Кольца на абелевых MT-группах

Е. И. КОМПАНЦЕВА
Финансовый университет при Правительстве РФ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: kompantseva@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, кольцо на группе, абсолютный радикал.

Аннотация

Исследуются кольца на MT-группах, т. е. на смешанных абелевых группах G, обладающих следующим свойством: любое умножение на периодической части группы G однозначно продолжается до умножения на G. Получено описание абсолютного радикала Джекобсона и абсолютного ниль-радикала групп из указанного класса (проблема 94 в монографии Л. Фукса «Бесконечные абелевы группы»).

Abstract

E. I. Kompantseva, Rings on Abelian MT-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 3, pp. 119—128.

Rings on MT-groups are investigated, a mixed Abelian group G is called an MT-group if every multiplication on the torsion part of G uniquely extends to a multiplication on G. The absolute Jacobson radical and the absolute nil-radical of MT-groups are described (Problem 94 in the book *Infinite Abelian Groups* by L. Fuchs).

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$, группу $\operatorname{Mult}G=\operatorname{Hom}(G\otimes G,G)$ называют группой умножений группы G. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на группе G.

Известно [5], что любое умножение на периодической абелевой группе G определяется его сужением на базисную подгруппу B группы G и, более того, $\operatorname{Mult}G\cong\operatorname{Hom}(B\otimes B,G)$. Это значит, что для задания умножения на периодической группе достаточно указать попарные произведения её базисных элементов. Этот факт позволяет строить и изучать кольца не только на периодических группах, но и на смешанных абелевых группах G, обладающих следующим свойством: любое умножение на периодической части $T(G)$ группы G однозначно продолжается до умножения на всей группе. Такие группы называются MT-группами, задача их изучения поставлена в [7, с. 34, проблема 38]. Класс MT-групп достаточно широк, он содержит, например, урегулированные копериодические группы и все их вполне характеристические подгруппы. Очевидно, для MT-группы G имеют место изоморфизмы $\operatorname{Mult}G\cong\operatorname{Mult}T(G)\cong$ $\cong\operatorname{Hom}\bigl(B\otimes B,T(G)\bigr)$.

Л. Фукс сформулировал проблему описания абсолютных радикалов абелевых групп [5, проблема 94]. Под абсолютным радикалом Джекобсона (абсолютным ниль-радикалом) абелевой группы G понимается пересечение $J^*(G)$ ($N^*(G)$) радикалов Джекобсона (верхних ниль-радикалов) всех ассоциативных колец на G. В настоящей работе получено описание абсолютного радикала Джекобсона и абсолютного ниль-радикала $\mathcal{M}$T-групп. Показано также, что абсолютный радикал Джекобсона и абсолютный ниль-радикал $\mathcal{M}$T-группы G реализуются в качестве соответствующих радикалов некоторого ассоциативного и коммутативного кольца на G.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и под группой всюду в дальнейшем понимается абелева группа. Будем использовать следующие обозначения и определения. Умножение $\mu\colon G \otimes G \to G$ на группе G часто обозначается также знаком $\times$, т. е. $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ определяет кольцо на группе G, которое обозначается $(G, \times)$; $J(G, \times)$ и $N(G, \times)$ — радикал Джекобсона и верхний ниль-радикал кольца $(G, \times)$, если оно ассоциативно. Множества целых, целых неотрицательных, натуральных и всех простых чисел обозначаются $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ соответственно, $h_p(g)$ — p-высота элемента g, $o(g)$ — порядок элемента g. Элемент прямого произведения $\prod\limits_{i \in I} G_i$ записывается в виде $(g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$, или в виде $(g_1, g_2, \ldots)$, если множество I счётно. Пусть Λ — некоторое множество простых чисел; группа G называется Λ-делимой, если она p-делима для всех $p \in \Lambda$. Для произвольной группы G $T_p(G)$ — p-примарная компонента группы G, $G^1 = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} nG$ — первая ульмовская подгруппа группы G, $\Lambda(G) = \{p \mid T_p(G) \neq 0\}$, $G^1_\Lambda = \{g \in G \mid \text{для каждого } p \in \Lambda(G)\ h_p(g) = \infty\}$, $\bar{G}_\Lambda = G/G^1_\Lambda$. Если $g \in G$, то $\bar{g} = g + G^1_\Lambda \in G/G^1_\Lambda$. За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [5, 6].

В [8] при изучении расщепляемости тензорных степеней смешанной группы было введено следующее определение. Пусть d — действительное число, G — группа; мы говорим, что элемент $g \in G$ удовлетворяет условию $(*)$ для d и простого числа p, если существует неубывающая неограниченная функция $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такая что $h_p(p^i g) > d\big(i + f(i)\big)$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$. Определим подмножества G^* и G^*_Λ группы G следующим образом:

$$G^* = \{g \in G \mid \text{найдутся } k \in \mathbb{N} \text{ и } d > 1,$$
$$\text{такие что } kg \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ для } d \text{ и любого простого } p\},$$
$$G^*_\Lambda = \{g \in G \mid \text{найдутся } k \in \mathbb{N} \text{ и } d > 1,$$
$$\text{такие что } kg \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ для } d \text{ и любого } p \in \Lambda(G)\}.$$

Сформулируем сначала некоторые свойства групп G^* и G^*_Λ.

Теорема 1 [2]. *Пусть G — группа. Тогда*

1) *подмножества G^*, G^*_Λ являются сервантными вполне характеристическими подгруппами группы G;*

2) $T(G) \subseteq G^* \subseteq G^*_\Lambda$, $G^1 \subseteq G^*$, $G^1_\Lambda \subseteq G^*_\Lambda$;
3) *фактор-группы* G/G^*, G/G_Λ *являются группами без кручения.* □

Наряду с абсолютными радикалами группы мы будем рассматривать и другие подгруппы с так называемыми «абсолютными свойствами»: абсолютный аннулятор, абсолютные идеалы (ниль-идеалы, нильпотентные идеалы). Абсолютный аннулятор [5] группы G — это пересечение $\mathrm{Ann}^*(G)$ аннуляторов всех колец на G. Если H — подгруппа группы G, то

$$\mathrm{Ann}^*_G(H) = \{g \in G \mid \text{для каждого } \mu \in \mathrm{Mult}\, G \text{ и каждого } h \in H \quad \mu(g \otimes h) = \mu(h \otimes g) = 0\}.$$

Абсолютным идеалом (абсолютным ниль-идеалом, абсолютным нильпотентным идеалом) группы G называется её подгруппа, которая является идеалом (ниль-идеалом, нильпотентным идеалом) в любом кольце на G.

Основная роль подгруппы G^* в редуцированной группе G заключается в том, что подгруппа $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{P}} pG^*$ является абсолютным ниль-идеалом группы G [2]. При этом в классе всех редуцированных групп этот результат нельзя улучшить: в этом классе существуют группы G, для которых $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{P}} pG^*$ — наибольший абсолютный ниль-идеал. В настоящей работе мы покажем, что в MT-группе G (которая является редуцированной) наибольший абсолютный ниль-идеал совпадает с подгруппой $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG^*_\Lambda$, которая, вообще говоря, может быть значительно больше, чем $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{P}} pG^*$, например, $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{P}} pG^*$ может иметь несчётный индекс в $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG^*_\Lambda$. Также мы покажем, что подгруппа G^1_Λ является абсолютным нильпотентным идеалом в любой MT-группе G.

В следующей теореме приведём свойства MT-групп, которые позволяют свести изучение колец на них к изучению колец на урегулированных алгебраически компактных группах, все умножения на которых полностью описаны [1].

Теорема 2.

1. *Если* G — *MT-группа, то* G — *редуцированная группа и фактор-группа* $G/T(G)$ *является* $\Lambda(G)$*-делимой* [3].
2. *Если смешанная группа* G *имеет* $\Lambda(G)$*-делимую фактор-группу* $G/T(G)$, *то* $\bar{G}_\Lambda = G/G^1_\Lambda$ *изоморфна сервантной подгруппе* $\mathbb{Z}$*-адического пополнения базисной подгруппы группы* $T(G)$ [2]. □

Пусть группа G имеет $\Lambda(G)$-делимую фактор-группу $G/T(G)$. Для каждого $p \in \Lambda(G)$ базисную подгруппу группы $T_p(G)$ запишем в виде $B_p = \bigoplus\limits_{\alpha\in I_p} \langle e^{(p)}_\alpha \rangle$. Тогда $B = \bigoplus\limits_{p\in\Lambda(G)} B_p$ — базисная подгруппа группы $T(G)$, $\hat{B}_p$ — p-адическое пополнение группы B_p, $\hat{B} = \prod\limits_{p\in\Lambda(G)} \hat{B}_p$ — $\mathbb{Z}$-адическое пополнение группы B.

В группе $\bar{G}_\Lambda$ рассмотрим подгруппы $\bar{B}_p = (B_p \oplus G^1_\Lambda)/G^1_\Lambda$ и $\bar{B} = (B \oplus G^1_\Lambda)/G^1_\Lambda$. Тогда $\bar{B}_p = \bigoplus\limits_{\alpha\in I_p} \left\langle \overline{e^{(p)}_\alpha} \right\rangle$, $\bar{B} = \bigoplus\limits_{p\in\Lambda(G)} \bar{B}_p$, при этом $\bar{B}_p \cong B_p$, $\bar{B} \cong B$ и $o\big(e^{(p)}_\alpha\big) = o\Big(\overline{e^{(p)}_\alpha}\Big)$ при всех $p \in \Lambda(G)$, $\alpha \in I_p$.

Обозначим через V_p p-адическое пополнение группы $\bar{B}_p$, $V = \prod\limits_{p\in\Lambda(G)} V_p$ — $\mathbb{Z}$-адическое пополнение группы $\bar{B}$. Тогда $V \cong \hat{B}$, $V_p \cong \hat{B}_p$ при всех $p \in \Lambda(G)$. Через π_p будем обозначать проекцию V на V_p, группу V_p будем рассматривать как сервантную подгруппу группы $\prod\limits_{\alpha\in I_p} \left\langle \overline{e^{(p)}_\alpha} \right\rangle$, т. е. элемент $a \in V_p$ записывается в виде $a = \Big(k_{\alpha,p}\overline{e^{(p)}_\alpha}\Big)_{\alpha\in I_p}$, где $k_{\alpha,p} \in \mathbb{Z}$.

В силу теоремы 2 группа $\bar{G}_\Lambda$ является сервантной подгруппой $\mathbb{Z}$-адического пополнения V группы $\bar{B}$. Пусть на группе G задано кольцо $(G,\times)$. Тогда определено фактор-кольцо $(\bar{G}_\Lambda,\times)$, так как подгруппа G^1_Λ является абсолютным идеалом группы G. Попарные произведения $\overline{e^{(p)}_\alpha} \times \overline{e^{(p)}_\beta} = \overline{e^{(p)}_\alpha \times e^{(p)}_\beta}$ базисных элементов в кольце $(\bar{G}_\Lambda,\times)$ определяют также умножение на $V \subseteq \prod\limits_{p\in\Lambda(G)} \prod\limits_{\alpha\in I_p} \left\langle \overline{e^{(p)}_\alpha} \right\rangle$, т. е. умножение на $\bar{G}_\Lambda$ продолжается до умножения на V. Кольцо $(V,\times)$ будем называть *кольцом, соответствующим кольцу* $(G,\times)$.

Пусть G — МТ-группа. Определим ассоциативное и коммутативное умножение $\times$ на группе $T(G)$, положив

$$e^{(p)}_\alpha \times e^{(q)}_\beta = \begin{cases} e^{(p)}_\alpha, & \text{если } p = q \text{ и } \alpha = \beta,\\ 0, & \text{если } p \neq q \text{ или } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

для любых $p, q \in \Lambda(G)$ и для любых $\alpha \in I_p$, $\beta \in I_q$. Это умножение на $T(G)$ однозначно продолжается до ассоциативного и коммутативного умножения на G, такое умножение будем называть *каноническим умножением на G, определённым базисом* $\big\{e^{(p)}_\alpha \mid p \in \Lambda(G),\ \alpha \in I_p\big\}$.

Для доказательства включения $N^*(G) \subseteq \bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG^*_\Lambda$ сформулируем следующую лемму.

Лемма 3 [2]. *Пусть G — МТ-группа. Тогда существует такое ассоциативное и коммутативное кольцо на G, что для любого элемента $g \in \Big(\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG\Big) \setminus G^*_\Lambda$ элементы $g, g^2, \ldots$ (степени элемента g в данном кольце) линейно независимы.* □

Лемма 4. *Пусть G — МТ-группа. Тогда существует ассоциативное и коммутативное умножение $\times$ на G, такое что*

$$N(G,\times) \subseteq \bigcap_{p\in\Lambda(G)} pG^*_\Lambda, \quad J(G,\times) \subseteq \bigcap_{p\in\Lambda(G)} pG.$$

Доказательство. Пусть $\times$ — каноническое умножение на G, определённое базисом $\left\{e_\alpha^{(p)} \mid p \in \Lambda(G),\ \alpha \in I_p\right\}$. Тогда определено фактор-кольцо $(\bar{G}_\Lambda, \times)$, в котором

$$\overline{e_\alpha^{(p)}} \times \overline{e_\beta^{(q)}} = \begin{cases} \overline{e_\alpha^{(p)}}, & \text{если } p = q \text{ и } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } p \neq q \text{ или } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Допустим, $g \in J(G, \times)$ и $g \notin \bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG$. Тогда $\bar{g} \in J(\bar{G}_\Lambda, \times)$ [6, гл. 1, § 7, предложение 1] и существует $p \in \Lambda(G)$, не делящее $\bar{g}$. Зафиксируем это p. Пусть $\pi_p(\bar{g}) = \left(k_{\alpha,p}\overline{e_\alpha^{(p)}}\right)_{\alpha \in I_p}$, где $k_{\alpha,p} \in \mathbb{Z}$. Тогда существует индекс $\beta \in I_p$, такой что p не делит $k_{\beta,p}$, и существует такое целое число m, что $mk_{\beta,p} \equiv 1 \pmod{p}$. Так как $\bar{g} \in J(\bar{G}_\Lambda, \times)$, то $\bar{g} \times m\overline{e_\beta^{(p)}} = \overline{e_\beta^{(p)}} \in J(\bar{G}_\Lambda, \times)$. Но, как нетрудно видеть, подгруппа $\langle\overline{e_\beta^{(p)}}\rangle$ является идеалом кольца $(\bar{G}_\Lambda, \times)$ с единичным элементом $\overline{e_\beta^{(p)}}$. Из полученного противоречия следует, что $J(G, \times) \subseteq \bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG$.

Пусть теперь $g \in N(G, \times)$. Тогда по доказанному выше $g \in \bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG$. Допустим, $g \notin \bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG^*_\Lambda$. Так как подгруппа G^*_Λ сервантна в G по теореме 1, то $g \notin G^*_\Lambda$. Следовательно, g не является нильпотентным элементом кольца $(G, \times)$ по лемме 3, это противоречит выбору элемента g. Таким образом, $g \in \bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG^*_\Lambda$, откуда следует, что $N(G, \times) \subseteq \bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG^*_\Lambda$. □

Из леммы 4 следует, что $N^*(G) \subseteq \bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG^*_\Lambda$, $J^*(G) \subseteq \bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG$. Для доказательства обратных включений будем использовать следующую лемму.

Лемма 5 [2]. *Пусть смешанная группа G не содержит ненулевой $\Lambda(G)$-делимой подгруппы без кручения и фактор-группа $G/T(G)$ является $\Lambda(G)$-делимой. Тогда подгруппа $\bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG^*_\Lambda$ является абсолютным ниль-идеалом группы G.* □

Теорема 2 позволяет строить и изучать кольца на МТ-группах G с нулевой подгруппой G^1_Λ, в частности, в любой такой группе G подгруппа $\bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG^*_\Lambda$ является абсолютным ниль-идеалом в силу леммы 5. Для исследования колец на произвольной МТ-группе G необходимо знать, какую роль в ней играет подгруппа G^1_Λ. Далее мы докажем, что G^1_Λ — абсолютный нильпотентный идеал в любой МТ-группе G. Для этого рассмотрим подгруппу $F_G = \langle \operatorname{Im}\Phi \mid \Phi \in \operatorname{Hom}(G, \operatorname{End} G)\rangle$ группы эндоморфизмов $\operatorname{End} G$. Группа F_G была введена в [4] при изучении абсолютных идеалов групп, там же показано, что F_G является идеалом кольца эндоморфизмов $E(G)$. Если H — подгруппа группы G, то $F_G(H) = \langle f(h) \mid f \in F_G,\ h \in H\rangle$. Нетрудно видеть, что каждый элемент $\Phi \in \operatorname{Hom}(G, \operatorname{End} G)$ определяет умножение $\cdot$ на G, при котором $g_1 \cdot g_2 = [\Phi(g_1)](g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Таким образом, каждый элемент $\Phi(g) \in F_G$

можно рассматривать как умножение (например, слева) на g в некотором кольце $(G,\cdot)$.

Теорема 6. *Если G — МТ-группа, то*

$$F_G(G^1_\Lambda) \subseteq \operatorname{Ann}^*(G) \quad \textit{и} \quad F_G(G) \subseteq \operatorname{Ann}^*_G(G^1_\Lambda).$$

Доказательство. Докажем, например, первое включение. Пусть $[\Phi(g)](a) \in F_G(G^1_\Lambda)$, где $\Phi \in \operatorname{Hom}(G, \operatorname{End} G)$, $g \in G$, $a \in G^1_\Lambda$, и $(G,\times)$ — произвольное кольцо на G. Тогда $[\Phi(g)](a) = g \cdot a$ в некотором кольце $(G,\cdot)$.

Определим отображение μ из декартова квадрата G^2 в G, положив $\mu\big((g_1,g_2)\big) = g_1 \circ g_2 = (g_1 \cdot a) \times g_2$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\circ$ является умножением на G. При этом $T(G) \circ T(G) = 0$, так как $a \in G^1_\Lambda$.

Поскольку G является МТ-группой, нулевое умножение на $T(G)$ может индуцировать только нулевое умножение на G. Значит, $0 = g \circ x = (g \cdot a) \times x = [\Phi(g)](a) \times x$ для любого $x \in G$, т. е. $[\Phi(g)](a) \in \operatorname{Ann}(G,\times)$. Следовательно, $[\Phi(g)](a) \in \operatorname{Ann}^*(G)$, откуда следует, что $F_G(G^1_\Lambda) \subseteq \operatorname{Ann}^*(G)$. Аналогично доказывается второе включение. □

Отметим, что теорема 6 означает, что для любых умножений $\cdot$ и $\times$ на МТ-группе G имеет место равенство $(G \cdot G^1_\Lambda) \times G = 0$ и аналогичные равенства, полученные из данного путём перестановки скобок и «сомножителей».

Следствие 7. *В любом кольце на МТ-группе G подгруппа G^1_Λ является нильпотентным идеалом, индекс нильпотентности которого не больше 3.*

Лемма 8. *Если G — МТ-группа, то* $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG^*_\Lambda \subseteq N^*(G)$.

Доказательство. Пусть G — МТ-группа и $(G,\times)$ — ассоциативное кольцо на G. Тогда определено фактор-кольцо $(\bar G_\Lambda, \times)$. В силу теоремы 2 $\Lambda(G) = \Lambda(\bar G_\Lambda) = \Lambda$, при этом фактор-группа $G/T(G)$, а значит и группа $\bar G_\Lambda / T(\bar G_\Lambda)$, являются Λ-делимыми.

Пусть $g \in \bigcap\limits_{p\in\Lambda} pG^*_\Lambda$. Тогда $\bar g \in \bigcap\limits_{p\in\Lambda} p(\bar G_\Lambda)^*_\Lambda$, где

$$(\bar G_\Lambda)^*_\Lambda = \{\bar g \in \bar G_\Lambda \mid \text{найдутся } k \in \mathbb{N} \text{ и } d > 1,$$
$$\text{такие что } k\bar g \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ для } d \text{ и любого } p \in \Lambda\}.$$

Так как $\bar G_\Lambda$ не содержит ненулевых Λ-делимых подгрупп, то $\bigcap\limits_{p\in\Lambda} p(\bar G_\Lambda)^*_\Lambda$ является ниль-идеалом кольца $(G,\times)$ по лемме 5. Следовательно, существует $n \in \mathbb{N}$, такое что $\bar g^n = 0 + G^1_\Lambda$, где $\bar g^n$ — степень элемента $\bar g$ в кольце $(\bar G_\Lambda, \times)$. Значит, $g^n \in G^1_\Lambda$, поэтому $g^{3n} = 0$ в силу следствия 7 (здесь g^n, g^{3n} — степени элемента g в кольце $(G,\times)$). Таким образом, $\bigcap\limits_{p\in\Lambda} pG^*_\Lambda$ — ниль-идеал кольца $(G,\times)$, поэтому $\bigcap\limits_{p\in\Lambda} pG^*_\Lambda \subseteq N^*(G)$. □

Перейдём теперь к описанию абсолютного радикала Джекобсона МТ-группы.

Лемма 9. *Если группа G — МТ-группа, то* $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG \subseteq J^*(G)$.

Доказательство. Пусть сначала $\Lambda(G)=\{p\}$. Тогда базисная подгруппа B группы $T(G)$ может быть записана в виде $B=\bigoplus\limits_{\alpha\in I}\langle e_\alpha\rangle$, где $o(e_\alpha)=p^{r_\alpha}$ ($r_\alpha\in\mathbb{N}_0$, $\alpha\in I$). Пусть $\cdot$ — ассоциативное умножение на G и $(V,\cdot)$ — кольцо на p-адическом пополнении V группы $\bar{B}=(B+G^1_\Lambda)/G^1_\Lambda$, соответствующее кольцу $(G,\cdot)$. Очевидно, кольцо $(V,\cdot)$ также является ассоциативным.

Пусть $a\in pV$. Покажем, что на группе G существует умножение $\times$, такое что в кольце $(V,\cdot)$ для элемента a существует квазиобратный элемент b, который имеет вид $b=-a-a\times a$, где $a\times a$ — произведение в кольце $(V,\times)$, соответствующем кольцу $(G,\times)$.

Так как V — p-адическое пополнение группы $\bar{B}$, то вектор $a\in V\subseteq\prod\limits_{\alpha\in I}\langle\bar{e}_\alpha\rangle$ имеет не более чем счётное число ненулевых компонент. Следовательно, a можно вложить в такое подкольцо $(V_0,\cdot)$ кольца $(V,\cdot)$, что V_0 является p-адическим пополнением группы $\bigoplus\limits_{\alpha\in I_0}\langle\bar{e}_\alpha\rangle$, где I_0 — счётное подмножество множества I. Поэтому без потери общности будем считать, что $B=\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}}\langle e_n\rangle$ и $o(e_1)\leqslant o(e_2)\leqslant\ldots\leqslant o(e_n)\leqslant\ldots$, причём базисные элементы $e_1,e_2,\ldots$ можно выбрать таким образом, что элемент a запишется в виде $a=(p^{m_1}\bar{e}_1,\ldots,p^{m_n}\bar{e}_n,\ldots)$, где $m_n\in\mathbb{N}$.

Обозначим $s_n=p^{m_1}e_1+\ldots+p^{m_n}e_n\in T(G)$. Тогда $a=\lim\limits_{n\to\infty}\{\bar{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (предел в p-адической топологии на V) и $\bar{s}_n\in pT(V)$ при любом $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, $\bar{s}_n$ является нильпотентным элементом кольца $(V,\cdot)$, т. е. существует $t_n\in\mathbb{N}$, такое что $\bar{s}_n^{t_n}=0$. Поэтому для $\bar{s}_n$ существует квазиобратный элемент в кольце $(V,\cdot)$, а именно $-\bar{s}_n-\bar{s}_n^2-\ldots-\bar{s}_n^{t_n-1}$.

Рассмотрим последовательность $\{\bar{s}_n^2+\bar{s}_n^3+\ldots+\bar{s}_n^{t_n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Она является последовательностью Коши в p-адической топологии на V и имеет предел в этой группе:

$$v=\lim_{n\to\infty}\{\bar{s}_n^2+\bar{s}_n^3+\ldots+\bar{s}_n^{t_n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Нетрудно видеть, что $b=-a-v$ — квазиобратный элемент к a в кольце $(V,\cdot)$.

Пусть n, k — натуральные числа ($k\geqslant 2$). Тогда k-ю степень элемента s_n в кольце $(G,\cdot)$ можно представить в виде

$$s_n^k=\sum_{j=1}^n f_{1j}^{(k)}+\sum_{j=2}^n f_{2j}^{(k)}+\ldots+\sum_{j=n}^n f_{nj}^{(k)},$$

здесь $f_{ij}^{(k)}$ — сумма одночленов вида $ce_{i_1}\cdot e_{i_2}\cdot\ldots\cdot e_{i_k}$, где $c\in\mathbb{Z}$, $i=\min\{i_1\ldots i_k\}$, $j=\max\{i_1,\ldots,i_k\}$. Очевидно, $f_{ij}^{(k)}\in T(G)$ и $f_{ij}^{(k)}$ делится на $p^{m_i+m_j}$ в $T(G)$ для $i\leqslant j$, $k\geqslant 2$, т. е. $f_{ij}^{(k)}=p^{m_i+m_j}h_{ij}^{(k)}$ для некоторого элемента $h_{ij}^{(k)}\in T(G)$. Ясно, что $o\big(h_{ij}^{(k)}\big)\leqslant o(e_i)\leqslant o(e_j)$.

Пусть $h_p(a) = m$. Зафиксируем для каждого $i \in \mathbb{N}$ такое натуральное число k_i, что $p^{mk_i}e_i = 0$, и числа k_i выберем таким образом, что $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots$. Легко видеть, что $f_{ij}^{(l)} = 0$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$ и для любого $l \geqslant k_i$, откуда следует, что $s_n^{k_n} = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь элемент v можно записать в виде

$$\begin{aligned}
v &= \lim_{n\to\infty}\{\overline{s_n^2} + \ldots + \overline{s_n^{k_n}}\}_{n\in\mathbb{N}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big\{\overline{f_{11}^{(2)}} + \overline{f_{12}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{1n}^{(2)}} + \overline{f_{22}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{nn}^{(2)}} + \\
&+ \overline{f_{11}^{(3)}} + \overline{f_{12}^{(3)}} + \ldots + \overline{f_{nn}^{(3)}} + \ldots + \overline{f_{11}^{(k_n)}} + \overline{f_{12}^{(k_n)}} + \ldots + \overline{f_{nn}^{(k_n)}}\Big\}_{n\in\mathbb{N}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big\{\Big(\overline{f_{11}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{11}^{(k_1-1)}}\Big) + \Big(\overline{f_{12}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{12}^{(k_1-1)}}\Big) + \ldots + \\
&+ \Big(\overline{f_{1n}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{1n}^{(k_1-1)}}\Big) + \Big(\overline{f_{22}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{22}^{(k_2-1)}}\Big) + \ldots + \\
&+ \Big(\overline{f_{2n}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{2n}^{(k_2-1)}}\Big) + \ldots + \Big(\overline{f_{nn}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{nn}^{(k_n-1)}}\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Определим элементы $e_i \times e_j \in T(G)$ $(i, j \in \mathbb{N})$ следующим образом:

если $i > j$, то $e_i \times e_j = 0$,

если $i \leqslant j$, то $e_i \times e_j = h_{ij}^{(2)} + h_{ij}^{(3)} + \ldots + h_{ij}^{(k_i-1)}$.

Эти элементы определяют умножение $\times$ на $T(G)$, которое однозначно продолжается до умножения $\times$ на G. Тогда согласно [1] в кольце $(V, \times)$, соответствующем кольцу $(G, \times)$, имеем

$$\begin{aligned}
a \times a &= \lim_{n\to\infty}\{\bar{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \times \lim_{n\to\infty}\{\bar{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}\{\bar{s}_n \times \bar{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\{p^{2m_1}(\bar{e}_1 \times \bar{e}_1) + \ldots + p^{m_1+m_n}(\bar{e}_1 \times \bar{e}_n) + \\
&+ p^{2m_2}(\bar{e}_2 \times \bar{e}_2) + \ldots + p^{m_2+m_n}(\bar{e}_2 \times \bar{e}_n) + \ldots + p^{2m_n}(\bar{e}_n \times \bar{e}_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big\{\Big(\overline{f_{11}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{11}^{(k_1-1)}}\Big) + \ldots + \Big(\overline{f_{1n}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{1n}^{(k_1-1)}}\Big) + \\
&+ \Big(\overline{f_{22}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{22}^{(k_2-1)}}\Big) + \ldots + \Big(\overline{f_{2n}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{2n}^{(k_2-1)}}\Big) + \ldots + \\
&+ \Big(\overline{f_{nn}^{(2)}} + \ldots + \overline{f_{nn}^{(k_n-1)}}\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{N}} = v.
\end{aligned}$$

Таким образом, $b = -a - v = -a - a \times a$.

Пусть теперь $\Lambda(G)$ — произвольное множество и $B_p = \bigoplus_{\alpha\in I_p}\langle e_\alpha^{(p)}\rangle$ — базисная подгруппа группы $T_p(G)$, $B = \bigoplus_{p\in\Lambda(G)} B_p$. Пусть $\cdot$ — ассоциативное умножение на G. Тогда кольцо $(V, \cdot)$, соответствующее кольцу $(G, \cdot)$, также является ассоциативным. При этом кольцо $(V, \cdot)$ является прямым произведением колец $(V_p, \cdot)$, соответствующих кольцам $(T_p(G), \cdot)$.

Пусть $g \in \bigcap_{p\in\Lambda(G)} pG$, $\bar{g} = (a_p)_{p\in\Lambda(G)} \in \bar{G}_\Lambda$, где $a_p \in pV_p$ $(p \in \Lambda(G))$. По доказанному выше для каждого $p \in \Lambda(G)$ существует умножение $\times_p$ на

$T_p(G)$, такое что в кольце $(V_p, \cdot)$ элемент, квазиобратный к a_p, имеет вид $b_p = -a_p - a_p \times_p a_p$, где $a_p \times_p a_p$ — произведение в кольце $(V_p, \times_p)$, соответствующем кольцу $(T_p(G), \times_p)$. Определим умножение $\times$ на $T(G)$, положив

$$e_i^{(p)} \times e_j^{(q)} = \begin{cases} e_i^{(p)} \times_p e_j^{(p)}, & \text{если } p = q, \\ 0, & \text{если } p \neq q, \end{cases}$$

для любых $p, q \in \Lambda(G)$ и любых $i \in I_p$, $j \in I_q$. Это умножение однозначно продолжается до умножения $\times$ на G. Тогда определено фактор-кольцо $(\bar{G}_\Lambda, \times)$, которое является подкольцом кольца $(V, \times)$, соответствующего кольцу $(G, \times)$. При этом кольцо $(V, \times)$ является прямым произведением колец $(V_p, \times_p)$. Тогда

$$b = (b_p)_{p\in\Lambda(G)} = (-a_p - a_p \times a_p)_{p\in\Lambda(G)} = -\bar{g} - \bar{g} \times \bar{g} \in \bar{G}_\Lambda.$$

Положим $g_1 = -g - g \times g$. Тогда $b = \bar{g}_1$. Так как $\bar{g} + \bar{g}_1 - \bar{g} \cdot \bar{g}_1 = \bar{0} \in \bar{G}_\Lambda$, то существует $x \in G_\Lambda^1$, такой что $g + g_1 - g \cdot g_1 = x$. Поскольку G_Λ^1 является нильпотентный идеалом кольца $(G, \cdot)$ по следствию 7, то существует элемент $y \in G_\Lambda^1$, квазиобратный к x. Непосредственной проверкой можно убедиться, что элемент $g_1 + y - g_1 \cdot y$ является квазиобратным к g в кольце $(G, \cdot)$.

Таким образом, $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG$ является квазирегулярным идеалом кольца $(G, \cdot)$, откуда следует, что $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG \subseteq J(G, \cdot)$. Из произвольности умножения $\cdot$ на G следует, что $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG \subseteq J^*(G)$. □

Из лемм 4, 8 и 9 получаем следующую теорему.

Теорема 10. *Если G — MT-группа, то*

$$N^*(G) = \bigcap_{p\in\Lambda(G)} pG_\Lambda^*, \quad J^*(G) = \bigcap_{p\in\Lambda(G)} pG.$$

При этом существует ассоциативное и коммутативное кольцо на группе G, верхний ниль-радикал которого совпадает с $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG_\Lambda^*$, а радикал Джекобсона — с подгруппой $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG$. □

Литература

[1] Компанцева Е. И. Кольца без кручения // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, № 8. — С. 95—143.

[2] Компанцева Е. И. Абсолютные ниль-идеалы абелевой группы // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 63—76.

[3] Москаленко А. И. О длине расщепления абелевой группы // Мат. заметки. — 1978. — Т. 24, № 6. — С. 749—762.

[4] Fried E. On the subgroups of Abelian groups that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian Groups. Budapest, 1964. — P. 51—55.

[5] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vol. 2. — New York: Academic Press, 1973.

[6] Jacobson N. Structure of Rings. — Providence: Amer. Math. Soc., 1968. — (Colloq. Publ.; Vol. 37).

[7] Topics in Abelian groups. — Chicago, 1963.

[8] Toubassi E. H., Lawver D. A. Height-slope and splitting length of Abelian groups // Publ. Math. Debrecen. — 1973. — Vol. 20. — P. 63—71.