Сверхэкспоненциальный рост коразмерностей тождеств с инволюцией*

М. В. ЗАЙЦЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: zaicevmv@mail.ru

УДК 512.554

Ключевые слова: тождества с инволюцией, коразмерности, сверхэкспоненциальный рост.

Аннотация

В работе изучаются числовые характеристики тождеств с инволюцией неассоциативных алгебр. Построена серия примеров алгебр со сверхэкспоненциальным ростом коразмерностей тождеств с инволюцией.

Abstract

M. V. Zaicev, Overexponential codimension growth of identities with involution, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 3, pp. 105—117.

In this paper, numerical characteristics of identities with involution of nonassociative algebras are studied. We construct a series of examples of algebras with overexponential growth of codimensions with involution.

Светлой памяти
Александра Васильевича Михалёва

1. Введение

В статье изучаются числовые характеристики полиномиальных тождеств неассоциативных алгебр. В PI-теории очень эффективны количественные методы исследования.

Пусть F — поле нулевой характеристики и A — алгебра над F. Алгебре A можно поставить в соответствие целочисленную последовательность $\{c_n(A)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, характеризующую количество её тождественных соотношений. Диапазон асимптотического поведения различных последовательностей $\{c_n(A)\}$ достаточно широк. Например, если A — абсолютно свободная алгебра, то

$$c_n(A) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \times n!.$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда, грант 22-11-00052.

Если A — свободная ассоциативная алгебра, то $c_n(A) = n!$. В случае свободной алгебры Ли L имеем $c_n(L) = (n-1)!$. Если $A = F[t]$ — кольцо многочленов, то $c_n(A) = 1$ для всех $n \geqslant 1$. Для нильпотентной алгебры A, $A^n = 0$, все значения $c_k(A)$ нулевые при $k \geqslant n$.

Принято различать следующие типы асимптотического поведения $c_n(A)$. Если $c_n(A) \leqslant an^t$ для некоторых положительных констант a, t, то говорят, что последовательность коразмерностей растёт полиномиально. Напомним, что функция целочисленного аргумента $f(n)$ называется *функцией промежуточного* (*или субэкспоненциального*) *роста*, если при стремлении n к бесконечности она растёт быстрее любого полинома, но медленнее любой показательной функции, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^t} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{a^n} = 0$$

для любого натурального t и любого вещественного $a > 1$. Таковыми являются, в частности, все функции вида n^{n^β}, где β — любое вещественное число, $0 < \beta < 1$.

В случае когда $f(n) \leqslant a^n$ для некоторого вещественного $a > 1$, говорят, что последовательность $f(n)$ экспоненциально ограниченна. Наконец, если $f(n) \gg a^n$ для любого $a > 1$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{a^n} = \infty,$$

то мы будем говорить, что $f(n)$ имеет сверхэкспоненциальный рост. Мы будем использовать обозначение $f(n) \sim g(n)$ для двух последовательностей сверхэкспоненциального роста, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_n f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_n g(n).$$

Заметим, что $(n!)^\alpha \sim n^{\alpha n}$ для любого $\alpha \in (0;1]$. Заметим также, что для абсолютно свободной алгебры A

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_n c_n(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_n \left\{ \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \times n! \right\} = 1.$$

Наиболее детально асимптотическое поведение последовательностей $\{c_n(A)\}$ исследовано в ассоциативном случае. Оказалось, что класс функций, реализуемых как асимптотика последовательностей $\{c_n(A)\}$, достаточно узок. Во-первых, сверхэкспоненциальный рост $\{c_n(A)\}$ для ассоциативной PI-алгебры невозможен. А именно, для любой PI-алгебры A существует $a > 1$, такое что $c_n(A) \leqslant a^n$, как показано в [8, 29]. Во-вторых, экспоненциальный рост реализуется только как t^n, $t \in \mathbb{Z}$, $t \geqslant 2$. Более точно, для любой ненильпотентной алгебры A существует предел

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}, \tag{1}$$

называемый PI-экспонентой A, который является положительным целым числом [20, 21]. При этом если $\exp(A) = 1$, то рост коразмерностей алгебры A

полиномиален. Это означает, что промежуточный рост коразмерностей невозможен (этот факт был известен и ранее [7]).

В [16] показано, что если A — ассоциативная алгебра (или алгебра Ли, или йорданова алгебра) с полиномиальным ростом коразмерностей, то

$$c_n(A) = \alpha n^q + O(n^{q-1}),$$

где q — некоторое натуральное число, т. е. асимптотически $\{c_n(A)\}$ ведёт себя как полином с целочисленным показателем степени.

В лиевском случае сверхэкспоненциальный рост возможен. Так, для относительно свободной алгебры Ли с тождеством

$$[[[x_1, x_2], x_3], [[x_4, x_5], x_6] \equiv 0$$

мы имеем $c_n(L) \sim \sqrt{n!}$ (см. [2]). В [11] показано, что для любого целого $t \geqslant 2$ существует алгебра Ли L, для которой

$$c_n(L) \sim (n!)^{(t-1)/t}.$$

Есть гипотеза, что сверхэкспоненциальный рост строго меньше чем $(n!)^{1/2}$ в лиевском случае невозможен.

С другой стороны, класс алгебр Ли с экспоненциальным ростом коразмерностей достаточно широк. Он включает в себя все конечномерные алгебры, алгебры Ли с нильпотентным коммутантом, трёхступенчато-разрешимые алгебры Ли с конечным числом порождающих, аффинные алгебры Каца—Муди, бесконечномерные простые алгебры картановского типа и многие другие. У многих из них (в частности, у конечномерных) PI-экспонента существует и является целым числом [3, 4, 10]. В то же время условие целочисленности PI-экспоненты в лиевском случае нарушается. Например, в [15, 27] построена серия примеров разрешимых алгебр $L_1, L_2, \ldots$, для которых

$$3{,}1 < \exp(L_1) < \exp(L_2) < \ldots < 4, \quad \lim_{k\to\infty} \exp(L_k) = 4.$$

Как и в ассоциативном случае, промежуточный рост для алгебр Ли недопустим [9].

В общем неассоциативном случае возможности поведения $\{c_n(A)\}$ гораздо разнообразнее. В случае полиномиального роста реализуются дробные показатели степени, например $c_n(A) \simeq n^{3{,}5}$ [5]. Возможен и промежуточный рост. Например, в [17] для любого вещественного $\beta \in (0; 1)$ построена алгебра R_β, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \log_n \log_n c_n(R_\beta) = \beta,$$

т. е. $c_n(R_\beta) \sim n^{n^\beta}$. А в [6] приведён пример алгебры A, для которой можно выбрать возрастающую последовательность n_k, $k = 1, 2, \ldots$, так, что

а) $c_{n_k} < n_k + \ln\ln n_k$, если k нечётно;

б) $c_{n_k} > 2^{n_k/\ln\ln n_k}$, если k чётно.

В общем неассоциативном случае реализуется весь спектр возможностей экспоненциального роста. В [18] показано, что для любого вещественного $\alpha > 1$ существует алгебра A_α, для которой $\exp(A_\alpha) = \alpha$. Но оказалось, что предел (1) существует не всегда, даже если последовательность $\{c_n(A)\}$ экспоненциально ограниченна. В [31] для любого $\alpha > 1$ построена алгебра R_α, такая что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n(A_\alpha)} = \alpha, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n(A_\alpha)} = 1. \tag{2}$$

Для сверхэкспоненциального роста в общем случае также реализуются все возможности (в отличие от от ассоциативного и лиевского случаев). А именно, для любого $\alpha \in (0;1)$ по бесконечному двоичному слову w может быть построена алгебра $A(w)$, такая что $c_n\big(A(w)\big) \sim (n!)^{\alpha n}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_n\big(c_n(A_w)\big) = \alpha$$

(см. [25]). Отметим также, что в конечномерном случае сверхэкспоненциальный рост невозможен: если $\dim a = d < \infty$, то $c_n(A) \leqslant d^{n+1}$ [13, 24].

Если алгебра A наделена инволюцией $*\colon A \to A$, то можно рассматривать её тождества с инволюцией и их числовые характеристики. В свете упомянутых выше результатов возникает естественный вопрос: каков возможный характер асимптотического поведения последовательности коразмерностей $\{c_n^*(A)\}$ тождеств с инволюцией.

Одним из базовых результатов, относящихся к инволютивным тождествам, является наблюдение Ш. Амицура, что любая ассоциативная алгебра с инволютивным тождеством является PI-алгеброй [12] (см. также [14]). Числовые инварианты тождеств с инволюцией начали изучать гораздо позже. Напомним основные результаты в данном направлении. В ассоциативном случае результаты близки к неинволютивным.

Теорема 1 [19, теорема 4; 22, следствие 1]. *Пусть $(A,*)$ — ассоциативная алгебра с инволюцией $*$. Тогда $*$-экспонента*

$$\exp^*(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^*(A)}$$

существует и является целым числом.

Из результатов [19] следует отсутствие ассоциативных алгебр с промежуточным ростом $*$-коразмерностей.

В неассоциативном случае известны, в частности, следующие результаты.

Теорема 2 [30, теорема 1]. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с инволюцией $*\colon A \to A$. Тогда $c_n^*(A) \leqslant (\dim A)^{n+1}$.*

Теорема 3 [30, теорема 2]. *Для любого целого $T \geqslant 2$ существует алгебра с инволюцией A_T размерности $\dim A_T = 2T + 3$, для которой*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^*(A_T)} = \frac{1}{\theta_T^{\theta_T}(1-\theta_T)^{1-\theta_T}},$$

где

$$\theta_T = \frac{1}{2T+1}.$$

Теорема 4 [30, теорема 3]. *Для любого вещественного $\alpha > 1$ существует алгебра с инволюцией C_α, такая что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n^*(C_\alpha)} = \alpha, \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^*(C_\alpha)} = 1.$$

Основной целью данной работы является построение серии примеров алгебр со сверхэкспоненциальным ростом коразмерностей тождеств с инволюцией.

Все необходимые сведения по тождествам в алгебрах и их числовым характеристикам можно найти в [1, 23].

2. Основные понятия и конструкции

Обозначим через $F\{X\}$ абсолютно свободную алгебру над полем F с бесконечным множеством порождающих X. Если A — произвольная алгебра над F, то совокупность $Id(A) \subset F\{X\}$ является двусторонним идеалом в $F\{X\}$, а фактор-алгебра $F\{X\}/Id(A)$ — относительно свободной алгеброй многообразия, порождённого алгеброй A. Обозначим через P_n подпространство полилинейных многочленов от $x_1, \ldots, x_n \in X$ в $F\{X\}$ и положим

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}.$$

Величина

$$c_n(A) = \dim P_n(A)$$

называется n-й коразмерностью тождеств алгебры A.

Для изучения тождеств с инволюцией нам необходима дополнительная конструкция. Пусть $F^*\{X, Y\}$ — свободная алгебра с двумя бесконечными множествами порождающих X и Y. Инволюция на этой алгебре определяется однозначно, если положить $x^* = x$, $y^* = -y$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Рассмотрим множество $\mathrm{Id}^*(A) \in F^*\{X, Y\}$ всех тождеств с инволюцией алгебры A. Если $P_{k,n-k}$ — пространство полилинейных многочленов от $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}$ в $F^*\{X, Y\}$, то величина

$$c^*_{k,n-k}(A) = \dim \frac{P_{k,n-k}}{P_{k,n-k} \cap \mathrm{Id}^*(A)}$$

называется частичной коразмерностью (тождеств с инволюцией) алгебры A. Полная коразмерность $c_n^*(A)$ задаётся формулой

$$c_n^*(A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^*_{k,n-k}(A). \tag{3}$$

Нам понадобится также рассматривать градуированные тождества $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр. Обозначим через $F^{\mathrm{gr}}\{X, Y\} = F^{\mathrm{gr}}\{X, Y\}_0 \oplus F^{\mathrm{gr}}\{X, Y\}_1$

свободную алгебру с порождающим множеством $X \cup Y$, $|X| = |Y| = \infty$. Градуировка задаётся включениями $X \subset F^{\mathrm{gr}}\{X, Y\}_0$, $Y \subset F^{\mathrm{gr}}\{X, Y\}_1$. Как и в случае инволюции, положим

$$c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}(A) = \dim \frac{P_{k,n-k}}{P_{k,n-k} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)}$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, n$ и

$$c^{\mathrm{gr}}_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}(A), \tag{4}$$

где $P_{k,n-k}$ — пространство полилинейных многочленов от $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}$ в $F^{\mathrm{gr}}\{X, Y\}$, а $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ — идеал градуированных тождеств алгебры $A = A_0 \oplus A_1$.

Нам потребуются также некоторые сведения из комбинаторной теории бесконечных слов. Пусть w — бесконечное двоичное слово. Мы записываем его в виде $w = w_1 w_2 \ldots$, где w_i — 0 или 1. *Сложностью* w называется функция $\mathrm{Comp}_w \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $\mathrm{Comp}_w(n)$ — число различных подслов длины n в w. Если слово w периодическое с периодом T, то $\mathrm{Comp}_w(n) = T$ для всех $n \geqslant T$. Иначе $\mathrm{Comp}_w(n) \geqslant n+1$. Слово w называется *словом Штурма*, если $\mathrm{Comp}_w(n) = n+1$ для всех $n \geqslant 1$. Если для бесконечного слова w существует предел

$$\pi(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{w_1 + \ldots + w_n}{n}, \tag{5}$$

то его называют *наклоном* слова w.

Предложение 1 (см. [26, подраздел 2.2]).

1. *Если w — периодическое слово или слово Штурма, то предел* (5) *существует, причём $0 \leqslant \pi(w) \leqslant 1$.*
2. *Для любого вещественного $\alpha \in [0; 1]$ существует периодическое слово или слово Штурма w с $\pi(w) = \alpha$.*

По заданному бесконечному двоичному слову w мы построим бесконечномерную алгебру $A(w)$ следующим образом.

Обозначим через $J(w)$ множество всех индексов i, для которых $w_i = 1$, т. е.

$$J(w) = \{i_1, i_2, \ldots \mid i_1 < i_2 < \ldots,\ w_{i_1} = w_{i_2} = \ldots = 1\}.$$

Тогда базисом $A(w)$ является множество

$$\{z_0, z_1, \ldots\} \cup \{a\} \cup \{b_1, b_2, \ldots\},$$

а таблица умножения задана соотношениями

$$\begin{aligned} &z_{i_k-1} b_k = z_{i_k}, && \text{если } i_k \in J(w), \\ &z_{j-1} a = z_j, && \text{если } j \notin J(w). \end{aligned} \tag{6}$$

Все остальные произведения равны нулю. Заметим, что алгебра $A(w)$ левонильпотентна ступени три, т. е. соотношение

$$x(yz) \equiv 0 \tag{7}$$

является её тождеством. Поэтому любое ненулевое произведение в $A(w)$ левонормированное. Мы будем опускать скобки в левонормированных произведениях, т. е. записывать $(x_1x_2)x_3$ как $x_1x_2x_3$. Для алгебры $A(w)$ в [25] доказано, что $c_n\big(A(w)\big) \sim n^{\alpha n}$, где $\alpha = \pi(w)$, если w — периодическое слово или слово Штурма. Но нам понадобится градуированная версия этого результата.

Зададим $\mathbb{Z}_2$-градуировку на $A(w)$, положив

$$\deg z_0 = \deg a = 0, \quad \deg b_1 = \deg b_2 = \ldots = 1.$$

Степень в $\mathbb{Z}_2$-градуировке всех остальных базисных z_j однозначно определяется таблицей умножения (6).

Теорема 5 [23, теорема 2]. *Пусть w — слово Штурма или периодическое слово с наклоном $\pi(w) = \alpha \in [0;1]$, и пусть $A(w)$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра, построенная по слову w. Тогда $c_n^{\mathrm{gr}}\big(A(w)\big) \sim (n!)^\alpha$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_n c_n^{\mathrm{gr}}\big(A(w)\big) = \alpha.$$

3. Сверхэкспоненциальный рост коразмерностей

Следуя [28], построим по левонильпотентной $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебре $A(w)$ коммутативную алгебру $A(w)^+$. Базис $A(w)^+$ тот же, что и у $A(w)$, т. е. $\{z_0, z_1, \ldots\} \cup \{a\} \cup \{b_1, b_2, \ldots\}$, а таблица умножения имеет вид

$$\begin{aligned} &z_{i_k-1}b_k = b_k z_{i_k-1} = z_{i_k}, && \text{если} \quad i_k \in J(w),\\ &z_{j-1}a = az_{j-1} = z_j, && \text{если} \quad j \notin J(w). \end{aligned} \tag{8}$$

$\mathbb{Z}_2$-градуировка на $A(w)^+$ задаётся так же, как и на $A(w)$: $\deg a = \deg z_0 = 0$, $\deg b_1 = \deg b_2 = \ldots = 1$. Вместо тождества (7) в алгебре $A(w)^+$ выполнено тождество метабелевости

$$(xy)(zt) \equiv 0,$$

которое позволяет выражать любое ненулевое произведение через левонормированное.

Модифицируя доказательство теоремы 1 из [28], мы получаем соответствие между градуированными коразмерностями $A(w)$ и $A(w)^+$.

Теорема 6. *Для любых $0 \leqslant k \leqslant n$ выполняются соотношения*

$$\frac{1}{8} c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)\big) \leqslant c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)^+\big) \leqslant c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)\big).$$

Доказательство. Напомним, что $c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)\big)$, $c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)^+\big)$ являются размерностями пространств

$$P_{k,n-k}\big(A(w)\big) = \frac{P_{k,n-k}}{P_{k,n-k} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}\big(A(w)\big)},$$

$$P_{k,n-k}\big(A(w)^+\big) = \frac{P_{k,n-k}}{P_{k,n-k} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}\big(A(w)^+\big)}$$

соответственно. И то и другое подпространства являются линейными оболочками левонормированных одночленов от $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}$. Левонормированный одночлен удобно записывать в виде $u_i u_j h(u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n-2}})$, в котором $h(u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n-2}})$ — ассоциативное слово от $u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n-2}}$, а

$$\{u_i, u_j, u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n-2}}\} = \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}\}.$$

Достаточно ограничиться одночленами только трёх видов:

$$x_i x_j h_0, \quad x_i y_j h_1, \quad y_i y_j h_2, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} &h_0 \text{ — слово от } \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}\} \setminus \{x_i, x_j\}, \\ &h_1 \text{ — слово от } \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}\} \setminus \{x_i, y_j\}, \\ &h_2 \text{ — слово от } \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}\} \setminus \{y_i, y_j\}. \end{aligned}$$

Докажем сначала неравенство

$$c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)^+\big) \leqslant c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)\big).$$

В $P_{k,n-k}\big(A(w)^+\big)$ выберем базис B, состоящий из одночленов вида (9). По базису $B \subset P_{k,n-k}\big(A(w)^+\big)$ построим равномощное ему множество одночленов $B' \subset P_{k,n-k}\big(A(w)\big)$ следующим образом. Если $x_i x_j h \in B$, $i < j$, то поставим ему в соответствие $\frac{1}{2}(x_i x_j + x_j x_i)h$. Элементу $x_i y_j h$ поставим в соответствие $\frac{1}{2}(x_i y_j + y_j x_i)h$, а элементу $y_i y_j h$, $i < j$, поставим в соответствие $\frac{1}{2}(y_i y_j + y_j y_i)h$. Покажем, что B' — линейно независимое множество.

Предположим, что некоторая нетривиальная линейная комбинация многочленов из B' равна нулю, т. е.

$$\begin{aligned} S = \sum_{i<j} \frac{1}{2}\gamma^0_{ij}(x_i x_j + x_j x_i)h^0_{ij} + \sum_{i,j} \frac{1}{2}\gamma^1_{ij}(x_i y_j + y_j x_i)h^1_{ij} + \\ + \sum_{i<j} \frac{1}{2}\gamma^2_{ij}(y_i y_j + y_j y_i)h^2_{ij} \equiv 0 - \end{aligned} \tag{10}$$

тождество $A(w)$, где h^0_{ij}, h^1_{ij}, h^2_{ij} уже не слова, а линейные комбинации нескольких слов. Рассмотрим в $P_{k,n-k}\big(A(w)^+\big)$ такую же линейную комбинацию

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{i<j} \frac{1}{2}\gamma^0_{ij}(x_i x_j + x_j x_i)h^0_{ij} + \sum_{i,j} \frac{1}{2}\gamma^1_{ij}(x_i y_j + y_j x_i)h^1_{ij} + \\ &+ \sum_{i<j} \frac{1}{2}\gamma^2_{ij}(y_i y_j + y_j y_i)h^2_{ij} = \\ &= \sum_{i<j} \gamma^0_{ij} x_i x_j h^0_{ij} + \sum_{i,j} \gamma^1_{ij} x_i y_j h^1_{ij} + \sum_{i<j} \gamma^2_{ij} y_i y_j h^2_{ij}. \end{aligned}$$

Поскольку S' не является тождеством в $A(w)^+$, существует подстановка

$$\varphi\colon \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}\} \to \{z_0, z_1, \ldots\} \cup \{a\} \cup \{b_1, b_2, \ldots\} \subset A(w)^+,$$

для которой $\varphi(S') \neq 0$. Для этого необходимо заменить одну из переменных $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}$ на z_t, а остальные x_p на a, y_q на b_{i_q}. Пусть, например, $\varphi(x_k) = z_t$ и $t \notin J(w)$. Перегруппируем S' следующим образом:

$$S' = \underbrace{\sum_{i<k} \gamma^0_{ik} x_i x_k h^0_{ik}}_{s_1} + \underbrace{\sum_{i<j<k} \gamma^0_{ij} x_i x_j h^0_{ij}}_{s_2} + \underbrace{\sum_{i,j} \gamma^1_{ij} x_i y_j h^1_{ij}}_{s_3} + \underbrace{\sum_{i<j} \gamma^2_{ij} y_i y_j h^2_{ij}}_{s_4}.$$

Тогда $\varphi(s_2) = \varphi(s_3) = \varphi(s_4) = 0$, а $\varphi(S') = \varphi(s_1) = \mu z_r \neq 0$ для некоторых r и $0 \neq \mu \in F$, как следует из (8). Но если рассмотреть аналогичное разложение для S в $P_{k,n-k}\big(A(w)\big)$,

$$S = \underbrace{\sum_{i<k} \frac{1}{2}\gamma^0_{ik}(x_i x_k + x_k x_i) h^0_{ik}}_{Q_1} + \underbrace{\sum_{i<j<k} \frac{1}{2}\gamma^0_{ij}(x_i x_j + x_j x_i) h^0_{ij}}_{Q_2} + \\ + \underbrace{\sum_{i,j} \frac{1}{2}\gamma^1_{ij}(x_i y_j + y_j x_i) h^1_{ij}}_{Q_3} + \underbrace{\sum_{i<j} \frac{1}{2}\gamma^2_{ij}(y_i y_j + y_j y_i) h^2_{ij}}_{Q_4},$$

то из сравнения таблиц умножения (6) и (8) следует, что для такой же подстановки φ в $A(w)$ мы получаем $\varphi(Q_2) = \varphi(Q_3) = \varphi(Q_4) = 0$, $\varphi(Q_1) = \varphi(S) = = \mu z_r \neq 0$, противоречие. Аналогичное противоречие получается и при всех других типах подстановки φ. Это и означает, что

$$c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)^+\big) = |B| = |B'| \leqslant c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)\big).$$

Чтобы доказать неравенство

$$\frac{1}{8} c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)\big) \leqslant c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)^+\big),$$

выберем в $P_{k,n-k}\big(A(w)\big)$ некоторый базис B из одночленов (9) и затем модифицируем его в базис $B' \subset P_{k,n-k}\big(A(w)\big)$ следующим образом.

Сначала выберем такие одночлены $u_i u_j h \in B$, что $u_j u_i h \in B$, где $\{u_i, u_j\} = \{x_i, x_j\}$, или $\{x_i, y_j\}$, или $\{y_i, y_j\}$. Затем заменим в B

а) пару $x_i x_j h$, $x_j x_i h$ на пару $x_i x_j h$, $i < j$, и $(x_i x_j + x_j x_i)h$;

б) пару $x_i y_j h$, $y_j x_i h$ на пару $x_i y_j h$ и $(x_i y_j + y_j x_i)h$;

в) пару $y_i y_j h$, $y_j y_i h$ на пару $y_i y_j h$, $i < j$, и $(y_i y_j + y_j y_i)h$.

Общее количество таких пар обозначим через r_0. Затем рассмотрим такие одночлены $x_i x_j h \in B$, что $x_j x_i h \notin B$. В этом случае $x_j x_i h$ линейно выражается через B. Если в это выражение $x_i x_j h$ не входит или входит с коэффициентом, отличным от -1, то, заменив $x_i x_j h$ в B на $(x_i x_j + x_j x_i)h$, мы получим новую линейно независимую систему в $P_{k,n-k}\big(A(w)\big)$ той же мощности, что и B, т. е. другой базис. Если же $x_j x_i h = -x_i x_j h + \ldots$, то, заменяя $x_i x_j h$ на $x_i x_j h + 2x_j x_i h$, мы тоже получаем новый базис в $P_{k,n-k}\big(A(w)\big)$. Аналогичным образом мы поступим при $x_iy_jh \in B$, $y_jx_ih \in B$ или $x_iy_jh \in B$, $y_jx_ih \notin B$, а также при $y_iy_jh \in B$, $y_jy_ih \in B$ или $y_iy_jh \in B$, $y_jy_ih \notin B$.

В итоге мы получим базис B' пространства $P_{k,n-k}\big(A(w)\big)$, состоящий из

а) r_0 одночленов вида u_iu_jh;

б) r_0 двучленов $(x_ix_j + x_jx_i)h$, $(x_iy_j + y_jx_i)h$, $(y_iy_j + y_jy_i)h$, полученных на первом этапе преобразования;

в) r_1 двучленов $(x_ix_j + x_jx_i)h$, полученных на втором этапе;

г) r_2 двучленов $(x_ix_j + 2x_jx_i)h$, $i < j$, $(x_iy_j + 2y_jx_i)h$, $(y_iy_j + 2y_jy_i)h$, $i < j$;

д) r_3 двучленов $\big(x_ix_j + \frac{1}{2}x_jx_i\big)h$, $i < j$, $\big(x_iy_j + \frac{1}{2}y_jx_i\big)h$, $\big(y_iy_j + \frac{1}{2}y_jy_i\big)h$, $i < j$.

Заметим, что одна из величин r_0, r_1, r_2, r_3 не меньше чем $\frac{1}{8}\dim P_{k,n-k}\big(A(w)\big)$, поскольку $2r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = \dim P_{k,n-k}\big(A(w)\big)$. Пусть, например, $r_3 \geqslant \frac{1}{8}c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)\big)$. Покажем, что двучлены вида д) линейно независимы в $P_{k,n-k}\big(A(w)^+\big)$.

Предположим, что многочлен

$$Q = \sum_{i<j}\gamma^0_{ij}\left(x_ix_j + \frac{1}{2}x_jx_i\right)h^0_{ij} + \\ + \sum_{i,j}\gamma^1_{ij}\left(x_iy_j + \frac{1}{2}y_jx_i\right)h^1_{ij} + \sum_{i<j}\gamma^2_{ij}\left(y_iy_j + \frac{1}{2}y_jy_i\right)h^2_{ij} -$$

тождество в $A(w)^+$. Поскольку Q не является тождеством в $A(w)$, то существует подстановка

$$\varphi\colon \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}\} \to \{z_0, z_1, \ldots\} \cup \{a\} \cup \{b_1, b_2, \ldots\},$$

при которой $\varphi(Q) \neq 0$ в $A(w)$. Тогда одна из переменных должна переводиться в некоторый z_t, а остальные — в $a, b_1, b_2, \ldots$.

Пусть, например, $\varphi(y_1) = z_t$, $\varphi(y_2) = b_m$ и $z_tb_m \neq 0$. Перепишем Q в виде

$$Q = \underbrace{\sum_{j\neq 1}\gamma^2_{1j}\left(y_1y_j + \frac{1}{2}y_jy_1\right)h^2_{1j}}_{Q_1} + \underbrace{\sum_{2\leqslant i<j}\gamma^2_{ij}\left(y_iy_j + \frac{1}{2}y_jy_i\right)h^2_{ij}}_{Q_2} + \\ + \underbrace{\sum_{i<j}\gamma^0_{ij}\left(x_ix_j + \frac{1}{2}x_jx_i\right)h^0_{ij} + \sum_{i,j}\gamma^1_{ij}\left(x_iy_j + \frac{1}{2}y_jx_i\right)h^1_{ij}}_{Q_3}.$$

Тогда $\varphi(Q_2) = \varphi(Q_3) = 0$ и в $A(w)$ и в $A(w)^+$, а $\varphi(Q_1) = \mu z_r$ для некоторых r и $0 \neq \mu \in F$, причём

$$\varphi(Q_1) = \varphi\bigg(\sum_{j\neq 1}\gamma^2_{1j}y_1y_jh^2_{1j}\bigg),$$

поскольку $\varphi(y_j)\varphi(y_1) = 0$. Но в этом случае в $A(w)^+$

$$\varphi(Q) = \varphi(Q_1) = \varphi\bigg(\sum_{j\neq 1}\gamma^2_{1j}y_1y_jh^2_{1j}\bigg) = \mu z_r \neq 0,$$

противоречие. Линейная независимость элементов вида д) и их достаточно большое количество и означает, что

$$c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)^+\big) \geqslant \frac{1}{8} c^{\mathrm{gr}}_{k,n-k}\big(A(w)\big),$$

и теорема доказана. □

Теоремы 5 и 6 немедленно приводят к следующему выводу.

Следствие. *Пусть w — бесконечное периодическое слово или слово Штурма с наклоном $\alpha \in (0;1)$. Тогда рост градуированных коразмерностей алгебры $A(w)^+$ сверхэкспоненциален, $c^{\mathrm{gr}}_n\big(A(w)^+\big) \sim (n!)^\alpha$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_n(c^{\mathrm{gr}}_n\big(A(w)^+)\big) = \alpha.$$

На алгебре $A(w)^+$ введём инволюцию $*$, положив $z_0^* = z_0$, $a^* = a$, $b_i^* = -b_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $c^*_{n-k}\big(A(w)^+\big) = c^{\mathrm{gr}}_{n-k}\big(A(w)^+\big)$ для всех $0 \leqslant k \leqslant n$ и $c^*_n\big(A(w)^+\big) = c^{\mathrm{gr}}_n\big(A(w)^+\big)$ согласно (3), (4). Отсюда немедленно получаем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть w — бесконечное периодическое слово или слово Штурма с наклоном $\alpha \in (0;1)$. Тогда алгебра $A(w)^+$ с заданной выше инволюцией имеет сверхэкспоненциальный рост инволютивных коразмерностей $c^*_n\big(A(w)^+\big) \sim (n!)^\alpha$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_n(c^*_n\big(A(w)^+)\big) = \alpha.$$

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Воличенко И. Б. Многообразие алгебр Ли с тождеством $\big[[X_1, X_2, X_3], [X_4, X_5, X_6]\big] = 0$ над полем характеристики нуль // Сиб. матем. журн. — 1984. — Т. 25, № 3. — С. 40—54.

[3] Зайцев М. В. Тождества аффинных алгебр Каца—Муди // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., механ. — 1996. — № 2. — С. 33—36.

[4] Зайцев М. В. Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли // Изв. РАН. Сер. матем. — 2002. — Т. 66, № 3. — С. 23—48.

[5] Зайцев М. В., Мищенко С. П. Пример многообразия линейных алгебр с дробным полиномиальным ростом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., механ. — 2008. — № 1. — С. 25—31.

[6] Зайцев М. В., Реповш Д. Д. Теория формальных языков и тождества неассоциативных алгебр // Сиб. матем. журн. — 2020. — Т. 61, № 2. — С. 322—329.

[7] Кемер А. Р. Шпехтовость T-идеалов со степенным ростом коразмерностей // Сиб. матем. журн. — 1978. — Т. 19, № 1. — С. 54—69.

[8] Латышев В. Н. К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр // УМН. — 1972. — Т. 27, № 4. — С. 213—214.

[9] Мищенко С. П. О многообразиях алгебр Ли промежуточного роста // Весці АН БССР. — 1987. — № 2. — С. 42—45.

[10] Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли. — УМН. — 1990. — Т. 45, № 6. — С. 25—45.

[11] Петроградский В. М. Рост полинильпотентных алгебр Ли и быстрорастущие целые функции // Матем. сб. — 1997. — Т. 186, № 6. — С. 119—136.

[12] Amitsur S. A. Identities in rings with involutions // Israel J. Math. — 1969. — Vol. 7. — P. 63—68.

[13] Bahturin Yu., Drensky V. Graded polynomial identities of matrices // Linear Algebra Appl. — 2002. — Vol. 357. — P. 15—34.

[14] Bahturin Y. Giambruno A., Zaicev M. G-identities of associative algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 127. — P. 63—69.

[15] Bogdanchuk A. A., Mishchenko S. P., Verëvkin A. B. On Lie algebras with exponential growth of the codimensions // Serdica Math. J. — 2014. — Vol. 40, no. 3-4. — P. 209—240.

[16] Drensky V. Relations for the cocharacter sequences of T-ideals // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131, Part 2. Proc. of the Int. Conf. on Algebra Honoring A. Malcev. — P. 285—300.

[17] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Algebras with intermediate growth of the codimensions // Adv. Appl. Math. — 2006. — Vol. 37, no. 3. — P. 360—377.

[18] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Codimensions of algebras and growth functions // Adv. Math. — 2008. — Vol. 217, no. 3. — P. 1027—1052.

[19] Giambruno A., Polcino Milles C., Valenti A. Star-polynomial identities: Computing the exponential growth of codimensions // J. Algebra. — 2017. — Vol. 469. — P. 302—322.

[20] Giambruno A., Zaicev M. On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. — 1998. — Vol. 140, no. 2. — P. 145—155.

[21] Giambruno A., Zaicev M. Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate // Adv. Math. — 1999. — Vol. 142, no. 2. — P. 221—243.

[22] Giambruno A., Zaicev M. Involution codimensions of finite dimensional algebras and exponential growth // J. Algebra. — 1999. — Vol. 222, no. 2. — P. 471—484.

[23] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 122).

[24] Giambruno A., Zaicev M. Codimension growth of special simple Jordan algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 2010. — Vol. 362, no. 6. — P. 3107—3123.

[25] Giambruno A., Zaicev M. Sturmian words and overexponential codimension growth // Adv. Appl. Math. — 2018. — Vol. 95. — P. 53—64.

[26] Lothaire M. Algebraic Combinatorics on Words. — Cambridge Univ. Press, 2002.

[27] Malyusheva O. A., Mishchenko S. P., Verevkin A. B. The Lie algebras varieties series of different fractional exponents // Dokl. Bolg. AN. — 2013. — Vol. 66, no. 3. — P. 321—330.

[28] Mishchenko S. P., Valenti A. Correspondence between some metabelian varieties and left nilpotent varieties // J. Pure Appl. Algebras. — 2021. — Vol. 225, no. 3. — P. 106538.

[29] Regev A. Existence of identities in $A \otimes B$ // Israel J. Math. — 1972. — Vol. 11. — P. 131—152.

[30] Repovš D., Zaicev M. On existence of PI-exponent of algebras with involution // J. Algebra. — 2023. — Vol. 614. — P. 5—19.

[31] Zaicev M. On existence of PI-exponents of codimension growth // Electron. Res. Announc. Math. Sci. — 2014. — Vol. 21. — P. 113—119.