteq \operatorname{Ker}\pi = K_t(A, M)\}$. Если $T_1^{A^1}(A) \cap \operatorname{Ker}\pi' \subseteq \operatorname{Ann}_{T_1^{A^1}(A)} M$, то M можно рассматривать как $T_1^{\bar{A}^1}(\bar{A})$-модуль, $T_1^{\bar{A}^1}(\bar{A}) = \pi'\big(T_1^{A^1}(A)\big)$, $K_t(\bar{A}, M) = \{0\}$. Кроме того, $T_1^{\bar{A}^1}\big(Z(\bar{A})\big) = \{t_s \mid s \in Z(\bar{A})\}$ входит в тело $\operatorname{End}_{T_1^{\bar{A}^1}(\bar{A})}(M)$, $T_1^{\bar{A}^1}\big(Z(\bar{A})\big) \cap \operatorname{Ann}_{T_1^{\bar{A}^1}(\bar{A})} M = \{0\}$ (если $t_s \in \operatorname{Ann}_{T_1^{\bar{A}^1}(\bar{A})} M$, $s \in Z(\bar{A})$, то $t_b \in (t_s)_{T_1^{\bar{A}^1}(\bar{A})} = t_s T_1^{\bar{A}^1}(\bar{A}) \subseteq \operatorname{Ann}_{T_1^{\bar{A}^1}(\bar{A})} M$ для всех $b \in (s)_{\bar{A}}$, $s \in K_t(\bar{A}, M) = \{0\}$). Это позволяет при $S = Z(\bar{A}) \setminus \{0\} \neq \varnothing$ превратить M в унитарный $T_1^{(S^{-1}\bar{A})^1}(S^{-1}\bar{A})$-модуль, $t_{s^{-1}a}z = t_s^{-1}t_a z$, $s \in S$, $a \in \bar{A}$, $z \in M$, где $t_s^{-1} \in \operatorname{End}_{T_1^{\bar{A}^1}(\bar{A})}(M)$. Положим $\mathcal{J}_{tl}(A)$ ($\mathcal{J}_{tr}(A)$) равным пересечению $K_t(A, M)$ для всех неприводимых левых (правых) $T_1^{A^1}(A)$-модулей M при их наличии и A иначе, $\mathcal{J}'(A) = \mathcal{J}_{ll}(A) \cap \mathcal{J}_{rr}(A)$.

Лемма 2.8. *Если I и M — такие ненулевой идеал алгебры A и неприводимый левый $T_1^{I^1}(I)$-модуль, $(t, T) = (l, L), (r, R)$, что $K_t(I, M) = J \lhd A$, $Z(A/J) \cap I/J \neq \{0\}$,*

$$\{\phi \in T_1^{I^1}(I) \mid \phi(I^1) \subseteq K_t(I, M)\} \subseteq \operatorname{Ann}_{T_1^{I^1}(I)} M,$$

то M можно рассматривать как неприводимый $T_1^{A^1}(A)$-модуль,

$$K_t(A,M) = \\ = \{a \in A \mid \text{найдётся } c \in I \setminus J, \text{ такой что } c + J \in Z(A/J) \cap I/J,\ ca \in J\},$$

$J = I \cap K_t(A,M)$.

Доказательство. Положим $\bar{B} = (B+J)/J$ для всех $B \subseteq A$, $Y = Z(\bar{A}) \cap \bar{I}$ и обозначим через $K = \{a \in A \mid \text{найдётся } 0 \neq y \in Y, \text{ такой что } y\bar{a} = 0\}$ прообраз кручения Y-модуля $\bar{A}$ в A. По условию M можно рассматривать как неприводимый $T_1^{\bar{I}^1}(\bar{I})$-модуль, $\bar{I}$ не имеет кручения как Y-модуль (первичность $\bar{I}$), $\bar{I} \cap \bar{K} = \{0\}$, $J = I \cap K$, $A' = \bar{A}/\bar{K} \cong A/K$ не имеет кручения как Y'-модуль, $Y' = (Y + \bar{K})/\bar{K} \cong Y$, $A'' = V'^{-1}A' = V'^{-1}I' \cong V^{-1}\bar{I}$, где $V' = Y' \setminus \{0\}$, $V = Y \setminus \{0\}$, $I' = (\bar{I} + \bar{K})/\bar{K} \cong (I+K)/K \cong \bar{I}$. Следовательно, M можно рассматривать как унитарный $T_1^{A''^1}(A'')$-модуль (см. замечания перед леммой 2.8). Так как $T_1^{A'^1}(A')$ — эпиморфный образ $T_1^{A^1}(A)$, $T_1^{A'^1}(A') \cong$ $\cong T_1^{A''^1}(A')$ ($T_1^{A''^1}(A') \ni \phi \mapsto \phi|_{A'^1} \in T_1^{A'^1}(A')$; если $\phi \in T^{A''^1}(A')$, $\phi|_{A'^1} = 0$, то $\phi 1 = 0$, $\phi|_{A''} = \phi|_{Z(A'')A'} = 0$, $\phi = 0$), $T_1^{A''^1}(A') \subseteq T_1^{A''^1}(A'')$, M также является $T_1^{A^1}(A)$-модулем, $K_t(A'',M) = \{0\}$, $K_t(A,M) = K$. □

Любой унитарный левый $L_1^{A^1}(A)$-модуль (правый $R_1^{A^1}(A)$-модуль) M является A-модулем в любом унитарно замкнутом многообразии $\mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M}$, с $az = l_a z$ ($za = zr_a$), $a \in A$, $z \in M$ (см. [5, предложение 4, с. 263]).

Из первой части доказательства теоремы 2.1 (для многообразия всех F-алгебр) сразу вытекает следующее утверждение.

Замечание 2.9. Если неприводимые левые $L_1^{A^1}(A)$-модули содержат ассоциативные слева элементы, то $\mathcal{J}_{ll}(A) = \mathcal{J}'_{\alpha_L}(A)$.

Поэтому в теореме 2.1 $\mathcal{J}_l = \mathcal{J}_{ll}$ на унитарно замкнутом $\mathfrak{M}$. Теорему Жевлакова—Слинько—Шестакова (см. [5, теорема 4, с. 283]) можно интерпретировать следующим образом.

Предложение 2.10. *На многообразии альтернативных алгебр определён идеально наследственный наднильпотентный радикал $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$.*

Доказательство. Неприводимые альтернативные (в многообразии альтернативных F-алгебр) модули содержат ассоциативные слева или справа элементы, альтернативные F-алгебры с почти точными (и значит, точными) неприводимыми альтернативными модулями первичны, не имеют ненулевых локально нильпотентных идеалов и потому или ассоциативны, или являются кольцами Кэли—Диксона (см. [5, теорема 2, с. 279, лемма 8, с. 276, следствие леммы 12, с. 282]).

Если A — альтернативная F-алгебра, $I \lhd A$, M — неприводимый альтернативный I-модуль, то $K_\alpha(I) \lhd A$ (см. [5, теорема 4, с. 189]) и, переходя при необходимости к $A/K_\alpha(I)$, можно считать $K_\alpha(I) = \{0\}$, I первичным и отождествить I с его образом в фактор-алгебре A/P по максимальному P из $J \lhd A$, $J \cap I = \{0\}$. Первичная алгебра A/P не содержит ненулевых локально нильпотентных идеалов, и значит, ассоциативные слева или справа элементы M сильно ассоциативны, M — неприводимый альтернативный A/P-модуль и A-модуль (см. лемму 2.5, доказательство следствия 2.3). Остаётся применить следствие 2.3. □

Доказательство теоремы Жевлакова—Слинько—Шестакова (см. [5, гл. 11, § 2, 3]) о совпадении на многообразии альтернативных алгебр отображения $\mathcal{J}_r$ с радикалом Жевлакова (радикалами Клейнфелда и Смайли) $\mathcal{J}$ фактически проводится для правых правоальтернативных модулей над альтернативными алгебрами (все выводы сделаны на основе R-тождеств правой альтернативности и правого тождества Муфанг (см. [5, с. 268 и упражнение 5, с. 267]) и описания невырожденных первичных альтернативных алгебр).

Применив к правоальтернативным алгебрам над кольцом F с $1/2$ доказательство леммы 8 из [5, с. 276] с заменой локально нильпотентного радикала на радикал Михеева M (локально право-нильпотентный радикал в смысле Ширшова, локально нильпотентный радикал йордановой (квадратичной и для F с $1/2$ линейной) алгебры правоальтернативной алгебры (см. [9, 18])), мы получим ввиду альтернативности M-полупростых правоальтернативных алгебр над F с $1/2$ (см. [7, следствие 3]), что правоальтернативные F-алгебры с почти точными правоальтернативными модулями являются либо первичными ассоциативными алгебрами с нулевыми локально нильпотентными радикалами, либо кольцами Кэли—Диксона. В любой правоальтернативной алгебре R

$$\mathcal{J}\big(R/M(R)\big) = \mathcal{J}\Big(\big(R/M(R)\big)^+\Big) = \mathcal{J}(R^+)/\mathrm{LN}(R^+),$$

где $\mathrm{LN}(R^+)$ — локально нильпотентный радикал квадратичной йордановой алгебры $R^+ = (R, U, {}^2)$ с $U\colon x \mapsto U_x = r_x l_x$, ${}^2\colon x \mapsto x^2$, $x \in R$ (для F с $1/2$ её можно заменить линейной йордановой алгеброй $R^{(+)}$ с умножением $x \cdot y = (1/2)(xy + yx)$, $x, y \in R$), $\mathcal{J}(R)$ входит в пересечение всех максимальных односторонних модулярных идеалов R и, как следствие, пересечение наибольших из входящих в них идеалов R (см. [18, замечание к теореме 6]; квазирегулярность в R — квазирегулярность в R^+, которая для альтернативной R равносильна её стандартной версии (см. [15] и замечание 3.33); левая квазирегулярность и α_R-квазирегулярность в R любого $x \in R$, квазирегулярного в R^+, следует из

$$U_{1-x} r = -(1-x)^2 r + (1-x)(r(1-x) + (1-x)r) \in R^{R^1}(R)(1-x) \cap R(1-x) \quad (r \in R),$$

$R = U_{1-x}(R) = R^{R^1}(R)(1-x) = R(1-x)$). Поэтому для F с $1/2$ в силу [7, следствие 3] и совпадения радикалов Клейнфелда и Смайли альтернативных алгебр (см. [5, теорема 5, с. 248]), $\mathcal{J}(R)$ равен пересечению максимальных модулярных левых (правых) идеалов R и $\mathcal{J}_r(R)$ (см. выше и [5, доказательство теоремы 4, с. 283; 15]).

3. Топологические квазирегулярные радикалы

Описание топологических вариантов радикалов Джекобсона мы начнём с конструкции топологического α-квазирегулярного радикала, основанной на идеях [4, 20].

Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутый относительно взятия идеалов и непрерывных гомоморфных образов класс топологических алгебр над топологическим кольцом F, α — отображение, которое ставит каждой алгебре $R \in \mathfrak{M}$ в соответствие мультипликативный подмоноид $\alpha(R)$ алгебры $M(R^1)$ и удовлетворяет условиям:

1) для любого $I \lhd R$ каждый $\phi \in \alpha(I)$ равен ограничению $\bar{\phi}|_{I^1}$ на $I^1 \subseteq R^1$ некоторого $\bar{\phi} \in \alpha(R) \cap M^{R^1}(I^1)$;
2) каждому непрерывному гомоморфизму алгебр $\psi\colon R \to R'$ отвечает эпиморфизм моноидов $\psi_\alpha\colon \alpha(R) \to \alpha(\psi(R))$, такой что $\psi^1\phi(f+x) = (\psi_\alpha\phi)\psi^1(f+x)$, $f \in F$, $x \in R$, $\phi \in \alpha(R)$, где $\psi^1\colon f+x \mapsto f+\psi x$, $f \in F$, $x \in R$ (ψ_α — ограничение на $\alpha(R)$ эпиморфизма $\psi^1_M\colon M(R^1) \to M(\psi(R)^1)$, индуцированного ψ^1).

Назовём элемент $x \in R \in \mathfrak{M}$ *топологически α-квазирегулярным*, если для любой окрестности $U \ni 1$ в R^1 существуют $\psi_U \in \alpha(R)$, $\phi_U(1-x) \in U$, алгебры из класса $\mathfrak{M}$, состоящие из таких элементов, — *топологически α-квазирегулярными алгебрами*, F-подмодули R и R^1, инвариантные относительно действия $\alpha(R)$, — *α-инвариантными подмодулями*. По аналогии с [20] будем называть алгебру $R \in \mathfrak{M}$ *α-ограниченной*, если для любой окрестности нуля $W \subseteq R^1$ найдётся окрестность нуля $V \subseteq R^1$, $\alpha(R)(V) = \bigcup\limits_{\phi\in\alpha(R)} \phi(V) \subseteq W$. Выделим в $\mathfrak{M}$ подклассы α-ограниченных и топологически α-квазирегулярных алгебр $\mathfrak{M}_\alpha$ и $\mathfrak{J}_{\alpha\text{-top}}$. Условия 1), 2) гарантируют замкнутость класса $\mathfrak{M}_\alpha$ относительно взятия идеалов и образов непрерывных гомоморфизмов, таких что образ любой окрестности нуля при их действии содержит окрестность нуля образа (в частности, это верно для открытых гомоморфизмов, включая канонические редукции на фактор-алгебры).

Если F дискретно, то определение топологически α-квазирегулярного элемента можно изменить, заменив в нём окрестности 1 в R^1 на окрестности вида $1+U$, U — окрестность нуля в R, условие α-ограниченности можно переформулировать для окрестностей нуля в R.

Простейшими примерами α-ограниченных алгебр являются дискретные $R \in \mathfrak{M}$ над дискретным F и R^1 с базой окрестностей нуля из α-инвариантных подмодулей (случай α-ограниченной R с базой окрестностей нуля R^1 из F-подмодулей). Для любых компактного ассоциативного кольца A, топологического левого A-модуля M и окрестности нуля $U \subseteq M$ найдётся окрестность нуля $U' \subseteq M$, $AU' \subseteq U$ (следствие компактности A и непрерывности отображения $A \times M \to M$, определяющего действие A на M (см. [10, лемма для $a_0 = 0$])). Поэтому если $R \in \mathfrak{M}$ и топология $\alpha(R)$ выбрана таким образом, что $\alpha(R)$ компактно и отображение $(\phi, z) \mapsto \phi z$, $\phi \in \alpha(R)$, $z \in R^1$, непрерывно, $R \in \mathfrak{M}_\alpha$.

По теореме ван Данцига любая окрестность единицы вполне несвязной локально компактной группы содержит открытую компактную подгруппу (см. [21, теорема 1.3], [11, теорема 3.1.1], где вполне несвязные пространства — отделимые пространства, в которых связные подмножества одноэлементны, локально компактные — пространства, в которых каждая точка имеет окрестность с компактным замыканием). Значит, если A-модуль M (см. выше) вполне несвязен и локально компактен, то любая окрестность нуля $U \subseteq M$ содержит подмодуль вида AU', U' — открытая компактная подгруппа M. Если A — вполне несвязный компакт, то любая окрестность нуля $V \subseteq A$ содержит открытый идеал $(V')_A$ для некоторой открытой компактной аддитивной подгруппы $V' \subseteq A$ (см. [10, доказательство теоремы 3]).

Если алгебра R^1 компактна, $R \in \mathfrak{M}$, $M(R^1) = M_{k,n}(R^1)$ для некоторых $k, n \geqslant 1$, где $M_{k,n}(R^1) = M^{R^1}_{k,n}(R^1) \subseteq F\,\mathrm{Id}_{R^1} + M^{R^1}_{k,s_{n,k}}(R)$, $s_{n,k} = n(2^k - k - 1) + 2$, и

$$M^{R^1}_{k,n}(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_{z_{i1}} \cdots t_{z_{ik_i}} \,\middle|\, t \in \{l, r\},\ z_{ij} \in B,\ 1 \leqslant k_i \leqslant k \right\} \quad (B \subseteq R^1),$$

то по аналогии с предыдущим для любых $T = \{t^{(i)}\}_{i=1}^{k}$, $t^{(i)} \in \{l, r\}$, и окрестности нуля $U \subseteq R^1$ из компактности $\underbrace{R^1 \times \ldots \times R^1}_{k}$ и непрерывности

$$\big((z_1, \ldots, z_k), z\big) \mapsto t^{(1)}_{z_1} \cdots t^{(k)}_{z_k} z \quad (z_i, z \in R^1)$$

следует существование окрестности нуля $U_T \subseteq R^1$, $t^{(1)}_{z_1} \cdots t^{(k)}_{z_k}(U_T) \subseteq U$, $z_i \in R^1$. Поэтому, выбрав для U окрестность нуля $U' \subseteq R^1$, $\underbrace{U' + \ldots + U'}_{n} \subseteq U$, и окрестности нуля U'_T для всех T, мы получаем, что $M(R^1)(W) \subseteq U$ для $W = \bigcap\limits_{T} U'_T$, $R \in \mathfrak{M}_{\alpha_M} \subseteq \mathfrak{M}_{\alpha}$ при всех α. Если R^1 — вполне несвязный компакт, $M(R^1) = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} M_{k,n}(R^1)$ для некоторого $k \geqslant 1$, то U и U_T можно выбрать среди открытых компактных аддитивных подгрупп R^1 и прийти к включению в U открытого идеала $M(R^1)(V)$, $V = \bigcap\limits_{T} U_T$ (отказ от условий на $M(R^1)$ наложением условия минимальности для открытых компактных аддитивных подгрупп R^1 приводит ввиду отделимости R^1 к её конечности и дискретности), и значит, R^1, как и вполне несвязный компакт A, — проективный предел конечных дискретных алгебр (фактор-алгебр по открытым идеалам, входящим в окрестности нуля). Используемое условие на $M(R^1)$ выполняется, например, в ассоциативном случае ($k = 2$, $n = 3$) и для R^1, конечно порождённой как $Z(R^1)$-модуль (см. [5, лемма 7, с. 131; 17, предложение 1.3.1, с. 14]).

Если R^1 — компакт, то $\mathrm{End}_F(R^1)$ замкнуто в тихоновском произведении пространств $\prod\limits_{z \in R^1} X_z$, $X_z = R^1$, и по теореме Тихонова компактно в топологии поточечной сходимости (индуцированной тихоновской топологией), что само по себе не гарантирует компактность (замкнутость) в данной топологии пространств непрерывных эндоморфизмов из $\mathrm{End}_F(R^1)$ и $\alpha(R)$ (первое верно, например, для нормированного пространства R^1 по принципу равномерной ограниченности, а второе — для ассоциативной R и $\alpha = \alpha_L, \alpha_R$, $\alpha_L(R) = L(R^1) = \mathrm{End}(R_1)_{R^1}$ и $\alpha_R(R) = R(R^1) = \mathrm{End}_{R^1}(R^1)$). Естественно, что при этом возникает вопрос о примерах, когда $(\phi, z) \mapsto \phi z$, $\phi \in \alpha(R)$, $z \in R^1$, непрерывно для $\alpha(R)$ с топологией поточечной сходимости и R^1 с недискретной топологией. Вместе с тем ничто не мешает снабдить $\alpha(R)$ топологией с предбазой $\{\phi \in \alpha(R) \mid (\phi - \psi)(V) \subseteq U\}$, $\psi \in \alpha(R)$, U, V — открытые в R^1, $0 \in U$, и рассматривать вопрос о компактности $\alpha(R)$ с этой топологией. Последняя обеспечивает непрерывность $\alpha(R)\times R^1 \to R^1$, так как для любых $\psi \in \alpha(R)$, $x \in R^1$ и открытого $U \subseteq R^1$, $\psi x \in U$, можно выбрать открытые $U', U'', U''' \subseteq R^1$, $x \in U'$, $0 \in U'''$, $\psi x \in U''$, $U'' + U''' \subseteq U$, $\psi(U') \subseteq U''$, и $\phi(U') \subseteq U$ для всех $\phi \in \alpha(R)$, $(\phi - \psi)(U') \subseteq U'''$.

Если F — поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\alpha(R)$ — F-подпространство $\mathrm{End}_F(R)$, R — нормированное F-пространство, то α-ограниченность R равносильна $\alpha(R) = \{0\}$, так как для $R \in \mathfrak{M}_\alpha$ и любых ограниченных окрестностей нуля $V \subseteq F$, $U \subseteq R$ найдутся окрестности нуля $V' \subseteq F$, $U' \subseteq R$, $\alpha(R)(V' + U') \subseteq V + U$, и

$$F\alpha(R)(U') \subseteq U, \quad \alpha(R)(R) = \alpha(R)(FU') = \alpha(R)(U') = \{0\},$$
$$F(\alpha(R)(V') \cap U) \subseteq U, \quad \alpha(R)(V') \cap U = \{0\},$$
$$F\alpha(R)(V') = F\alpha(R)\,1 = \alpha(R)(V') \subseteq V, \quad \alpha(R)\,1 = \{0\}$$

(см. [20, следствие 1])?! Поэтому к нормированной ситуации условие α-ограниченности, по сути, не применимо. Следующий пример показывает, что квазирегулярность здесь также не играет значимой роли. По аналогии с альтернативными алгебрами (см. ниже) назовём элемент x нормированной ассоциативной алгебры R *топологически квазирегулярным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in R$, $\|x + y - xy\|, \|x + y - yx\| < \varepsilon$. Если R банахова, то отсюда следует обратимость $(1 - x)(1 - y)$ и $(1 - y)(1 - x)$ в банаховой алгебре R^1 с нормой $|f + z| = |f| + \|z\|$, $f \in F$ $(F = \mathbb{R}, \mathbb{C})$, $z \in R$, и квазирегулярность x в R (элементы R^1, близкие к обратимым, обратимы). Иначе говоря, топологическая квазирегулярность элемента нормированной алгебры — его квазирегулярность в её пополнении. Если $F = \mathbb{C}$, R банахова, то квазирегулярность всех fx, $f \in \mathbb{C}$, равносильна $r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$, и значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ (см. [19, теорема 7.9, с. 39]; при $x^n \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $n \geqslant 1$, $\|x^n\| \leqslant \varepsilon$, и потому

$$\|x^{kn+l}\|^{\frac{1}{kn+l}} \leqslant \|x^l\|^{\frac{1}{kn+l}} \varepsilon^{\frac{1}{n+l/k}} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

для любых $k \geqslant 1$, $0 \leqslant l < n$ и некоторой константы $C > 0$, $r(x) = 0$). Как следствие, в C^*-алгебрах нет ненулевых квазирегулярных идеалов, поскольку для любого x из такого идеала квазирегулярность всех fx^*x, $f \in \mathbb{C}$, равносильна $r(x^*x) = \|x\|^2 = 0$, $x = 0$ (см. [19, теорема 9.3, с. 43]). Поэтому топологически квазирегулярные идеалы нормированных ассоциативных $\mathbb{C}$-алгебр состоят из элементов x, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ (являются их Σ-ниль-идеалами), пре-C^*-алгебры не содержат ненулевых топологически квазирегулярных идеалов (см. [19, следствие 3.3, предложение 3.4, с. 13]).

Назовём отображения замкнутого относительно взятия идеалов и фактор-алгебр класса алгебр $\mathfrak{X}$ в себя, удовлетворяющие условиям определения радикала в смысле Куроша—Амицура с заменой всех гомоморфизмов алгебр из $\mathfrak{X}$ на их гомоморфизмы в алгебры из $\mathfrak{X}$, *$\mathfrak{X}$-радикалами*, отвечающие им радикальные и полупростые классы — *радикальными в $\mathfrak{X}$* и *полупростыми в $\mathfrak{X}$ классами*. Любой $\mathfrak{X}$-радикал — радикал в смысле Куроша-Амицура на замкнутых относительно взятия идеалов и гомоморфных образов подклассах $\mathfrak{X}$. Аналогичным образом определим понятие *топологического $\mathfrak{X}$-радикала*.

Теорема 3.1. *Класс $\mathfrak{J}_{\alpha\text{-top}} \cap \mathfrak{M}_\alpha$ — радикальный в классе $\mathfrak{M}_\alpha$ подкласс.*

Доказательство. Пусть $R \in \mathfrak{M}_\alpha$. Если $x \in I \lhd R$ топологически α-квазирегулярен в I, то x топологически α-квазирегулярен в R, так как для любой окрестности $U \ni 1$ в R^1 существует $\phi \in \alpha(I)$, $\phi(1-x) = \bar{\phi}(1-x) \in U \cap I^1 \subseteq U$, где $\bar{\phi}$ — продолжение ϕ до элемента $\alpha(R)$ из условия 1). Поэтому для любых α-квазирегулярных $J, J' \lhd R$, $y \in J$, $y' \in J'$ и любой окрестности нуля $V \subseteq R^1$ можно выбрать окрестности нуля $W, W' \subseteq R^1$, $\alpha(R)(W) \subseteq W'$, $W' + W' \subseteq V$, и $\rho, \rho' \in \alpha(J + J')$, $\rho(1-y) \in 1 + W$, $\rho'(1 - \rho y') \in 1 + W'$,

$$\rho'\rho(1 - y - y') \in \rho'(1 - \rho y' + W) \subseteq 1 + W' + W' \subseteq 1 + V.$$

Значит, $J + J'$ — α-квазирегулярный идеал R, сумма $\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R)$ всех топологически α-квазирегулярных идеалов R — наибольший среди таких идеалов R.

Если $x \in [\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R)]_{R^1} \cap R$, то для любой окрестности нуля $O \subseteq R^1$ найдутся окрестности нуля $H, H' \subseteq R^1$, $\alpha(R)(H) \subseteq H'$, $H' + H' \subseteq O$, $y \in (x + H) \cap \mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R)$ и $\tau \in \alpha([\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R)]_{R^1} \cap R)$, для которых $\tau(1-y) \in 1 + H'$,

$$\tau(1-x) = \tau(1-y) + \tau(y-x) \in 1 + H' + \tau(H) \subseteq 1 + H' + H' \subseteq 1 + O.$$

Как следствие, $\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R) = [\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R)]_{R^1} \cap R = [\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R)]$ (в R).

Если $\psi\colon R \to R'$ — непрерывный гомоморфизм алгебр $R, R' \in \mathfrak{M}_\alpha$, G — окрестность нуля в ${R'}^1$, G' — её прообраз в R^1 (ψ^1 также непрерывен), то для любого топологически α-квазирегулярного $x \in R$ найдётся $\delta \in \alpha(R)$, $\delta(1-x) \in$ $\in 1 + G'$,

$$1 + G = \psi^1(1 + G') \ni \psi^1\delta(1-x) = (\psi_\alpha\delta)(1 - \psi x),$$

где $\psi_\alpha\colon \alpha(R) \to \alpha(\psi(R))$ — индуцированный ψ эпиморфизм моноидов $\alpha(R)$ и $\alpha(\psi(R))$ из условия 2) (это верно и для $R, R' \in \mathfrak{M}$). Поэтому класс $\mathfrak{J}_{\alpha\text{-top}}$ замкнут относительно взятия непрерывных гомоморфных образов и $\psi(\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R)) \subseteq \mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(\psi(R))$.

Если элементы $I \lhd R$ топологически α-квазирегулярны в R, то элементы R с топологически α-квазирегулярными образами в фактор-алгебре с фактор-топологией R/I топологически α-квазирегулярны, так как для каждого такого $x \in R$ и любой окрестности нуля $K \subseteq R^1$ существуют окрестности нуля $K', K'' \subseteq R^1$, $\alpha(R)(K'') \subseteq K'$, $K' + K' \subseteq K$, $\theta, \theta' \in \alpha(R)$ и $y \in I$, такие что

$$(\pi_\alpha\theta)\pi^1(1-x) = \pi^1\theta(1-x) \in 1 + \pi^1(K''),$$

$$\theta(1-x)\in 1-y+K'',\quad \theta'(1-y)\in 1+K',\quad \theta'\theta(1-x)\in 1+K'+K'\subseteq 1+K,$$

где $\pi\colon R\to R/I$ — канонический эпиморфизм R на R/I, $\pi^1(R^1)=(R/I)^1\cong R^1/I$ — канонический изоморфизм и гомеоморфизм. Значит, $\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R/\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R))=\{0\}$.

Поэтому $\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}\colon R\mapsto\mathcal{J}_\alpha(R)$, $R\in\mathfrak{M}_\alpha$, — топологический $\mathfrak{M}_\alpha$-радикал, $\mathfrak{I}_{\alpha\text{-top}}\cap\mathfrak{M}_\alpha$ — класс $\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}$-радикальных в $\mathfrak{M}_\alpha$ алгебр. □

Сходным образом можно установить наличие в каждой алгебре $R\in\mathfrak{M}_\alpha$ наибольших идеала $\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R)$ и α-инвариантного подмодуля $\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R)$ среди идеалов и α-инвариантных подмодулей R, состоящих из её топологически α-квазирегулярных элементов,

$$\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R)\subseteq\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R)=[\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R)]\subseteq\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R)=[\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R)],$$

$\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}\big(R/\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R)\big)=\{0\}$, $\psi\big(\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R)\big)\subseteq\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}\big(\psi(R)\big)$ и $\psi(\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R)\subseteq\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}\big(\psi(R)\big)$ для любого непрерывного гомоморфизма $\psi\colon R\to R'$, $R,R'\in\mathfrak{M}_\alpha$. Топологическая $\mathfrak{M}'$-радикальность (радикальность) отображения $\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}\colon R\mapsto\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R)$, $R\in\mathfrak{M}'$, на замкнутом относительно взятия идеалов и фактор-алгебр (непрерывных гомоморфных образов) подклассе $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}_\alpha$ равносильна совпадению $\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}$ и $\mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}$ на $\mathfrak{M}'$.

Каждый элемент $\phi\in M(R^1)$, $R\in\mathfrak{M}$, представим в виде $\phi=f\,\mathrm{Id}_{R^1}+\phi'$ с однозначно определёнными $f\in F$, $\phi'\in M^{R^1}(R)$. Для всех $x\in R^1$ положим $\alpha(R)x=\{\phi x\mid\phi\in\alpha(R)\}$, $\alpha(R)'x=\{\phi'x\mid\phi\in\alpha(R)\}$. Назовём α-инвариантный подмодуль $M\subseteq R$ *α-модулярным*, если $\alpha(R)'(1-x)\subseteq M$ для некоторого $x\in R$, и *топологически α-модулярным*, если для любой окрестности нуля $U\subseteq R$ найдётся $x\in R$, $\alpha(R)'(1-x)\subseteq M+U$. Ввиду непрерывности операторов умножения на элементы R^1 замыкания α-инвариантных подмодулей — α-инвариантные подмодули. Наибольший среди $I\lhd R$ ($I\lhd R^1$), входящих в F-подмодуль $K\subseteq R$ ($K\subseteq R^1$), мы будем обозначать через $\hat{K}$.

Частично упорядоченное множество, в котором каждый немаксимальный элемент предшествует некоторому максимальному, мы будем называть *слабо индуктивным*. Это условие тривиально при наличии наибольшего элемента и далее будет применяться к частично упорядоченным по включению множествам собственных подмодулей алгебр. Напомним, что индуктивность частично упорядоченного множества — это ограниченность в нём его упорядоченных подмножеств, которая по лемме Цорна гарантирует слабую индуктивность. По умолчанию условия индуктивности и максимальности применяются к непустым частично упорядоченным множествам. Обозначим через $\mathcal{M}_\alpha(R)$ и $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ множества собственных замкнутых α-инвариантных подмодулей алгебр $R\in\mathfrak{M}$ и R^1.

Лемма 3.2. *Если $R\in\mathfrak{M}_\alpha$, $\alpha(R)x$ — F-подмодуль R^1 для всех $x\in R^1$, $\mathcal{P}$ — множество максимальных элементов $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ при их наличии и $\mathcal{P}=\{R^1\}$ иначе, то элементы $\mathcal{P}$ открыты в R^1, в $R^1=[\{0\}]$ и $R^1=[\alpha(R)\,1]\neq[\{0\}]$ со слабо индуктивным $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$,*

$$\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R) = R \cap \Big(\bigcap_{M\in\mathcal{P}} M\Big), \quad \mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R) = \bigcap_{M\in\mathcal{P}} (R \cap \hat{M}).$$

В частности, если $R^1 = [\alpha(R)\,1] \neq [\{0\}]$, то $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ слабо индуктивно при наличии базы окрестностей нуля из аддитивных подгрупп R^1, над дискретным F с $R = [\{0\}]$ или $R \neq [\{0\}]$ и слабо индуктивным $\mathcal{M}_\alpha(R)$, при выполнении в $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ условия индуктивности или максимальности (*например, для $R^1 = \alpha(R)\,1$ с замкнутыми максимальными α-инвариантными подмодулями и $R^1 \neq [\{0\}]$ над нётеровым F с $R = [\{0\}]$ или $R \neq [\{0\}]$ и условием максимальности для $\mathcal{M}_\alpha(R)$*).

Доказательство. Условия $R^1 = [\{0\}]$ и $\mathcal{M}_\alpha(R^1) = \varnothing$ равносильны, и по условию из них следует, что $R = \mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R) = \mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R)$ ($R = [\{0\}]$ равносильно $\mathcal{M}_\alpha(R) = \varnothing$).

Если $M \in \mathcal{P} \neq \{R^1\}$ имеет пустую внутренность, то для любой окрестности нуля $U \subseteq R^1$ можно подобрать окрестности нуля $U', U'' \subseteq R^1$, $U' + U' \subseteq U$, $\alpha(R)(U'') \subseteq U'$ и $x \in U'' \setminus M$, а потому M и x входят в α-инвариантный подмодуль $M + \alpha(R)x$,

$$R^1 = [M + \alpha(R)x] = M + U' + U' = M + U = [M] = M$$

(произвольность U)?! Значит, M имеет непустую внутренность и, более того, открыт и является максимальным α-инвариантным подмодулем R^1 (в топологической группе открытые подгруппы замкнуты).

Если $R^1 = [\alpha(R)\,1]$, α-инвариантный подмодуль $L \subset R$ состоит из топологически α-квазирегулярных элементов R и $L \not\subseteq M$ для некоторого $M \in \mathcal{P} \neq \{R^1\}$, то $R^1 = [L + M]$ и для любой окрестности нуля $U \subseteq R^1$ найдутся окрестности нуля $U', U'' \subseteq R^1$ (как выше), $y \in M$ и $\phi \in \alpha(R)$, $x + y \in 1 + U''$, $\phi(1 - x) \in 1 + U'$,

$$\phi y \in \phi(1 - x) + \phi(U'') \subseteq 1 + U' + U' \subseteq 1 + U, \quad \phi y \in M \cap (1 + U),$$

$1 \in [M] = M$, $M = R^1$?! Как следствие, в этом случае $\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R) \subseteq \bigcap_{M\in\mathcal{P}} M$.

Если $R^1 = [\alpha(R)\,1]$, $z \in R \cap \Big(\bigcap_{M\in\mathcal{P}} M\Big)$ не является топологически α-квазирегулярным элементом R, $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ слабо индуктивно, то $[\alpha(R)(1 - z)] \in \mathcal{M}_\alpha(R^1)$ входит в некоторый $K \in \mathcal{P} \neq \{R^1\}$, $\alpha(R)\,1 \subseteq \alpha(R)z + \alpha(R)(1 - z) \subseteq K$, $R^1 = [K] = K$?! Поэтому в условиях второй части $\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R) = R \cap \Big(\bigcap_{M\in\mathcal{P}} M\Big)$, $\mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R) = \bigcap_{M\in\mathcal{P}} (R \cap \hat{M})$.

В $R^1 \neq [\{0\}]$ с базой окрестностей нуля из аддитивных подгрупп (α-инвариантных подмодулей, поскольку $\mathbb{Z}\alpha(R)(U) = \sum_{x\in U} \alpha(R)x$ — α-инвариантный подмодуль для любой аддитивной подгруппы $U \subseteq R^1$) для любых α-инвариантного подмодуля V из этой базы и $M \in \mathcal{M}_\alpha(R^1)$ либо открытый $M + V$ принадлежит $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$, либо $M + V = R^1$. Если $M + V = R^1$ для всех таких V, то $R^1 = [M] = M$?! Значит, в данном случае любой подмодуль из $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ или открыт, или входит в открытый подмодуль из $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$. При $R^1 = [\alpha(R)\,1]$ он также содержится в некотором элементе $\mathcal{P} \neq \{R^1\}$, так как множество открытых подмодулей из $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ индуктивно (объединение любой их упорядоченной системы открыто, не содержит 1 и входит в $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$). Отсюда следует, что в $R^1 \neq [\{0\}]$ с базой окрестностей нуля из α-инвариантных подмодулей элементы $\mathcal{P}$ открыты и $\mathcal{P} \neq \{R^1\}$ при $R^1 = [\alpha(R)\,1] \neq [\{0\}]$.

Если $R^1 = \alpha(R)\,1$, то множество собственных α-инвариантных подмодулей R^1 индуктивно (см. [4, замечание 2.2]) и из замкнутости максимальных α-инвариантных подмодулей R^1 сразу следует индуктивность $\mathcal{M}_\alpha(R^1) \neq \varnothing$.

Если H — максимальный замкнутый идеал F, $H + R$ — максимальный замкнутый левый, правый, двусторонний идеал и α-инвариантный подмодуль R^1. Как следствие, при наличии в F собственных открытых идеалов (и значит, открытых максимальных идеалов) $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ содержит максимальные элементы, $\mathcal{P} \neq \{R^1\}$.

Если F дискретно, $R = [\{0\}]$ или $R \neq [\{0\}]$ и $\mathcal{M}_\alpha(R)$ слабо индуктивно, то R открыто и замкнуто в R^1, топология R входит в топологию R^1, аналогично началу доказательства можно вывести открытость максимальных элементов $\mathcal{M}_\alpha(R)$ при их наличии и для любого $L \in \mathcal{M}_\alpha(R^1)$ либо $L \cap R = R$, либо $L \cap R \subseteq N$ для некоторого максимального элемента $N \in \mathcal{M}_\alpha(R)$, $(L + N) \cap R = N$ и $L + N \in \mathcal{M}_\alpha(R^1)$ открыт. Для $R^1 = [\alpha(R)\,1]$ ввиду индуктивности множества открытых подмодулей из $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ в любом случае L входит в некоторый элемент $\mathcal{P} \neq \{R^1\}$, $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ слабо индуктивно.

Условие максимальности для $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ гарантирует его индуктивность. Это верно, в частности, для $R^1 \neq [\{0\}]$ с условием максимальности для замкнутых подмножеств (артиновой топологией). Если $R^1 \neq [\{0\}]$ над нётеровым F с $R = [\{0\}]$ или $R \neq [\{0\}]$ и $\mathcal{M}_\alpha(R)$ с условием максимальности, то любая неубывающая цепь $\{N_i\}_{i \geqslant 1} \subseteq \mathcal{M}_\alpha(R^1)$ стабилизируется на некотором шаге, так как проекции $\{\pi_F(N_i)\}_{i \geqslant 1}$ её элементов на F формируют неубывающую цепь идеалов F, пересечения $\{N_i \cap R\}_{i \geqslant 1}$ — неубывающую цепь в $\mathcal{M}_\alpha(R) \cup \{R\}$, и можно выбрать $k \geqslant 1$, $\pi_F(N_k) = \pi_F(N_i)$, $N_k \cap R = N_i \cap R$ для всех $i > k$, и $X \subseteq N_k$, $\pi_F(X) = \pi_F(N_k)$, $N_i = FX + (N_k \cap R) = N_k$ для всех $i > k$. По лемме Цорна отсюда следует выполнение для $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ условия максимальности.

Если $R^1 = [\alpha(R)\,1]$, F дискретно, топология R артинова, $\{N_a\}_{a \in I}$ — упорядоченное подмножество $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$, $R^1 = \Big[\bigcup\limits_{a \in I} N_a\Big]$, то $1 \in \Big[\bigcup\limits_{a \in I} N_a\Big]$, найдётся $c \in I$, $(1 + W) \cap N_a \neq \varnothing$ при всех $a \geqslant c$, где W $(1 + W)$ — минимальная и потому наименьшая окрестность нуля в R (1 в R^1), $1 \in N_a = [N_a]$, $N_a = R^1$?! Поэтому в данном случае $\mathcal{M}_\alpha(R^1)$ индуктивно. □

Отметим, что отделимость и артиновость топологии алгебры (модуля) равносильны её дискретности и конечности алгебры (модуля) как множества.

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\alpha'}$ класс алгебр $R \in \mathfrak{M}_\alpha$, таких что для любой окрестности нуля $W \subseteq R$ найдётся окрестность нуля $V \subseteq R$, $\alpha'(R)(V) \subseteq W$, через $\mathcal{P}_\alpha(R)$ ($\mathcal{P}_{\alpha\text{-top}}(R)$) — множество собственных замкнутых (топологически) α-модулярных подмодулей $R \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{P}_\alpha(R) \subseteq \mathcal{P}_{\alpha\text{-top}}(R)$.

Лемма 3.3. *Если $R \in \mathfrak{M}_{\alpha'}$, $R = [\alpha(R)'\,1]$, $\mathrm{Id}_{R^1} + \phi' \in \alpha(R)$, $\alpha(R)'x$ — F-подмодуль R для всех $x \in R^1$, $\phi \in \alpha(R)$, F дискретно и $\mathcal{P}_\alpha(R)$ пусто или слабо индуктивно, то*

$$\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R) = \bigcap_{M \in \mathcal{P}} M = \bigcap_{L \in \mathcal{P}'} L, \quad \mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R) = \bigcap_{M \in \mathcal{P}} \hat{M} = \bigcap_{L \in \mathcal{P}'} \hat{L},$$

где $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}'$) — множество максимальных элементов $\mathcal{P}_\alpha(R)$ ($\mathcal{P}_{\alpha\text{-top}}(R)$) при их наличии и $\mathcal{P} = \{R\}$ ($\mathcal{P}' = \{R\}$) иначе.

Доказательство. Так как $\big((f\,\mathrm{Id}_{R^1} + \nu)(h\,\mathrm{Id}_{R^1} + \mu)\big)' = f\mu + h\nu + \nu\mu$ для всех $f, h \in F$, $\nu, \mu \in M^{R^1}(R)$, подмодули $\alpha(R)'x$, $x \in R^1$, α-инвариантны. Если $x \in R$ топологически α-квазирегулярен, то для любой окрестности нуля $V \subseteq R$ найдутся окрестность нуля $V' \subseteq R$, $\alpha(R)'(V') \subseteq V$, $\phi \in \alpha(R)$, $\phi(1-x) \in 1 + V'$, $\phi = \mathrm{Id}_{R^1} + \phi'$, и, как следствие, $x \in \phi'(1-x) - V' \in \alpha(R)'(1-x) - V'$,

$$\alpha(R)'x \subseteq \alpha(R)'(1-x) - \alpha'(R)(V') = \alpha(R)'(1-x) + \alpha'(R)(V') \subseteq \alpha(R)'(1-x) + V,$$
$$\alpha(R)'\,1 \subseteq \alpha(R)'x + \alpha(R)'(1-x) \subseteq \alpha(R)'(1-x) + V,$$

$R = [\alpha(R)'\,1] = [\alpha(R)'(1-x)]$. Вместе с тем каждый $x \in R$, $R = [\alpha(R)'(1-x)]$, топологически α-квазирегулярен, поскольку для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ существует $\tau' \in \alpha(R)'$, $\tau'(1-x) \in x + U$, $(\mathrm{Id}_{R^1} + \tau')(1-x) \in 1 + U$, $\mathrm{Id}_{R^1} + \tau' \in \alpha(R)$. Значит, случай $\mathcal{P}_\alpha(R) = \varnothing$ равносилен $R = \mathcal{J}_{\alpha\text{-top}}(R) = \mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R)$.

Если имеется α-инвариантный подмодуль $L \subseteq \mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R)$, $L \nsubseteq M$ для некоторого $M \in \mathcal{P}' \neq \{R\}$ ($M \in \mathcal{P} \neq \{R\}$), то $R = [L + M]$, для любых окрестностей нуля $W, W' \subseteq R$, $W' + \alpha(R)'(W') \subseteq W$, и $x \in R$, $\alpha(R)'(1-x) \subseteq M + W'$, можно подобрать $y \in M$, $y' \in L$, $x \in y + y' + W'$, и получить

$$\alpha(R)'(1-y') \subseteq \alpha(R)'(1-x) + \alpha(R)'y + \alpha(R)'(W') \subseteq M + W' + \alpha(R)'(W') \subseteq M + W,$$

$R = [\alpha(R)'(1-y')] = [M + W]$, $R = [M] = M$?! Поэтому $\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R) \subseteq \bigcap\limits_{L \in \mathcal{P}'} L \subseteq \bigcap\limits_{M \in \mathcal{P}} M$ (с учётом $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$). Если $z \in \bigcap\limits_{M \in \mathcal{P}} M$ не является топологически α-квазирегулярным элементом R, $\mathcal{P}_\alpha(R)$ слабо индуктивно, то $[\alpha(R)'(1-z)] \in \mathcal{P}_\alpha(R)$ входит в некоторый $K \in \mathcal{P} \neq \{R\}$, $\alpha(R)'\,1 \subseteq \alpha(R)'z + \alpha(R)'(1-z) \subseteq K$, $R = [K] = K$?! Отсюда следует, что

$$\mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R) = \bigcap_{M \in \mathcal{P}} M = \bigcap_{L \in \mathcal{P}'} L, \quad \mathcal{J}'_{\alpha\text{-top}}(R) = \bigcap_{M \in \mathcal{P}} \hat{M} = \bigcap_{L \in \mathcal{P}'} \hat{L}.$$

Если $\alpha(R)x$ — F-подмодуль R для всех $x \in R$ или (и) R имеет базу окрестностей нуля из F-подмодулей, то, как и в лемме 3.2, можно обосновать открытость максимальных элементов $\mathcal{P}_{\alpha\text{-top}}(R)$ при их наличии вместе с их α-модулярностью и максимальностью среди α-модулярных подмодулей R. Слабую индуктивность непустого $\mathcal{P}_\alpha(R)$ обеспечивает замкнутость максимальных α-модулярных подмодулей для $R = \alpha(R)'\,1$, наличие в R базы окрестностей нуля из F-подмодулей (α-инвариантных подмодулей; любой F-подмодуль $U \subseteq R$

порождает α-инвариантный подмодуль $F\alpha(R)(U) = U + F\alpha(R)'(U)$) и индуктивность $\mathcal{P}_\alpha(R)$ (например, условие максимальности для $\mathcal{P}_\alpha(R)$, артиновость топологии R) (см. доказательство леммы 3.2). $\square$

Так как α-инвариантные подмодули алгебр $R \in \mathfrak{M}$ и R^1 инвариантны относительно действия подалгебры $\bar{\alpha}(R) = \langle \alpha(R) \rangle \subseteq M(R^1)$, в леммах 3.2, 3.3 отображение α можно заменить на $\bar{\alpha}\colon R \mapsto \bar{\alpha}(R)$, $R \in \mathfrak{M}$. Для $\alpha = \alpha_S$, $S = L, R, M$, условие максимальности для замкнутых α-инвариантных подмодулей соответствует нётеровости для замкнутых левых, правых и двусторонних идеалов.

Лемма 3.4. *Если $M_1, \ldots, M_n$ — максимальные α-модулярные подмодули $R \in \mathfrak{M}$, $n \geqslant 1$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i$ — α-модулярный подмодуль R.*

Доказательство. Достаточно применить индукцию по $n \geqslant 2$, доказательство шага которой и проверка основания сводится к обоснованию α-модулярности $M_1 \cap M$, где M — α-модулярный подмодуль R, $\alpha(R)'(1-x) \subseteq M_1$, $\alpha(R)'(1-y) \subseteq M$ для некоторых $x, y \in R$. Можно считать, что $M \not\subseteq M_1$, и значит, $R = M_1 + M$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in M_1$, $x_2, y_2 \in M$,

$$\alpha(R)'(1 - x_2 - y_1) = \alpha(R)'\bigl(1 - x + (x_1 - y_1)\bigr) = \alpha(R)'\bigl(1 - y + (y_2 - x_2)\bigr) \subseteq \\ \subseteq \bigl(M_1 + \alpha(R)'(M_1)\bigr) \cap \bigl(M + \alpha(R)'(M)\bigr) = M_1 \cap M. \quad \square$$

Выделим в классе всех топологических F-алгебр $\mathfrak{U}$ подкласс $\mathfrak{U}_S$ таких $A \in \mathfrak{U}$, что для любой окрестности нуля $U \subseteq A$ найдётся окрестность нуля $U' \subseteq A$, $FS(A)(U') \subseteq U$ для $S = L, R, M$ и $FU' \subseteq U$ для $S = F$, подкласс $\mathfrak{U}'_{\alpha_S}$ таких $A \in \mathfrak{U}$, что для любой окрестности нуля $U \subseteq A$ имеется окрестность нуля $U' \subseteq A$, $S(A^1)(U') \subseteq U$ ($\mathfrak{U}'_{\alpha_S} = \mathfrak{U}_{\alpha_S} = \mathfrak{U}_{\alpha'_S}$ для дискретного F в обозначениях леммы 3.3 с $\mathfrak{M} = \mathfrak{U}$, $\alpha = \alpha_S$), $S = L, R, M$, и подкласс $\mathfrak{U}_{(L)}$ ($\mathfrak{U}_{(R)}$) таких $A \in \mathfrak{U}$, что для любой окрестности нуля $U \subseteq A$ существует окрестность нуля $U' \subseteq A$, $AU' \subseteq U$ ($U'A \subseteq U$), $\mathfrak{U}_{(M)} = \mathfrak{U}_{(L)} \cap \mathfrak{U}_{(R)}$, $\mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{U}_S \subseteq \mathfrak{U}'_{\alpha_S} \subseteq \mathfrak{U}_{(S)}$, $S = L, R, M$. Класс $\mathfrak{U}_{(M)}$ содержит все компактные F-алгебры, для дискретного $F = \mathbb{Z}$ класс $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}} \cap \mathfrak{U}_M$ — все вполне несвязные компактные ассоциативные кольца (см. выше).

Топологическая квазирегулярность в альтернативных и линейных йордановых алгебрах

Квазирегулярный радикал $\mathcal{J}$ дискретных альтернативных алгебр равен их радикалам $\mathcal{J}_{\alpha_L}$ и $\mathcal{J}_{\alpha_R}$ (см. [4]). Вместе с тем по аналогии с ассоциативными алгебрами (см. [20]) можно определить топологический квазирегулярный радикал альтернативных алгебр. Пусть R — топологическая F-алгебра. Назовём элемент $x \in R$, R с 1, *топологически обратимым* (*справа* (*слева*)), если для любой окрестности $U \ni 1$ в R найдётся $y \in R$, $xy, yx \in U$ ($xy \in U$ ($yx \in U$) для обратимого справа (слева) x). Будем называть $x \in R$ *топологически квазирегулярным*, если для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ существует $y \in R$,

$x+y-xy, x+y-yx \in U$ (для любой окрестности $U \ni 1$ в R^1 можно выбрать $y \in R$, $(1-x)(1-y), (1-y)(1-x) \in U$). Если F дискретно, топологическая квазирегулярность $x \in R$ равносильна топологической обратимости $1-x \in R^1$ (окрестности вида $1+U$, U — окрестность нуля в R, формируют базу окрестностей $1 \in R^1$). Если R — компакт, топологическая квазирегулярность $x \in R$ — квазирегулярность x в обычном смысле ($[t_{1-x}(R)] = t_{1-x}(R)$, $t=l,r$; см. [20]). Правый (левый) идеал $I \subseteq R$, такой что для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ имеется $x \in R$, $(1-x)R \subseteq I+U$ ($R(1-x) \subseteq I+U$), $1 \in R^1$, мы будем называть *топологически модулярным*. Для любого $A \subseteq R$ положим

$$A_{k,1} = A \cup -A \cup \bigcup_{x_i \in R,\ t=l,r,\ 1 \leqslant m \leqslant k} t_{x_1} \cdots t_{x_m}(A),$$
$$A_{k,n} = \underbrace{A_{k,1} + \ldots + A_{k,1}}_{n} \quad (k,n \geqslant 1).$$

В $R \in \mathfrak{U}_{(M)}$ для любых окрестности нуля U и $k,n \geqslant 1$ найдётся окрестность нуля U', $U'_{k,n} \subseteq U$. Обозначим через $\mathfrak{J}_{\mathrm{top}}$ класс топологических F-алгебр, состоящих из топологически квазирегулярных элементов (*топологически квазирегулярных алгебр*), через $\mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}S}$, $\mathfrak{U}_{\text{Alt-}\alpha_S}$ и $\mathfrak{U}_{\text{Alt-}(S)}$ — классы альтернативных алгебр из классов $\mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{U}_S$, $\mathfrak{U}_{\alpha_S}$ и $\mathfrak{U}_{(S)}$, $S=L,R,M$ (см. выше). Следующая серия выводов получена на основе построений [5, гл. 10, § 3].

Замечание 3.5. Если $1 \in R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$, $x \in R$ топологически обратим слева и справа, то x топологически обратим (см. [5, лемма 6, с. 242]).

Доказательство. Для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ можно подобрать окрестность нуля $U' \subseteq R$, $U'_{4,6} \subseteq U$, и $y,z \in R$, $xy, zx \in 1+U'$. Тогда ввиду [5, (16), с. 174, (16), (16′), с. 51] и кососимметричности ассоциатора на элементах R

$$(x,y,z) \in (xy)(x,y,z) + U'_{1,1} = y(x(x,y,z)) + U'_{1,1} = y(x,y,zx) + U'_{1,1} \subseteq U'_{3,3},$$
$$z \in z(xy) + U'_{1,1} = (zx)y - (z,x,y) + U'_{1,1} \subseteq y + U'_{3,5}, \quad yx \in zx + U'_{4,5} \subseteq 1+U.$$

Аналогичным образом если R без 1, $x',y',z' \in R$, $x = 1+x', y = 1+y'$, $z = 1+z' \in R^1$, $xy, zx \in 1+U'$, $U'_{4,19} \subseteq U$ для некоторых окрестностей нуля $U,U' \subseteq R$, то $(x,y,z) \in U'_{3,5}$, $z \in y + U'_{3,9}$, $yx \in zx + U'_{4,18} \subseteq 1+U$. □

Замечание 3.6. Если $1 \in R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ и $x \in R$ топологически обратим, то для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдётся $y \in R$, $xy, yx \in 1+U$, (z,x,y), $f(z,z',x,y) \in U$ для всех $z,z' \in R$, где $f(a,b,c,d) = (ab,c,d) - b(a,c,d) - (b,c,d)a$ — функция Клейнфелда (см. [5, лемма 7, с. 242]).

Доказательство. Выбрав окрестность нуля $U' \subseteq R$, $U'_{4,9} \subseteq U$, и $y \in R$, $xy, yx \in 1+U'$, мы получаем аналогично замечанию 3.5

$$(z,x,y) \in (xy)(z,x,y) + U'_{1,1} = y\bigl(x(z,x,y)\bigr) + U'_{1,1} = y(z,x,yx) + U'_{1,1} \subseteq U'_{3,3} \subseteq U,$$
$$f(z,z',x,y) = (zz',x,y) - z'(z,x,y) - (z',x,y)z \in U'_{4,9} \subseteq U.$$

Если R без 1, $x', y' \in R$, $x = 1+x', y = 1+y' \in R^1$, $xy, yx \in 1+U'$ для некоторой окрестности нуля $U' \subseteq R$, то $(z,x,y) \in U'_{3,5}$, $f(z,z',x,y) \in U'_{3,5} + U'_{4,10} + U'_{4,10} \subseteq$ $\subseteq U'_{4,25}$ для всех $z, z' \in R^1$. $\square$

Следствие 3.7. *Если в доказательстве замечания* 3.6 $U'_{5,16} \subseteq U$ *и* $(x,z,z') \in$ $\in U'$ *для некоторых* $z, z' \in R$, *то* $(y,z,z') \in U$ (*ср. с* [5, лемма 8, с. 243]).

Доказательство. Из замечания 3.6 и $f(z,z',x,y) = f(x,y,z,z')$ (см. [5, лемма 2, с. 167]) следует, что

$$
\begin{aligned}
&(y,z,z')x = (xy,z,z') - f(z,z',x,y) - y(x,z,z') \in U'_{2,2} + U'_{4,9} + U'_{1,1} \subseteq U'_{4,12},\\
&(y,z,z') \in (y,z,z')(xy) + U'_{1,1} = \big((y,z,z')x\big)y - \big((y,z,z'),x,y\big) + U'_{1,1} \subseteq\\
&\quad \subseteq U'_{5,12} + U'_{3,3} + U'_{1,1} \subseteq U'_{5,16} \subseteq U.
\end{aligned}
$$

Для R без 1, $x', y' \in R$, $x = 1+x', y = 1+y' \in R^1$, $xy, yx \in 1+U'$ (см. предыдущее доказательство) и $z, z' \in R$, $(x,z,z') \in U'$,

$$
(y,z,z')x \in U'_{2,2} + U'_{4,25} + U'_{1,2} \subseteq U'_{4,29}, \quad (y,z,z') \in U'_{5,58} + U'_{3,5} + U'_{1,1} \subseteq U'_{5,64}. \ \square
$$

Лемма 3.8. *Элементы* $x, x' \in R$, $1 \in R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$, *топологически обратимы, если и только если* xx', $x'x$ *топологически обратимы* (*см.* [5, лемма 9, с. 243]).

Доказательство. Пусть x, x' топологически обратимы, U, U' — окрестности нуля в R, $U'_{7,35} \subseteq U$, $y, y' \in R$, $xy, yx, x'y', y'x' \in 1+U'$. Тогда, применяя дважды следствие 3.7 для $z = xx'$, $x = x'$, $z' = x$ ($(xx', x', x) = 0$) и $z = xx'$, $z' = y'$, $x = x$, мы получаем, что $(xx', y', x) \in U'_{5,15}$, $(xx', y', y) \in U'_{7,30}$, и по замечанию 3.6

$$
\begin{aligned}
(xx')(y'y) = \big((xx')y'\big)y - (xx', y', y) = (x, x', y')y + \big(x(x'y')\big)y - (xx', y', y) \in\\
\in 1 + U'_{4,3} + U'_{2,2} + U'_{7,30} \subseteq 1 + U'_{7,35} \subseteq 1 + U,
\end{aligned}
$$

аналогичным образом выводится $(y'y)(xx')$, $(x'x)(yy')$, $(yy')(x'x) \in 1+U$. Следовательно, xx', $x'x$ топологически обратимы. Если теперь xx', $x'x$ топологически обратимы, V, V' — окрестности нуля в R, $V'_{5,16} \subseteq V$, $z, z' \in R$, $(xx')z$, $z(xx')$, $(x'x)z'$, $z'(x'x) \in 1+V'$, то $(x,x',z), (x,x',z') \in V'_{5,15}$ (см. доказательство следствия 3.7 для $z = x$, $z' = x'$, $x = xx', x'x$ с учётом $(x,x',xx') = (x,x',x'x) = 0$) и

$$
x(x'z) = (xx')z - (x,x',z), \ (z'x')x = z'(x'x) + (z',x',x) \in 1 + V'_{5,16} \subseteq 1 + V,
$$

и значит, x топологически обратим (см. замечание 3.5). Топологическая обратимость x' проверяется аналогично.

Если R без 1, $u, u', v, v' \in R$, $x = 1+u$, $x' = 1+u'$, $y = 1+v$, $y' = 1+v' \in R^1$ и $xy, yx, x'y', y'x' \in 1+U'$ для некоторой окрестности нуля $U' \subseteq R$, то

$$
\begin{gathered}
(xx', y', x) \in U'_{5,60}, \quad (xx', y', y) \in U'_{7,300},\\
(xx')(y'y) \in 1 + U'_{4,10} + U'_{2,5} + U'_{7,300} \subseteq 1 + U'_{7,315}.
\end{gathered}
$$

Если R без 1, $u,u',w,w' \in R$, $x=1+u$, $x'=1+u'$, $z=1+w$, $z'=1+w' \in R^1$ и $(xx')z$, $z(xx')$, $(x'x)z'$, $z'(x'x) \in 1+V'$ для некоторой окрестности нуля $V' \subseteq R$, то (x,x',z), $(x,x',z') \in V'_{5,60}$, $x(x'z)$, $(z'x')x \in 1+V'_{5,61}$. □

Лемма 3.9. *Если* $1 \in R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$, *элементы* $I \lhd R$ *топологически квазирегулярны в* R, *то* $x-y$ *топологически обратим для любых топологически обратимого* $x \in R$ *и* $y \in I$ (*см.* [5, лемма 11, с. 244]).

Доказательство. Для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ существуют окрестность нуля $U' \subseteq R$, $U'_{10,49} \subseteq U$, и $z,a,b \in R$,

$$zx,\ xz,\ (1-a)(1-zy),\ (1-zy)(1-a),\ (1-b)(1-yz),\ (1-yz)(1-b) \in 1+U'.$$

Тогда по следствию 3.7 для $z=x$, $z'=x-y$, $x=x$ ($(x,x,x-y)=0$) и [5, (16), с. 51]

$$(z,x,x-y) \in U'_{5,15},\ \big((x-y)z,x,x-y\big) = (z,x,x-y)(x-y) \in U'_{6,15},$$
$$(1-yz,x,x-y) \in U'_{6,15}+U'_{2,2} \subseteq U'_{6,17},$$

по следствию 3.7 для $z=x$, $z'=x-y$, $x=1-zy$ и $z=1-b$, $z'=x-y$, $x=x$

$$(1-b,x,x-y) \in U'_{8,32}, \quad (1-b,z,x-y) \in U'_{10,47},$$
$$(x-y)\big(z(1-b)\big)-1 \in -(x-y,z,1-b)+U'_{1,2} \subseteq U'_{10,49} \subseteq U,$$

и аналогично $\big((1-a)z\big)(x-y)-1 \in U'_{10,49} \subseteq U$. Поэтому $x-y$ топологически обратим (см. замечание 3.5). Для R без 1, $u,w \in R$, $x=1+u$, $z=1+w \in R^1$ с теми же условиями для окрестности нуля $U' \subseteq R$

$$(z,x,x-y) \in U'_{5,60}, \quad \big((x-y)z,x,x-y\big) \in U'_{6,120}, \quad (1-yz,x,x-y) \in U'_{6,122},$$
$$(1-b,x,x-y) \in U'_{8,548}, \quad (1-b,z,x-y) \in U'_{10,2252},$$
$$(x-y)\big(z(1-b)\big)-1,\ \big((1-a)z\big)(x-y)-1 \in U'_{10,2255}.$$

Отсюда следует, что $x-y$ топологически квазирегулярен в R для всех топологически квазирегулярного $x \in R$ и $y \in I$. □

Теорема 3.10. *Класс* $\mathfrak{J}_{\text{top}} \cap \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ — *радикальный в классе* $\mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ *подкласс* (*см.* [5, теорема 4, с. 245]).

Доказательство. Если $J, J' \lhd R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$, $x \in J$ и все элементы J' топологически квазирегулярны в R, то $x+x'$ топологически квазирегулярен в R для всех $x' \in J'$ (в $J+J'$ для x, топологически квазирегулярного в J, и $J' \in \mathfrak{J}_{\text{top}}$) (см. доказательства леммы 3.9 и замечания 3.5). Как следствие, суммы $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)$ и $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$ всех идеалов R из $\mathfrak{J}_{\text{top}}$ и идеалов, состоящих из топологически квазирегулярных элементов R, — наибольшие из таких идеалов R, $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R) \subseteq \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$.

Понятно, что $\psi\big(\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)\big) \subseteq \mathcal{J}_{\text{q-top}}\big(\psi(R)\big)$, $\psi\big(\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)\big) \subseteq \mathcal{J}'_{\text{q-top}}\big(\psi(R)\big)$ для любого непрерывного гомоморфизма $\psi\colon R \to R'$, $R, R' \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$.

Если $z \in [\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)]$ ($z \in [\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)]$), то для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ можно выбрать окрестность нуля $U' \subseteq U$, $U'-U'+RU'+U'R \subseteq U$,

$z' \in \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) \cap (z+U')$, $y' \in R$ ($z' \in \mathcal{J}_{\text{q-top}}(R) \cap (z+U')$, $y' \in \mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)$), $z'+y'-z'y', z'+y'-y'z' \in U'$,

$$z+y'-t_{y'}z \in z'+y'-t_{y'}z'-U'+t_{y'}(U') \subseteq U \quad (t=l,r),$$

z топологически квазирегулярен в R ($[\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)]$), $z \in \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$ ($z \in \mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)$).

Если $I \lhd R$, $I \subseteq \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$, $x \in R$, $\bar{x} = x+I$ топологически квазирегулярен в R/I, V, V' — окрестности нуля в R, $V'_{6,183} \subseteq V$, то существуют $y,u,v \in R$, $a=1-x$, $b=1-y$, $c=1-u$, $d=1-v \in R^1$,

$$(1-\bar{x})(1-\bar{y}),\ (1-\bar{y})(1-\bar{x}) \in 1+(V'+I)/I \subseteq (R/I)^1,$$
$$ab,\ ba \in 1+V'+I, \quad (ab)c,\ c(ab),\ (ba)d,\ d(ba) \in 1+V'_{1,3},$$

$(a,b,c) \in V'_{6,180}$ (см. доказательства замечания 3.6, следствия 3.7 для $z=a$, $z'=b$, $x=ab$ ($(a,b,ab)=0$) с учётом $(A_{p,q})_{s,t} = A_{p+s,qs}$, $A \subseteq R$, $p,q,s,t \geqslant 1$),

$$a(bc) = (ab)c-(a,b,c) \in 1+V'_{1,3}+V'_{6,180} \subseteq 1+V'_{6,183} \subseteq 1+V,$$

и аналогично $(db)a \in 1+V$, x топологически квазирегулярен в R (см. замечание 3.5). Поэтому $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R/\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)) = \{0\}$, $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R/\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)) = \{0\}$.

Таким образом, $\mathcal{J}_{\text{q-top}}\colon R \mapsto \mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)$, $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$, — топологический $\mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$-радикал, $\mathfrak{J}_{\text{top}} \cap \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ — класс $\mathcal{J}_{\text{q-top}}$-радикальных в $\mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ алгебр. Топологическая $\mathfrak{M}'$-радикальность (радикальность) $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}\colon R \mapsto \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$, $R \in \mathfrak{M}'$, на замкнутом относительно взятия идеалов и фактор-алгебр (непрерывных гомоморфных образов) подклассе $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ равносильна его совпадению с $\mathcal{J}_{\text{q-top}}$ на $\mathfrak{M}'$. □

Рассмотрим топологический вариант теоремы Жевлакова о совпадении радикалов Клейнфелда и Смайли. Напомним, что $\mathcal{P}_{\alpha_R}(R)$ ($\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$) — множество собственных замкнутых (топологически) модулярных правых идеалов топологической алгебры R.

Лемма 3.11. *Если $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(R)}$, $A \lhd R$, I — максимальный элемент $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(A)$, то I — правый идеал R* (см. [5, лемма 4, с. 240]).

Доказательство. Если $Ix \not\subseteq I$ для некоторого $x \in A$, то $I+Ix$ — правый идеал A, поскольку

$$(bx)a = b(xa)+(b,x,a) = b(xa)-(b,a,x) \in I+Ix \quad (b \in I,\ a \in A).$$

Поэтому $A = [I+Ix]_A$. Для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ существуют окрестность нуля $U' \subseteq R$, $U'+(U'R)R+U'R+U'R \subseteq U$, $e \in A$, $a-ea \in I+U'$ для любого $a \in A$, и $b,b' \in I$, $u \in U'$, $e = b+b'x+u$. Следовательно,

$$b'x-e(b'x) = b'x-(b+b'x+u)(b'x) = b'x-b(b'x)-b'(xb'x)-u(b'x) \in I+U',$$
$$b'x \in I+U'A+U', \quad e \in I+U'A+U'+U',$$

$A \subseteq I+U'+(U'A)A+U'A+U'A \subseteq I+U$, $A \subseteq [I]_A = I$?! □

Лемма 3.12. *Если $A \lhd R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(R)}$, $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(A)$ слабо индуктивно, то пересечения A и максимальных элементов $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$, не содержащих A, — максимальные элементы $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(A)$. В $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}R}$ все максимальные элементы $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(A)$ — пересечения A с максимальными элементами $\mathcal{P}_{\alpha_R}(R)$, не содержащими A, максимальные элементы $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$ открыты и модулярны* (см. [5, лемма 5, с. 240]).

Доказательство. Если $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(R)}$, I — максимальный элемент $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$, $A \not\subseteq I$, то $[A+I] = R$ и для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдутся окрестности нуля $U' \subseteq R$, $U' + U'R \subseteq U$, $x \in R$, $(1-x)R \subseteq I + U'$, $x = a + b + u$, $a \in A$, $b \in I$, $u \in U'$, при всех $y \in A$

$$(1-a)y = (1-(x-b-u))y \in (1-x)y + by + uy \in A \cap I + U' + U'A \subseteq A \cap I + U,$$

$A \cap I \in \mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(A)$ входит в некоторый максимальный элемент $I' \in \mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(A)$, I' — правый идеал R (см. лемму 3.11). Если $I' \neq A \cap I$, то $I' \not\subseteq I$, $[I' + I] = R$, $x = a' + b' + u'$, $a' \in I'$, $b' \in I$, $u' \in U'$, $(1-a')A \in A \cap I + U$ (см. предыдущий вывод с теми же x, U', U), $A \subseteq I' + U$, $A \subseteq [I']_A = I'$ (произвольность U)?! Следовательно, $A \cap I = I'$.

В любой $R \in \mathfrak{U}_{\alpha_R}$ максимальные элементы $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$ открыты, модулярны и максимальны среди её правых идеалов. Топологические F-алгебры с базами окрестностей нуля из правых идеалов формируют замкнутый относительно взятия правых идеалов класс $\mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{U}_R$, $\mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{U}_R \subseteq \mathfrak{U}'_{\alpha_R}$, $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$ либо пусто, либо слабо индуктивно для всех $R \in \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{U}_R$ (см. доказательства лемм 3.2, 3.3). Как следствие, для $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}R}$ первое и, если A открыт или (и) замкнуты максимальные модулярные правые идеалы R, не содержащие A, второе утверждения можно вывести из [5, лемма 5, с. 240].

Пусть $A \lhd R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}R}$, J — максимальный элемент $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(A)$, U, U' — окрестности нуля в R, $FR(R^1)(U') = FU' + FR(R)(U') \subseteq U$, $x \in A$, $(1-x)A \subseteq J + U'$, K — правый идеал R^1, порождённый $1-x$, и

$$K' = \{y \in K \mid yA \subseteq J + FR(R^1)(U')\}.$$

Поскольку J — правый идеал R (см. лемму 3.11), для всех $y \in K'$, $r \in R^1$, $a \in A$

$$(yr)a = y(ra) + (y,r,a) = y(ra) - (y,a,r) = y(ra + ar) - (ya)r \in J + FR(R^1)(U'),$$

K' — правый идеал R, $1 - x \in K' \subseteq K$, $K' = K$, $KA \subseteq J + FR(R^1)(U')$, $J + K \cap R$ — правый идеал R, $(J + K \cap R)A \subseteq J + FR(R^1)(U')$. Если $x \in J + K \cap R + FR(R^1)(U')$, то $x^2 \in J + FR(R^1)(U')$, $x = (1-x)x + x^2 \in J + FR(R^1)(U')$, $A \subseteq J + FR(R^1)(U') \subseteq J + U$. Выполнение последнего для всех таких U, U' и x означает, что $A \subseteq [J]_A = J$?! Поэтому найдутся U, U' и x, $x \notin J + K \cap R + FR(R^1)(U')$, $x \notin [J + K \cap R]$. Отсюда следует, что $(1-x)R \subseteq K \cap R \subseteq J + K \cap R$, $[J + K \cap R] \in \mathcal{P}_{\alpha_R}(R)$ входит в некоторый максимальный элемент $H \in \mathcal{P}_{\alpha_R}(R)$, $(1-x)R \subseteq H$, $x \notin H$, $A \not\subseteq H$, $A \neq A \cap H \supseteq J$, $A \cap H = J$. $\square$

Замечание 3.13. Если R — топологическая альтернативная алгебра, $I \in \mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$, то $(I : R)_r = \{r \in R \mid Rr \subseteq I\} = [(I : R)_r] = \hat{I}$ — наибольший среди $J \lhd R$, $J \subseteq I$.

Доказательство. Ввиду [5, лемма 2, предложение 2, с. 210, 237] достаточно заметить, что для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ имеется $x \in R$, $(1-x)R \subseteq \subseteq I+U$, и потому $(I:R)_r \subseteq I+U$, $(I:R)_r \subseteq [I] = I$ (произвольность U). □

Назовём топологическую альтернативную алгебру R *топологически примитивной справа* (*слева*), если $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$ ($\mathcal{P}_{\alpha_L\text{-top}}(R)$) содержит максимальный элемент I, такой что $(I:R)_r = \{0\}$ ($(I:R)_l = \{0\}$).

Замечание 3.14. Топологически примитивная альтернативная алгебра R первична и не содержит ненулевых Σ-нильпотентных идеалов (см. [5, лемма 1, с. 237]).

Доказательство. Пусть I — максимальный элемент $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$ с $(I:R)_r = = \{0\}$. Если $\{0\} \neq J \lhd R$ Σ-нильпотентен, то для любых окрестности нуля $U \subseteq R$, $n \geqslant 2$, $J^n \subseteq U$, $J^{n-1} \neq \{0\}$, $I \not\supseteq J^{n-1}$, $R = [I + J^{n-1}]$,

$$RJ = [I + J^{n-1}]J \subseteq [(I + J^{n-1})J] \subseteq [I+U]$$

и потому $RJ \subseteq [I] = I$, $J \subseteq (I:R)_r = \{0\}$?! Если $\{0\} = J_1J_2 \neq J_1, J_2 \lhd R$, то $R = [I+J_1]$, $RJ_2 \subseteq [(I+J_1)J_2] \subseteq [I] = I$, $J_2 \subseteq (I:R)_r = \{0\}$?! □

Для любой топологической алгебры R положим $K_r(R) = \bigcap\limits_{I\in\mathcal{P}} I$ и $K'_r(R) = = \bigcap\limits_{I\in\mathcal{P}} \hat{I}$, где $\mathcal{P}$ — множество максимальных элементов $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$ при их наличии и $\mathcal{P} = \{R\}$ иначе. Аналогичным образом определим $K_l(R)$ и $K'_l(R)$, заменив правые идеалы R на левые, $K(R) = K'_l(R) \cap K'_r(R)$ и его вариант $K'(R)$ для $\mathcal{P}_{\alpha_S}(R)$ вместо $\mathcal{P}_{\alpha_S\text{-top}}(R)$, $S = L, R$. Выделим класс $\mathfrak{K}_s$ таких топологических F-алгебр R, что $R = K_s(R)$, $s = l, r$.

Теорема 3.15. *Класс $\mathfrak{K}_r \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$ — радикальный в классе $\mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$ подкласс. Если F дискретно, то $\mathfrak{K}_r \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R} = \mathfrak{U}_{\alpha_R\text{-top}} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$.*

Доказательство. Так как по определению $K'_r(R) = [K'_r(R)]$ — наибольший из $I \lhd R$, $I \subseteq K_r(R) = [K_r(R)]$, и $K_r(A) = A \cap K_r(R)$ для всех $A \lhd R \in \in \mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$ (см. лемму 3.12), $K'_r(R)$ — наибольший из $I \lhd R \in \mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$, $I \in \mathfrak{K}_r$. Ввиду максимальности среди правых идеалов и модулярности максимальных элементов $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$, $R \in \mathfrak{U}_{\alpha_R}$ (см. леммы 3.2, 3.3, 3.12), $\phi\bigl(K_r(R)\bigr) \subseteq K_r\bigl(\phi(R)\bigr)$ и $\phi\bigl(K'_r(R)\bigr) \subseteq K'_r\bigl(\phi(R)\bigr)$ для любого непрерывного гомоморфизма $\phi\colon R \to R'$, $R, R' \in \mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$.

Если $A \lhd R \in \mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$, $A \in \mathfrak{K}_r$, M — максимальный элемент $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$, то $A \subseteq M$ и M/A — максимальный элемент $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R/A)$ ($R/A \setminus M/A = = \bigl((R \setminus M) + A\bigr)/A$ открыто в R/A). Как следствие, если $A, R/A \in \mathfrak{K}_r$, то $R \in \mathfrak{K}_r$. Поэтому $K'_r\colon R \mapsto K'_r(R)$, $R \in \mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$, — топологический $\mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$-радикал и $\mathfrak{K}_r \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$ — класс K'_r-радикальных в $\mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$ алгебр. Если F дискретно, то по теореме 3.1 и лемме 3.3 $K'_r = \mathcal{J}_{\alpha_R\text{-top}} = \mathcal{J}'_{\alpha_R\text{-top}}$ на $\mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}F\text{-}R}$. □

Лемма 3.16. *Если $R \in \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{U}_M$, $R^2 \neq \{0\}$, отделима и локально Σ-p-разрешима (локально Σ-разрешима, если $B^p \lhd A$ для всех $A = \langle A \rangle \subseteq R$, $B \lhd A$), $p \geqslant 2$, то R содержит ненулевой собственный замкнутый идеал.*

Доказательство. Локальная Σ-p-разрешимость R означает, что для любых конечно порождённой подалгебры $B \subseteq R$ и окрестности нуля $U \subseteq R$ найдётся $k \geqslant 0$, $B^{[p,k]} \subseteq U$, где $B^{[p,0]} = B$, $B^{[p,i+1]} = (B^{[p,i]^p})_B$, $i \geqslant 0$. Пусть R не содержит ненулевых собственных замкнутых идеалов и $0 \neq x \in R$. Тогда ввиду $R^2 \neq \{0\}$

$$R \neq \operatorname{Ann} R = \{r \in R \mid rR = Rr = \{0\}\} = \bigcap_{z \in R,\ t=l,r} \operatorname{Ker} t_z = [\operatorname{Ann} R] \lhd R,$$

$\operatorname{Ann} R = \{0\}$, $R = [R^2] = [R^l] = [(x)_R] = [(x)_R^l]$, $l \geqslant 1$. Поэтому для любых окрестностей нуля $U, U' \subseteq R$, $FM(R^1)(U') = (U')_R \subseteq U$, найдётся конечно порождённая подалгебра $A \subseteq R$, $x \in A$, $x \in (x)_A^p + U'$,

$$(x)_A \subseteq ((x)_A^p)_A + (U')_A \subseteq A^p + (U')_A, \quad (x)_A \subseteq A^{[p,i]} + (U')_A \quad (i \geqslant 0)$$

и, в частности, для i, $A^{[p,i]} \subseteq U'$, $(x)_A \subseteq (U')_A \subseteq U$, $R \subseteq U$, $R = \{0\}$ (произвольность x, U, отделимость R)?! Если R локально Σ-разрешима (конечно порождённые подалгебры R Σ-разрешимы) и $I^p \lhd B$ для всех $I \lhd B = \langle B \rangle \subseteq R$, то в этом рассуждении

$$(x)_A \subseteq A^{(p,i)} + (U')_A \subseteq A^{(i)} + (U')_A \quad (i \geqslant 0),$$

где $A^{(p,0)} = A$, $A^{(p,i+1)} = (A^{(p,i)})^p$, $(x)_A \subseteq (U')_A \subseteq U$ при i, $A^{(i)} \subseteq U'$. $\square$

Лемма 3.17. *Неассоциативная топологически примитивная справа* $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}R}$ — *алгебра Кэли—Диксона* (см. [5, теорема 1, с. 238]).

Доказательство. Ненулевые односторонние идеалы первичной альтернативной неассоциативной алгебры содержат её ненулевые идеалы (см. [5, лемма 3, с. 238]). Так как пересечение O всех окрестностей нуля алгебры R — правый идеал R, R первична и O не содержит ненулевых идеалов R (см. замечание 3.14), $O = \{0\}$, R отделима. Если I — максимальный замкнутый топологически модулярный правый идеал R с $(I : R)_r = \{0\}$, то $I = \{0\}$, и значит, в R нет ненулевых собственных замкнутых правых идеалов. Выбрав для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ окрестность нуля $U' \subseteq R$, $FR(R^1)(U') \subseteq U$, мы получаем, что либо $[FR(R^1)(U')] = R = FR(R^1)(U') = U$ ($FR(R^1)(U')$ — открытый правый идеал R), либо $U' = \{0\}$. Поскольку первое не может выполняться для всех U, $R \neq O$, топология R дискретна. Поэтому R — алгебра Кэли—Диксона, не содержит ненулевых собственных односторонних идеалов и (топологически) примитивна слева и справа (см. [5, следствие леммы 3, теорема 1, с. 238]). $\square$

Лемма 3.18. *Если* $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ *ассоциативна,* $\mathcal{P}_{\alpha_L}(R)$ *и* $\mathcal{P}_{\alpha_R}(R)$ *пусты или слабо индуктивны, то* $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = K'(R) = K(R)$.

Доказательство. Если M — максимальный элемент $\mathcal{P}_{\alpha_R\text{-top}}(R)$, $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) \not\subseteq M$, то $R = [M + \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)]$, для любых окрестностей нуля $U, U' \subseteq R$, $U' + U'R \subseteq U$, найдутся $x \in R$, $y \in M$, $z \in \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$ и $u \in U'$, $(1-x)R \subseteq M + U'$, $x = y + z + u$,

$$(1-z)R = (1 - x + y + u)R \subseteq M + U' + U'R \subseteq M + U,$$

$z \in [(1-z)R]$, $R = zR + (1-z)R \subseteq [M+U]$ и ввиду произвольности U $R = [M] = M$?! Случаи $M \in \mathcal{P}_{\alpha_L\text{-top}}(R)$ и $M \in \mathcal{P}_{\alpha_S}(R)$, $S = L, R$, рассматриваются аналогично. Значит, $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) \subseteq K'(R) \subseteq K(R)$.

Если $z \in K(R)$ не является топологически квазирегулярным элементом R, то по замечанию 3.5 $z \notin [R(1-z)]$ или (и) $z \notin [(1-z)R]$. Для определённости будем считать, что $z \notin [(1-z)R]$. В этом случае $[(1-z)R]$ входит в некоторый максимальный элемент $N \in \mathcal{P}_{\alpha_R}(R)$, $R = zR + (1-z)R \subseteq N$?! Следовательно, $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = K'(R) = K(R)$. □

Лемма 3.19. *Если $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ имеет топологически квазирегулярный в R центр $Z(R)$, $x \in R$ квадратичен над $Z(R)$ ($x^2 = zx + z'$ для некоторых $z, z' \in Z(R)$), то x топологически квазирегулярен* (см. [5, лемма 14, с. 246]).

Доказательство. Если перейти к R^1 и выбрать для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ окрестность нуля $U' \subseteq R$, $xU' + (1-x)U' + U'x + U'(1-x) \subseteq U$, и $r, y' \in R$, $y = -1 + r$, $-y(1 - z - z') \in 1 - U'$, $y' \in z'y + U'$, то

$$\begin{aligned} &x + xy + y' - x(xy + y') = x(1 + y - y' - zy) + (y' - z'y) \\ &\quad = x(1 + (1 - z' - z)y) + (1 - x)(y' - z'y) \in xU' + (1-x)U' \subseteq U, \\ &x + yx + y' - (yx + y')x = (1 + y - y' - zy)x + (y' - z'y) \\ &\quad = (1 + (1 - z' - z)y)x + (y' - z'y)(1 - x) \in U'x + U'(1-x) \subseteq U. \end{aligned}$$

Следовательно, по замечанию 3.5 x топологически квазирегулярен в R. □

Следствие 3.20. *Если в $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ нет собственных замкнутых идеалов, фактор-алгебры по которым имеют 1, то квадратичные над $Z(R)$ элементы R топологически квазирегулярны* (см. [5, следствие леммы 14, с. 247]).

Доказательство. Если $x \in Z(R)$, то $(1-x)R \lhd R$, $R/[(1-x)R]$ — алгебра с единицей $x + [(1-x)R]$ и по условию $x \in [(1-x)R] = R$, x топологически квазирегулярен в R. Остаётся применить лемму 3.19. □

Идеал $(I)_A$ альтернативной алгебры A, порождённый её левым (правым) идеалом I, совпадает с $I + FR(A)I$ ($I + FL(A)(I)$), так как $[r_y, l_x] = l_x l_y - l_{xy} = r_{xy} - r_y r_x$, $x, y \in A$, где $[a, b] = ab - ba$ во всех алгебрах. Поэтому $\mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}L} \cap \mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}R} = \mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}M}$.

Теорема 3.21. *Если $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}M}$, то $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R) = \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = K(R)$, и в случае дискретного F $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R) = \mathcal{J}_{\alpha_L\text{-top}}(R) \cap \mathcal{J}_{\alpha_R\text{-top}}(R) = \mathcal{J}'_{\alpha_L\text{-top}}(R) \cap \mathcal{J}'_{\alpha_R\text{-top}}(R)$* (см. [5, теорема 5, с. 248]).

Доказательство. Достаточно установить $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = K(R)$ для всех $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}M}$, поскольку отсюда следует $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \mathcal{J}'_{\text{q-top}}\big(\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)\big) = \mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)$ (см. теоремы 3.10, 3.15). Лемма 3.12, теорема 3.10 и $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) \subseteq K(R)$ (см. доказательства теоремы 3.15 и леммы 3.18) позволяют свести рассмотрение к $R = K(R)$ с $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \{0\}$. Тогда R — подпрямое произведение ниль-полупростых первичных ассоциативных алгебр и колец Кэли—Диксона (см. [5, теорема 11, с. 232]). Следуя [5, предложение 6, с. 246], выделим пересечение P

всех $I \lhd R$, R/I — кольцо Кэли—Диксона, $P \cap D(R) = \{0\}$, где

$$D(R) = \big((R,R,R)\big)_R = (R,R,R)R^1 = R^1(R,R,R) -$$

ассоциаторный идеал R (см. [5, с. 203]). Если $P \neq \{0\}$, то $D(P) \subseteq P \cap D(R) = \{0\}$, P — ассоциативный идеал R и по леммам 3.12, 3.18 (с учётом того, что $\mathcal{P}_{\alpha_S\text{-top}}(I)$ или пусто, или слабо индуктивно для всех $I \lhd A \in \mathfrak{U}_{F\text{-}S}$, $S = L, R$)

$$P = K(P) = \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(P) \subseteq \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \{0\}?!$$

Отсюда следует, что R — подпрямое произведение колец Кэли—Диксона, R содержит квадратичный над $Z(R)$ идеал $J \neq \{0\}$ (см. [5, лемма 16, с. 247]), но $J \subseteq \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \{0\}$ (см. лемму 3.19, следствие 3.20 для $R = K(R) \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}F\text{-}M}$ с $\mathcal{P}_{\alpha_S\text{-top}}(R) = \varnothing$, $S = L, R$)?! Таким образом, если $R = K(R)$ и $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \{0\}$, то $R = \{0\}$. Применение теоремы 3.15 для дискретного F завершает доказательство. $\square$

Перейдём к топологическим линейным йордановым алгебрам над топологическим кольцом F с $1/2$, используя для аналогии построения [5, гл. 14, § 2, 3]. Назовём элемент x топологической линейной йордановой F-алгебры R с 1 *топологически обратимым*, если для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ существует $y \in R$, $xy \in 1 + U$, $x^2 y \in x + U$. Будем называть $x \in R$ *топологически квазирегулярным*, если для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ имеется $y \in R$, $(1-x)(1-y) \in 1+U$, $(1-x)^2(1-y) \in 1-x+U$ ($1 \in R^1$). Обозначим через $\mathfrak{J}_{J\text{-top}}$ класс топологических линейных йордановых F-алгебр, состоящих из топологически квазирегулярных элементов (*топологически квазирегулярных алгебр*), через $\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ — класс линейных йордановых алгебр из класса $\mathfrak{U}_{(M)}$.

Для любых линейной йордановой F-алгебры R и $x, y, z \in R$

$$\begin{aligned}
\{x,y,z\} &= \frac{1}{2}U_{x,z}y = \frac{1}{2}(U_{x+z} - U_x - U_z)y = \\
&= (l_x l_z + l_z l_x - l_{xz})y = ([l_x, l_y] + l_{xy})z, \\
U_{x+y}z &= (U_x + 2U_{x,y} + U_y)z = U_x z + (2([l_x, l_z] + l_{(x+y)z}) - l_z l_y)y = \\
&= U_x z + \big(l_{2x} l_z + l_z l_{-2x-y} + l_{2(x+y)z}\big)y
\end{aligned}$$

и, как следствие,

$$\begin{aligned}
&U_{1+x}z = (\mathrm{Id}_R + 2l_x + U_x)z = z + (l_{2(z+zx)} - l_z l_x)x, \\
&U_{1+x}(1+z) = 1 + z + (l_{2+2z+x+2zx} - l_z l_x)x, \\
&U_{1+x+y}z = U_{1+x}z + (l_{2x} l_z + l_z l_{-2x-y} + l_{2(1+x+y)z})y, \\
&U_{1+x+y}(1+z) = U_{1+x}(1+z) + (l_{2x} l_z + l_z l_{-2x-y} + l_{2(1+x+y)(1+z)-y})y.
\end{aligned}$$

Лемма 3.22. *Если $1 \in R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, U, U' — окрестности нуля в R, $U'_{7,44} \subseteq U$, $x, y \in R$, $xy \in 1 + U'$, $x^2 y \in x + U'$, то $y^2 x \in y + U$, $U_x y \in x + U$, $U_x y^2 \in 1 + U$, где $U_z = 2l_z^2 - l_{z^2}$ — оператор квадратичного умножения на $z \in R$ (см. [5, лемма 4, с. 356]).*

Доказательство. Для начала заметим, что

$$U_x y = 2x(xy) - x^2 y \in 2x + 2xU' - x - U' \in x + U'_{1,2} \subseteq x + U.$$

Поскольку $[l_{ab}, l_c] + [l_{ac}, l_b] + [l_{bc}, l_a] = [l_{a^2}, l_b] + 2[l_{ab}, l_a] = 0$, $a, b, c \in R$ (см. [5, (27), с. 86)],

$$\begin{aligned}
&[l_{x^2}, l_y]z,\ [l_{y^2}, l_x]z \in U'_{2,2} \quad (z \in R),\\
&U_x y^2 = 2x(xy^2) - x^2y^2 = 2[l_x, l_{y^2}]x + x^2y^2 \in x^2y^2 + U'_{2,2} =\\
&\quad = [l_{x^2}, l_y]y + (x^2y)y + U'_{2,2} \subseteq (x^2y)y + U'_{2,4} \subseteq 1 + U'_{2,6} \subseteq 1 + U.
\end{aligned}$$

Из тождества Макдональда $U_a U_b U_a = U_{U_a b}$, $a, b \in R$ (см. [5, (48), с. 99]), равенств перед леммой и $[U_x, l_x] = 0$ следует, что

$$\begin{aligned}
&U_{U_x y^2} z = U_x U_{y^2} U_x z \in z + U'_{4,12} \quad (z \in R),\\
&U_x(y^2x - y) = l_x U_x y^2 - U_x y \in l_x(1 + U'_{2,6}) - (x + U'_{1,2}) \subseteq U'_{3,8},\\
&y^2x - y = U_x U_{y^2} U_x(y^2x - y) + U'_{4,12} \subseteq U_x U_{y^2}(U'_{3,8}) + U'_{4,12} \subseteq\\
&\quad \subseteq U'_{7,32} + U'_{4,12} \subseteq U'_{7,44} \subseteq U.
\end{aligned}$$

Если R без 1, $x', y' \in R$, $x = 1 + x'$, $y = 1 + y' \in R^1$, $xy \in 1 + V'$, $x^2y \in x + V'$, $V'_{7,167} \subseteq V$ для некоторых окрестностей нуля $V, V' \subseteq R$, то $U_x y \in x + V$, $U_x y^2 \in 1 + V$, $y^2 x \in y + V$, точнее $U_x y \in x + V_{1,3}$, и для всех $z \in R$

$$\begin{aligned}
&[l_{x^2}, l_y]z,\ [l_{y^2}, l_x]z \in V'_{2,2}, \quad U_x y^2 \in 1 + V'_{2,7}, \quad U_{U_x y^2} z \in z + V'_{4,14},\\
&U_x(y^2x - y) \in l_x(1 + V'_{2,7}) - (x + V'_{1,3}) \subseteq V'_{3,17},\\
&y^2x - y \in U_x U_{y^2}(V'_{3,17}) + V'_{4,14} \subseteq V'_{7,153} + V'_{4,14} \subseteq V'_{7,167}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Лемма 3.23. *Если* $1 \in R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, $x \in R$, *то следующие условия эквивалентны*:

1) x *топологически обратим*;
2) $1 \in [U_x(R)]$;
3) $[U_x(R)] = R$;
4) *для любой окрестности нуля* $V \subseteq R$ *можно подобрать окрестность нуля* $V' \subseteq R$, $T \in M(R)$ *и* $S \in \mathrm{End}_F(R)$, $TU_x z, U_x S z \in z + V'$ *для всех* $z \in R$, $V' + T(RV') \subseteq V$;
5) *существуют* $k, n \geqslant 1$, *такие что для любой окрестности нуля* $V \subseteq R$ *имеются* $T \in M_{k,n}(R)$, $S \in \mathrm{End}_F(R)$, $TU_x z, U_x S z \in z + V$ *для всех* $z \in R$

(см. [5, лемма 5, с. 356]).

Доказательство. Импликации $1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 3)$ доказаны в лемме 3.22, $3) \Longrightarrow 2)$ очевидна. Если $1 \in [U_x(R)]$, то для любых окрестностей нуля $U, U' \subseteq R$, $U'_{2,2} \subseteq U$, и $u \in R$, $U_x u \in 1 + U'$,

$$U_x U_u U_x z = U_{U_x u} z \in z + U'_{2,2} \subseteq z + U \quad (z \in R)$$

(см. равенства перед леммой 3.22), $2) \Longrightarrow 3)$, $4)$, $5)$ $(U'_{2,2} + U_x U_u (RU'_{2,2}) \subseteq U'_{7,10})$.

Если U, U' — окрестности нуля в R, $T \in M(R)$, $S \in \mathrm{End}_F(R)$, TU_xz, $U_xSz \in z + U'$ для всех $z \in R$ и $U' + T(RU') \subseteq U$, то для $y = Sx$

$$U_x(xy-1) = l_xU_xy - x^2,\ U_x(x^2y-x) = l_{x^2}U_xy - x^3 \in RU',$$
$$xy \in 1 + TU_x(xy-1) + U' \subseteq 1 + U, \quad x^2y \in x + TU_x(x^2y-x) + U' \subseteq x + U.$$

Поэтому 4) $\Longrightarrow$ 1). Сходным образом если $U'_{k+1,n+1} \subseteq U$, $TU_xz, U_xSz \in z + U'$ для всех $z \in R$, где T, S, $k, n \geqslant 1$ из условия 5) для U', то

$$xy \in 1 + U'_{k+1,n+1} \subseteq 1 + U, \quad x^2y \in x + U'_{k+1,n+1} \subseteq x + U.$$

Для R без 1, $x \in R$ эквивалентны следующие условия:

1$'$) x топологически квазирегулярен;

2$'$) для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ $(1+U) \cap U_{1-x}(R^1) \neq \varnothing$;

3$'$) для любых $z \in 1 + R$ и окрестности нуля $U \subseteq R$ $(z+U) \cap U_{1-x}(R^1) \neq \varnothing$;

4$'$) для любой окрестности нуля $V \subseteq R$ имеются окрестность нуля $V' \subseteq R$, $T \in M(R^1)$, $S \in \mathrm{End}_F(R^1)$, $TU_{1-x}z, U_{1-x}Sz \in z + V'$ для всех $z \in 1 + R$, $V' + T(V' + RV') \subseteq V$;

5$'$) существуют $k, n \geqslant 1$, такие что для любой окрестности нуля $V \subseteq R$ найдутся $T \in M_{k,n}(R^1)$, $S \in \mathrm{End}_F(R^1)$, $TU_{1-x}z, U_{1-x}Sz \in z + V$ для всех $z \in 1 + R$.

Схема рассуждений остаётся прежней с учётом того, что из $U_{1-x}u \in 1 + U'$ для $u \in R^1$ и окрестности нуля $U' \subseteq R$ следует $u = 1 - v$, $v \in R$, $U_{U_{1-x}u}z \in z + U'_{2,4}$ для всех $z \in 1 + R$, $U'_{2,4} + U_{1-x}U_u(U'_{2,4} + RU'_{2,4}) \subseteq U'_{7,76}$. Во второй части рассуждения достаточно заметить для $U' \subseteq R$ с заменой x на $1 - x$, что $U_{1-x}S(1-x) \in 1 - x + U'$, $S(1-x) = 1 - y$, $y \in R$, и для $T \in M_{k,n}(R^1)$, $T = f\,\mathrm{Id}_{R^1} + T'$, $f \in F$, $T' \in M^{R^1}_{k,t_{n,k}}(R)$ (коммутативность R позволяет перейти от $s_{n,k}$ к $t_{n,k}$, $t_{n,k} = 1$ при $k = 1$ и

$$t_{n,k} = n\left(2^k - \sum_{l=0}^{k-1} m(l,k) - 1 - \left[\frac{k-2}{2}\right]\right) + 1 = n\left(2^{k-1} - \left[\frac{k}{2}\right]\right) + 1 \quad (k \geqslant 2),$$

где $[r]$ — целая часть $r \in \mathbb{R}$, $m(0,k) = m(k-l, k-l+1) = 1$, $m(l,k) = \sum\limits_{i=1}^{k-l} m(l-1, k-i)$, $l = 1, \ldots, k-1$, и по индукции с шагом

$$m(l+1,k) = m(l,k-1) + m(l+1,k-1) = \binom{k-2}{l} + \binom{k-2}{l+1} = \binom{k-1}{l+1}$$

$m(l,k) = \binom{k-1}{l}$),

$$(1-x)(1-y) \in 1 + T(U' + RU') + U' \subseteq 1 + U'_{k+1,l}, \quad (1-x)^2(1-y) \in 1 - x + U'_{k+1,l}. \ \square$$

Замечание 3.24. Если $R \in \mathfrak{U}_{(M)}$, $D \in M(R)$ и для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдутся окрестность нуля $U' \subseteq R$, $T \in M(R)$ и $S \in \mathrm{End}_F(R)$, TDz, $DSz \in z + U'$ для всех $z \in R$, $U' + T(U') \subseteq U$, то это условие выполняется для $S = T$.

Доказательство. Если $D \in M_{k,n}(R)$ для некоторых $k, n \geqslant 1$, U — окрестность нуля в R, то найдутся окрестности нуля $U', U'' \subseteq R$, $U''_{k,2n+1} \subseteq U$, $T \in M(R)$, $S \in \mathrm{End}_F(R)$, $TDz, DSz \in z + U'$ для всех $z \in R$, $U' + T(U') \subseteq U''$, и

$$Tz \in TDSz - T(U'), \quad Sz \in TDSz - U', \quad (S-T)z \in T(U') - U',$$
$$DTz = DSz - D(S-T)z \in z + U' + D(U') - DT(U') \subseteq z + U''_{k,2n+1} \subseteq z + U.$$

Если найдутся такие $p, q \geqslant 1$, что для любой окрестности нуля $V \subseteq R$ можно подобрать $T \in M_{p,q}(R)$, $S \in \mathrm{End}_F(R)$, $TDz, DSz \in z + V$ для всех $z \in R$, то это верно и для $S = T$.

Сходным образом если $D = \mathrm{Id}_{R^1} + D'$, $D' \in M^{R^1}(R)$ и для любой окрестности $U \subseteq R$ имеются окрестность нуля $U' \subseteq R$, $T \in M(R^1)$, $S \in \mathrm{End}_F(R^1)$, $TDz, DSz \in z + U'$ для всех $z \in 1 + R$ ($z \in R^1$), $U' + T(U') \subseteq U$, то $T = \mathrm{Id}_{R^1} + T'$, $T' \in M^{R^1}(R)$, и это условие выполнено для $S = T$ (см. доказательство леммы 3.23). При наличии таких $p, q \geqslant 1$, что для любой окрестности нуля $V \subseteq R$ можно выбрать $T \in M_{p,q}(R^1)$, $S \in \mathrm{End}_F(R^1)$, TDz, $DSz \in z + V$ для всех $z \in 1 + R$ ($z \in R^1$), $T = \mathrm{Id}_{R^1} + T'$, $T' \in M^{R^1}_{p,s_{q,p}}(R)$, и можно также считать $S = T$. □

Следствие 3.25. *Если $1 \in R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, то топологическая обратимость $x, z \in R$ равносильна топологической обратимости $U_x z$* (*см.* [5, лемма 6, с. 357]).

Доказательство. Если имеются $k, n, k', n' \geqslant 1$, такие что для любой окрестности нуля $V \subseteq R$ найдутся $T \in M_{k,n}(R)$, $T' \in M_{k',n'}(R)$, $TU_x y$, $U_x T y$, $T' U_z y$, $U_z T' y \in y + V$ для всех $y \in R$, то для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ можно выбрать окрестность нуля $V \subseteq R$, $V_{\max\{k+k',4\},\max\{1+n+nn',7\}} \subseteq U$, $T \in M_{k,n}(R)$, $T' \in M_{k',n'}(R)$ для V и для всех $y \in R$

$$\begin{aligned}
TT'TU_{U_x z} y &= TT'TU_x U_z U_x y \in TT'(U_z U_x y + U') \subseteq T(U_x y + V) + TT(U') \subseteq \\
&\subseteq y + V + T(V) + TT'(V) \subseteq y + V + V_{k,n} + V_{k+k',nn'} \subseteq V_{k+k',1+n+nn'}, \\
U_{U_x z} TT'Ty &= U_x U_z U_x TT'Ty \in U_x U_z (T'Ty + V) \subseteq U_x\big(Ty + V + U_z(V)\big) \subseteq \\
&\subseteq y + V + U_x(V) + U_x U_z(V) \subseteq y + V + V_{2,2} + V_{4,4}(V) \subseteq y + V_{4,7} \subseteq y + V,
\end{aligned}$$

$TT'T \in M_{2k+k',n'n^2}(R)$. Если существуют $k'', n'' \geqslant 1$, такие что для любой окрестности нуля $V \subseteq R$ найдётся $T'' \in M_{k'',n''}(R)$, $T'' U_{U_x z} y, U_{U_x z} T'' y \in y + V$ для всех $y \in R$, то для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдутся окрестность нуля $V \subseteq R$, $V_{k''+6,8n''+3} \subseteq U$, $T'' \in M_{k'',n''}(R)$ для V и для всех $y \in R$

$$\begin{aligned}
&U_x T'' U_x U_z y \in U_x T'' U_x U_z U_x (U_z U_x T'') y - U_x T'' U_x U_z(V) \subseteq \\
&\quad \subseteq U_x U_z U_x T'' y + U_x(V) - U_x T'' U_x U_z(V) \subseteq \\
&\quad \subseteq y + V + V_{2,2} + V_{k''+6,8n''} \subseteq y + V_{k''+6,8n''+3} \subseteq y + U, \\
&U_z U_x T'' U_x y \in (T'' U_x U_z) U_x U_z U_x T'' U_x y - V \subseteq T'' U_x U_z U_x y + T'' U_x U_z(V) - V \subseteq \\
&\quad \subseteq y + V + V_{k''+4,4n''} - V \subseteq y + V_{k''+4,4n''+2} \subseteq y + U,
\end{aligned}$$

$U_xT''U_x, U_zU_xT'' \in M_{k''+4,4n''}(R)$. Остаётся применить лемму 3.23 и замечание 3.24.

Для R без 1 топологическая квазирегулярность $x, z \in R$ равносильна топологической квазирегулярности $U_{1-x}(1-z)-1$. Достаточно заметить, что если V — окрестность нуля в R, $T \in M_{k,n}(R^1)$, $T' \in M_{k',n'}(R^1)$, $TU_{1-x}y$, $U_{1-x}Ty$, $T'U_{1-z}y$, $U_{1-z}T'y \in y+V$ для всех $y \in 1+R$, то $T = \mathrm{Id}_{R^1} + A$, $T' = \mathrm{Id}_{R^1} + A'$, $A \in M^{R^1}_{k,t_{n,k}}(R)$, $A' \in M^{R^1}_{k',t_{n',k'}}(R)$, для всех $y \in 1+R$ и $l = (t_{n,k}+1)(t_{n',k'}+1) + t_{n,k}+2$

$$\begin{aligned} &TT'TU_{U_{1-x}(1-z)}y \in y+V+T(V)+TT'(V) \subseteq \\ &\quad \subseteq y+V+V_{k,t_{n,k}+1}+V_{k+k',(t_{n,k}+1)(t_{n',k'}+1)} \subseteq y+V_{k+k',l}, \\ &U_{U_{1-x}(1-z)}TT'Ty \in y+V+U_{1-x}(V)+U_{1-x}U_{1-z}(V) \subseteq \\ &\quad \subseteq y+V+V_{2,3}+V_{4,9} \subseteq y+V_{4,13}. \end{aligned}$$

Если найдётся $T'' \in M_{k'',n''}(R^1)$, $T''U_{U_{1-x}(1-z)}y$, $U_{U_{1-x}(1-z)}T''y \in y+V$ для всех $y \in 1+R$, то $T'' = \mathrm{Id}_{R^1} + A''$, $A'' \in M^{R^1}_{k'',t_{n'',k''}}(R)$, и для всех $y \in 1+R$ и $m = 3m'$, $m' = 9(t_{n'',k''}+1)$

$$\begin{aligned} &U_{1-x}T''U_{1-x}U_{1-z}y \in y+V+U_{1-x}(V)-U_{1-x}T''U_{1-x}U_{1-z}(V) \subseteq \\ &\quad \subseteq y+V+V_{2,3}+V_{k''+6,m} \subseteq y+V_{k''+6,m+4}, \\ &U_{1-z}U_{1-x}T''U_{1-x}y \in y+V+T''U_{1-x}U_{1-z}(V)-V \subseteq \\ &\quad \subseteq y+V+V_{k''+4,m'}-V \subseteq y+V_{k''+4,m'+2}. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.26. *Если $1 \in R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, $x \in R$ топологически обратим, то для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдётся $y \in R$,*

$$l_x^{(y)}z = x \cdot_y z = \{x,y,z\} = ([l_x,l_y]+l_{xy})z \in z+U \quad (z \in R).$$

Доказательство. По лемме 3.23 и замечанию 3.24 имеются $k, n \geqslant 1$, такие что для любой окрестности нуля V найдётся $T \in M_{k,n}(R)$, $TU_xz, U_xTz \in z+V$ для всех $z \in R$. Для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ выберем окрестность нуля $V \subseteq R$, $V_{k+6,69n+18} \subseteq U$, $y \in R$, $xy = 1+v \in 1+V$, $x^2y \in x+V$, и $T \in M_{k,n}(R)$ для V. Следуя построениям [5, с. 357] и лемме 3.22, заметим, что $U_xy \in x+V_{1,2}$, для всех $z \in R$

$$\begin{gathered} U_{U_xy}z = U_xU_yU_xz \in U_xz+V_{3,6}, \quad [l_{y^2},l_x]z \in V_{2,2}, \\ U_xU_yz \in U_xU_yU_xTz - U_xU_y(V) \subseteq U_xTz+V_{3,6}+V_{4,4} \subseteq z+V+V_{3,6}+V_{4,4} \subseteq z+V_{4,11}, \\ U_yz \in TU_xU_yz - V \subseteq Tz+T(V_{4,11})-V \subseteq Tz+V_{k+4,11n}-V \subseteq Tz+V_{k+4,11n+1}, \\ [U_y,l_x]z \in [T,l_x]z+V_{k+4,11n+1}+V_{k+5,11n+1} \subseteq [T,l_x]z+V_{k+5,22n+2}, \\ [T,l_x]z \in T[l_x,U_x]Tz - Tl_x(V)+V \subseteq V_{k+1,n+1}, \quad [U_y,l_x]z \in V_{k+5,23n+3}, \\ [l_y^2,l_x]z = \frac{1}{2}([U_y,l_x]+[l_{y^2},l_x])z \in V_{k+5,23n+3}+V_{2,2} \subseteq V_{k+5,23n+5} \end{gathered}$$

(с учётом $[U_x,l_x]=0$). Так как

$$l_al_bl_c + l_cl_bl_a + l_{(ac)b} = l_{bc}l_a + l_{ac}l_b + l_{ab}l_c = l_al_{bc} + l_bl_{ac} + l_cl_{ab} \quad (a,b,c \in R)$$

(см. [5, (25), (26), с. 86]), для $a = x$, $b = c = y$ и всех $z \in R$

$$
\begin{aligned}
&l_x l_y^2 + l_y^2 l_x + l_{(1+v)y} = l_{y^2} l_x + 2l_{1+v} l_y, \quad l_y = U_y l_x + [l_x, l_y^2] - 2l_v l_y + l_{vy},\\
&x \cdot_y z = ([l_x, l_y] + l_{xy})z = z + vz + ([l_x, U_y] l_x + \big[l_x, [l_x, l_y^2]\big] + [l_x, -2l_v l_y + l_{vy}])z \in\\
&\quad \in z + V_{1,1} + V_{k+5,23n+3} + V_{k+6,23n+5} + V_{k+5,23n+5} + V_{2,2} + V_{3,2} \subseteq\\
&\quad \subseteq z + V_{k+6,69n+18} \subseteq z + U.
\end{aligned}
$$

Для R без 1, топологически квазирегулярного $x \in R$ и любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдётся $y \in R$, такой что $(1 - x) \cdot_{1-y} z \in z + U$ $(z + U - U)$ для всех $z \in 1 + R$ $(z \in R)$. Достаточно взять $k, n \geqslant 1$ из условия $5'$) в доказательстве леммы 3.23, окрестность нуля $V \subseteq R$, $(V \cup (1/2)V)_{k+6,3m} \subseteq U$ для $m = 61t_{n,k} + 68$, $y \in R$, $(1-x)(1-y) = 1 + v \in 1 + V$, $(1-x)^2(1-y) \in 1 - x + V$, и $T \in M_{k,n}(R^1)$, $TU_{1-x}z$, $U_{1-x}Tz \in z + V$ для всех $z \in 1 + R$ (см. доказательство замечания 3.24). Тогда $U_{1-x}(1-y) \in 1 - x + V_{1,4}$, для всех $z \in 1 + R$

$$
\begin{gathered}
U_{U_{1-x}(1-y)} z \in U_{1-x} z + V_{3,20}, \quad [l_{(1-y)^2}, l_{1-x}]z \in V_{2,2},\\
U_{1-x} U_{1-y} z \in U_{1-x} U_{1-y} U_{1-x} Tz - U_{1-x} U_{1-y}(V) \subseteq z + V + V_{3,20} + V_{4,9} \subseteq z + V_{4,30},\\
U_{1-y} z \in TU_{1-x} U_{1-y} z - V \subseteq Tz + T(V_{4,30}) - V \subseteq Tz + V_{k+4,30t_{n,k}+31},\\
[T, l_{1-x}]z = [T, -l_x]z \in T[l_{-x}, U_{1-x}]Tz + Tl_x(V) + V \subseteq V_{k+1,t_{n,k}+2},\\
[U_{1-y}, l_{1-x}]z = [U_{1-y}, l_{-x}]z \in [T, l_{-x}]z + V_{k+4,30t_{n,k}+31} + V_{k+5,30t_{n,k}+31} \subseteq V_{k+5,m-4},\\
[l_{1-y}^2, l_{1-x}]z = \frac{1}{2}([U_{1-y}, l_{1-x}] + [l_{(1-y)^2}, l_{1-x}])z \in \frac{1}{2} V_{k+5,m-2}
\end{gathered}
$$

(см. равенства перед леммой 3.22) и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
&(1 - x) \cdot_{1-y} z = ([l_{1-x}, l_{1-y}] + l_{(1-x)(1-y)})z =\\
&\quad = z + vz + ([l_{1-x}, U_{1-y}] l_{1-x} + \big[l_{1-x}, [l_{1-x}, l_{1-y}^2]\big] + [l_{1-x}, -2l_v l_{1-y} + l_{v(1-y)}])z =\\
&\quad = z + vz + ([l_{1-x}, U_{1-y}] l_{1-x} + \big[l_{-x}, [l_{1-x}, l_{1-y}^2]\big] + [l_{-x}, -l_v + 2l_v l_y - l_{vy}])z \in\\
&\quad \in z + V_{1,2} + V_{k+5,m-4} + \frac{1}{2} V_{k+6,m-2} + \frac{1}{2} V_{k+5,m-2} + V_{3,6} \subseteq\\
&\quad \subseteq z + \left(V \cup \frac{1}{2} V\right)_{k+6,3m}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Лемма 3.27. *Элемент x топологической линейной йордановой алгебры R топологически квазирегулярен, если и только если для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдётся $y \in R$, $x + y - xy$, $(y, x, x) \in U$* (см. [5, теорема 7, с. 362]).

Доказательство. Для топологически квазирегулярного $x \in R$ и любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдутся окрестность нуля $V \subseteq R$, $V - V + xV \subseteq U$, и $y \in R$,

$$
\begin{gathered}
(1 - x)(1 - y) \in 1 + V, \quad x + y - xy \in -V \subseteq U,\\
(1 - x)^2(1 - y) \in 1 - x + V, \quad -x + x^2 - y + 2xy - x^2 y \in V,
\end{gathered}
$$

$$(y,x,x)=x(xy)-x^2y\in x(x+y)-x^2y+xV\subseteq$$
$$\subseteq(-x+x^2-y+2xy-x^2y)+(x+y-xy)+xV\subseteq U.$$

Для обратной импликации достаточно подобрать для U и V с тем же условием $y\in R$, $x+y-xy$, $(y,x,x)\in V$,

$$-x+x^2-y+2xy-x^2y\in x^2+xy-x^2y-V\subseteq x(xy+V)-x^2y-V\subseteq U. \quad \square$$

Лемма 3.28. *Если $1\in R\in\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, элементы $I\lhd R$ топологически квазирегулярны в R, то $x-y$ топологически обратим для любых топологически обратимого $x\in R$ и $y\in I$* (ср. с [5, лемма 8, с. 363]).

Доказательство. Так как для любой окрестности нуля $U\subseteq R$ найдутся окрестность нуля $V\subseteq R$, $V_{2,4}\subseteq U$, $z,z'\in R$, $v,v'\in V$ и $y'\in I$,

$$U_xz=1+v,\quad U_{x-y}z=U_xz+y'=1+y'+v,\quad U_{1+y'}z'=1+v',$$
$$U_{x-y}U_zU_{x-y}z'=U_{U_{x-y}z}z'=U_{1+y'+v}z'\in 1+v'+V_{2,3}\subseteq 1+V_{2,4}\subseteq 1+U,$$

$1\in[U_{x-y}(R)]$, и значит, $x-y$ топологически обратим (см. равенства перед леммой 3.22, лемму 3.23). Если R без 1, $u,w,w'\in R$, $x=1+u$, $z=1+w$, $z'=1+w'\in R^1$ с теми же условиями для окрестности нуля $V\subseteq R$, то $U_{x-y}U_zU_{x-y}z'\in 1+V_{2,5}$. Как следствие, $x-y$ топологически квазирегулярен в R для любых топологически квазирегулярного $x\in R$, $y\in I$ (см. условие $2'$) в доказательстве леммы 3.23). $\square$

Используя схему доказательства теоремы 3.10, докажем теорему 3.29.

Теорема 3.29. *Класс $\mathfrak{J}_{J\text{-top}}\cap\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ — радикальный в классе $\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ подкласс* (*см.* [5, теорема 8, с. 364]).

Доказательство. Если $J,J'\lhd R\in\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, $x\in J$ и все элементы J' топологически квазирегулярны в R, то $x+x'$ топологически квазирегулярен в R для всех $x'\in J'$ (в $J+J'$ для топологически квазирегулярного x в J и $J'\in\mathfrak{J}_{J\text{-top}}$) (см. доказательства лемм 3.28, 3.23). Как следствие, суммы $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)$ и $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$ всех идеалов R из $\mathfrak{J}_{J\text{-top}}$ и идеалов, состоящих из топологически квазирегулярных элементов R, — наибольшие из таких её идеалов, $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)\subseteq\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$.

Понятно, что $\psi\big(\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)\big)\subseteq\mathcal{J}_{\text{q-top}}\big(\psi(R)\big)$, $\psi\big(\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)\big)\subseteq\mathcal{J}'_{\text{q-top}}\big(\psi(R)\big)$ для любого непрерывного гомоморфизма $\psi\colon R\to R'$, $R,R'\in\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$.

Поскольку для $z\in[\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)]$ ($z\in[\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)]$) и любой окрестности нуля $U\subseteq R$ можно подобрать окрестность нуля $U'\subseteq R$, $U'_{2,4}\subseteq U$, $z'\in\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)\cap\cap(z-U')$, $y'\in R$ ($z'\in\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)\cap(z-U')$, $y'\in\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)$), $z'+y'-z'y'$, $(y',z',z')\in U'$, $z+y'-zy'=z'+y'-z'y'+(z-z')(1-y')\in U'_{1,3}\subseteq U$,

$$(y',z,z)=(y',z',z')+(y',z-z',z)+(y',z',z-z')\subseteq$$
$$\subseteq([l_z,l_{y'}]+l_{y'z'}-l_{y'}l_{z'})(z-z')+U'=$$
$$=(l_zl_{y'}-l_{y'}l_{z+z'}+l_{y'z'})(z-z')+U'\subseteq U'_{2,4}\subseteq U,$$

z топологически квазирегулярен в R ($[\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)]$) (см. лемму 3.28). Отсюда следует, что $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)=[\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)]$ и $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)=[\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)]$.

Если $I \lhd R$, $I \subseteq \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$, $x \in R$, $\bar{x} = x + I$ топологически квазирегулярен в R/I, то в R для любой окрестности нуля V найдутся окрестность нуля V', $V'_{2,6} \subseteq V$, $y \in R$, $U_{1-\bar{x}}\big((1-\bar{y})^2\big) \in 1+(V'+I)/I$, $a \in I$, $U_{1-x}((1-y)^2) \in 1+a+V'$, и $z \in R$,

$$U_{1+a}\big((1-z)^2\big) \in 1 + V', \quad U_{U_{1-x}((1-y)^2)}\big((1-z)^2\big) \in 1 + V' + V'_{2,5} \subseteq 1 + V$$

(см. равенства перед леммой 3.22), x топологически квазирегулярен в R (см. условие $2'$) в доказательстве леммы 3.23), $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}\big(R/\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)\big) = \{0\}$ и $\mathcal{J}_{\text{q-top}}\big(R/\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)\big) = \{0\}$.

Таким образом, $\mathcal{J}_{\text{q-top}}\colon R \mapsto \mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)$, $R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, — топологический $\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$-радикал и $\mathfrak{J}_{J\text{-top}} \cap \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ — класс $\mathcal{J}_{\text{q-top}}$-радикальных в $\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ алгебр. Топологическая $\mathfrak{M}'$-радикальность (радикальность) $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}\colon R \mapsto \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$, $R \in \mathfrak{M}'$, на замкнутом относительно взятия идеалов и фактор-алгебр (непрерывных гомоморфных образов) подклассе $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ равносильна его совпадению с $\mathcal{J}_{\text{q-top}}$ на $\mathfrak{M}'$. □

Замечание 3.30. Если $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$, $1/2 \in F$, то топологическая квазирегулярность $x \in R$ в R и $R^{(+)}$ равносильны, $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R) = \mathcal{J}_{\text{q-top}}\big(R^{(+)}\big)$, $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \mathcal{J}'_{\text{q-top}}\big(R^{(+)}\big)$.

Доказательство. Для начала заметим, что $R^{(+)} \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ для всех $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$. Если $x \in R$ топологически квазирегулярен, то для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ можно выбрать окрестность нуля $U' \subseteq R$, $(1/2)U' + (1/2)U' + RU' + U'R \subseteq U$, $y \in R$, $(1-x)(1-y)$, $(1-x)(1-y) \in 1 + U'$, и значит,

$$\frac{1}{2}\big((1-x)(1-y) + (1-y)(1-x)\big) \in 1 + \frac{1}{2}U' + \frac{1}{2}U' \subseteq 1 + U,$$

$$\frac{1}{2}\big((1-x)^2(1-y) + (1-y)(1-x)^2\big) \in$$

$$\in 1 - x + \frac{1}{2}(1-x)U' + \frac{1}{2}U'(1-x) \subseteq 1 - x + U,$$

x топологически квазирегулярен в $R^{(+)}$. С другой стороны, для любых топологически квазирегулярного x в $R^{(+)}$ и окрестности нуля $U \subseteq R$ найдётся $z \in R$,

$$U_{1-x}((1-z)^2) = (1-x)(1-z)^2(1-x) \in 1 + U,$$

и, как следствие, x топологически квазирегулярен в R (см. доказательства леммы 3.22 и замечания 3.5). Поэтому ввиду [18, теорема 1] и невырожденности (ниль-полупростоты) $R^{(+)}/\mathcal{J}_{\text{q-top}}\big(R^{(+)}\big)$ и $R^{(+)}/\mathcal{J}'_{\text{q-top}}\big(R^{(+)}\big)$ имеем $\mathcal{J}_{\text{q-top}}\big(R^{(+)}\big), \mathcal{J}'_{\text{q-top}}\big(R^{(+)}\big) \lhd R$ и

$$\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R)^{(+)} \subseteq \mathcal{J}_{\text{q-top}}\big(R^{(+)}\big) \subseteq \mathcal{J}_{\text{q-top}}(R),$$

$$\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)^{(+)} \subseteq \mathcal{J}'_{\text{q-top}}\big(R^{(+)}\big) \subseteq \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R).$$ □

От ограничения $1/2 \in F$ скорее всего можно отказаться, если перейти от линейных к квадратичным йордановым алгебрам.

Назовём элемент x топологической альтернативной (линейной йордановой) алгебры R *топологически регулярным*, если для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдётся $n > 1$, $x^n \in x + U$ ($y \in R$, $U_x y \in x + U$, т. е. $x \in [U_x(R)]$).

Лемма 3.31. *Если $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ ($R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$) отделима, $x \in \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$ топологически регулярен, то $x = 0$* (см. [5, теорема 9, с. 365]).

Доказательство. В $R \in \mathfrak{U}_{\text{Alt-}(M)}$ для любой окрестности нуля U найдутся окрестность нуля U', $U'_{2,7} \subseteq U$, $n > 1$, $y, z \in R$, $u, u', u'' \in U'$, $x^n = x + u$, $(1-x)(1-y) = 1 + u'$, $(1 + x + \ldots + x^{n-2})(1+z) = 1 + u''$. Поэтому

$$\begin{aligned} 1{+}x{+}\ldots{+}x^{n-1} &= (1{+}x{+}\ldots{+}x^{n-1})(1{-}x)(1{-}y) - (1{+}x{+}\ldots{+}x^{n-1})u' = \\ &= (1 - x - u)(1-y) - (1 + x + \ldots + x^{n-1})u' = \\ &= 1 - u(1-y) - (x + \ldots + x^{n-1})u' \in 1 + U'_{1,3}, \end{aligned}$$
$$x = x(1 + x + \ldots + x^{n-2})(1+z) - xu'' \in U'_{1,3}(1+z) - xU' \subseteq U'_{2,7} \subseteq U$$

и $x = 0$ (произвольность U и отделимость R).

В $R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ можно выбрать окрестность нуля $U' \subseteq R$, $U'_{13,2593} \subseteq U$, и $y \in R$, $v \in U'$, $U_x y = x + v$,

$$U_x U_y U_x y = U_{U_x y} y \in x + U' + U'_{2,3} \subseteq x + U'_{2,4}$$

(см. равенства перед леммой 3.22). Это позволяет заменить y на $y' = U_y U_x y \in \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$, $U_x y' = x + v'$, $v' \in U_{2,4}$,

$$(U_x y')^2 = U_{U_x y'} 1 = U_x U_{y'} x^2 = x^2 + (2x + v')v', \quad U_x U_{y'} x^2 \in x^2 + U'_{3,4},$$

где $1 \in R^1$, $U_{y'} x^2 \in \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$ и

$$U_x(1 - U_{y'} x^2 + y') = x^2 - x^2 + x - (2x + v')v' + v' \in x + U'_{3,8},$$

и перейти к $y'' = 1 - U_{y'} x^2 + y' \in 1 + \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$, $U_x y'' = x + v''$, $v'' \in U'_{3,8}$. В таком случае $w = y'' - U_{y''} x \in 1 + \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$, имеется $w' \in 1 + R$, $U_w U_{w'} U_w z \in z - U'$ для всех $z \in R$ (см. лемму 3.28, доказательство леммы 3.23),

$$\begin{aligned} U_w x &= U_{y''} x - U_{y'', U_{y''} x} x + U_{U_{y''} x} x = \\ &= U_{y''} x - 2\{y'', x, \{y'', x, y''\}\} + U_{y''} U_x U_{y''} x = \\ &= U_{y''} x - 2\{y'', \{x, y'', x\}, y''\} + U_{y''} U_x U_{y''} U_x y'' - U_{y''} U_x U_{y''} v'' = \\ &= U_{y''} x - 2 U_{y''} U_x y'' + U_{y''} U_{U_x y''} y'' - U_{y''} U_x U_{y''} v'' = \\ &= U_{y''} x - 2 U_{y''}(x + v'') + U_{y''} U_{x + v''} y'' - U_{y''} U_x U_{y''} v'' = \\ &= U_{y''} x - 2 U_{y''}(x + v'') + U_{y''}(U_x + U_{x, v''} + U_{v''}) y'' - U_{y''} U_x U_{y''} v'' = \\ &= -U_{y''} v'' + U_{y''} U_{x, v''} y'' + U_{y''} U_{v''} y'' - U_{y''} U_x U_{y''} v'' \subseteq \\ &\subseteq U'_{5,24} + U'_{7,72} + U'_{7,48} + U'_{9,144} \subseteq U'_{9,288} \end{aligned}$$

(см. [5, теорема 9, с. 365]), $x \in U_w U_{w'} U_w x + U' \subseteq U'_{13,2593} \subseteq U$ и $x = 0$ (произвольность U и отделимость R). □

Остановимся теперь на топологической версии поэлементного описания радикала Джекобсона йордановых систем, полученного К. Маккриммоном. Линейная йорданова алгебра $R^{(a)}$, $a \in R$, полученная из линейной йордановой алгебры R заменой операции умножения на $\cdot_a$, $x \cdot_a y = \{x, a, y\}$, $x, y \in R$, называется *a-гомотопом* (*линейным a-гомотопом*) R. Единицу расширения $\left(R^{(a)}\right)^1$ мы будем обозначать через $1^{(a)}$, ограничение на $R = R^{(a)}$ оператора $U^{(a)}_{1^{(a)}-x}$ квадратичного умножения в $\left(R^{(a)}\right)^1$ на $1^{(a)} - x$ — через $T_{x,a}$, $T_{x,a} = \mathrm{Id}_R - 2\{x, a,\ \} + U_x U_a$ (поскольку мы записываем действие эндоморфизмов слева, $T_{x,a}$ в такой записи действует как $T_{a,x}$ в [5]).

Лемма 3.32. *Если* $R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, $x, y \in R$, *то следующие условия эквивалентны*:

1) x *топологически квазирегулярен в* $R^{(y)}$;
2) *существуют* $k, n \geqslant 1$, *такие что для любой окрестности нуля* $U \subseteq R$ *найдётся* $T \in \mathrm{Id}_{R^1} + M^{R^1}_{n,k}(R)$, $TT_{x,y}z, T_{x,y}Tz \in z + U$ *для всех* $z \in R$;
3) $[T_{x,y}(R)] = R$;
4) $2x - U_x y \in [T_{x,y}(R)]$;
5) $2xy - U_x y^2 \in [T_{x,y}(R)]$.

Если $2xy - U_x y^2$ *топологически квазирегулярен в* R, *то* x *топологически квазирегулярен в* $R^{(y)}$ (*см.* [5, лемма 12, с. 369]).

Доказательство. Если x топологически квазирегулярен в $R^{(y)}$, то имеются $p, q \geqslant 1$, такие что для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ существуют окрестность нуля $V \subseteq R$, $V - V \subseteq U$, $T \in M_{p,q}\big((R^{(y)})^1\big)$, $T \in \mathrm{Id}_{(R^{(y)})^1} + M^{(R^{(y)})^1}_{p,t_{q,p}}(R^{(y)})$, $TU^{(y)}_{1^{(y)}-x}z, U^{(y)}_{1^{(y)}-x}Tz \in z + V$ для всех $z \in 1^{(y)} + R^{(y)}$ (см. доказательство леммы 3.23, замечание 3.24), а значит,

$$TT_{x,y}z = TU^{(y)}_{1^{(y)}-x}(1^{(y)} + z - 1^{(y)}), \quad T_{x,y}Tz \in z + V - V \subseteq z + U \quad (z \in R),$$

где $T \in \mathrm{Id}_{R^1} + M^{R^1}_{2p,3^p t_{q,p}}(R)$ (как элемент $M(R^1)$ (см. вид $l^{(y)}_x$ в лемме 3.26)), $1) \Longrightarrow 2)$.

Выполнение $2) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 4)$, $5)$ очевидно. Поскольку $U^{(y)}_{1^{(y)}-x}1^{(y)} = 1^{(y)} - 2x + U_x y$, из $2x - U_x y \in [T_{x,y}(R)]$ следует, что для любой окрестности нуля $V \subseteq R$ найдётся $z \in R$, $T_{x,y}z \in 2x - U_x y + V$, $U^{(y)}_{1^{(y)}-x}(1^{(y)} + z) \in 1^{(y)} + V$, x топологически квазирегулярен в $R^{(y)}$ (см. условие $2'$) в доказательстве леммы 3.23), $(4) \Longrightarrow (1)$.

Если $u = 2xy - U_x y^2 \in [T_{x,y}(R)]$, то для любой окрестности нуля $V \subseteq R$ существуют окрестность нуля $V' \subseteq R$, $V'_{2,2} \subseteq V$, $v \in R$, $T_{x,y}v \in u + V'$, и, как следствие, $T'_{x,y}1 = 1 - u$, $T'_{x,y}(1 + v) \in 1 + V'$, $U_{T'_{x,y}(1+v)} = T'_{x,y}U_{1+v}T'_{y,x}$, где $T'_{a,b}$ — оператор на R^1 (см. [5, лемма 11, (12в), с. 368; 16, (13.19)]),

$$U_{T'_{x,y}(1+v)}z = T_{x,y}U_{1+v}T_{y,x}z \in z + V'_{2,2} \subseteq z + V \quad (z \in R)$$

(см. равенства перед леммой 3.22), $[T_{x,y}(R)] = R$, и в силу $1) \Longleftrightarrow 2) \Longleftrightarrow 3) \Longleftrightarrow 4)$ x топологически квазирегулярен в $R^{(y)}$, $5) \Longleftrightarrow 1)$.

Если u топологически квазирегулярен в R, то $U_{1-u} = T'_{x,y}T'_{y,x}$, $U_{1-u}(R^1) \subseteq \subseteq T'_{x,y}(R^1)$, $(1+z-u+W) \cap T'_{x,y}(R^1) \neq \varnothing$ для любых $z \in R$ и окрестности нуля $W \subseteq R$ (см. условие $3'$) в доказательстве леммы 3.23), $(1+z-u+W) \cap \cap T'_{x,y}(1+R) \neq \varnothing$ $(T'_{x,y}(f+R) \subseteq f+R$, $f \in F)$, $z + W \cap T_{x,y}(R) \neq \varnothing$. Поэтому $R = [T_{x,y}(R)]$, x топологически квазирегулярен в $R^{(y)}$ (1) $\Longleftrightarrow$ 3)). $\square$

Замечание 3.33. Если $R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, образы операторов $T_{a,b}$, $a, b \in R$, замкнуты, то топологически квазирегулярные элементы гомотопов R — их квазирегулярные элементы.

Доказательство. В данном случае топологическая квазирегулярность $x \in R$ в $R^{(y)}$, $y \in R$, равносильна сюръективности $T_{x,y}$ и, следовательно, квазирегулярности x в $R^{(y)}$ и $u = 2xy - U_x y^2$ в R (см. лемму 3.32, [5, лемма 12, с. 369]). $\square$

В частности, операторы $T_{a,b}$, $a, b \in R$, имеют замкнутые образы, если R дискретна или (и) R — компакт. В условиях замечания 3.33 выполняются *принципы симметрии и сдвига*: топологическая квазирегулярность x в $R^{(y)}$ (x в $R^{(U_z y)}$) равносильна топологической квазирегулярности y в $R^{(x)}$ ($U_z x$ в $R^{(y)}$) (см. [5, предложения 7, 8, с. 370]).

Лемма 3.34. *Если R — топологическая линейная йорданова алгебра, $x, y \in R$, $z \in R^1$, x топологически квазирегулярен в $R^{(U_z y)}$, то $U_z x$ топологически квазирегулярен в $R^{(y)}$.*

Доказательство. Так как для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдутся окрестности нуля $U' \subseteq R$, $U_z(U') \subseteq U$, и $w \in R$,

$$x + w - \frac{1}{2}U_{x,w}U_z y,\ \frac{1}{4}U_{x,U_{x,w}U_z y}U_z y - \frac{1}{2}U_{U_x U_z y, w}U_z y \in U'$$

(см. лемму 3.27 и построения [5, с. 370, 371]),

$$U_z x + U_z w - \frac{1}{2}U_{U_z x, U_z w}y,\ \frac{1}{4}U_{U_z x, U_{U_z x, U_z w}y}y - \frac{1}{2}U_{U_{U_z x}y, U_z w}y \in U_z U' \subseteq U,$$

$U_z x$ топологически квазирегулярен в $R^{(y)}$ (см. лемму 3.27). $\square$

Элементы топологической линейной йордановой алгебры R, топологически квазирегулярные в любом гомотопе R, мы будем называть *собственно топологически квазирегулярными*. По лемме 3.32 такие элементы составляют множество

$$\mathrm{PTQI}(R) = \{x \in R \mid [T_{x,y}(R)] = R \text{ для каждого } y \in R\},$$

в условиях замечания 3.33 $\mathrm{PTQI}(R) = \mathrm{PQI}(R)$ — множество всех собственно квазирегулярных (квазирегулярных во всех гомотопах) элементов R.

Замечание 3.35. Если $x \in R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, x^n топологически квазирегулярен для некоторого $n \geqslant 1$, то x топологически квазирегулярен (см. [5, предложение 5, с. 364]).

Доказательство. Так как $U_{1-x^n} = U_{1+x+\ldots+x^{n-1}}U_{1-x} = U_{1-x}U_{1+x+\ldots+x^{n-1}}$, достаточно применить условия $1')$—$5')$ в доказательстве леммы 3.23 к x^n и x. $\square$

Следствие 3.36. *В* $R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ *любой* $x \in \mathrm{PTQI}(R)$ *топологически квазирегулярен.*

Доказательство. Поскольку $U_{1-x^2}|_R = T_{x,x}$ (см. [5, лемма 13, с. 372]), $[U_{1-x^2}(R)] = R$ (см. лемму 3.32), для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдётся $y \in R$,

$$U_{1-x^2}y \in 2x^2 - x^4 + U, \quad U_{1-x^2}(1+y) = 1 - 2x^2 + x^4 + U_{1-x^2}y \in 1 + U,$$

x^2 и x топологически квазирегулярны в R (см. условие $2'$) в доказательстве леммы 3.23 и замечание 3.35). □

Лемма 3.37. *Если* $R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, *то* $\mathrm{PTQI}(R) \subseteq \mathrm{PTQI}(R^1)$, $\mathrm{PTQI}(R) = R \cap \mathrm{PTQI}(R^1)$ *для дискретного* F (*см.* [5, лемма 14, с. 372]).

Доказательство. Если $z \in \mathrm{PTQI}(R)$, $x = f + x' \in R^1$, $f \in F$, $x' \in R$, то ввиду [5, лемма 11, (12б), с. 368] и леммы 3.32

$$T_{z,x}T_{z,-x} = T_{z,U_xz}, \quad 2z - U_zx \in [T_{z,U_xz}(R)] = [T_{z,x}(R)] = R,$$

для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ существуют окрестность нуля $V \subseteq R$ и $y \in R$,

$$V' = V_{12,2313} + f^2V_{10,1152} + f^4V_{8,144} \subseteq U, \quad T_{z,x}y \in 2z - U_zx + V,$$

а значит, $U^{(x)}_{1^{(x)}-z}(1^{(x)} + y) = 1^{(x)} + v$, $v \in V$, и для всех $b \in R$

$$\begin{aligned}
&U^{(x)}_{1^{(x)}+v}b = U^{(x)}_{1^{(x)}-z}U^{(x)}_{1^{(x)}+y}U^{(x)}_{1^{(x)}-z}b = b + 2v \cdot_x b + U_vU_xb \in \\
&\quad \in b + V_{2,3} + V_{2,2} \subseteq b + V_{2,5}, \\
&U^{(x)}_{1^{(x)}+v}1 = 1 + 2vx + U_vx^2 = 1 + 2fv + 2vx' + f^2v^2 + U_v(2fx' + x'^2) \in \\
&\quad \in 1 + 2fV + V_{2,2}, \\
&U^{(x)}_{1^{(x)}+v}1^{(x)} = 1^{(x)} + 2v + U_vx = 1^{(x)} + 2v + fv^2 + U_vx' \in 1^{(x)} + V_{2,4}
\end{aligned}$$

и $U^{(x)}_{1^{(x)}+v}(1^{(x)} + b) \in 1^{(x)} + b + V_{2,9}$. Полагая $U^{(x)}_{1^{(x)}+y}U^{(x)}_{1^{(x)}-z}(1^{(x)} - z) = 1^{(x)} - z'$, $z' \in R$, мы получаем аналогично доказательству леммы 3.23 (см. вывод $4) \Longrightarrow 1)$)

$$\begin{aligned}
&U^{(x)}_{1^{(x)}-z}\big((1^{(x)} - z) \cdot_x (1^{(x)} - z') - 1^{(x)}\big) \in (1^{(x)} - z) \cdot_x V_{2,9}, \\
&(1^{(x)} - z) \cdot_x (1^{(x)} - z') \in 1^{(x)} + U^{(x)}_{1^{(x)}-z}U^{(x)}_{1^{(x)}+y}\big((1^{(x)} - z) \cdot_x V_{2,9}\big) + V_{2,9}, \\
&U^{(x)}_{1^{(x)}-z}\big((1^{(x)} - z)^{2(x)} \cdot_x (1^{(x)} - z') - (1^{(x)} - z)\big) \in (1^{(x)} - z)^{2(x)} \cdot_x V_{2,9}, \\
&(1^{(x)} - z)^{2(x)} \cdot_x (1^{(x)} - z') \in 1^{(x)} - z + U^{(x)}_{1^{(x)}-z}U^{(x)}_{1^{(x)}+y}\big((1^{(x)} - z)^{2(x)} \cdot_x V_{2,9}\big) + V_{2,9},
\end{aligned}$$

где $(1^{(x)} - z)^{2(x)} = U^{(x)}_{1^{(x)}-z}1^{(x)} = 1^{(x)} - 2z + U_zx = 1^{(x)} - z''$, $z'' \in R$. Так как для любых $b \in R$, $W \subseteq R$

$$(1^{(x)}+b)\cdot_x V_{2,9}=V_{2,9}+b\cdot_x V_{2,9}\subseteq V_{2,9}+V_{4,27}\subseteq V_{4,36},$$
$$U^{(x)}_{1^{(x)}+b}W\subseteq W+2b\cdot_x W+U_bU_xW\subseteq W+W_{2,3}+U_b(f^2W+W_{2,2})\subseteq$$
$$\subseteq W+W_{2,3}+f^2W_{2,2}+W_{4,4}\subseteq W_{4,8}+f^2W_{2,2},$$
$$U^{(x)}_{1^{(x)}-z}U^{(x)}_{1^{(x)}+y}V_{4,36}\subseteq U^{(x)}_{1^{(x)}-z}(V_{8,288}+f^2V_{6,72})\subseteq$$
$$\subseteq V_{12,2304}+f^2V_{10,576}+f^2(V_{10,576}+f^2V_{8,144})\subseteq V_{12,2304}+f^2V_{10,1152}+f^4V_{8,144}$$

$(U_x=f^2\operatorname{Id}_{R^1}+2fl_{x'}+U_{x'})$ и, как следствие,

$$(1^{(x)}-z)\cdot_x(1^{(x)}-z')\in 1^{(x)}+V',\quad (1^{(x)}-z)^{2(x)}\cdot_x(1^{(x)}-z')\in 1^{(x)}-z+V',$$

z топологически квазирегулярен в $(R^1)^{(x)}$. Поэтому $\mathrm{PTQI}(R)\subseteq\mathrm{PTQI}(R^1)$. Поскольку для любых окрестности нуля $U\subseteq R$, $x,y\in R$, $z\in R^1$, $f\in F$ из $x+f+y-(f+y)\cdot_z x\in U$ следует $f=0$, $R\cap\mathrm{PTQI}(R^1)\subseteq\mathrm{PTQI}(R)$ для дискретного F. □

Лемма 3.38. *Если $1\in R\in\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, то $x-y$ топологически обратим для любых топологически обратимого $x\in R$, $y\in\mathrm{PTQI}(R)$* (*см.* [5, лемма 15, с. 372]).

Доказательство. Для любой окрестности нуля $U\subseteq R$ можно выбрать окрестность нуля $U'\subseteq R$, $U'_{2,15}\subseteq U$, и $z\in R$, $x\cdot_z a\in a+U'$ для всех $a\in R$ (см. лемму 3.26). Тогда

$$U^{(z)}_{x-y}a=U^{(z)}_{(1^{(z)}-y)+(x-1^{(z)})}a=$$
$$=\Big(U^{(z)}_{1^{(z)}-y}+2\Big(l^{(z)}_{1^{(z)}-y}l^{(z)}_{x-1^{(z)}}+l^{(z)}_{x-1^{(z)}}l^{(z)}_{1^{(z)}-y}-l^{(z)}_{x+y-x\cdot_z y-1^{(z)}}\Big)+U^{(z)}_{x-1^{(z)}}\Big)a\in$$
$$\in T_{y,z}a+(1^{(z)}-y)\cdot_z U'+U'-U'+a\cdot_z U'+U'+U'-a\cdot_z U'\subseteq$$
$$\subseteq T_{y,z}a+U'_{2,14}\quad (a\in R)$$

(см. вид $l^{(y)}_x$ в лемме 3.26), найдётся $S\in\operatorname{End}_F(R)$, $T_{y,z}Sa\in a+U'$ для всех $a\in R$,

$$U_{x-y}U_zSa=U^{(z)}_{x-y}Sa\in T_{y,z}Sa+U'_{2,14}\subseteq a+U'_{2,15}\subseteq a+U\quad (a\in R),$$

$[U_{x-y}(R)]=R$ (произвольность U), $x-y$ топологически обратим (см. леммы 3.32, 3.23). Сходным образом можно показать топологическую квазирегулярность $x-y$ в R без 1 для любых топологически квазирегулярного $x\in R$, $y\in\mathrm{PTQI}(R)$. Достаточно перейти к R^1 и $x'+y=1-x+y$, выбрать в R для любой окрестности нуля U окрестность нуля U', $U'_{2,38}\subseteq U$, $z\in 1+R$, $x'\cdot_z a\in a+U'$, $x'\cdot_z b\in b+U'-U'$ для всех $a\in 1+R$, $b\in R$, $S\in\operatorname{Id}_{R^1}+M^{R^1}(R)$, $T_{y,-z}Sa\in a+U'$ для всех $a\in 1+R$ (см. доказательства лемм 3.26, 3.37), и заметить, что для всех $a\in 1+R$

$$U^{(z)}_{x'+y}a=$$
$$=\Big(U^{(z)}_{1^{(z)}+y}+2\Big(l^{(z)}_{1^{(z)}+y}l^{(z)}_{x'-1^{(z)}}+l^{(z)}_{x'-1^{(z)}}l^{(z)}_{1^{(z)}+y}-l^{(z)}_{x'-y+x'\cdot_z y-1^{(z)}}\Big)+U^{(z)}_{x'-1^{(z)}}\Big)a\in$$

$$\in T_{-y,z}a+2\big((1^{(z)}+y)\cdot_z U'+U'-U'+a\cdot_z (U'-U')+U'-U'\big)+U'-a\cdot_z U' \subseteq$$
$$\subseteq T_{y,-z}a+2(U'+U'_{2,3}+U'-U'+U'_{2,8}+U'-U')+U'+U'_{2,4}\subseteq$$
$$\subseteq T_{y,-z}a+U'_{2,37},$$

$U_{x'+y}U_zSa \in a+U'_{2,38} \subseteq a+U$ (с учётом $T_{-y,z}=T_{y,-z}$ (см. [лемма 11, (12a), с. 368][5])) и $x-y$ топологически квазирегулярен в R (см. условие $3'$) в доказательстве леммы 3.23). □

Следствие 3.39. *Если $R\in\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, $z\in R$, то $x-y$ топологически квазирегулярен в $R^{(z)}$ для любых $x\in R$, топологически квазирегулярного в $R^{(z)}$, $y\in\mathrm{PTQI}(R)$* (*см.* [5, следствие леммы 16, с. 373]).

Доказательство. Достаточно заметить, что $R^{(z)}\in\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ и $\mathrm{PTQI}(R)\subseteq\mathrm{PTQI}(R^{(z)})$ (см. [5, лемма 7, с. 359]), и применить вторую часть доказательства леммы 3.38. □

Теорема 3.40. *Если $R\in\mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$, $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)=\mathrm{PTQI}(R)$* (*см.* [5, теорема 11, с. 373]).

Доказательство. Если $x\in\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$, $y\in R$, то $2yx-U_xy^2\in\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$ и по лемме 3.32 x топологически квазирегулярен в $R^{(y)}$. Следовательно, $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)\subseteq\mathrm{PTQI}(R)$, и ввиду следствия 3.36 остаётся показать, что $\mathrm{PTQI}(R)\lhd R$. Так как $T_{fx,y}=T_{x,fy}$ для любых $x,y\in R$, $f\in F$, $x+y$ топологически квазирегулярен в $R^{(z)}$ для всех $x,y\in\mathrm{PTQI}(R)$, $z\in R$ (см. следствие 3.39), $F\,\mathrm{PTQI}(R)\subseteq\mathrm{PTQI}(R)$. Если $x\in\mathrm{PTQI}(R)$, $y\in R^1$, то x топологически квазирегулярен в $R^{(U_yz)}$, U_yx топологически квазирегулярен в $R^{(z)}$ для всех $z\in R$, $U_yx\in\mathrm{PTQI}(R)$ (см. лемму 3.34) и $xy'=(1/2)(U_{1+y'}x-U_{y'}x-x)\in\mathrm{PTQI}(R)$ для всех $y'\in R^1$. Поэтому $\mathrm{PTQI}(R)\lhd R$. □

Завершая эту часть, приведём модулярные характеризации $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}$ по аналогии с [12].

Подмодуль I йордановой алгебры R называется *внутренним идеалом*, если $U_x(R)\subseteq I$ для всех $x\in I$, и *строго внутренним идеалом*, если I — внутренний идеал R^1. Будем называть строго внутренний идеал I топологической йордановой алгебры R *топологически модулярным*, если для любой окрестности нуля $U\subseteq R$ можно подобрать $x\in R$,

$$U_{1-x}(R)\cup\{x-x^2\}\cup\bigcup_{y\in I}U_{1-x,y}(R^1)\subseteq I+U,$$

и внутренний идеал $J\subseteq R$ *топологически a-модулярным*, $a\in R$, если J — топологически модулярный внутренний идеал $R^{(a)}$ (x — *U-модуль I* (*(U,a)-модуль J*); без U это определения x-модулярного и (x,a)-модулярного внутренних идеалов R). Обозначим через $\mathcal{I}(R)$, $\mathcal{I}_x(R)$, $\mathcal{I}_{X\text{-top}}(R)$, $\mathcal{I}_{(x,a)}(R)$, $\mathcal{I}_{(X,a)\text{-top}}(R)$ множества собственных замкнутых внутренних идеалов R, x-модулярных, топологически модулярных с общим набором U-модулей X, (x,a)-модулярных, топологически a-модулярных с общим набором (U,a)-модулей X внутренних идеалов из $\mathcal{I}(R)$, $X=\{x_U\mid U$ — окрестность нуля в $R\}\subseteq R$.

Теорема 3.41. *Пусть* $R \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$. *Тогда*

1) *если* F *дискретно и* $\mathcal{I}(R^1)$ *слабо индуктивно,*
$$\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \bigcap_{M \in \mathcal{I}} (R \cap \hat{M}),$$
где $\mathcal{I}$ — *множество максимальных элементов* $\mathcal{I}(R^1)$;
2) *если все непустые* $\mathcal{I}_{(X,a)\text{-top}}(R)$ *слабо индуктивны,*
$$\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \bigcap_{M \in \mathcal{P}} M = \bigcap_{M \in \mathcal{P}} \hat{M},$$
где $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{X,a} \mathcal{P}_{(X,a)}$, $\mathcal{P}_{(X,a)}$ — *множество максимальных элементов* $\mathcal{I}_{(X,a)\text{-top}}(R)$ *при их наличии и* $\mathcal{P}_{(X,a)} = \{R\}$ *иначе (аналогично если все непустые* $\mathcal{I}_{(x,a)}(R)$ *слабо индуктивны);*
3) *если все непустые* $\mathcal{I}_{X\text{-top}}(R)$ *слабо индуктивны,*
$$\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \bigcap_{M \in \mathcal{P}'} M = \bigcap_{M \in \mathcal{P}'} \hat{M},$$
где $\mathcal{P}' = \bigcup\limits_{X} \mathcal{P}_X$, $\mathcal{P}_X$ — *множество максимальных элементов* $\mathcal{I}_{X\text{-top}}(R)$ *при их наличии и* $\mathcal{P}_X = \{R\}$ *иначе (аналогично если все непустые* $\mathcal{I}_x(R)$ *слабо индуктивны).*

Доказательство. Любому максимальному замкнутому $I \lhd F$ отвечает максимальный элемент $I + R \in \mathcal{I}(R^1)$. В случае дискретного F это верно для всех максимальных $I \lhd F$.

Докажем первое утверждение. Если $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) \nsubseteq M$ для некоторого $M \in \mathcal{I}$, то $[\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) + M]_{R^1} = R^1$, для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдутся окрестность нуля $U' \subseteq R$, $U'_{2,6} \subseteq U$, $x \in \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$, $y \in M$, $u \in U'$, $1 = x + y + u$, и по условию $2'$) из доказательства леммы 3.23
$$1 \in [U_{1-x}(1+R)]_{R^1} = [U_{y+u}(1+R)]_{R^1} \subseteq [M + U'_{2,5}]_{R^1} \subseteq M + U'_{2,5} + U' \subseteq M + U,$$
$1 \in M = [M]_{R^1} = R^1$ (с учётом равенств перед леммой 3.22 и произвольности U)?!

Если $x \in \bigcap\limits_{M \in \mathcal{I}} M$, $[U_{1-x}(R^1)]_{R^1} \neq R^1$, то $[U_{1-x}(R^1)]_{R^1} \subseteq N$ для некоторого $N \in \mathcal{I}$, $U_{1-x}1 = (1-x)^2$, x, $U_x 1 = x^2$, $2x \in N$ и $1 \in N = R^1$?! Поэтому $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{I}} (R \cap \hat{M})$.

Докажем второе утверждение. Поскольку $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \mathrm{PTQI}(R)$, можно воспользоваться схемой доказательства предложения 4.11 из [4] с необходимыми изменениями. Если существует $M \in \mathcal{P}_{(X,a)} \neq \{R\}$, $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) \nsubseteq M$, то топологически a-модулярный внутренний идеал $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) + M$ имеет общий с M набор (U,a)-модулей X, $R = [\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) + M]$, для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ имеются окрестность нуля U', $U'_{4,25} \subseteq U$, (U',a)-модуль x для M, $y \in \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$,

$z \in M$, $u' \in U'$, $x = y + z + u'$, и с учётом $R \cdot_a U' \subseteq U'_{2,3}$, равенств перед леммой 3.22 и леммы 3.32

$$
\begin{aligned}
&U^{(a)}_{u',b}(f\,1^{(a)} + r) = 2([l^{(a)}_{u'}, l^{(a)}_r] + l^{(a)}_{fu'+u'\cdot_a r})b \subseteq \\
&\quad \subseteq U'_{2,3} + U'_{4,9} + U'_{2,3} + U'_{4,9} \subseteq U'_{4,24} \quad (f \in F,\ b, r \in R),\\
&U^{(a)}_{1^{(a)}-x,z}1^{(a)} = 2(1^{(a)} - x) \cdot_a z = 2z - U_{x,z}a \in M + U',\\
&U^{(a)}_{1^{(a)}-y}(R^{(a)}) = U^{(a)}_{1^{(a)}-x+z+u'}(R^{(a)}) \subseteq U^{(a)}_{1^{(a)}-x+z}(R^{(a)}) + U'_{4,9} + U'_{4,9} + U'_{2,3}\\
&\quad = (U^{(a)}_{1^{(a)}-x,z} + U^{(a)}_{1^{(a)}-x} + U^{(a)}_z)(R^{(a)}) + U'_{4,21} \subseteq M + U' + U' + U'_{4,21} \subseteq M + U'_{4,23},\\
&U^{(a)}_{1^{(a)}-y,z'}\big((R^{(a)})^1\big) = U^{(a)}_{1^{(a)}-x+z+u',z'}\big((R^{(a)})^1\big)\\
&\quad = (U^{(a)}_{1^{(a)}-x,z'} + U^{(a)}_{z,z'} + U^{(a)}_{u',z'})\big((R^{(a)})^1\big) \subseteq M + U' + U'_{4,24} \subseteq M + sU'_{4,25} \quad (z' \in M),\\
&y - y^{2(a)} = y - U_y a = x - z - u' - U_{x-z-u'}a\\
&\quad = x - U_x a - z - u' - U_{z,u'}a - U_z a - U_{u'}a + U_{x,z}a + U_{x,u'}a\\
&\quad = x - x^{2(a)} - z + U_z a - u' + U_{x,z}a - (U_{z-x,u'} + U_{u'})a\\
&\quad = x - x^{2(a)} - z + U_z a - u' + 2z - U^{(a)}_{1^{(a)}-x,z}1^{(a)} + (2x - 2z - u') \cdot_a u'\\
&\quad \in M + U' - U' - U' + U'_{2,3} \subseteq M + U'_{2,6},
\end{aligned}
$$

y — (U, a)-модуль M, $R = [T_{y,a}(R)] = [M + U] = [M] = M$ (произвольность U)?!

Если $x \in R$, $U_x a \in \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$ для всех $a \in R$, то ввиду $T_{x,a}T_{-x,a} = T_{U_x a,a}$ (см. [5, лемма 11, (12б), с. 368]), леммы 3.32 и теоремы 3.40 $x \in \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$. Отсюда следует, что для любого $x \in R \setminus \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$ найдутся $a, b \in R$, $U_x a \notin \mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R)$, $[T_{U_x a,b}(R)] \in \mathcal{I}_{(z,b)}(R)$ для $z = 2U_x a - U_{U_x a}b = U_x(2a - U_a U_x b)$ (см. [12, пример 2.7]), $[T_{Uxa,b}(R)] \subseteq N$ для некоторого $N \in \mathcal{P}_{(X,b)}$, $X = \{x_U = z \mid U$ — окрестность нуля в $R\}$. Остаётся заметить, что $z \notin N$ и $x \notin N$, так как иначе для любых $r \in R$ и окрестности нуля $U \subseteq R$

$$
r = U^{(b)}_{1^{(b)}}r = (U^{(b)}_{1^{(b)}-z} + U^{(b)}_z + U^{(b)}_{1^{(b)}-z,z})r \in N + U,
$$

$R = N + U = [N] = N$?! Таким образом, $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \bigcap_{M \in \mathcal{P}} M = \bigcap_{M \in \mathcal{P}} \hat{M}$.

Рассмотрение третьего утверждения аналогично второму (формальный переход от a и b к 1).

Для R с базой окрестностей нуля из идеалов и любых $\mathcal{M} = \mathcal{I}(R)$, $\mathcal{I}_x(R)$, $\mathcal{I}_{(x,a)}(R)$, $\mathcal{I}_{X\text{-top}}(R)$, $\mathcal{I}_{(X,a)\text{-top}}(R)$, идеала U из этой базы $K \in \mathcal{M}$, или открытый $K + U$ принадлежит $\mathcal{M}$, или $K + U = R$. Если $K + U = R$ для всех таких U, то $R = [K] = K$?! Поэтому в данном случае каждый $K \in \mathcal{M}$ либо открыт, либо входит в открытый элемент $\mathcal{M}$ и максимальные элементы $\mathcal{M}$ открыты. Если $\mathcal{M} = \mathcal{I}(R)$, $1 \in R$ или $\mathcal{M} = \mathcal{I}_x(R)$, $\mathcal{I}_{(x,a)}(R)$, то K входит также в максимальный элемент $\mathcal{M}$, так как множества открытых элементов из таких $\mathcal{M}$ индуктивны (объединения их упорядоченных систем открыты, не содержат 1 и x соответственно). Кроме того, слабую индуктивность непустых $\mathcal{I}(R)$ для

$1 \in R$, $\mathcal{I}_x(R)$ и $\mathcal{I}_{(x,a)}(R)$ обеспечивает замкнутость максимальных внутренних, x-модулярных и (x,a)-модулярных идеалов, любого непустого $\mathcal{M}$ — его индуктивность (например, условие максимальности для $\mathcal{M}$, артиновость топологии R) (см. леммы 3.2, 3.3). $\square$

Проведённые здесь построения для линейных алгебр по всей видимости без особых усилий обобщаются на тройные альтернативные и йордановы системы и йордановы пары аналогично дискретному случаю [13, 16].

Переход к правоальтернативным алгебрам возможен при помощи [18, теорема 5]: $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(R) = \mathcal{J}_{\text{q-top}}\bigl(R^{(+)}\bigr)$ и $\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(R) = \mathcal{J}'_{\text{q-top}}\bigl(R^{(+)}\bigr)$ (с заменой $R^{(+)}$ для $F \ni 1/2$ в общем случае на квадратичную йорданову алгебру $R^+ = (R, U, {}^2)$).

4. Топологический радикал Джекобсона, модульная версия

Если $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр над топологическим кольцом F, A — топологическая алгебра из $\mathfrak{M}$, M — отделимый топологический правый F-модуль, $\mathcal{L}(M)$ — алгебра непрерывных эндоморфизмов M, $\alpha\colon A \to \mathcal{L}(M)$ — левое представление A в $\mathfrak{M}$ с A-модулем M и $\operatorname{Ann}_A z = [\operatorname{Ann}_A z]$ для всех $z \in M$, то мы будем называть α и M *левым топологическим представлением A в $\mathfrak{M}$* и *левым топологическим A-модулем в $\mathfrak{M}$* соответственно, $\operatorname{Ann}_A M = \bigcap_{x \in M} \operatorname{Ann}_A x = [\operatorname{Ann}_A M]$ и $K_\alpha(A) = [K_\alpha(A)]$ как наибольший из $I \lhd A$, $I \subseteq \operatorname{Ann}_A M$ (замыкания идеалов топологических алгебр — их идеалы).

Назовём $z \in M$ ($a \in A$) *открытым в M*, если $Uz \setminus \{0\}$ ($aV \setminus \{0\}$) открыто в M для любого открытого $U \subseteq A$ ($V \subseteq M$), и M *открытым справа* (*слева*), если все $z \in M$ ($a \in A$) открыты в M, *непрерывным*, если $(a, z) \mapsto az$, $a \in A$, $z \in M$, непрерывно во всех (a, z), $az \neq 0$ (для любых таких a, z и открытого $W \subseteq M$, $az \in W$, найдутся открытые $U \subset A$, $a \in U$, и $V \subset M$, $z \in V$, $UV \subseteq W$), и *неприводимым*, если $\alpha(A) \neq \{0\}$ и в M нет ненулевых собственных замкнутых A-подмодулей.

Ввиду отделимости M и $\alpha(A) \subseteq \mathcal{L}(M)$ $A^\perp = \bigcap_{a \in A} a^\perp = [A^\perp]$ — A-подмодуль M, где $a^\perp = \alpha(a)^{-1}0 = \{z \in M \mid az = 0\} = [a^\perp]$. Если M неприводим, то $A^\perp = \{0\}$, каждый A-подмодуль $\{0\} \neq M' \subseteq M$ неприводим, так как $[M'']_{M'} = [M''] \cap M' = M \cap M' = M'$ для любого A-подмодуля $\{0\} \neq M'' \subseteq M'$, $[M'] = M$ и $\operatorname{Ann}_A M = \operatorname{Ann}_A M'$. В открытом справа M любой A-подмодуль M', $M' \not\subseteq A^\perp$, имеет непустую внутренность и, значит, открыт и замкнут. Поэтому в открытом справа неприводимом M нет ненулевых собственных A-подмодулей.

Назовём $x \in M$ *непрерывным*, если отображение $\pi_x\colon a \mapsto ax$, $a \in A$, непрерывно (ввиду линейности π_x достаточно его непрерывности в одном $a \in A$). В частности, все элементы непрерывного M непрерывны. Если A — компакт, M неприводим и содержит непрерывный ассоциативный слева или справа x, то

$Ax = \pi_x(A) = [Ax] = M$ — компакт, $Ux = M \setminus \big(A \setminus (U + \mathrm{Ann}_A x)\big)x$ открыто в M для любого открытого $U \subseteq A$, x открыт в M. Если M — компакт, то $aM = [aM]$ — компакт, $aV = aM \setminus a\big(M \setminus (V + a^{\perp})\big)$ открыто в aM для всех $a \in A$ и открытого $V \subseteq M$, и значит, открытость $a \in A$ в M равносильна открытости $aM \setminus \{0\}$ в M.

Если $A \times M \ni (a, z) \mapsto az$ непрерывно, то α непрерывно для $\mathcal{L}(M)$ с сильной топологией (топологией поточечной сходимости), поскольку для любых $a \in A$, $z \in M$ и открытых $U \subseteq A$, $V, W \subseteq M$, $a \in U$, $z \in V$, $az \in UV \subseteq W$, $\alpha(U) \subseteq \{\phi \in \mathcal{L}(M) \mid \phi z \in W\}$.

Назовём топологическую алгебру A *открытой справа* (*слева*), если в A открыто $Ua \setminus \{0\}$ ($aU \setminus \{0\}$) для любых открытого $U \subseteq A$, $a \in A$. Если I — левый (правый) идеал открытой справа (слева) алгебры R, $RI \neq \{0\}$ ($IR \neq \{0\}$), то I открыт и замкнут.

Определим идеалы $\mathcal{J}_{\text{l-top}}(A)$, $\mathcal{J}_{\text{r-top}}(A)$, $\mathcal{J}_{\text{top}}(A)$ алгебры A аналогично $\mathcal{J}_l(A)$, $\mathcal{J}_r(A)$, $\mathcal{J}(A)$, заменив неприводимые представления на неприводимые топологические представления A в $\mathfrak{M}$.

В дальнейшем нам предстоит использовать следующее соображение: $T \subseteq H - V$ для любых топологической абелевой группы $(G, +)$, $T \subseteq [H] \subseteq G$ и окрестности нуля $V \subseteq G$, поскольку $(g + V) \cap H \neq \varnothing$ для всех $g \in T$.

Лемма 4.1. *Если неприводимый левый топологический A-модуль M в многообразии $\mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M}$, содержит ассоциативный слева* (*справа*) *элемент x, то $K_\alpha(A)$ — первичный идеал A, в фактор-алгебре по которому для непрерывного x нет ненулевых Σ-нильпотентных идеалов* (см. [1, лемма 6]). *Если x открыт в M, то $\mathrm{Ann}_A x$ — максимальный замкнутый левый* (*правый*) *идеал A.*

Доказательство. В этом случае $K_\alpha(A) = [K_\alpha(A)]$ — наибольший из $I \lhd A$, $I \subseteq \mathrm{Ann}_A x$, $A^{\perp} = \{0\}$, $M = [Ax]$ и $\mathrm{Ann}_A M = \mathrm{Ann}_A Ax$ (см. выше).

Поскольку $\{0\} \neq Ix$ — подмодуль M над идеалами A для любого левого (правого) идеала $I \subseteq A$, $I \nsubseteq \mathrm{Ann}_A x$, $M = [Ix]$ и из $JJ' \subseteq K_\alpha(A) \subseteq J \cap J'$ для $J, J' \lhd A$ следует, что $J \subseteq K_\alpha(A)$ или (и) $J' \subseteq K_\alpha(A)$ (для $J, J' \nsubseteq \mathrm{Ann}_A x$, $J(J'x) = (JJ')x = J[J'x] = JM = \{0\}$ ($J'(Jx) = J'M = \{0\}$)?!). Значит, $K_\alpha(A)$ — первичный идеал A.

Если $I \lhd A$ Σ-нильпотентен по модулю $K_\alpha(A)$, $I \nsubseteq K_\alpha(A)$, то для ассоциативного слева x можно показать по индукции, что $[I^{|n|_l}x] = \big[I[I^{|n-1|_l}x]\big] = [IM] = M$ для всех $n \geqslant 1$ с $I^{|1|_l} = I$, $I^{|n|_l} = II^{|n-1|_l}$. Для непрерывного x и любой окрестности нуля $W \subseteq M$ найдутся окрестность нуля $W' \subseteq M$, $[W'] \subseteq W' - W' \subseteq W$, окрестность нуля $V \subseteq A$, $Vx \subseteq W'$, и $n \geqslant 1$, $I^n \subseteq V + K_\alpha(A)$, $M = [I^{|n|_l}x] \subseteq [I^n x] \subseteq [Vx] \subseteq [W'] \subseteq W$?! Поэтому $I \subseteq K_\alpha(A)$. Рассмотрение случая ассоциативного справа x аналогично.

Если x открыт в M, то для любого левого (правого) идеала $I \subseteq A$, $\mathrm{Ann}_A x \subsetneqq I$, при наличии у $\mathrm{Ann}_A x$ непустой внутренности I открыт и замкнут в A, A-подмодуль Ix открыт и замкнут в M, $M = Ix = Ax$, $I = A$, а для $\mathrm{Ann}_A x$ с пустой внутренностью для любых окрестности нуля $U \subseteq A$, $a \in A$, $ax + (Ux \setminus \{0\})$ открыто в M ($U \nsubseteq \mathrm{Ann}_A x$), $(a + (U \setminus \mathrm{Ann}_A x))x \cap Ix \neq \varnothing$,

$(a+U)\cap I\neq\varnothing$ $(M=[Ix])$, $A=[I]$. Как следствие, $\mathrm{Ann}_A\,x$ максимален среди замкнутых левых (правых) идеалов A. □

Если в лемме 4.1 A и M открыты справа, $I\lhd A$, $I\not\subseteq K_\alpha(A)$, то $RI\neq\{0\}$, I открыт и замкнут в A, M — открытый справа топологический I-модуль в $\mathfrak{M}$.

Лемма 4.2. *Если неприводимый левый топологический J-модуль N в многообразии $\mathfrak{M}$, $\{0\}\neq J\lhd A\in\mathfrak{M}$, имеет сильно ассоциативный слева элемент y, то Jy — A-модуль в $\mathfrak{M}$ с $a(by)=(ab)y$, $a\in A$, $b\in J$, $J\cap K_\alpha(A)\subseteq K_\alpha(J)$. Если y открыт в N и непрерывен, то $N=Jy$ — неприводимый непрерывный левый топологический A-модуль, N открыт справа (слева) для открытой справа A (открытой слева A и открытого J в A).*

Доказательство. Так как $J(A\,\mathrm{Ann}_J\,y)\subseteq\mathrm{Ann}_J\,y$, $(A\,\mathrm{Ann}_J\,y)y\subseteq J^\perp=\{0\}$ (см. выше), $\mathrm{Ann}_J\,y$ — левый идеал A и Jy можно рассматривать как A-модуль в $\mathfrak{M}$ с $a(by)=(ab)y$, $a\in A$, $b\in J$ (см. вторую часть доказательства теоремы 2.1).

Кроме того, $\mathrm{Ann}_J\,N=\mathrm{Ann}_J[Jy]=\mathrm{Ann}_J\,Jy=J\cap\mathrm{Ann}_A\,Jy$, $J\cap K_\alpha(A)\subseteq\subseteq K_\alpha(J)$, где α — рассматриваемое представление A и J в $\mathfrak{M}$ с модулями Jy и N соответственно (отделимость N, $\alpha(J)\subseteq\mathcal{L}(N)$).

Если y открыт в N и непрерывен, то J-подмодуль Jy открыт и замкнут в N, $N=Jy$, для любых $a\in A$, $b\in J$, $(ab)y\neq 0$, открытого $W\subseteq N$, $(ab)y\in W$, имеются открытые $U,U',U''\subseteq A$, $a\in U'$, $b\in U''$, $U'U''\subseteq U$, $(U\cap J)y\subseteq W$, и

$$a\big((U''\cap J)y\big)\subseteq U'\big((U''\cap J)y\big)\subseteq(U\cap J)y\subseteq W,$$

где $(U''\cap J)y\setminus\{0\}$ открыто в N. Значит, $\alpha(a)$ непрерывен в by и по линейности на N, $\alpha(A)\subseteq\mathcal{L}(N)$, $(a,z)\mapsto az$, $a\in A$, $z\in N$, непрерывно в (a,z), $az\neq 0$, π_z непрерывно и $\mathrm{Ann}_A\,z=\pi_z^{-1}0=[\mathrm{Ann}_A\,z]$ для всех $z\in N$, N — неприводимый непрерывный топологический A-модуль (A-подмодули N — его J-подмодули, $A^\perp\subseteq J^\perp=\{0\}$). Если A открыта справа, то $U(by)\setminus\{0\}=(Ub\setminus\{0\})y\setminus\{0\}$ открыто в N для любых $b\in J$ и открытого $U\subseteq A$, A-модуль N открыт справа, $AJ\neq\{0\}$ $(J^\perp=\{0\})$ и J открыт и замкнут в A. Если A открыта слева, J открыт в A, $aV\neq\{0\}$ для некоторых $a\in A$, открытого $V\subseteq N$, то для любого $b\in J$, $(ab)y\neq 0$, $by\in V$, найдётся открытое $U\subseteq A$, $b\in U\subseteq J$, $Uy\subseteq V$, и $(ab)y\in(aU)y\setminus\{0\}\subseteq aV$, где $(aU)y\setminus\{0\}=(aU\setminus\{0\})y\setminus\{0\}$ открыто в N, A-модуль N открыт слева. □

Теорема 4.3. *Если $\mathfrak{M}'$ — замкнутый относительно взятия идеалов и непрерывных гомоморфных образов класс топологических алгебр из многообразия $\mathfrak{M}$, такой что $\mathcal{J}_{\text{l-top}}(I)\subseteq\mathcal{J}_{\text{l-top}}(A)$ и неприводимые левые топологические I-модули в $\mathfrak{M}$ имеют открытые в них непрерывные сильно ассоциативные слева элементы для всех $I\lhd A\in\mathfrak{M}'$, то на $\mathfrak{M}'$ определён идеально наследственный Σ-наднильпотентный топологический радикал $\mathcal{J}_{\text{l-top}}$.*

Доказательство. По леммам 4.1 и 4.2 $\mathcal{J}_{\text{l-top}}(J)=J\cap\mathcal{J}_{\text{l-top}}(A)$ для всех $J\lhd A\in\mathfrak{M}'$, $\mathcal{J}_{\text{l-top}}(A)$ — наибольший из $J'\lhd A$, $J'=\mathcal{J}_{\text{l-top}}(J')$, $\mathcal{J}_{\text{l-top}}(A)==[\mathcal{J}_{\text{l-top}}(A)]$, $A/\mathcal{J}_{\text{l-top}}(A)$ не содержит ненулевых Σ-нильпотентных идеалов. Два других радикальных свойства $\mathcal{J}_{\text{l-top}}$ на $\mathfrak{M}$ следуют из [5, предложение 3, с. 267] и [1, доказательство предложения 3] (с учётом непрерывности редукционных эпиморфизмов на фактор-алгебры). □

Теорема 4.4. *Если $\mathfrak{M}$ — замкнутый относительно взятия идеалов и непрерывных гомоморфных образов класс топологических ассоциативных алгебр, неприводимые левые топологические ассоциативные модули над которыми открыты слева или (и) имеют открытые в них непрерывные ненулевые элементы, то на $\mathfrak{M}$ определён идеально наследственный Σ-наднильпотентный топологический радикал $\mathcal{J}_{\text{l-top}}$.*

Доказательство. Будем рассматривать топологические левые ассоциативные модули над топологической ассоциативной алгеброй A и её идеалами. Если такой A-модуль M неприводим, M — неприводимый топологический I-модуль для всех $I \lhd A$, $I \nsubseteq K_\alpha(A)$, $K_\alpha(A) = [K_\alpha(A)] = \operatorname{Ann}_A M$, так как IM' — A-подмодуль M для любого I-подмодуля $\{0\} \neq M' \subseteq M$, $IM' \subseteq M'$, $[IM']$ — A-подмодуль M ($\alpha(A) \subseteq \mathcal{L}(M)$), $I^\perp = \bigcap\limits_{b\in I} b^\perp = [I^\perp]$ — A-подмодуль M, $M \neq I^\perp$ ($I \nsubseteq K_\alpha(A)$), $I^\perp = \{0\}$, и значит, $[IM'] = [M'] = M$. Поэтому $\mathcal{J}_{\text{l-top}}(I) \subseteq$ $\subseteq \mathcal{J}_{\text{l-top}}(A)$ (см. [1, лемма 1]).

Если $\{0\} \neq J \lhd A$, N — открытый слева неприводимый топологический J-модуль, то $J^\perp = \{0\}$, $\{0\} \neq JN$ — открытый и замкнутый J-подмодуль N, $N =$ $= JN$ — A-модуль с $a(by) = (ab)y$, $a \in A$, $b \in J$, $y \in N$ (см. наблюдения перед леммой 4.1, лемму 4.2). Для любых $a \in A$, $b \in J$, $y \in N$, $(ab)y \neq 0$, и открытого $W \subseteq N$, $(ab)y \in W$, существует открытое $V \subseteq N$, $y \in V$, $(ab)V = a(bV) \subseteq W$, где $bV \setminus \{0\}$ открыто в B ($\alpha(J) \subseteq \mathcal{L}(N)$), $\operatorname{Ann}_A by = r_b^{-1}(\operatorname{Ann}_J y) = [\operatorname{Ann}_A by]$ (непрерывность умножения в A). Для непрерывного N найдутся открытые $U \subseteq J$, $U', U'' \subseteq A$, $UV \subseteq W$, $a \in U'$, $b \in U''$, $U'(U'' \cap J) \subseteq U$, $UV \subseteq W$ и $(ab)V \subseteq U'\big((U'' \cap J)V\big) \subseteq W$, где $(U'' \cap J)V \setminus \{0\} = \bigcup\limits_{0\neq b' \in (U''\cap J)} (b'V \setminus \{0\})$ открыто в N. Отсюда следует, что $\alpha(a)$ непрерывен в by и по линейности на всём N, N — неприводимый топологический A-модуль (A-подмодули N — его J-подмодули, $A^\perp \subseteq J^\perp = \{0\}$), непрерывный для непрерывного J-модуля N, $K_\alpha(J) = J \cap K_\alpha(A)$. При наличии в N ненулевого открытого в нём непрерывного элемента к тем же выводам можно прийти при помощи леммы 4.2 (ненулевые элементы N сильно ассоциативны слева). Для любых $a \in A$, открытого $V \subseteq N$, $aV \neq \{0\}$, $b \in J$, $y \in N$, $by \in V \setminus a^\perp = \tilde{V}$, имеется открытое $V' \subseteq N$, $y \in V'$, $bV' \subseteq \tilde{V}$ ($\tilde{V}$ открыто в N, $\alpha(J) \subseteq \mathcal{L}(N)$) и

$$(ab)y \in (ab)V' \setminus \{0\} = a(bV') \setminus \{0\} \subseteq a(V \setminus a^\perp) = aV \setminus \{0\},$$

$(ab)V' \setminus \{0\}$ открыто в N, $aV \setminus \{0\}$ открыто в N. Значит, A-модуль N открыт слева. Для завершения доказательства остаётся повторить рассуждения из доказательства теоремы 4.3. □

Аналогичным образом можно сформулировать достаточные условия существования радикалов $\mathcal{J}_{\text{r-top}}$, $\mathcal{J}_{\text{top}}$ и вариантов $\mathcal{J}_{\text{l-top}}$, $\mathcal{J}_{\text{r-top}}$, $\mathcal{J}_{\text{top}}$, определённых для неприводимых топологических представлений с непрерывными модулями.

Теоремы 4.3, 4.4 и далее следствия 4.12, 4.13, теорема 4.16 могут быть записаны и в виде утверждений о топологической $\mathfrak{M}$-радикальности и $\mathfrak{M}'$-радикальности $\mathcal{J}_{\text{l-top}}$ и $\mathcal{J}_{\text{top}}$ для замкнутых относительно взятия идеалов и фактор-алгебр классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$.

Будем называть топологическую алгебру A из многообразия $\mathfrak{M}$ *ограниченной левым топологическим A-модулем M в $\mathfrak{M}$* (*M-ограниченной*), если для любой окрестности нуля $W \subseteq M$ существует окрестность нуля $V \subseteq M$, $\phi\big(\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A)\big)(V) \subseteq W$ (см. также [2]), и *A-ограниченной слева*, если для любой окрестности нуля $U \subseteq A$ найдётся окрестность нуля $U' \subseteq A$, $L(A^1)(U') \subseteq U$. Любая α_L-ограниченная A является A-ограниченной слева, обратное верно, если F дискретно.

Лемма 4.5. *Если алгебра A из многообразия $\mathfrak{M}$ является A-ограниченной слева (α_L-ограниченной), то для любого максимального элемента $P \in \in \mathcal{P}_{\alpha_L\text{-top}}(A)$ ($P \in \mathcal{M}_{\alpha_L}(A^1)$) фактор-топология A/P (A^1/P) дискретна и A/P (A^1/P для $A^1 \in \mathfrak{M}$) — неприводимый левый топологический A-модуль в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. По леммам 3.2, 3.3 с $\alpha = \alpha_L$ P — открытый максимальный левый идеал A (A^1) и фактор-топология A/P (A^1/P) дискретна. Поэтому A/P (A^1/P, $A^1 \in \mathfrak{M}$) — неприводимый левый топологический A-модуль в $\mathfrak{M}$ с $a\bar{b} = \overline{ab}$, $\bar{b} = b + P$, $a, b \in A$ ($b \in A^1$), $\operatorname{Ann}_A \bar{b} = r_b^{-1}(P) = [\operatorname{Ann}_A \bar{b}]$, и открытым в нём непрерывным ассоциативным слева порождающим $\bar{x}$ ($\bar{1}$), $\operatorname{Ann}_A \bar{x} = P$ ($\operatorname{Ann}_A \bar{1} = P$), где $x \in A$, $a - ax \in P$ для всех $a \in A$ (открытые элементы $\mathcal{P}_{\alpha_L\text{-top}}(A)$ входят в $\mathcal{P}_{\alpha_L}(A)$) (см. [5, предложение 4, с. 263]). Отсюда следует, что в условиях выполнения равенств лемм 3.2 ($A^1 \in \mathfrak{M}$), 3.3 с $\alpha = \alpha_L$ $\mathcal{J}_{\text{l-top}}(A) \subseteq \mathcal{J}'_{\alpha_L\text{-top}}(A)$. □

Если неприводимый левый топологический A-модуль M дискретен и имеет ассоциативный слева элемент x, то $\operatorname{Ann}_A x$ — максимальный модулярный левый идеал A (см. доказательство теоремы 2.1), открытый для A-ограниченной слева A или (и) для непрерывного x ($\operatorname{Ann}_A x = \pi_x^{-1} 0$ и $\operatorname{Ann} x_F$ открыты в A и F).

Замечание 4.6 и лемма 4.10 сходны с предложением 5 и леммой 3 из [2].

Замечание 4.6. Любой неприводимый левый топологический модуль M в многообразии $\mathfrak{M}$ над M-ограниченной алгеброй $A \in \mathfrak{M}$ дискретен.

Доказательство. Достаточно заметить, что для любой окрестности нуля $W \subset M$, $W - W \neq M$ ($M \neq A^{\perp} = \{0\}$ отделим и такие W имеются), найдётся окрестность нуля $V \subseteq M$, $\phi\big(\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A)\big)(V) \subseteq W$, и для любого $0 \neq z \in V$, $\{0\} \neq \phi(\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A))z$ — A-подмодуль M, $[\phi(\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A))z] = M \subseteq [W] \subseteq W - W$?! Поэтому $V = \{0\}$, топология M дискретна. □

Лемма 4.7. *Если неприводимый левый топологический модуль M в многообразии $\mathfrak{M}$ над A-ограниченной слева алгеброй $A \in \mathfrak{M}$ имеет непрерывный ассоциативный слева элемент x, то $\operatorname{Ann}_A x$ открыт в A.*

Доказательство. В противном случае внутренность $\operatorname{Ann}_A x$ пуста, в топологии M нет одноэлементных множеств (см. выше) и $(L(A^1)(V))x \subseteq V'x \subseteq \subseteq W \subseteq W - W \neq M$ для некоторых окрестностей нуля $V, V' \subseteq A$, $W \subseteq M$, $M = [(L(A^1)a)x] \subseteq [W] \subseteq W - W \neq M$, $a \in V \setminus \operatorname{Ann}_A x \neq \varnothing$?! $\square$

Следствие 4.8. *Если A-ограниченная слева алгебра $A \in \mathfrak{M}$ компактна, то любой неприводимый левый топологический A-модуль M в $\mathfrak{M}$ с непрерывным ассоциативным слева элементом x дискретен.*

Доказательство. Так как открытое покрытие $\{a + \operatorname{Ann}_A x\}_{a \in A}$ A содержит конечное подпокрытие $\{a_i + \operatorname{Ann}_A x\}_{i=1}^k$, $M = [Ax] = Ax = \{a_i x\}_{i=1}^k$ конечен и дискретен. $\square$

Следствие 4.9. *Если F — поле, открытые покрытия A-ограниченной слева алгебры $A \in \mathfrak{M}$ содержат подпокрытия мощности меньше $|F|$, то у A нет неприводимых левых топологических A-модулей в $\mathfrak{M}$ с непрерывными ассоциативными слева элементами.*

Доказательство. При наличии таких A-модуля M и $x \in M$ у A имелось бы открытое покрытие $\{a_b + \operatorname{Ann}_A x\}_{b \in B}$, $|B| < |F|$, и значит, $Ax = \{a_b x\}_{b \in B}$, $|F| \leqslant |Ax| < |F|$?! $\square$

Лемма 4.10. *Если неприводимый левый топологический A-модуль в многообразии $\mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M}$, дискретен и имеет непрерывный ассоциативный слева элемент x, то в $\operatorname{Ann}_A x$ входит любой левый идеал $I \subseteq A$, элементы которого топологически α_L-квазирегулярны в A.*

Доказательство. Если $I \not\subseteq \operatorname{Ann}_A x$, то $M = Ix$, $x = ex$ для некоторого $e \in I$ и для любой окрестности нуля $V \subseteq A^1$ имеется $\tau \in L(A^1)$, $\tau(1-e) \in 1+V \subseteq A^1$. Рассматривая M как $L(A^1)$-модуль, мы получаем для $V = \operatorname{Ann} x_F + \operatorname{Ann}_A x$ (см. наблюдение после леммы 4.5), что $0 = \tau(l_{1-e}x) = \bigl(\tau(1-e)\bigr)ex \in x + (Ve)x = \{x\}$ (см. лемму 2.6)?! $\square$

Применяя леммы 3.2, 3.3, 4.5 и 4.10, мы сразу получаем следствие 4.11.

Следствие 4.11. *Если неприводимые левые топологические A-модули в многообразии $\mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M}$, дискретны и содержат непрерывные ассоциативные слева элементы, A α_L-ограниченная и выполняется одно из условий:*

1) *$A^1 \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{M}_{\alpha_L}(A^1)$ пусто или слабо индуктивно,*
2) *F дискретно, $\mathcal{P}_{\alpha_L}(A)$ пусто или слабо индуктивно,*

то $\mathcal{J}_{\text{l-top}}(A) = \mathcal{J}'_{\alpha_L\text{-top}}(A)$.

Следствие 4.12. *Если $\mathfrak{M}'$ — замкнутый относительно взятия идеалов и непрерывных гомоморфных образов класс топологических алгебр из многообразия $\mathfrak{M}$, таких что они удовлетворяют условиям следствия 4.11, $(J)_A/J$ — 2-ниль-алгебра, неприводимые левые топологические I-модули в $\mathfrak{M}$ имеют непрерывные сильно ассоциативные слева элементы для всех $J \lhd I \lhd A \in \mathfrak{M}'$, то на $\mathfrak{M}'$ определён идеально наследственный Σ-наднильпотентный топологический радикал $\mathcal{J}_{\text{l-top}} = \mathcal{J}'_{\alpha_L\text{-top}} = \mathcal{J}_{\alpha_L\text{-top}}$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $\mathcal{J}'_{\alpha_L\text{-top}}(I) \lhd A$, $\mathcal{J}'_{\alpha_L\text{-top}}(I) \subseteq \mathcal{J}'_{\alpha_L\text{-top}}(A)$ для любых $I \lhd A \in \mathfrak{M}'$ (аналогично наблюдению перед следствием 2.2), и применить следствие 4.11 и теорему 4.3. □

Следствие 4.13. *Если $\mathfrak{M}'$ — замкнутый относительно взятия идеалов и непрерывных гомоморфных образов класс топологических алгебр из многообразия $\mathfrak{M}$, таких что $\mathcal{J}_{\mathrm{top}}(I) \subseteq \mathcal{J}_{\mathrm{top}}(A)$, неприводимые топологические I-модули в $\mathfrak{M}$ имеют открытые в них непрерывные сильно ассоциативные слева или справа элементы для всех $I \lhd A \in \mathfrak{M}'$, то на $\mathfrak{M}'$ определён идеально наследственный Σ-наднильпотентный топологический радикал $\mathcal{J}_{\mathrm{top}}$.*

Доказательство. Если N — неприводимый левый (правый) топологический J-модуль в $\mathfrak{M}$, $J \lhd A \in \mathfrak{M}'$, с открытым в нём непрерывным сильно ассоциативным справа (слева) элементом y, то $N = Jy$ ($N = yJ$) можно рассматривать как неприводимый правый (левый) топологический J-модуль в $\mathfrak{M}$ с таким y (см. замечание перед теоремой 2.1 и лемму 4.2). Остаётся применить рассуждения из доказательства теоремы 4.3. □

Лемма 4.14. *Если в неприводимом почти точном левом топологическом A-модуле M в однородном многообразии $\mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M}$, с ассоциативным слева элементом x элементы $S = Z(A) \setminus \{0\} \neq \varnothing$ открыты, операторы умножения в A на элементы S — открытые отображения, то свойства M наследует $S^{-1}A$-модуль $S^{-1}Ax$ в $\mathfrak{M}$, $S^{-1}Ax$ непрерывен для непрерывного M, открытость $z \in S^{-1}Ax$ в $S^{-1}Ax$ равносильна его открытости в M.*

Доказательство. Алгебра A первична, $S^{-1}A \in \mathfrak{M}$ и $Z(A) \cap \operatorname{Ann}_A x = \{0\}$ (см. леммы 2.4, 4.1). Поскольку $(\alpha(c)\alpha(a) - \alpha(a)\alpha(c))|_{Ax} = 0$ для всех $c \in Z(A)$, $a \in A$ и $M = [Ax]$, $\alpha\bigl(Z(A)\bigr) \subseteq \operatorname{End}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A)}(M) \cap \mathcal{L}(M)$. Если $s \in S$, то $M \neq s^{\perp} = [s^{\perp}]$ — A-подмодуль M, $s^{\perp} = \{0\}$, $s(V \setminus \{0\}) = sV \setminus \{0\}$ и $sW = sz + s(-z + W)$ открыты в M для всех открытых $V, W \subseteq M$, $z \in M \setminus W \neq \varnothing$, sM — открытый и замкнутый A-подмодуль M, $M = sM$, $\alpha(s)$ — гомеоморфизм M, обратимый в $\operatorname{End}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A)}(M) \cap \mathcal{L}(M)$. Значит, A-подмодуль

$$S^{-1}Ax = \{\alpha(s)^{-1}(ax) = a(\alpha(s)^{-1}x) \mid a \in A,\ s \in S\} -$$

$S^{-1}A$-модуль в $\mathfrak{M}$ с $(s^{-1}a)\alpha(s')^{-1}(bx) = \alpha(ss')^{-1}\bigl((ab)x\bigr)$, $a, b \in A$, $s, s' \in S$, где $\alpha(s)^{-1}, \alpha(s')^{-1} \in \operatorname{End}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A)}(M) \cap \mathcal{L}(M)$, ассоциативным слева x, $\operatorname{Ann}_{S^{-1}A} S^{-1}Ax = S^{-1} \operatorname{Ann}_A M$, $K_\alpha(S^{-1}A) = S^{-1}K_\alpha(A) = \{0\}$ (см. лемму 2.4; идеалы $S^{-1}A$ имеют вид $S^{-1}I$, $I \lhd A$).

Для любых $s, t \in S$, $\alpha(s)^{-1}\alpha(t)$ — гомеоморфизм $S^{-1}Ax$ и, как следствие, $s^{-1}tV$, $s^{-1}tV \setminus \{0\} = \alpha(s)^{-1}(tV \setminus \{0\})$ открыты в $S^{-1}Ax$ для любого открытого $V \subseteq S^{-1}Ax$.

Выберем в $S^{-1}A$ топологию $\mathcal{T}'$ с базой $\{s^{-1}U \mid s \in S,\ U \in \mathcal{T}\}$, где $\mathcal{T}$ — топология A,

$$\bigcap_{i=1}^{k} s_i^{-1}U_i = \left(\prod_{i=1}^{k} s_i\right)^{-1} \bigcap_{i=1}^{k} \Bigl(\prod_{j \neq i} s_j\Bigr) U_i$$

для всех $s_i \in S$, $U_i \in \mathcal{T}$, $k \geqslant 1$ (операторы умножения в A на элементы S — открытые отображения, индукция по k). Тогда $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, для любых $f \in F$, $s, t, t_1, t_2 \in S$, $a, a_1, a_2 \in A$, $U \in \mathcal{T}$

1) если $f(s^{-1}a) \in t^{-1}U$, то $t(fa) \in sU$, $tOV \in sU$ для некоторых открытых $O \subseteq F$, $V \in \mathcal{T}$, $f \in O$, $a \in V$, и $f(s^{-1}a) \in Os^{-1}V \subseteq t^{-1}U$;
2) если $s_1^{-1}a_1+s_2^{-1}a_2 = (s_1s_2)^{-1}(s_2a_1+s_1a_2) \in t^{-1}U$, то $ts_2U_1+ts_1U_2 \subseteq s_1s_2U$ для некоторых $U_i \in \mathcal{T}$, $a_i \in U_i$, и $s_1^{-1}a_1 + s_2^{-1}a_2 \in s_1^{-1}U_1 + s_2^{-1}U_2 \subseteq t^{-1}U$;
3) если $(s_1s_2)^{-1}a_1a_2 \in t^{-1}U$, то $tV_1V_2 \subseteq s_1s_2U$ для некоторых $V_i \in \mathcal{T}$, $a_i \in V_i$, и $(s_1^{-1}a_1)(s_2^{-1}a_2) \in (s_1^{-1}V_1)(s_2^{-1}V_2) \subseteq t^{-1}U$.

Следовательно, $S^{-1}A$ с $\mathcal{T}'$ — топологическая алгебра.

Для любых открытого $W \subseteq M$, $0 \neq \alpha(s)^{-1}(az) \in W$, $s \in S$, $a \in A$, $z \in M$, $az \in sW$, найдётся открытое $V \subseteq M$, $z \in V$, $aV \subseteq sW$, $\alpha(s)^{-1}(az) \in \in \alpha(s)^{-1}(aV) \subseteq W$, для непрерывного M найдётся открытое $U \in \mathcal{T}$, $a \in U$, $UV \subseteq sW$, $\alpha(s)^{-1}(az) \in \alpha(s)^{-1}(UV) \subseteq W$. Если $z \in S^{-1}Ax$, то

$$(s^{-1}a)z \in (s^{-1}a)(V \cap S^{-1}Ax) \subseteq W \cap S^{-1}Ax$$

$((s^{-1}a)z \in (s^{-1}U)(V \cap S^{-1}Ax) \subseteq W \cap S^{-1}Ax$ для непрерывного M) и

$$\operatorname{Ann}_{S^{-1}A} z = S^{-1} \operatorname{Ann}_A z = S^{-1}A \setminus \bigcup_{s\in S} s^{-1}(A \setminus \operatorname{Ann}_A z) = [\operatorname{Ann}_{S^{-1}A} z]_{S^{-1}A}.$$

Обозначим через $\mathcal{T}_{Z(A)}$ и $\mathcal{T}'_{S^{-1}Z(A)}$ топологии $Z(A)$ и $S^{-1}Z(A)$, индуцированные $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$. Если M *непрерывен по* $Z(A)$ ($(c,z) \mapsto cz$, $c \in Z(A)$, $z \in M$, непрерывно во всех (c,z), $cz \neq 0$) то для $a \in Z(A)$, $\alpha(s)^{-1}(az) = 0 \in W$ (см. выше)

1) при $a = 0$, $z \neq 0$ и наличии $0 \neq \alpha(s_1)^{-1}(s_2z) \in W$, $s_1, s_2 \in S$, $\alpha(s_1)^{-1}(UV) \subseteq W$ для некоторых открытых $V \subseteq M$, $U \in \mathcal{T}_{Z(A)}$, $z \in V$, $s_2 \in U$, $0 \in \alpha(s_1)^{-1}\big((0+U)V\big) \subseteq W$;
2) при $a = 0$, $z \neq 0$, $\alpha(S)^{-1}(Z(A)z) \cap W = \{0\}$, $z = \alpha(s')^{-1}(s'z) \in \in \alpha(s')^{-1}(U'z) \subseteq z + W$ для любого $s' \in S$ и некоторого $U' \in \mathcal{T}_{Z(A)}$, $s' \in U'$, и $U' = \{s'\}$, $\mathcal{T}'_{S^{-1}Z(A)}$ дискретна, $0 \in \alpha(s)^{-1}(\{0\}V) \subseteq W$ для любого открытого $V \subseteq M$, $z \in V$;
3) при $a \neq 0$, $z = 0$ или M недискретен и существуют открытые $V \subseteq M$, $U \in \mathcal{T}_{Z(A)}$, $z' \in V$, $a \in U$, $0 \neq \alpha(s)^{-1}(az') \in \alpha(s)^{-1}(UV) \subseteq W$, $0 \in \alpha(s)^{-1}\big(U(0+V)\big) \subseteq W$, или M дискретен и $0 \in U'\{0\} \subseteq W$ для всех $U' \in \mathcal{T}'_{S^{-1}Z(A)}$, $s^{-1}a \in U'$;
4) при $a = 0$, $z = 0$ по п. 3) для любого $t \in S$ найдутся открытые $V \subseteq M$, $U \in \mathcal{T}_{Z(A)}$, $t \in U$, $\alpha(s)^{-1}\big(U(0+V)\big) \subseteq W$, $0 \in \alpha(s)^{-1}\big((0+U)(0+V)\big) \subseteq W$.

Значит, в этом случае M — линейное топологическое пространство над топологическим полем $S^{-1}Z(A)$ с $\mathcal{T}'_{S^{-1}Z(A)}$, $(s^{-1}t)z = \alpha(s)^{-1}(tz)$, $s \in S$, $t \in Z(A)$, $z \in M$.

Таким образом, $S^{-1}Ax$ — неприводимый почти точный левый топологический $S^{-1}A$-модуль в $\mathfrak{M}$ с ассоциативным слева x (линейное топологическое

$S^{-1}Z(A)$-пространство и непрерывный модуль над топологической $S^{-1}Z(A)$-алгеброй $S^{-1}A$ для непрерывного M (это можно вывести и для M с открытым в нём непрерывным x)). Равносильность для элементов $S^{-1}Ax$ открытости в $S^{-1}Ax$ и M следует из описания $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. □

Лемма 4.15. *Если A — топологическая алгебра из однородного многообразия $\mathfrak{M}$, M — неприводимый левый топологический I-модуль в $\mathfrak{M}$, $I \lhd A$, с ассоциативным слева элементом x, $J = K_\alpha(I) \lhd A$, $S = Z(\bar{A}) \cap \bar{I} \setminus \{0\} \neq \varnothing$, элементы S открыты в M, где $\bar{B} = (B+K)/K$ для всех $B \subseteq A$, K — наибольший из $I' \lhd A$, $I' \subseteq \{a \in A \mid aI \subseteq \operatorname{Ann}_I x\}$, то x сильно ассоциативен и Ix — неприводимый топологический A-модуль в $\mathfrak{M}$ с $a(bx) = (ab)x$, $a \in A$, $b \in I$, $K_\alpha(A) = K$, A-модуль $M = Ix$ непрерывен для открытого в M непрерывного x.*

Доказательство. Ввиду непрерывности умножения в A и $\operatorname{Ann}_I x = [\operatorname{Ann}_I x]_I$

$$\{a \in A \mid aI \subseteq \operatorname{Ann}_I x\} = \bigcap_{b \in I} r_b^{-1}(\operatorname{Ann}_I x) = \bigcap_{b \in I} [r_b^{-1}(\operatorname{Ann}_I x)], \quad K = [K].$$

По условию $J = K \cap I$ (см. леммы 4.1, 2.5). Естественный изоморфизм алгебр I/J и $\bar{I}$ — их гомеоморфизм для I/J с фактор-топологией и $\bar{I}$ с топологией, индуцированной фактор-топологией $\bar{A}$. Он позволяет рассматривать M как почти точный неприводимый левый топологический $\bar{I}$-модуль в $\mathfrak{M}$ с $\bar{a}z = az$, $a \in I$, $z \in M$ (см. [5, упражнение 3, с. 267] и

$$\operatorname{Ann}_{I/J} z = I/J \setminus (I/J \setminus \operatorname{Ann}_I z/J) = I/J \setminus \big((I \setminus \operatorname{Ann}_I z) + J\big)/J = [\operatorname{Ann}_{I/J} z]_{I/J}$$

для всех $z \in M$). Если $cb \in \operatorname{Ann}_I x$ для некоторых $c \in A$, $\bar{c} \in Z(\bar{A})$, $b \in I \setminus \operatorname{Ann}_I x$, то, как и в лемме 2.5, из $I^\perp = \{0\}$, $M = \big[\big(L(I)(b)\big)x\big]$, отделимости M и $\alpha(I) \subseteq \mathcal{L}(M)$ следует, что $(c)_A I \subseteq J \subseteq \operatorname{Ann}_I x$, $c \in (c)_A \subseteq K$. Кроме того,

$$\big(b(ab')\big)x = \big((ba)b'\big)x = 0 \quad (b \in I,\ a \in A,\ \bar{a} \in Z(\bar{A}),\ b' \in \operatorname{Ann}_I x),$$

$Z(\bar{A}) \operatorname{Ann}_{\bar{I}} x \subseteq \operatorname{Ann}_{\bar{I}} x = \overline{\operatorname{Ann}_I x}$, $\bar{I}x$ — левый $(Z(\bar{A}) + \bar{I})$-модуль в $\mathfrak{M}$ без $Z(\bar{A})$-кручения. Поскольку каждый $s \in S$ открыт в M, $\alpha(s)$ обратим в $\operatorname{End}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(\bar{I})}(M) \cap \mathcal{L}(M)$ (см. лемму 4.14), $ca \notin K$ для всех $c, a \in A \setminus K$, $\bar{c} \in S$ (иначе $ca \in K$, $(aI)x = \alpha(\bar{c})^{-1}\big(\big(c(aI)\big)x\big) = \{0\}$, $a \in K$ (см. лемму 2.5)?!). Поэтому $\bar{A}$ не имеет $(Z(\bar{A}) \cap \bar{I})$-кручения, $S^{-1}\bar{A} = S^{-1}\bar{I}$, $S^{-1}\bar{I}x$ можно рассматривать как почти точный левый $S^{-1}\bar{I}$-модуль в $\mathfrak{M}$ с ассоциативным слева x (как в леммах 2.5, 4.14), $\alpha(S^{-1}\bar{I}) \subseteq \mathcal{L}(S^{-1}\bar{I}x)$,

$$\overline{A \operatorname{Ann}_I x} \subseteq \bar{I} \cap \operatorname{Ann}_{S^{-1}\bar{I}} x = \overline{\operatorname{Ann}_I x}, \quad A \operatorname{Ann}_I x \subseteq \operatorname{Ann}_I x + J = \operatorname{Ann}_I x,$$

x сильно ассоциативен слева в M. Следовательно, Ix — неприводимый топологический A-модуль в $\mathfrak{M}$ с $a(bx) = \bar{a}(bx) = (ab)x$, $a \in A$, $b \in I$, и $K_\alpha(A) = K$ (см. доказательства лемм 4.2, 2.5; $\operatorname{Ann}_A bx = r_b^{-1}(\operatorname{Ann}_I x) = [\operatorname{Ann}_A bx]$ для всех $b \in I$, $\alpha(A) \subseteq \mathcal{L}(S^{-1}\bar{I}x)$). Если x открыт в M и непрерывен, то A-модуль $M = Ix$ непрерывен (см. лемму 4.2). □

Отметим, что любой топологический A-модуль можно рассматривать как почти точный топологический $A/K_\alpha(A)$-модуль в том же многообразии с теми же свойствами (см. доказательство леммы 4.15). Элементы $Z(A)$ открыты в неприводимых компактных топологических A-модулях с ассоциативными слева или справа элементами (см. доказательство леммы 4.14), для альтернативной A — во всех неприводимых компактных топологических альтернативных A-модулях. Последнее следует из [5, лемма 9, с. 277], поскольку для любых неприводимого правого топологического альтернативного A-модуля M, $a, b, c \in A$, $z \in M$, $(z, a, b) = (za)b - z(ab)$,

$$\begin{aligned}(z,a,b)c &= \big((za)b\big)c - \big(z(ab)\big)c = \\ &= -\big((zc)b\big)a + z\big((ab)c + (cb)a\big) + (zc)(ab) - z\big((ab)c + c(ab)\big) = \\ &= -\big((zc), b, a\big) + z\big((cb)a - c(ab)\big) = \big((zc), a, b\big) + z\big((cb)a - c(ab)\big),\end{aligned}$$

и если $\{a,b\} \cap Z(A) \neq \varnothing$, $(M,a,b) = \{(z,a,b) \mid z \in M\}$ — A-подмодуль M, $(M,a,b) = \{0\}$ (иначе $M = [(M,a,b)] = [((M,a,b),a,b)] = \{0\}$) и $\alpha\big(Z(A)\big) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{End}_{\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A)}(M) \cap \mathcal{L}(M)$, где $\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A) = T(A)/_r I_{\mathrm{Alt}}[A]$ — универсальная алгебра правых альтернативных представлений A, Alt — многообразие альтернативных F-алгебр. Если $a \in Z(A)$, a открыт в M или (и) M — компакт, то $Ma = [Ma]$, $a^\perp = [a^\perp]$ — A-подмодули M и либо $M = a^\perp$, $Ma = \{0\}$, $a \in K_\alpha(A)$, либо $M = Ma$, $a^\perp = \{0\}$, $\alpha(a)$ — гомеоморфизм M (открытому a в M, $a^\perp = \{0\}$, отвечает открытое отображение $\alpha(a)$ (см. доказательство леммы 4.14)). Идеалы алгебр из замкнутых относительно взятия фактор-алгебр классов отделимых топологических алгебр замкнуты.

Теорема 4.16. *Если $1/3 \in F$, $\mathfrak{M}$ — такой замкнутый относительно взятия идеалов и непрерывных гомоморфных образов класс отделимых топологических альтернативных F-алгебр, что для всех $A \in \mathfrak{M}$ и почти точного неприводимого топологического альтернативного A-модуля M*

1) *операторы умножения в A на элементы $Z(A) \setminus \{0\}$ — открытые отображения, M непрерывен по $Z(A)$, элементы $Z(A) \setminus \{0\}$ открыты в M,*
2) *для ассоциативной A левый (правый) M открыт слева (справа) или (и) содержит открытый в M непрерывный ненулевой элемент,*

то на $\mathfrak{M}$ определён идеально наследственный Σ-наднильпотентный топологический радикал $\mathcal{J}_{\mathrm{top}}$.

Доказательство. Каждый неприводимый топологический альтернативный A-модуль M, $A \in \mathfrak{M}$, содержит ассоциативные слева или справа элементы. Для этого достаточно провести анализ рассуждений [5], с. 268—281. Унитарность неприводимых топологических альтернативных модулей над топологическими альтернативными алгебрами с 1 выводится аналогично лемме 2, с. 268 ($\{x - x1 \mid x \in M\} \subseteq A^\perp = \{0\}$ для такого правого A-модуля M (см. начало этого раздела)). Остальные утверждения § 2 главы 11 (леммы 3, 4, следствия 1, 2, леммы 5, 6, теорема 1, с. 269—274) остаются неизменными с поправкой на топологичность поля и тот факт, что ассоциативность слева или справа в леммах

5, 6 и теореме 1 заменяется на наличие ассоциативных справа или слева элементов (в [5] рассматриваются правые A-модули). К рассуждениям доказательства леммы 7 на с. 275 о первичности $K_\alpha(A)$ добавляется отделимость M и $\alpha(A) \subseteq \subseteq \mathcal{L}(M)$ (из $\big(\big((Mb)c\big)b\big)c = \{0\}$ следует $\big[\big[\big[[Mb]c\big]b\big]c\big] = M = \{0\}$?!). Лемма 8 на с. 276 тривиализирована условием $1/3 \in F$, необходимость которого требует отдельных исследований. Обобщённый вариант леммы 9 со с. 277 приведён в замечании перед теоремой 4.16. Леммы 10, 11 со с. 278 сохраняются с заменой неассоциативности справа модуля на отсутствие в нём ассоциативных справа элементов. Доказательство теоремы 2 со с. 279, которая теперь принимает вид теоремы о наличии ассоциативных слева или справа элементов в неприводимых топологических альтернативных модулях, требует комментариев лишь в заключительной части, с. 281. Здесь ввиду почти точности рассматриваемого правого A-модуля M, доказательства леммы 4.14 и замечания перед теоремой 4.16 A первична, $S = Z(A) \setminus \{0\} \neq \varnothing$, $\alpha(s)$ — обратимый в $\mathrm{End}_{\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A)}(M) \cap \mathcal{L}(M)$ гомеоморфизм M, $\alpha(a)\alpha(c) = \alpha(c)\alpha(a) = \alpha(ac)$ для всех $s \in S$, $a \in A$, $c \in Z(A)$. Поэтому α индуцирует гомоморфизм F-модулей

$$\bar{\alpha}:\ s^{-1}a \mapsto \alpha(s)^{-1}\alpha(a) \in \mathrm{End}_{\bar{\alpha}(S^{-1}Z(A))}(M) \cap \mathcal{L}(M) \quad (s \in S,\ a \in A),$$

который удовлетворяет определению топологического представления $S^{-1}A$ с топологией из леммы 4.14 и всем однородным альтернативным R-тождествам. Как следствие, к линейному топологическому пространству M над топологическим полем $S^{-1}Z(A)$ и топологической композиционной $S^{-1}Z(A)$-алгебре $S^{-1}A$ (алгебре Кэли—Диксона или обобщённых кватернионов) применима теорема 1 из [5, с. 273] (см. выше), M содержит ассоциативные слева или справа элементы (в [5, гл. 11, § 2] используется конечный набор однородных R-тождеств; структура $S^{-1}Z(A)$-пространства M введена в лемме 4.14). Замечание перед теоремой 4.16 гарантирует корректность определения $\bar{\alpha}$ и позволяет сразу заменить $I \lhd Z(A)$ в построениях с. 280, 281 на $Z(A)$.

Если M — почти точный неприводимый топологический альтернативный A-модуль, x — ассоциативный слева или справа элемент M, то A первична и или ассоциативна, или кольцо Кэли—Диксона. В первом случае Ax или xA можно рассматривать как точный неприводимый топологический ассоциативный A-модуль (см. замечание перед теоремой 2.1) и как такой модуль над всеми $\{0\} \neq I \lhd A$ (см. доказательство теоремы 4.4). Во втором случае $\mathrm{Ann}_A\, x = \{0\}$ (см. [5, лемма 3, с. 238]), $\alpha(s)$, $0 \neq s \in Z(A)$, обратимы в $\mathrm{End}_{\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A)}(M) \cap \mathcal{L}(M)$ ($\mathrm{End}_{\mathcal{L}_{\mathrm{Alt}}(A)}(M) \cap \mathcal{L}(M)$) для правого (левого) M, $(xA)s = xA$ ($s(Ax) = Ax$) (см. доказательство леммы 4.14 с учётом неприводимости xA (Ax)), $st = s$ для некоторого $t \in A$, $t = 1$ — единица A, s обратим в $Z(A)$, $Z(A)$ — поле, A — алгебра Кэли—Диксона над полем $Z(A)$. Значит, $\mathcal{J}_{\mathrm{top}}(I) \subseteq \mathcal{J}_{\mathrm{top}}(A)$ для всех $I \lhd A \in \mathfrak{M}$.

Если $I \lhd A \in \mathfrak{M}$ и N — неприводимый топологический альтернативный I-модуль, то N содержит ассоциативный слева или справа элемент x, $K_\alpha(I)$ — первичный идеал I (см. выше или лемму 4.1) и $K_\alpha(I) \lhd A$ (см. [5, теорема 4, с. 189]). Обозначим через J наибольший из $J' \lhd A' = A/K_\alpha(I)$, $J'I' = = \{0\}$, $I' = I/K_\alpha(I)$. Тогда $J = [J]_{A'}$ (следствие отделимости фактор-топологии $A' \in \mathfrak{M}$, $[J]_{A'} \subseteq \bigcap\limits_{b\in I'} \operatorname{Ker} r_b = \bigcap\limits_{b\in I'} [\operatorname{Ker} r_b]_{A'}$ или замечание перед теоремой 4.16), $J \cap I' = \{0\}$, ненулевые идеалы $\bar{A} = A'/J$ имеют ненулевые пересечения с $\bar{I} = (I' + J)/J \cong I'$, $\bar{A}$ сильно первична ($1/3 \in F$) и потому либо ассоциативна, либо кольцо Кэли—Диксона (см. [5, теорема 5′, следствие теоремы 9, с. 222, 230]). В последнем случае $\bar{I}$ — алгебра Кэли—Диксона над своим центром, $\bar{I} = \bar{A}$ (см. выше и [5, предложение 3, с. 228]), N — почти точный неприводимый топологический альтернативный $\bar{A}$-модуль и неприводимый топологический альтернативный A-модуль. Если $\bar{A}$ ассоциативна, то $x\bar{I}$ или $\bar{I}x$ — точный неприводимый топологический ассоциативный $\bar{I}$-модуль (см. замечание перед теоремой 2.1), и ввиду открытости в нём элементов $\bar{I}$ или (и) наличия ненулевого открытого в нём непрерывного элемента он точный неприводимый топологический ассоциативный $\bar{A}$-модуль (см. доказательство теоремы 4.4 с учётом $\{0\} = K_\alpha(\bar{I}) = \bar{I} \cap K_\alpha(\bar{A}) = K_\alpha(\bar{A})$) и неприводимый топологический альтернативный A-модуль. В обоих случаях $K_\alpha(A)$ — прообраз J в A, $K_\alpha(I) = I \cap K_\alpha(A)$. В неассоциативной ситуации это также следует из леммы 4.15 и замечания перед теоремой 2.1. Повтор рассуждений из доказательства теоремы 4.3 завершает доказательство. □

Если класс $\mathfrak{M}$ составляют PI-алгебры, то условие 2) в теореме 4.16 можно опустить, используя для ассоциативной $\bar{A}$ в финале доказательства лемму 4.15, замечание перед теоремой 2.1 и наличие в ненулевых идеалах первичной ассоциативной PI-алгебры её ненулевых центральных элементов.

Аналогично $\mathcal{J}_{\mathrm{top}}$ определим отображения $\mathcal{J}_{\text{i-top}}$ и $\mathcal{J}_{\text{d-top}}$, заменив неприводимые топологические модули в выбранном многообразии на те из них, который неприводимы в обычном (дискретном) смысле и имеют дискретную топологию соответственно, $\mathcal{J}_{\mathrm{top}}(A) \subseteq \mathcal{J}_{\text{i-top}}(A) \subseteq \mathcal{J}_{\text{d-top}}(A)$ для любой топологической алгебры A из многообразия определения $\mathcal{J}_{\mathrm{top}}$, $\mathcal{J}_{\text{i-top}}$ и $\mathcal{J}_{\text{d-top}}$. На любом замкнутом относительно взятия идеалов и непрерывных гомоморфных образов классе отделимых топологических альтернативных F-алгебр (с условием 2) теоремы 4.16) $\mathcal{J}_{\text{d-top}}$ ($\mathcal{J}_{\text{i-top}}$) — идеально наследственный Σ-наднильпотентный топологический радикал (см. доказательство теоремы 4.16 и [5, теоремы 1, 2, лемма 12, с. 238, 279, 281]).

Наличие в неприводимых альтернативных модулях ассоциативных слева или справа порождающих (см. [5, теорема 2, с. 279]), лемма 4.5, замечание после неё, леммы 4.10, 4.1 и 3.3 позволяют сделать следующее замечание.

Замечание 4.17. Если топологическая альтернативная F-алгебра A A-ограничена слева и справа, то $\mathcal{J}_{\text{d-top}}(A) = K'(R) = K(R)$. Если F дискретно, $\mathcal{P}_{\alpha_L}(R)$ и $\mathcal{P}_{\alpha_R}(R)$ пусты или слабо индуктивны, то $\mathcal{J}_{\text{d-top}}(A) = \mathcal{J}'_{\alpha_L\text{-top}}(A) \cap \mathcal{J}'_{\alpha_R\text{-top}}(A)$.

5. Дополнения. Слабо Σ-разрешимые радикалы

В заключение рассмотрим ряд топологических радикалов α'_M-ограниченных алгебр и их связь с топологическими квазирегулярными радикалами.

Будем называть топологическую F-алгебру A *локально конечной* Σ*-разрешимой*, если конечно порождённые подалгебры A конечно порождены как F-модули (конечны над F) и Σ-разрешимы, *слабо* Σ*-разрешимой*, если для любых $B \subseteq A$, $|B| < \infty$, и окрестности нуля $U \subseteq A$ существует $m = m(B,U) \geqslant 0$, $g_m(B) = \{g_m(b_1, \dots, b_{2^m}) \mid b_i \in B\} \subseteq U$, Σ*-2-ниль-алгеброй*, если для любых $a \in A$ и окрестности нуля $U \subseteq A$ можно выбрать $m = n(a,U) \geqslant 0$, $g_m(\{a\}) = g_m(a, \dots, a) \in U$, где $g_m = g_m(x_1, \dots, x_{2^n}) \in F\langle X\rangle$ — m-й многочлен разрешимости, $g_0(x_0) = x_0$,

$$g_{k+1}(x_1, \dots, x_{2^{k+1}}) = g_k(x_1, \dots, x_{2^k}) g_k(x_{2^k+1}, \dots, x_{2^{k+1}}) \quad (k \geqslant 0),$$

$F\langle X\rangle$ — свободная неассоциативная F-алгебра с множеством свободных порождающих $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Обозначим классы слабо Σ-разрешимых F-алгебр и Σ-2-ниль-F-алгебр через $\mathfrak{W}_\Sigma$ и $\mathfrak{W}_{\Sigma\text{-}2}$.

Назовём топологическую F-алгебру A Σ*-первичной*, если A не содержит ненулевых Σ-разрешимых идеалов и любые два ненулевых идеала A имеют ненулевое пересечение, идеал $P \lhd A$ Σ*-первичным*, если алгебра A/P Σ-первична, и топологический $\mathfrak{X}$-радикал $\mathcal{T}$ *специальным* (Σ*-специальным*), если значения $\mathcal{T}$ на алгебрах из $\mathfrak{X}$ равны пересечениям их замкнутых первичных (Σ-первичных) идеалов, фактор-алгебры по которым $\mathcal{T}$-полупросты.

Теорема 5.1. *Классы $\mathfrak{W}_\Sigma \cap \mathfrak{U}_M$, $\mathfrak{W}_{\Sigma\text{-}2} \cap \mathfrak{U}_M$ — радикальные в классе $\mathfrak{U}_M$ подклассы, определяемые ими нижние $\mathfrak{U}_M$-радикалы T_Σ, $\mathcal{N}_{\Sigma\text{-}2}$ Σ-специальны.*

Доказательство. Ограничимся классом $\mathfrak{W}_\Sigma \cap \mathfrak{U}_M$, рассмотрение класса $\mathfrak{W}_{\Sigma\text{-}2} \cap \mathfrak{U}_M$ аналогично. Если $A \in \mathfrak{U}_M$ и $I, A/I \in \mathfrak{W}_\Sigma$, то для любых окрестности нуля $U \subseteq A$ и $B \subseteq A$, $|B| < \infty$, найдутся окрестности нуля $U', U'' \subseteq A$, $U' + U' \subseteq U$, $FM(A)(U'') \subseteq U'$, $n, m \geqslant 0$ и $C \subseteq I$, $|C| < \infty$, $g_n(B) \subseteq C + U''$, $g_m(C) \subseteq U'$, и

$$g_{n+m}(B) \subseteq g_m(C + U'') \subseteq g_m(C) + FM(A)(U'') \subseteq U' + U' \subseteq U.$$

Значит, $\mathfrak{W}_\Sigma \cap \mathfrak{U}_M$ замкнут в $\mathfrak{U}_M$ относительно взятия расширений и любая $A \in \mathfrak{U}_M$ содержит наибольший идеал $T_\Sigma(A)$ среди её идеалов из $\mathfrak{W}_\Sigma \cap \mathfrak{U}_M$. Если $I \lhd A \in \mathfrak{U}_M$, $I \in \mathfrak{W}_\Sigma$, то для любых окрестностей нуля $U, U', U'' \subseteq A$ из предыдущего рассуждения, $B \subseteq [I]$, $|B| < \infty$, можно выбрать $C \subseteq I$, $|C| < \infty$, $n \geqslant 0$, $B \subseteq C + U''$, $g_n(C) \subseteq U'$,

$$g_n(B) \subseteq g_n(C + U'') \subseteq g_n(C) + FM(A)(U'') \subseteq U' + U' \subseteq U.$$

Поэтому $[I] \in \mathfrak{W}_\Sigma$, и ввиду замкнутости $\mathfrak{W}_\Sigma$ относительно взятия непрерывных гомоморфных образов $T_\Sigma \colon A \mapsto T_\Sigma(A)$, $A \in \mathfrak{U}_M$, — топологический $\mathfrak{U}_M$-радикал.

Если $A \in \mathfrak{U}_M$, $a \in A \setminus T_\Sigma(A)$, то имеются $B \subseteq (a)_A$, $|B| < \infty$, и окрестности нуля $V, V' \subseteq A$, $g_n(B) \nsubseteq V$ для всех $n \geqslant 0$, $V' \subseteq V$, $FM(A)(V') \subseteq V$. Частично упорядоченное по включению множество

$$\mathcal{M} = \{I \lhd A \mid g_n(B) \nsubseteq I + V' \text{ для каждого } n \geqslant 0\}$$

индуктивно (если $\{I_a\}$ — упорядоченная система в $\mathcal{M}$ и $g_n(B) \subseteq \Bigl(\bigcup_a I_a\Bigr) + V'$ для некоторого $n \geqslant 0$, найдётся a, $g_n(B) \subseteq I_a + V'$?!) и по лемме Цорна содержит максимальный элемент P. Если $[P] \notin \mathcal{M}$, то $g_l(B) \subseteq [P] + V'$ для некоторого $l \geqslant 0$, $g_l(B) \subseteq P + V' + V'$,

$$g_{l+1}(B) \subseteq (P + V' + V')(P + V' + V') \subseteq P + FM(A)(V') \subseteq P + V?!$$

Если $P = P_1 \cap P_2 \subsetneqq P_i$, $i = 1, 2$, то $g_{n_i}(B) \subseteq P_i + V'$ для некоторых $n_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} &g_{n_i+s}(B) \subseteq g_s(P_i + V') \subseteq P_i + FM(A)(V') \subseteq P_i + V \quad (s \geqslant 1),\\ &g_{\max\{n_1,n_2\}+2}(B) \subseteq \bigl(P_1 + FM(A)(V')\bigr)\bigl(P_2 + FM(A)(V')\bigr) \subseteq\\ &\quad \subseteq P_1P_2 + FM(A)(V') \subseteq P + V?! \end{aligned}$$

Если $I \lhd A$, $P \subsetneqq I$ и $I/P \in \mathfrak{W}_\Sigma$, то $I \notin \mathcal{M}$, $g_m(B) \subseteq C + V'$ для некоторых $m \geqslant 0$, $C \subseteq I$, $|C| < \infty$, и $g_k(C) \subseteq P + V'$ для подходящего $k \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} &g_{m+k+1}(B) \subseteq g_{k+1}(C + V') \subseteq\\ &\quad \subseteq \bigl(P + V' + FM(A)(V')\bigr)\bigl(P + V' + FM(A)(V')\bigr) \subseteq\\ &\quad \subseteq P + FM(A)(V') \subseteq P + V?! \end{aligned}$$

Поэтому P — Σ-первичный идеал, $T_\Sigma(A/P) = \{0\}$ и $T_\Sigma(A)$ — пересечение всех таких $P = [P] \lhd A$. □

Будем говорить, что на замкнутом относительно взятия идеалов и фактор-алгебр классе топологических F-алгебр $\mathfrak{M}$ определён локально конечный Σ-разрешимый $\mathfrak{M}$-радикал LSF_Σ, если любая алгебра $A \in \mathfrak{M}$ содержит наибольший локально конечный Σ-разрешимый идеал $\mathrm{LSF}_\Sigma(A) = [\mathrm{LSF}_\Sigma(A)]$ и $\mathrm{LSF}_\Sigma\colon A \mapsto \mathrm{LSF}_\Sigma(A)$, $A \in \mathfrak{M}$, — топологический $\mathfrak{M}$-радикал.

Назовём топологическое пространство *локально артиновым* (*нётеровым*), если для любой его точки имеется база её окрестностей с условием минимальности (максимальности). Отделимость и локальная артиновость топологии равносильны дискретности. Теорему Шестакова о специальности локально конечных радикалов (см. [6, теорема 7]) можно перенести на топологические алгебры следующим образом.

Теорема 5.2. *Если на замкнутом относительно взятия идеалов, конечно порождённых подалгебр и фактор-алгебр подклассе топологических алгебр $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{U}_F$, в котором любая алгебра или имеет локально артинову топологию, или нётерова, или отделима и нётерова для замкнутых идеалов, определён $\mathfrak{M}$-радикал LSF_Σ, то он специален на $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Если $x \in A \setminus \mathrm{LSF}_\Sigma(A)$, $A \in \mathfrak{M}$, то найдётся $B \subseteq (x)_A \lhd A$, $|B| < \infty$, $\langle B\rangle$ не конечна над F или (и) не Σ-разрешима. Обозначим через $\mathcal{W}$ множество таких $J \lhd A$, что $(\langle B\rangle + J)/J$ не конечна над F или (и) не Σ-разрешима, $\{0\} \in \mathcal{W}$. Допустим, что существует упорядоченная по включению система $\{I_a\} \subseteq \mathcal{W}$, $I = \bigcup\limits_a I_a \notin \mathcal{W}$. Ввиду конечности $(\langle B\rangle + I)/I$ над F $B_m \subseteq \subseteq FC + I$ при всех $m \geqslant n$ для некоторого $n > 1$, где $C = \bigcup\limits_{1\leqslant k<n} B_k$, B_k — множество слов длины k от элементов B, $\langle B\rangle = \sum\limits_{i\geqslant 1} FB_i$. Поскольку каждое слово из B_k, $k \geqslant 2n$, содержит подслово из $C' = \bigcup\limits_{n\leqslant l\leqslant 2n-1} B_l$ (индукция по k и разложимость неассоциативных слов в произведения слов меньшей длины), $|C'| < \infty$, имеется a, $FC' \subseteq FC + I_b$, $(\langle B\rangle + I_b)/I_b = F(C + I_b)/I_b$ конечна над F при всех $b \geqslant a$. При этом $(\langle B\rangle + I)/I = F(C + I)/I$ Σ-разрешима, для любой окрестности нуля $U \subseteq A$ можно выбрать окрестность нуля $U' \subseteq A$, $FU' \subseteq U$, $l \geqslant 0$, $g_l(C) \subseteq \langle B\rangle^{(l)} \subseteq I + U'$, $a' \geqslant a$, $g_l(C) \subseteq I_{a'} + U'$ ($|g_l(C)| < \infty$), и значит, $\langle B\rangle^{(l)} \subseteq Fg_l(C) + I_{a'} \subseteq I_{a'} + FU' \subseteq I_{a'} + U$. Так как $(\langle B\rangle + I_b)/I_b$ при $b \geqslant a$ не Σ-разрешима, для A с локально артиновой топологией её база окрестностей нуля с условием минимальности содержит элемент U_b, $\langle B\rangle^{(k)} \not\subseteq I_b + U_b$ для всех $k \geqslant 0$. Взяв в качестве U минимальную из окрестностей $\{U_b\}_{b\geqslant a}$, мы получаем, что $\langle B\rangle^{(l)} \subseteq I_{a'} + U \subseteq I_{a'} + U_{a'}$?! Поэтому для нётеровой A и A с локально артиновой топологией $\mathcal{W}$ индуктивно и содержит максимальный элемент P. В случае отделимой и нётеровой для замкнутых идеалов A следует выбрать P среди максимальных элементов $\mathcal{W}' = \{I \mid I = [I] \in \mathcal{W}\}$.

Если J — прообраз $\mathrm{LSF}_\Sigma(A/P)$ в A, $J = [J] \neq P$, то $(\langle B\rangle + P)/P \cap J/P$ — локально конечный Σ-разрешимый идеал $(\langle B\rangle + P)/P$,

$$\big((\langle B\rangle + P)/P\big)/\big((\langle B\rangle + P)/P \cap J/P\big) \cong \big((\langle B\rangle + J)/P\big)/(J/P) \cong (\langle B\rangle + J)/J$$

и $(\langle B\rangle + P)/P = \mathrm{LSF}_\Sigma((\langle B\rangle + P)/P)$ конечны над F и Σ-разрешимы?! Следовательно, $\mathrm{LSF}_\Sigma(A/P) = [\mathrm{LSF}_\Sigma(A/P)]_{A/P} = \{0\}$, A/P полупервична, не имеет ненулевых локально конечных разрешимых идеалов и отделима, $P = [P]$.

Если $P_1P_2 \subseteq P \subseteq P_1 \cap P_2$ для $P \neq P_i \lhd A$ (поскольку $[P_1][P_2] \subseteq P = = [P] \subseteq [P_1] \cap [P_2]$, можно считать, что $P_i = [P_i]$), $i = 1, 2$, то $(P_1 \cap P_2)^2 \subseteq P$, $P = P_1 \cap P_2$,

$$\mathrm{LSF}_\Sigma\big((\langle B\rangle + P_i)/P_i\big) = (\langle B\rangle + P_i)/P_i \cong \langle B\rangle/(\langle B\rangle \cap P_i) \quad (i = 1, 2),$$
$$(\langle B\rangle \cap P_1)/(\langle B\rangle \cap P) \cong (\langle B\rangle \cap P_1 + P_2)/P_2 \lhd (\langle B\rangle + P_2)/P_2,$$
$$\big(\langle B\rangle/(\langle B\rangle \cap P)\big)/\big((\langle B\rangle \cap P_1)/(\langle B\rangle \cap P)\big) \cong \langle B\rangle/(\langle B\rangle \cap P_1),$$

$\langle B\rangle/(\langle B\rangle \cap P) = \mathrm{LSF}_\Sigma(\langle B\rangle/(\langle B\rangle \cap P))$?! Таким образом, P — первичный идеал, $\langle B\rangle \not\subseteq P$, $x \notin P$, $\mathrm{LSF}_\Sigma(A/P) = \{0\}$ и $\mathrm{LSF}_\Sigma(A)$ — пересечение всех таких $P = = [P] \lhd A$. $\square$

Замечание 5.3. Если $A \in \mathfrak{U}_F \cap \mathfrak{U}_M$ содержит наибольший локально конечный идеал $LF(A) = [LF(A)]$, то $LF(A) \cap T_\Sigma(A) = [LF(A) \cap T_\Sigma(A)]$ — наибольший локально конечный Σ-разрешимый идеал A.

Доказательство. Достаточно заметить, что для любых $\langle B\rangle = FC \subseteq \subseteq LF(A)\cap T_\Sigma(A)$, $|B|, |C| < \infty$, и окрестности нуля $U \subseteq A$ найдутся окрестность нуля $U' \subseteq A$, $FU' \subseteq U$, и $l \geqslant 0$, $g_l(C) \subseteq U'$, $\langle B\rangle^{(l)} = Fg_l(C) \subseteq FU' \subseteq U$. $\square$

Если локально конечный радикал LF определён на замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе F-алгебр $\mathfrak{L}$ (любая алгебра $A \in \mathfrak{L}$ содержит наибольший локально конечный над F идеал $LF(A)$ и $LF\colon A \mapsto LF(A)$, $A \in \mathfrak{L}$, — радикал в смысле Куроша—Амицура на $\mathfrak{L}$), то LF определяет топологический радикал на любом замкнутом относительно взятия идеалов и непрерывных гомоморфных образов классе отделимых топологических F-алгебр из $\mathfrak{L}$ (см. примеры $\mathfrak{L}$ в [6], замечание перед теоремой 4.16).

Замечание 5.4. Любой Σ-2-ниль-элемент x топологической алгебры A топологически α_S-квазирегулярен, $S = L, R, M$.

Доказательство. Если U — окрестность $1 \in A^1$, то $U' + U'' \subseteq U$, $x^{(n)} \in -U''$ для некоторых окрестностей $1 \in U' \subseteq F$, $0 \in U'' \subseteq A$, $n \geqslant 0$, и

$$t_{1+x^{(n-1)}} \cdots t_{1+x}(1-x) = 1 - x^{(n)} \in 1 + U'' \subseteq U \quad (t = l, r). \qquad \square$$

Замечание 5.5. Если в локально (слабо) Σ-разрешимой отделимой топологической алгебре A ($A \in \mathfrak{U}_S$, $S = L, R, M$) конечно порождённые подалгебры удовлетворяют условию минимальности для подалгебр (F-подмодулей), то A локально (слабо) разрешима.

Доказательство. Если $B \subseteq A$, $|B| < \infty$, то $\langle B\rangle^{(n)} = \bigcap\limits_{k \geqslant 0} \langle B\rangle^{(k)}$ для некоторого $n \geqslant 0$, $\langle B\rangle^{(n)} \subseteq U$ для любой окрестности нуля $U \subseteq A$ и ввиду отделимости A $\langle B\rangle^{(n)} = \{0\}$.

Если $A \in \mathfrak{U}_S$, то $\sum\limits_{k \geqslant n} Fg_k(B) = \sum\limits_{k \geqslant m} Fg_k(B)$ для всех $m \geqslant n$ при некотором $n \geqslant 0$, для любой окрестности нуля $U \subseteq A$ найдутся окрестность нуля $U' \subseteq A$, $FS(A)(U') \subseteq U$, и $k \geqslant 0$, $g_k(B) \subseteq U'$, $g_{k+l}(U') \subseteq S(A)(U') \subseteq U$ для всех $l \geqslant 1$, $g_n(B) \subseteq FS(A)(U') \subseteq U$ и $g_n(B) = \{0\}$ (отделимость A). $\square$

В частности, если локально конечномерная отделимая топологическая алгебра A ($A \in \mathfrak{U}_S$, $S = L, R, M$) над топологическим полем $\mathbb{F}$ локально (слабо) Σ-разрешима, то A локально разрешима. Сходным образом можно показать, что в отделимой $A \in \mathfrak{U}_S$ любой Σ-2-ниль-элемент a, для которого $\langle a\rangle$ — артинов F-модуль, — 2-ниль-элемент.

Пересечение $U(A)$ всех окрестностей нуля любой $A \in \mathfrak{U}_{(M)}$ — Σ-нильпотентный идеал A, так как для любых окрестности нуля $U \subseteq A$ и $f \in F$ найдутся окрестности нуля $V, V', V'' \subseteq A$, $fV, V'+V', AV'', V''A \subseteq U$, и $AU(A)+U(A)A \subseteq$ $\subseteq U(A) = FU(A)$. Как следствие, алгебры из $\mathfrak{U}_{(M)}$ без ненулевых Σ-нильпотентных идеалов отделимы. Если $A \in \mathfrak{U}_M$, любая Σ-первичная T_Σ-полупростая алгебра $\bar{A} = A/P$, $A \neq P = [P] \lhd A$, $\mathcal{N}_2$-полупроста, $S = Z(\bar{A}) \setminus \{0\} \neq \varnothing$, операторы умножения в $\bar{A}$ на элементы S — открытые отображения, алгебра $S^{-1}\bar{A}$ отделима в топологии леммы 4.14 и алгебраична над полем $Z(S^{-1}\bar{A})$ (однопорождённые подалгебры конечномерны), то $T_\Sigma(A) = \mathcal{N}_{\Sigma\text{-}2}(A)$. При этом отделимость $S^{-1}\bar{A}$ можно заменить отсутствием $0 \neq a \in \bar{A}$, $Sa \cap U \neq \varnothing$ для любой окрестности нуля $U \subseteq \bar{A}$.

Резольвентный трюк Амицура для топологических алгебр

Назовём элемент с ассоциативными степенями x топологической F-алгебры A *Σ-алгебраическим над $I \lhd F$* (*Σ-алгебраическим*, *Σ-ниль-элементом* для $I = F, \{0\}$), если любая окрестность нуля $U \subseteq A$ содержит $x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \ldots + f_1 x$ для некоторых $n = n(U) \geqslant 1$ и $f_i = f_i(U) \in I$. Будем называть $x \in R$ *топологически квазирегулярным справа* (*слева*), если для любой окрестности нуля $U \subseteq R$ найдётся $y \in R$, $x + y - xy \in U$ ($x + y - yx \in U$). Всюду ниже F — топологическое поле.

Замечание 5.6. Если $x \in A \in \mathfrak{U}_{\mathrm{Alt}\text{-}(M)}$ Σ-алгебраичен и элементы $\langle x\rangle$ топологически квазирегулярны слева в A, то x — Σ-ниль-элемент.

Доказательство. Так как для любой окрестности нуля $U \subseteq A$ найдутся окрестность нуля $U' \subseteq A$, $U'_{2,3} \subseteq U$, $n \geqslant m \geqslant 1$, $f_i \in F$, $f_m \neq 0$ ($f_m = 1 \in A^1$ при $n = m$), $y \in A$,

$$x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \ldots + f_m x^m = f_m(1+u)x^m \in U', \quad (1+y)(1+u) = 1+z \in 1+U',$$

и $(1+y, 1+u, x^m) = (1+z)x^m - (1+y)((1+u)x^m) = 0$,

$$(1+z)x^m \in f_m^{-1}(1+y)U', \quad x^{m+1} \in f_m^{-1}x(1+y)U' - xU'x^m \subseteq U'_{2,3} \subseteq U. \quad \square$$

Замечание 5.7. Если $\operatorname{char} F \neq 2$, $x \in A \in \mathfrak{U}_{J\text{-}(M)}$ Σ-алгебраичен и элементы $\langle x\rangle$ топологически квазирегулярны в A, то x — Σ-ниль-элемент.

Доказательство. В обозначениях замечания 5.6 $(1+u)^2x^m = U_{1+u}x^m \in f_m^{-1}(1+u)U'$ для окрестности нуля $U' \subseteq A$, $U'_{6,17} \subseteq U$, найдётся $T \in \mathrm{Id}_{A^1} + M_{4,7}^{A^1}(A)$, $TU_{1+u}a \in a + U'$ для всех $a \in A$ (см. доказательство леммы 3.23),

$$x^{m+1} \in x\big(f_m^{-1}T\big((1+u)U'\big) - U'\big) \subseteq U'_{6,17} \subseteq U. \quad \square$$

Непосредственный перенос на топологические алгебры доказательства теоремы 1 из [8] позволяет получить следующую теорему.

Теорема 5.8. *Если элемент с ассоциативными степенями $x \in A \in \mathfrak{U}_L$ не является Σ-алгебраическим, то*

$$\dim_F \sum_{\alpha \in C(x,U)} F x_\alpha = |C(x,U)|$$

для некоторой окрестности нуля $U \subseteq A$, где

$$C(x,U) = \{0 \neq \alpha \in F \mid \text{найдётся } x_\alpha \in A,\ -\alpha^{-1}x + x_\alpha - \alpha^{-1}xx_\alpha \in U\}.$$

Доказательство. Выберем окрестности нуля $U, U' \subseteq A$, $FL(A)(U') \subseteq U$,

$$x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \ldots + f_1 x \notin U \quad (n \geqslant 1,\ f_i \in F),$$

$\alpha \in C(x, U')$ и $x_\alpha \in A$. Тогда $x - \alpha x_\alpha + xx_\alpha \in -\alpha U'$, $l_x^k(x + xx_\alpha) \in \alpha l_x^k x_\alpha - \alpha l_x^k(U')$, $k \geqslant 1$,

$$\alpha x - \alpha^2 x_\alpha + x^2 + l_x^2 x_\alpha \in \alpha x - \alpha^2 x_\alpha + \alpha x x_\alpha - \alpha l_x(U') \subseteq -\alpha^2 U' - \alpha l_x(U'),$$

$$\alpha^2x+\alpha x^2-\alpha^3x_\alpha+x^3+l_x^3x_\alpha\in\alpha^2x+\alpha x^2-\alpha^3x_\alpha+\alpha l_x^2x_\alpha-\alpha l_x^2(U')$$
$$\subseteq-\alpha^3U'-\alpha^2l_x(U')-\alpha l_x^2(U'),$$

и по индукции

$$\alpha^{k-1}x+\alpha^{k-2}x^2+\ldots+x^k-\alpha^kx_\alpha+l_x^kx_\alpha\in-\sum_{j=0}^{k-1}\alpha^{k-j}l_x^j(U')\quad(k\geqslant1,\ \alpha\in C(x,U')).$$

Если $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_ix_{\alpha_i}=0$ для некоторых $\{\alpha_i\}_{i=1}^n\subseteq C(x,U'')$, $\alpha_i\neq\alpha_j$, $i\neq j$, $\{0\}\neq\{\beta_i\}_{i=1}^n\subset F$, $n\geqslant1$, то, умножая последнее включение для $\alpha=\alpha_i$ на β_i и суммируя по i от 1 до n, мы приходим к

$$g_k(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k\beta_ix_{\alpha_i}+l_x^k\sum_{i=1}^{n}\beta_ix_{\alpha_i}=g_k(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k\beta_ix_{\alpha_i}\in$$
$$\in U_k=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}\beta_i\alpha_i^{k-j}l_x^j(U'),$$

$$\big(0,g_1(x),\ldots,g_{n-1}(x)\big)-(\beta_1x_{\alpha_1},\ldots,\beta_nx_{\alpha_n})\in\{0\}\times U_1\times\cdots\times U_{n-1},$$

где $g_k(x)=\sum\limits_{j=1}^{k}x^j\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i^{k-j}$, $B=(\alpha_i^{j-1})_{i,j=1}^n$. По выбору $\{\alpha_i\}$ матрица B невырожденная, $\beta_kx_{\alpha_k}-h_k(x)\in\sum\limits_{i=1}^{n-1}FU_i$, $k=1,\ldots,n$, где $\big(h_1(x),\ldots,h_n(x)\big)=\big(0,g_1(x),\ldots,g_{n-1}(x)\big)B^{-1}$. Отсюда следует, что для i, $\beta_i\neq0$, $x_{\alpha_i}-q(x)\in\sum\limits_{i=1}^{n-1}FU_i$, $q(x)=\beta_i^{-1}h_i(x)$ — многочлен без свободного члена от x, $x-\alpha_ix_{\alpha_i}+xx_{\alpha_i}\in-\alpha_iU'$,

$$\gamma^{-1}\big(x^2-\alpha_ixq(x)+x^2q(x)\big)=\gamma^{-1}l_x\big(x-\alpha_iq(x)+xq(x)\big)$$
$$\in\gamma^{-1}l_x\left(-\alpha_iU'+\sum_{i=1}^{n-1}\big(FU_i+Fl_x(U_i)\big)\right)\subseteq FL(A)(U')\subseteq U,$$

где $\gamma=1$ при $q=0$ и γ — старший коэффициент q, иначе?! □

Следствие 5.9. *Если $A\in\mathfrak{U}_M$ альтернативна* (*или линейная йорданова*, $\operatorname{char}F\neq2$), $\dim_FA+1<|F|$, *то* $\mathcal{J}_{\text{q-top}}(A)=\mathcal{J}'_{\text{q-top}}(A)=\mathcal{N}_{\Sigma\text{-}2}(A)=\mathcal{N}_\Sigma(A)$ — *наибольший Σ-ниль-идеал A* (*равный* $\mathcal{J}_{\alpha_S\text{-top}}(A)=\mathcal{J}'_{\alpha_S\text{-top}}(A)$ *для ассоциативной A*, $S=L,R$).

Доказательство. Топологическая квазирегулярность Σ-ниль-элементов альтернативных алгебр выводится аналогично дискретному случаю, линейных йордановых алгебр — из замечания 3.35 (см. замечание 3.30). Остаётся применить теоремы 3.10, 3.29, 5.1, 5.8 и замечания 5.6, 5.7. □

В частности, $\dim_FA<|F|$, если алгебра A счётно порождена и поле F несчётно.

Если поле $\mathbb{F}$ — расширение поля F с F-базисом $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, ${}_{\mathbb{F}}A = \mathbb{F}\otimes_F A$ — скалярное расширение F-алгебры A над $\mathbb{F}$, топология которого имеет базу окрестностей нуля из

$$W_U = \left\{\sum_{i=1}^{k} e_{\lambda_i}\otimes a_{\lambda_i}\,\middle|\, k\geqslant 1,\ \lambda_i\in\Lambda,\ a_{\lambda_i}\in U\right\},$$

где U — окрестность нуля в A, то из $A\in\mathfrak{U}_S$ следует ${}_{\mathbb{F}}A\in\mathfrak{U}_S$, $S=F,L,R,M$, так как $\mathbb{F}S({}_{\mathbb{F}}A)(W_{U'})\subseteq W_U$ ($\mathbb{F}W_{U'}\subseteq W_U$) для любых окрестностей нуля $U'\subseteq U$, $FS(A)(U')\subseteq U$ ($FU'\subseteq U$).

Следствие 5.10. *Если альтернативная* (*или линейная йорданова,* $\operatorname{char}F\neq 2$) $A\in\mathfrak{U}_M$ $\mathcal{N}_\Sigma$*-полупроста, поле* $\mathbb{F}$ — *расширение поля* F *и* $\dim_F A+1<|\mathbb{F}|$, *то* A *вложима в* $\mathcal{J}_{\text{q-top}}$*-полупростую алгебру* ${}_{\mathbb{F}}A/\mathcal{J}_{\text{q-top}}({}_{\mathbb{F}}A)$.

Доказательство. Будем считать, что 1 входит в базис $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ поля $\mathbb{F}$ над полем F. Тогда $\iota\colon x\mapsto 1\otimes x\in{}_{\mathbb{F}}A$, $x\in A$, — непрерывное вложение, окрестности нуля A — прообразы при действии ι пересечений элементов базы окрестностей нуля ${}_{\mathbb{F}}A$ с $\iota(A)=1\otimes A$, $\mathcal{J}_{\text{q-top}}({}_{\mathbb{F}}A)=\mathcal{N}_\Sigma({}_{\mathbb{F}}A)$ (см. следствие 5.9) и $\iota^{-1}(\iota(A)\cap\mathcal{J}_{\text{q-top}}({}_{\mathbb{F}}A))\subseteq\mathcal{N}_\Sigma(A)=\{0\}$. □

В качестве пролога к последующим исследованиям вне рамок этой работы приведём следующий вариант теоремы 5.8 на базе [14, теорема 4].

Теорема 5.11. *Если элемент* x *квадратичной йордановой алгебры* $A\in\mathfrak{U}_M$ *не является* Σ*-алгебраическим, то*

$$\dim_F\sum_{\alpha\in C(x,U)} FS_\alpha 1 = |C(x,U)|$$

для некоторой окрестности нуля $U\subseteq A$, *где* $1\in A^1$,

$$C(x,U)=\{0\neq\alpha\in F\mid \text{найдётся } S_\alpha\in M(A^1),\\ U_{\alpha-x}S_\alpha a\in a+U \text{ для каждого } a\in A^1\}.$$

Доказательство. Определение Σ-алгебраического элемента A аналогично линейному случаю для степеней $a^{2k+l}=U_a^k a^l$, $k\geqslant 0$, $l=0,1$, $a^1=a$, $a^0=1\in A^1$, алгебра умножений $M(A)$ — подалгебра $\operatorname{End}_F(A)$, порождённая всеми операторами U_a, V_a, $a\in A$, где $V_ab=(a+b)^2-a^2-b^2$, $b\in A$. Выберем окрестности нуля $U,U'\subseteq A$, $FM(A)(U')\subseteq U$,

$$x^n+f_{n-1}x^{n-1}+\ldots+f_1x\notin U\quad (n\geqslant 1,\ f_i\in F),$$

$S_\alpha\in M(A^1)$, $U_{\alpha-x}S_\alpha a\in a+U'$ для всех $a\in A^1$, $\alpha\in C(x,U')$ и положим $z_\alpha=S_\alpha 1$. Если $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i z_{\alpha_i}=0$ для некоторых $\{\alpha_i\}_{i=1}^n\subseteq C(x,U')$, $\alpha_i\neq\alpha_j$, $i\neq j$, $\{0\}\neq\{\beta_i\}_{i=1}^n\subset F$, $n\geqslant 1$, то ввиду $[U_{\beta-x},U_{\beta'-x}]=0$, $\beta,\beta'\in F$,

$$\left(\prod_{j=1}^{n}U_{\alpha_j-x}\right)z_{\alpha_i}=\left(\prod_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}U_{\alpha_j-x}\right)U_{\alpha_i-x}S_{\alpha_i}1\subseteq p_i(x)+M(A^1)(U'),$$

где

$$p_i(x) = \Bigl(\prod_{1\leqslant j\neq i\leqslant n} U_{\alpha_j - x}\Bigr)1,$$

и

$$p(z) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i(z) = \sum_{k=0}^{2n-2} g_k z^k \neq 0$$

для некоторых $g_k \in F$,

$$p(\alpha_i) = \beta_i \prod_{1\leqslant j\neq i\leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)^2 \neq 0$$

при $\beta_i \neq 0$,

$$0 = U_x\Bigl(\prod_{i=1}^{n} U_{\alpha_i - x}\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_{\alpha_i}\Bigr) = U_x\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\Bigl(\prod_{i=1}^{n} U_{\alpha_i - x}\Bigr) z_{\alpha_i}\Bigr) \in$$
$$\in U_x p(x) + FM(A)(U'),$$

$U_x p(x) \in U$?! □

Лемма Накаямы для топологических алгебр

В дополнение к третьей части рассмотрим топологический вариант леммы Накаямы. Назовём α-инвариантный подмодуль $I \subseteq R$ *топологически малым*, если $[I + J] \neq R^1$ для любого α-инвариантного подмодуля $J = [J] \subsetneqq R^1$.

Лемма 5.12. *Топологически малые подмодули входят во все максимальные замкнутые α-инвариантные подмодули алгебры R^1 при их наличии. Любой α-инвариантный подмодуль $I \subseteq R \in \mathfrak{M}_\alpha$, $I \subseteq \mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R)$, топологически мал. Поэтому в условиях леммы 3.2 I — топологически малый подмодуль R, если и только если $I \subseteq \mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R)$.*

Доказательство. Если $I \not\subseteq M$ для некоторых топологически малого подмодуля $I \subseteq R$, $M \in \mathcal{P}$ (в обозначениях леммы 3.2), то $[I + M] = R^1$ и $M = R^1$?!

Если I — α-инвариантный подмодуль R, $I \subseteq \mathcal{J}''_{\alpha\text{-top}}(R)$, $[I + J] = R^1$ для некоторого α-инвариантного подмодуля $J = [J] \subseteq R^1$, то для любой окрестности нуля $U \subseteq R^1$ найдётся окрестность нуля $U' \subseteq R^1$, $\alpha(R)(U') - U' \subseteq U$, $x \in I$, $y \in J$, $1 \in x + y + U'$, и $\phi \in \alpha(R)$, $\phi(1 - x) \in 1 + U'$, $\phi(1 - x) \in \phi(y) + \phi(U')$, $1 \in J + U$ и $1 \in [J] = J = R^1$. □

Лемму 5.12 можно адаптировать под условия леммы 3.3 для таких α-инвариантных подмодулей $I \subset R$, что $[I + J] \neq R$ для всех (топологически) α-модулярных подмодулей $J = [J] \subsetneqq R$. В этих условиях и обозначениях второй части доказательства леммы 5.12 для топологически α-модулярного J, окрестностей нуля $U, U' \subseteq R$, $\alpha(R)'(U') + U' \subseteq U$, $z \in R$, $\alpha(R)'(1 - z) \subseteq J + U'$, $x \in I$, $y \in J$, $z \in x + y + U'$, мы получаем

$$\alpha(R)'(1 - x) \subseteq \alpha(R)'(1 - z + y + U') \subseteq J + U,$$

$R = [\alpha(R)'(1 - x)] = [J + U] = [J]$ (произвольность U).

Если M — топологический R-модуль в многообразии $\mathfrak{M}$, $R \in \mathfrak{M}$, то $X \subseteq M$, порождающее всюду плотный R-подмодуль M, мы будем называть *системой топологических порождающих M*.

Лемма 5.13. *Пусть I — левый идеал $R \in \mathfrak{U}_{\alpha_L}$, $R^1 \in \mathfrak{M}$, F дискретно, $\mathcal{M}_{\alpha_L}(R^1)$ слабо индуктивно. Тогда $I \subseteq \mathcal{J}''_{\alpha_L\text{-top}}(R)$, если и только если $M \neq [IX]$ для любого левого топологического R-модуля M в $\mathfrak{M}$ с конечной системой непрерывных ассоциативных слева (топологических) порождающих $X \subseteq M$, такого что R M-ограниченная.*

Доказательство. Пусть $I \subseteq \mathcal{J}''_{\alpha_L\text{-top}}(R)$, M — левый топологический R-модуль в $\mathfrak{M}$ с системой топологических порождающих X из условий леммы, X имеет минимальную мощность среди таких систем и $M = [IX]$, где R-подмодуль IX — аддитивная подгруппа M, порождённая ax, $a \in I$, $x \in X$. Тогда для любых $x \in X$ и окрестности нуля $U \subseteq M$ найдутся окрестность нуля $U' \subseteq M$, $\phi(\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}(A))(U') + U' - U' \subseteq U$, и $\{a_y\}_{y\in X} \subseteq I$, $x \in \sum\limits_{y\in X} a_y y + U'$. Ввиду непрерывности x и дискретности F имеются окрестность нуля $V \subseteq R$, $Vx \subseteq U'$, и $\psi = \mathrm{Id}_{R^1} + \sum\limits_{i=1}^{k} l_{b_{i1}} \cdots l_{b_{in_i}} \in \mathrm{Id}_{R^1} + L^{R^1}(R)$, $b_{ij} \in R$, $\psi(1 - a_x) \in 1 + V$,

$$\begin{aligned} x + (\psi(1-a_x) - 1)x = x - a_x x + \sum_{i=1}^{k} b_{i1}\big(\ldots\big(b_{in_i}(x - a_x x)\big)\ldots\big) \in \\ \in \sum_{x\neq y\in X} (\psi a_y) y + U' + \sum_{i=1}^{k} b_{i_1}(\ldots(b_{in_i} U')\ldots), \end{aligned}$$

$x \in I(X \setminus \{x\}) + U$, $M = [I(X \setminus \{x\})]$ (минимальность $|X|$)?!

Если $I \not\subseteq \mathcal{J}''_{\alpha_L\text{-top}}(R)$, то по лемме 3.2 $I \not\subseteq P$ для некоторого максимального элемента $P \in \mathcal{M}_{\alpha_L}(R^1)$, $R^1 = [I + P] = I + P$,

$$R^1/P = (I+P)/P = I(1+P) = R(1+P) -$$

неприводимый левый топологический R-модуль в $\mathfrak{M}$ с открытым в нём непрерывным ассоциативным слева порождающим $1 + P$ (см. лемму 4.5) и $R \in \mathfrak{U}_{\alpha_L}$ R^1/P-ограниченная. □

Литература

[1] Главацкий С. Т., Михалёв А. В., Тензина В. В. Топологический радикал Джекобсона колец. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 8. — С. 49—68.

[2] Главацкий С. Т., Михалёв А. В., Тензина В. В. Топологический радикал Джекобсона колец. II // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 1. — С. 53—64.

[3] Голубков А. Ю. Наследственность радикалов и идеалы алгебр, порождённые достижимыми и субинвариантными подалгебрами // Фундамент. и прикл. матем. — 2022. — Т. 24, вып. 1. — С. 141—163.

[4] Голубков А. Ю. Квазирегулярные радикалы неассоциативных алгебр. — В печати.

[5] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[6] Жевлаков К. А., Шестаков И. П. О локальной конечности в смысле Ширшова // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 41—73.

[7] Скосырский В. Г. Правоальтернативные алгебры // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, № 2. — С. 185—192.

[8] Amitsur A. S. Algebras over infinite fields // Proc. Amer. Math. Soc. — 1956. — Vol. 7, no. 1. — P. 35—48.

[9] Anquela J. A., Cortés T., Zelmanov E. Local nilpotency of the McCrimmon radical of a Jordan system // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2016. — Т. 292. — С. 7—15.

[10] Anzai H. On compact topological rings // Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1943. — Vol. 19. — P. 613—615.

[11] Castellano I. An introduction to totally disconnected locally compact groups. — 2020. — Corpus ID: 221949985.

[12] Hogben L., McCrimmon K. Maximal modular inner ideals and the Jacobson radical of a Jordan algebra // J. Algebra. — 1981. — Vol. 68. — P. 155—169.

[13] Loos O. Jordan Pairs. — New York: Springer, 1975. — (Lect. Notes Math.; Vol. 460).

[14] McCrimmon K. The radical of a Jordan algebra // Proc. N. A. S. — 1969. — Vol. 62. — P. 671—678.

[15] McCrimmon K. A characterization of the Jacobson—Smiley radical // J. Algebra. — 1971. — Vol. 18. — P. 565—573.

[16] Meyberg K. Lectures on Algebras and Triple Systems. — Univ. Virginia LN, Charlottesville, 1972.

[17] Rowen L. H. Polynomial Identities in Ring Theory. — London: Academic Press, 1980. — (Pure Appl. Math.; Vol. 84).

[18] Thedy A. Radicals of right alternative and Jordan rings // Commun. Algebra. — 1984. — Vol. 12, no. 7. — P. 857—887.

[19] Thill M. Introduction to Normed $*$-Algebras and Their Representations. — 2020.

[20] Weiss B. Boundedness in topological rings // Pacific J. Math. — 1956. — No. 1. — P. 149—158.

[21] Wesolek P. R. An Introduction to Totally Disconnected Locally Compact Groups. — 2018.