Типовая размерность системы дифференциальных уравнений первого порядка*

М. В. КОНДРАТЬЕВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: marina.kondratieva@math.msu.ru

УДК 512.628.2

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, кольцо дифференциальных многочленов, размерностный многочлен Колчина, дифференциальный тип, типовая дифференциальная размерность, характеристическое множество.

Аннотация

В статье доказано, что старший коэффициент ненулевого размерностного многочлена Колчина системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных от одной дифференциальной переменной равен 1. Типовая дифференциальная размерность играет важную роль в дифференциальной алгебре, некоторые её оценки через порядки уравнений системы были доказаны Дж. Риттом и Э. Колчиным. Ими же выдвигались гипотезы, которые позднее были опровергнуты. Известны оценки типовой дифференциальной размерности в коразмерности 1 (Э. Колчин) и в случае линейных дифференциальных уравнений (Д. Григорьев). Отметим, что в коразмерности 2 для систем линейных дифференциальных уравнений от одной переменной выполняется известная теорема Безу, а в случае нескольких переменных нами ранее доказан её аналог, который не выполняется в бо́льших коразмерностях. Для нелинейных систем в общем случае пока нет экспоненциальных оценок (хотя известно, что рост типовой размерности ограничен функцией Аккермана).

Abstract

M. V. Kondratieva, The typical dimension of a system of first-order differential equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 3, pp. 129—138.

We prove that if a system of first-order partial differential equations in one variable has a nonzero Kolchin dimension polynomial, then its leading coefficient is equal to 1. The notion of typical differential dimension plays an important role in differential algebra. Some of its estimations were proved by J. Ritt and E. Kolchin; they also advanced several conjectures that were later refuted. There are bounds for the typical differential dimension in codimension 1 (E. Kolchin) and in the case of linear differential equations (D. Grigoriev). Note that in codimension 2 for systems of linear differential equations in one indeterminate the well-known Bézout theorem holds, and in the case of several variables, we have earlier proved its analogue, which is not satisfied in higher codimensions. For nonlinear systems, in the general case, there are no exponential bounds yet (although it is known that the growth of the typical dimension is bounded by the Ackermann function).

*Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

Фундаментальная и прикладная математика, 2023, том 24, № 3, с. 129—138.

1. Введение

Дифференциальная алгебра берёт начало в работах Дж. Ритта [7] и Э. Колчина [5]. Её можно рассматривать как раздел коммутативной алгебры, где все структуры дополнительно снабжены операцией дифференцирования. Важную роль в дифференциальной алгебре играет введённый Э. Колчиным [5] дифференциальный размерностный многочлен, являющийся аналогом размерности для дифференциальных алгебраических многообразий. Оценка его коэффициентов относится к классическим нерешённым проблемам дифференциальной алгебры.

В последние годы повысился интерес к компьютерной алгебре, одним из направлений которой является изучение базисов Грёбнера. В дифференциальной алгебре аналогичную роль играет характеристическое множество. Если известно характеристическое множество простого дифференциального идеала в кольце дифференциальных многочленов, проблема нахождения размерностного многочлена является вычислительной задачей, для решения которой известен ряд алгоритмов (см., например, [6]). Из этих алгоритмов следует, что коэффициенты размерностного многочлена полиномиально зависят от порядков элементов характеристического множества существенной простой компоненты. Однако для нахождения характеристического множества применяются алгоритмы (различные варианты алгоритма Розенфельда—Грёбнера), сложность которых до сих пор неизвестна. Для систем линейных дифференциальных уравнений понятия базиса Грёбнера и характеристического множества, по сути, одинаковы, и в [3] доказана дважды экспоненциальная оценка порядков элементов базиса Грёбнера модуля над алгеброй Вейля, откуда следует такая же оценка на типовую дифференциальную размерность (результат Д. Григорьева, см. [4], полученный ранее в [3] через оценку теста разрешимости системы, тоже дважды экспоненциальный). Мы, уже в нелинейном случае, будем использовать для оценки старшего коэффициента размерностного многочлена оценку элементов характеристического множества. Отметим, что в коразмерности 1 Э. Колчиным доказана оценка типовой размерности, линейная по порядкам исходных уравнений. В [6, с. 265] опровергнута гипотеза Колчина об оценке в коразмерности больше 1 и некоторые другие полиномиальные гипотезы. В [1] доказана грубая оценка старшего коэффициента при любом значении дифференциальной размерности, зависящая от степеней исходных уравнений, имеющая асимптотику функции Аккермана. Вопрос о том, можно ли доказать верхнюю дважды экспоненциальную оценку для нелинейных систем, пока открыт.

2. Предварительные факты

Основные понятия и факты изложены в [5—7].

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, через $\mathbb{N}_0$ множество неотрицательных целых чисел,

$$\binom{s}{m} = \frac{s(s-1)\cdots(s-m+1)}{m!} -$$

количество сочетаний из s элементов по m.

Пусть $e = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Тогда число

$$\sum_{k=1}^{m} j_k$$

будем называть *порядком* элемента e и обозначать через $\operatorname{ord} e$.

Отметим, что любой целозначный (т. е. принимающий в целых точках целые значения) полином $v(s)$ может быть записан в виде

$$v(s) = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{s+i}{i},$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$. Будем называть числа $(a_d, \ldots, a_0)$ *стандартными коэффициентами* многочлена $v(s)$.

Теперь дадим определение размерностного многочлена Колчина подмножества $E \subset \mathbb{N}_0^m$ (или матрицы E).

Определение 1. Определим отношение частичного порядка на $\mathbb{N}_0^m$ следующим образом: отношение $(i_1, \ldots, i_m) \leqslant (j_1, \ldots, j_m)$ равносильно $i_k \leqslant j_k$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Рассмотрим функцию $\omega_E(s)$, принимающую в точке s значение $\operatorname{Card} V_E(s)$, где $V_E(s)$ — множество точек $v \in \mathbb{N}_0^m$, таких что $\operatorname{ord} v \leqslant s$ и для каждого $e \in E$ не выполняется условие $e \leqslant v$. Тогда (см. [5, с. 115]) функция $\omega_E(s)$ для всех достаточно больших s является целозначным многочленом. Будем называть её *размерностным многочленом* Колчина множества E и обозначать через $\omega_E(s)$.

Определение 2. Оператор ∂, действующий на коммутативном кольце $\mathbb{K}$ с единицей, называется *дифференциальным оператором* (или *дифференцированием*), если он линеен, $\partial(a+b) = \partial(a)+\partial(b)$, и выполняется правило Лейбница $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$ для всех элементов $a, b \in \mathbb{K}$.

Дифференциальным кольцом (или Δ-кольцом) будем называть коммутативное кольцо $\mathbb{K}$ с конечным множеством $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ попарно коммутирующих дифференцирований на $\mathbb{K}$.

Пусть

$$\Theta = \Theta(\Delta) = \bigl\{\partial_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial_m^{i_m} \bigm| i_j \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant m\bigr\}.$$

Для

$$\theta = \partial_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial_m^{i_m}$$

определим *порядок дифференциального оператора* θ:

$$\operatorname{ord}(\theta) = i_1 + \ldots + i_m, \quad \Theta(s) = \{\theta \in \Theta \mid \operatorname{ord}(\theta) \leqslant s\}.$$

Положим

$$R = \mathbb{K}\{y_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} := \mathbb{K}[\theta y_j \mid \theta \in \Theta,\ 1 \leqslant j \leqslant n] -$$

кольцо коммутативных многочленов с коэффициентами в $\mathbb{K}$ от бесконечного числа переменных $\Theta Y = \Theta(y_j)_{j=1}^n$ и

$$R_s = \mathbb{K}\bigl[\Theta(s)y_j\bigr], \quad s \geqslant 0.$$

Кольцо R называется *кольцом дифференциальных многочленов* от дифференциальных переменных $y_1, \ldots, y_n$ с коэффициентами в $\mathbb{K}$.

Всюду в дальнейшем мы полагаем, что кольцо $\mathbb{K}$ является дифференциальным полем $\mathcal{F}$ характеристики 0. Идеал I в кольце $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ называется *дифференциальным*, если $\partial f \in I$ для всех $f \in I$ и $\partial \in \Delta$. Будем обозначать через $\{I\}$ наименьший радикальный дифференциальный идеал, содержащий I. Простой компонентой идеала $\{I\}$ будем называть простой Δ-идеал, содержащий $\{I\}$. Простая компонента называется существенной, если она не содержит никакую другую простую компоненту $\{I\}$. Согласно [5, с. 126, теорема 1] каждый радикальный дифференциальный идеал имеет конечное число существенных простых компонент и является их пересечением. Более того, каждое разложение $\{I\} = \bigcap \mathcal{P}_i$ содержит все существенные простые компоненты идеала $\{I\}$.

Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{F}\langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$ — конечно порождённое Δ-расширение дифференциального поля $\mathcal{F}$ (поле частных кольца вычетов $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ по простому Δ-идеалу $\mathcal{P}$). Определим *дифференциальный размерностный полином* (*Колчина*) $\omega_{\phi_1,\ldots,\phi_n}(s)$ условием

$$\omega_{\phi_1,\ldots,\phi_n}(s) = \operatorname{trdeg} \mathcal{F}(\Theta(s)\phi_1, \ldots, \Theta(s)\phi_n)/\mathcal{F},$$

которое должно выполняться для всех $s \in \mathbb{N}_0$ начиная с некоторого s_0 (здесь trdeg — степень трансцендентности расширения поля, которая равна $\dim \mathcal{P} \cap R_s$).

Дифференциальный размерностный многочлен содержит некоторые Δ-инварианты поля $\mathcal{G}$ над $\mathcal{F}$ (в частности, степень и старший коэффициент), но сам многочлен может изменяться при выборе другой системы образующих $\mathcal{G} = \mathcal{F}\langle \psi_1, \ldots, \psi_l \rangle$. Его степень $d = \deg\bigl(\omega_{\phi_1,\ldots,\phi_n}(s)\bigr)$ называют *дифференциальным типом*, разность $m - d$ — *коразмерностью*, а стандартный старший (ненулевой) коэффициент τ_d — *типовой размерностью* Δ-поля $\mathcal{G}$ над $\mathcal{F}$.

Для вычисления размерностного многочлена дифференциального расширения поля (простого дифференциального идеала в кольце R) используют характеристическое множество простого идеала. Для его определения нужно ввести ранжир на множестве T дифференциальных мономов.

Определение 3. *Ранжиром* на $\{y_1, \ldots, y_n\}$ будем называть полный порядок $\leqslant$ на множестве производных $T = \theta y_j$ ($\theta \in \Theta$, $1 \leqslant j \leqslant n$), удовлетворяющий следующим двум условиям:

— $u \leqslant \theta u$ для любых $\theta \in \Theta$ и $u \in T$;
— если $u \leqslant v$, то $\theta u \leqslant \theta v$ для любых $u \in T$, $v \in T$ и $\theta \in \Theta$.

Ранжир называется *степенным*, если из условия $\operatorname{ord}(\theta_1) \leqslant \operatorname{ord}(\theta_2)$ следует $\theta_1 y_i \leqslant \theta_2 y_k$ для всех $1 \leqslant i, k \leqslant n$.

Пример 1. Положим $\theta_1 y_i < \theta_2 y_j$, если $\operatorname{ord}\theta_1 < \operatorname{ord}\theta_2$, или $\operatorname{ord}\theta_1 = \operatorname{ord}\theta_2$ и $i < j$, или $\operatorname{ord}\theta_1 = \operatorname{ord}\theta_2$, $i = j$ и $\theta_1 < \theta_2$. Такой ранжир является степенным. Будем называть его *стандартным*.

Определение 4. Пусть $\mathcal{F}$ — Δ-поле, $A \in \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, $A \notin \mathcal{F}$, и задан ранжир на множестве $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Производная θy_j самого высокого ранга из входящих в Δ-многочлен A называется *лидером* A (будем обозначать его $\mathbf{u}_A$). Если $d = \deg_{u_A} A$, то

$$A = \sum_{i=0}^{d} I_i \mathbf{u}_A^i,$$

где $I_0, \ldots, I_d$ — однозначно определённые многочлены, не содержащие $\mathbf{u}_A$. Δ-многочлен $I_A = I_d$ будем называть *инициалом* многочлена A, а Δ-многочлен

$$S_A = \sum_{i=1}^{d} i I_i \mathbf{u}_A^{i-1} -$$

сепарантой A.

Определение 5. Пусть $A, B \in \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Будем говорить, что Δ-многочлен A *выше рангом, чем* B (и писать $\operatorname{rk} A > \operatorname{rk} B$), если либо $A \notin \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, либо $\mathbf{u}_B \leqslant \mathbf{u}_A$ $\mathbf{u}_A \neq \mathbf{u}_B$, либо $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_B = \mathbf{u}$ и $\deg_{\mathbf{u}} A > \deg_{\mathbf{u}} B$.

Определение 6. Пусть $A, F \in \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, $A \notin \mathcal{F}$. Δ-многочлен F называется *редуцированным* относительно A, если F не содержит собственных производных $\theta\mathbf{u}_A$ от лидера A и $\deg_{\mathbf{u}_A} F < \deg_{\mathbf{u}_A} A$. Если $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ и F редуцирован относительно каждого элемента из $\mathcal{A}$, то F называется *редуцированным* относительно $\mathcal{A}$.

Определение 7. Непустое подмножество $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ называется *авторедуцированным*, если любой элемент множества $\mathcal{A}$ редуцирован относительно любого другого элемента из $\mathcal{A}$. Любые два лидера $\mathbf{u}_{A_i}$, $\mathbf{u}_{A_j}$ авторедуцированного множества различны, и всюду далее мы будем предполагать, что все элементы авторедуцированного множества расположены по возрастанию ранжира их лидеров: $\mathbf{u}_{A_1} < \mathbf{u}_{A_2} < \ldots < \mathbf{u}_{A_r}$.

Определение 8. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — авторедуцированные множества,

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_r\}, \quad \mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_s\}.$$

Мы говорим, что $\mathcal{A}$ *ниже рангом, чем* $\mathcal{B}$ и пишем $\operatorname{rk}\mathcal{A} < \operatorname{rk}\mathcal{B}$, если либо существует $k \in \mathbb{N}$, такое что $\operatorname{rk} A_i = \operatorname{rk} B_i$ $(1 \leqslant i < k)$ и $\operatorname{rk} A_k < \operatorname{rk} B_k$, либо $r > s$ и $\operatorname{rk} A_i = \operatorname{rk} B_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Если $r = s$ и $\operatorname{rk} A_i = \operatorname{rk} B_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, то мы говорим, что $\mathcal{A}$ *имеет тот же ранг*, что и $\mathcal{B}$ ($\operatorname{rk}\mathcal{A} = \operatorname{rk}\mathcal{B}$).

Любое непустое множество авторедуцированных подмножеств кольца $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ содержит авторедуцированное подмножество наименьшего ранга.

Определение 9. Пусть $I \subseteq \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ — Δ-идеал. Авторедуцированное подмножество идеала I наименьшего ранга называется *характеристическим множеством* идеала I.

Пусть $\mathcal{A}$ — характеристическое множество Δ-идеала $I \subsetneq \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Тогда $I_A \notin I$, $S_A \notin I$ для всех $A \in \mathcal{A}$ и I не содержит ненулевых элементов, редуцированных относительно $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ — авторедуцированное множество, то положим

$$H_{\mathcal{A}} = \prod_{A \in \mathcal{A}} S_A I_A.$$

Если I — идеал кольца R, $f \in R$, то $I : f^\infty$ будет обозначать множество элементов $g \in R$, таких что $gf^n \in I$ для некоторого n.

Определение 10. Авторедуцированное множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ называется *когерентным*, если для всяких Δ-многочленов $A, A' \in \mathcal{A}$ и всякого общего кратного их лидеров $v = \theta \mathbf{u}_A = \theta' \mathbf{u}_{A'}$ выполняется условие $S_{A'}\theta A - S_A \theta' A' \in (A_v) : H_{\mathcal{A}}^\infty$, где A_v — это множество Δ-полиномов $\theta'' A''$ ($A'' \in \mathcal{A}$, $\theta'' \in T$), для которых $\theta'' \mathbf{u}_{A''} < v$.

Лемма 1 [5, с. 167, лемма 2]. *Если $\mathcal{A}$ — характеристическое множество простого дифференциального идеала $\mathcal{P}$ кольца Δ-многочленов $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, то $\mathcal{P} = [\mathcal{A}] : H_{\mathcal{A}}^\infty$, множество $\mathcal{A}$ когерентно и $(\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^\infty$ — простой идеал кольца $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, не содержащий ненулевых элементов, редуцированных относительно $\mathcal{A}$. Обратно, если $\mathcal{A}$ — когерентное авторедуцированное множество, такое что $(\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^\infty$ — простой идеал, не содержащий ненулевых элементов, редуцированных относительно $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ является характеристическим множеством простого Δ-идеала кольца $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$.*

Согласно теореме Колчина (см. [5, с. 115, теорема 7]) если $\mathcal{A}$ — характеристическое множество простого Δ-идеала $\mathcal{P}$ для степенного ранжира, то дифференциальный размерностный многочлен $\omega_{\mathcal{P}}(s)$ равен $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_{E_j}(s)$, где E_j — это множество точек $(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}_0^m$, таких что $\partial_1^{i_1} \ldots \partial_m^{i_m} y_j$ является лидером некоторого элемента $\mathcal{A}$.

Нас интересует следующий вопрос.

Вопрос 1. Пусть $\Sigma \subset R_d$ — система дифференциальных уравнений и $\mathcal{P}$ — существенная простая компонента идеала $\{\Sigma\}$. Как оценить типовую размерность $\mathcal{P}$ через значение d?

В дифференциальной алгебре этот вопрос впервые поставил Дж. Ритт, который занимался системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Позднее Э. Колчин решил эту задачу в коразмерности 1 для нелинейной системы. Он получил следующую оценку (см. [5, с. 199]): типовая дифференциальная размерность не превосходит dn.

В коразмерности 2 для линейных уравнений известен следующий результат (см. [6]): пусть $n = 1$, тогда $a_{m-2}(\omega_{\mathcal{P}}) \leqslant d^2$.

3. Основные результаты

Для систем дифференциальных уравнений, имеющих тип меньше $m-2$, даже в линейном случае пока никаких оценок, кроме дважды экспоненциальной, не найдено [4].

Пример 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathbb{C}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $n = 1$, $R = \mathcal{F}\{y\}$ — кольцо дифференциальных многочленов от одной переменной y над полем $\mathcal{F}$, $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_k\}$, $d = 2$, $\partial_i(x_j) = \delta_i^j$,

$$\Sigma_k = \{f_1 = \partial_1^2 + x_2\partial_3^2 + x_2^2\partial_4^2 + \ldots + x_2^k\partial_k^2,\ f_2 = \partial_2^2\}.$$

Утверждается, что коразмерность Σ_k равна k, а типовая размерность $a_k(\Sigma_k)$ (которая в данном случае совпадает с размерностным полиномом) может быть вычислена по рекуррентной формуле

$$a_3(\Sigma_3) = 12, \quad a_4(\Sigma_4) = 32, \quad a_5(\Sigma_5) = 80,$$
$$a_{k+1}(\Sigma_{k+1}) = 2a_k(\Sigma_k) + 2^k.$$

Рассмотрим степенной ранжир, для которого $\partial_1 y > \partial_2 y > \partial_3 y > \ldots > \partial_k y$, и найдём характеристическое множество линейного идеала Σ_3. Оно состоит из элементов

$$\mathcal{A} = \{f_1,\, f_2,\, f_3 = \partial_2^2 f_1 - \partial_1^2 f_2 - x_1\partial_3^2 f_2 = \partial_2\partial_3^2 y,$$
$$f_4 = \partial_2\partial_3^2 f_1 - \partial_1^2 f_3 - x_1\partial_3^2 f_3 = \partial_3^4 y\}.$$

По [5, с. 115, теорема 7] ω_{Σ_3} равен размерностному многочлену матрицы (лидеров характеристического множества $\mathcal{A}$) идеала Σ_3):

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

По [6, следствие 2.2.2] размерностный многочлен является константой, по [6, лемма 2.3.16]

$$\omega_E(s) = 2\omega_{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)}(s),$$

и после применения [6, формула 2.2.3, теорема 2.2.10]

$$\omega_E(s) = 2\left(\omega_{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(s) + \omega_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)}(s-1)\right) =$$
$$= 2\Big(\omega_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(s) + \omega_{(\,2\,)}(s-1)\Big) = 2(4+2) = 12.$$

Пусть теперь $k \geqslant 3$. Заметим, что лидеры характеристического множества идеала Σ_{k+1} получаются добавлением к лидерам множества $\mathcal{A}_k$ мономов $\partial_{k+1}^4 y$, $\partial_2\partial_{k+1}^2 y$, $\partial_3^2\partial_{k+1}^2 y, \ldots, \partial_k^2\partial_{k+1}^2 y$.

Применив опять [6, формула 2.2.3], получим $a_{k+1}(\Sigma_{k+1}) = \omega_{E'}(s)$, где

$$E' = \begin{pmatrix} & & E0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(здесь $E0$ получается из E добавлением последнего нулевого столбца). После применения [6, формула 2.2.3]

$$\omega_{E'}(s) = \omega_{E' \cup (0,0,\dots,0,2)}(s) + \omega_{E''}(s-2) = 2\omega_E + \omega_{E''},$$

где матрица $E' \subset \mathbb{N}_0^{k+1}$ имеет вид

$$E'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

откуда сразу следует $\omega_{k+1} = 2\omega_k + 2^k$.

Заметим, что, хотя с ростом Δ-типа типовая размерность имеет иную асимптотику, чем в теореме Безу (которая выполняется, если поле $\mathcal{F}$ является полем констант), порядки элементов характеристического множества не превосходят $d^2 = 4$.

Переходим теперь к нелинейному случаю. Когда можно оценить порядки элементов характеристического множества, вопрос 1 решается. В случае порядка 1 для нелинейных систем имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $n = 1$, $R = \mathcal{F}\{y\}$ — кольцо дифференциальных многочленов от одной переменной y над полем $\mathcal{F}$, $\Delta = \{\partial_1, \dots, \partial_m\}$, Σ — система дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть $\mathcal{P}$ — существенная простая компонента идеала $\{\Sigma\}$ дифференциального типа больше -1. Тогда дифференциальная типовая размерность идеала $\mathcal{P}$ равна* 1.

Доказательство. Обозначим через τ дифференциальный тип идеала $\mathcal{P}$, а через a_τ его типовую размерность. По условию теоремы $\tau > -1$, откуда следует, что $\deg w_{\mathcal{P}} \geqslant 0$ и если $\deg w_{\mathcal{P}} = 0$, то $a_\tau > 0$.

Пусть $R_1 = \mathcal{F}[y, \partial_1 y, \dots, \partial_m y] \subset \mathcal{F}\{y\}$ — кольцо обычных (алгебраических) полиномов и $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap R_1$ — алгебраический идеал кольца R_1. Рассмотрим степенной ранжир (см. пример 1) на мономах $\{\Theta y\}$ и выберем характеристическое множество $\mathcal{A}$ простого алгебраического идеала $\mathcal{P}_1$ относительно этого ранжира. Поскольку мы предположили, что $\tau \neq -1$, в $\mathcal{A}$ нет полинома с лидером y.

Докажем, что $\mathcal{A}$ является характеристическим множеством идеала $\mathcal{P}$. В самом деле, $\mathcal{A}$ является Δ-автоосредуцированным, так как все элементы $\mathcal{A}$ имеют порядок 1 и оно автоосредуцированное как алгебраическое множество.

Покажем, что $\mathcal{A}$ является Δ-когерентным. Предположим противное, и пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathbf{u}_A = \partial_1 y$, $\mathbf{u}_B = \partial_2 y$. Найдём многочлен $v = S_B\partial_2 A - S_A\partial_1 B$. Этот многочлен может содержать мономы порядка 2, и каждый такой моном $M_{ij} = \partial_i\partial_j y$ ($i \leqslant 2$, $j > 2$) имеет степень 1 и коэффициент из R_1. Если M_{ij} входит в v с ненулевым коэффициентом, продифференцируем по ∂_j полином A, если $i = 1$, и B, если $i = 2$. Получим полином вида $S_i\partial_i\partial_j y + T$, где T не содержит $\partial_1 y$, $\partial_2 y$. Подставим в v вместо $S_i M_{ij}$ полином $-T$. Пусть T содержит моном порядка 2, например $\partial_j\partial_k y$, $k > 2$. Докажем, что после такой обработки (редукции) всех мономов M_{ij} полинома v коэффициент при мономе $\partial_j\partial_k y$ в многочлене v равен 0.

В самом деле, так как v содержит M_{jk}, какой-то из многочленов A, B должен содержать $\partial_j y$. Пусть для определённости это будет A. Тогда $\partial_2 A$ содержит M_{2j} в первой степени с коэффициентом $C_A \in R_1$, и мы редуцируем этот моном при помощи многочлена $\partial_j B$. Так как мы предположили, что после редукции в v содержится M_{jk}, в полином B должен входить $\partial_k y$. Пусть в $\partial_j B$ входит M_{jk} с коэффициентом $C_B \in R_1$. Значит, v содержит M_{jk} с коэффициентом $C_A C_B$. С другой стороны, B содержит $\partial_k y$, поэтому v содержит M_{2k}, который мы может отредуцировать при помощи $\partial_k A$. Как легко видеть, в $\partial_k A$ моном M_{kj} входит с коэффициентом C_A, поэтому в v моном M_{kj} входит с коэффициентом $-C_A C_B$. Учитывая, что $M_{jk} = M_{kj}$, получаем, что коэффициент при M_{kj} в v после пары редукций стал равен 0.

Итак, полином $\tilde{v}$, полученный из v Δ-редукцией мономов порядка 2, имеет порядок не выше 1 и $\tilde{v} \in \mathcal{P}$. Поэтому $\tilde{v} \in \mathcal{P}_1$, значит, так как $\mathcal{A}$ — характеристическое множество $\mathcal{P}_1$, $\tilde{v} \in (\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^{\infty}$. Полученное противоречие доказывает когерентность $\mathcal{A}$.

Идеал $(\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^{\infty}$ является простым, так как $\mathcal{A}$ — характеристическое множество идеала $\mathcal{P}_1$ (лемма 1). По той же лемме 1 $q = [A] : H_{\mathcal{A}}^{\infty}$ — простой Δ-идеал, он содержит Σ и $q \subseteq \mathcal{P}$. Поскольку $\mathcal{P}$ — минимальный простой дифференциальный идеал, содержащий Σ, $\mathcal{P} = q$ и $\mathcal{A}$ — характеристическое множество $\mathcal{P}$. Поскольку все элементы характеристического множества имеют порядок 1, $\omega_{\mathcal{P}}(s) = \omega_E(s)$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

и $\omega_{\mathcal{P}}(s) = \binom{s+i}{i}$, откуда следует утверждение теоремы. □

Метод, на котором построено доказательство теоремы 1, — оценка порядков элементов характеристического множества. В условиях теоремы порядок элементов характеристического множества не превосходит порядков исходных уравнений системы. Этот факт, как показывают примеры 3, 4, не выполняется для порядков уравнений выше 1 и в случае количества переменных больше 1 в коразмерности 2 даже для линейных систем.

Пример 3. $n = 1$, $m = 4$, $d = 2$,

$$\begin{aligned} \partial_1\partial_3 y &= \partial_4^2 y, \\ \partial_2\partial_3 y &= 0. \end{aligned}$$

В этом примере характеристическое множество содержит элемент порядка 3 ($\partial_2\partial_4^2 y$), хотя выполняется теорема Безу [6, теорема 5.6.7]: коразмерность равна 2, типовая размерность равна 4.

Пример 4. $n = 2$, $m = 2$, $d = 2$,

$$\begin{aligned} \partial_1 y_1 &= \partial_2 y_2, \\ \partial_2 y_1 &= 0, \\ \partial_1 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Для этой системы коразмерности 2 характеристическое множество в любом ранжире будет содержать элемент порядка 2. Типовая размерность системы равна 3. Для систем такого вида можно доказать квадратичную по d оценку типовой размерности (см. [2]).

Отметим, что любая система дифференциальных уравнений эквивалентна системе уравнений первого порядка, но количество переменных при таком переходе возрастает.

Как показывает пример 2, для линейных систем коразмерности $k > 2$ асимптотика типовой размерности превышает $O(d^k)$.

Литература

[1] Кондратьева М. Верхняя граница минимизирующих коэффициентов размерностного многочлена Колчина // Программирование. — 2010. — Т. 36, № 2. — С. 83—86.

[2] Кондратьева М. В. Оценка типовой дифференциальной размерности системы линейных дифференциальных уравнений // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 5. — С. 259—269.

[3] Chistov A., Grigoriev D. Complexity of a standard basis of a D-module // St. Petersburg Math. J. — 2009. — Vol. 20. — P. 709—736.

[4] Grigoriev D. Weak Bezout inequality for D-modules // J. Complexity. — 2005. — Vol. 21. — P. 532—542.

[5] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — Academic Press, 1973.

[6] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Kluwer Academic, 1999.

[7] Ritt J. Differential Algebra. — New York: Amer. Math. Soc., 1950.