# Алгебры с одним определяющим соотношением*

**А. А. МИХАЛЁВ**
*Московский государственный университет*
*им. М. В. Ломоносова*
e-mail: aamikhalev@mail.ru

УДК 512.55+512.57

**Ключевые слова:** многообразие линейных алгебр, шрайерово многообразие, свободные алгебры многообразий, автоморфизмы свободных алгебр, примитивные элементы свободных алгебр, теорема о свободе, алгебры с одним определяющим соотношением.

**Аннотация**

В этой обзорной статье рассмотрены свойства алгебр, заданных одним определяющим соотношением в многообразиях линейных алгебр. Основное внимание уделено шрайеровым многообразиям алгебр. Многообразие алгебр называется шрайеровым, если подалгебры свободных алгебр этого многообразия свободны.

**Abstract**

*A. A. Mikhalev, Algebras with single defining relation*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 3, pp. 139—152.

In this survey paper, we collect properties of one-relator algebras in varieties of linear algebras. The main attention is paid to Schreier varieties of algebras. A variety of linear algebras is said to be Schreier if any subalgebra of a free algebra of this variety is free.

Многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр над полем $F$ определяется как класс алгебр, замкнутый относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Пусть $X$ — множество. Алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X)$ многообразия $\mathfrak{M}$ называется свободной алгеброй с множеством $X$ свободных образующих, если алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X)$ порождается множеством $X$ и если $f$ — любое отображение из $X$ в любую алгебру $A$ многообразия $\mathfrak{M}$, то отображение $f$ может быть расширено до гомоморфизма $F_{\mathfrak{M}}(X) \to A$ (ясно, что такое продолжение единственно). Алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X)$ определена множеством $X$ и многообразием $\mathfrak{M}$ однозначно с точностью до изоморфизма. Для любого нетривиального многообразия $\mathfrak{M}$ и множества $X$ существует свободная алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X)$. Если $A \in \mathfrak{M}$, то существует такое множество $X$ (например, $X = A$), что алгебра $A$ является гомоморфным образом свободной алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X)$. Мощность множества $X$ называется рангом свободной алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X)$.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда, грант 22-11-00052.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2023, том 24, № 3, с. 139—152.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Пара $(u, v)$ элементов алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X)$ называется тождеством алгебры $A$ многообразия $\mathfrak{M}$, если $u(a_1, \ldots, a_n) = v(a_1, \ldots, a_n)$ для всех элементов $a_1, \ldots, a_n$ алгебры $A$. Следующий результат принадлежит Г. Биркгофу. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие всех алгебр. Подкласс $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$ является многообразием тогда и только тогда, когда существует такое множество тождеств $(u_i, v_i)$, $i \in I$, что $\mathfrak{N}$ состоит из всех алгебр многообразия $\mathfrak{M}$, в которых выполнены данные тождества. Здесь $u_i$, $v_i$ $(i \in I)$ — элементы свободной алгебры $F_{\mathfrak{M}}$ со счётным множеством $X$ свободных образующих. Многообразие алгебр называется однородным, если оно задано однородным множеством (по отношению к $X$-степени) тождеств.

Многообразие алгебр называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия свободна в том же многообразии алгебр. Это понятие пришло из теории групп; в 1920-х годах Я. Нильсен [99] и О. Шрайер [104] доказали, что любая подгруппа свободной группы свободна. А. Г. Курош доказал в [24], что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны. А. И. Ширшов [47] показал, что многообразие всех алгебр Ли является шрайеровым (этот результат был также доказан Е. Виттом в [113], где также было доказано, что многообразие всех $p$-алгебр Ли является шрайеровым). А. Г. Курош в [26] обобщил эти результаты на многообразие всех $\Omega$-алгебр ($\Omega$-алгебра — это линейное пространство с семейством $\Omega$ полилинейных умножений арности не менее 2). В [26] он также описал подалгебры свободных произведений $\Omega$-алгебр. Для случая всех неассоциативных алгебр это было доказано ранее в [25], и для случаев всех коммутативных и всех антикоммутативных алгебр этот результат был получен в [10]. Ю. А. Бахтурин в [5, 6] и М. В. Зайцев [17] доказали, что шрайеровы многообразия алгебр Ли — это только многообразие всех алгебр Ли и многообразие всех абелевых алгебр Ли. А. И. Ширшов показал в [48], что подалгебры свободных коммутативных неассоциативных и свободных антикоммутативных неассоциативных алгебр свободны. (см. также [10]), то есть многообразия всех коммутативных алгебр и всех антикоммутативных алгебр являются шрайеровыми. А. А. Михалёв в [29] и А. С. Штерн в [51] доказали, что многообразие всех супералгебр Ли является шрайеровым. А. А. Михалёв доказал это утверждение для многообразия всех цветных $p$-супералгебр Ли в [31]. А. И. Корепанов [22] доказал, что подалгебры свободных суперкоммутативных неассоциативных алгебр свободны. В. К. Харченко [70, 71] получил обобщение теоремы Ширшова—Витта для алгебр Хопфа над полем нулевой характеристики.

Алгебра $A$ над полем $F$ с билинейной антикоммутативной операцией $[x, y]$ (коммутатором) и трилинейной операцией $\mathcal{A}(x, y, z)$ (ассоциатором), удовлетворяющими тождеству

$$\begin{aligned}&\big[[x,y],z\big] + \big[[y,z],x\big] + \big[[z,x],y\big] = \\ &\quad = \mathcal{A}(x,y,z) + \mathcal{A}(y,z,x) + \mathcal{A}(z,x,y) - \mathcal{A}(y,x,z) - \mathcal{A}(x,z,y) - \mathcal{A}(z,y,x),\end{aligned}$$

называется алгеброй Акивиса. И. П. Шестаков и У. У. Умирбаев [106] доказали, что подалгебры свободных алгебр Акивиса свободны. Е. Чибриков [62] доказал, что подалгебры свободных алгебр Сабинина свободны. А. А. Михалёв и И. П. Шестаков [89] рассмотрели свойства ПБВ-пар многообразий алгебр и предложили общее доказательство шрайеровости многообразий всех коммутативных алгебр, всех антикоммутативных алгебр, всех алгебр Акивиса, всех алгебр Сабинина, всех линейных $n$-арных систем. Отметим, что многообразие всех ассоциативных алгебр не является шрайеровым. Действительно, рассмотрим свободную ассоциативную алгебру $A(x)$ с одним свободным образующим $x$. Пусть $B$ — подалгебра алгебры $A(x)$, порождённая элементами $x^2$ и $x^3$. Тогда подалгебра $B$ не порождается одним элементом. В то же время подалгебра $B$ коммутативна. Следовательно, $B$ не является свободной ассоциативной алгеброй.

У. У. Умирбаев [41, 110] построил новые примеры шрайеровых многообразий алгебр и предложил необходимые и достаточные условия для того, чтобы многообразие алгебр было шрайеровым. В частности, было показано, что многообразие алгебр, заданное тождеством $x \cdot x^2 = 0$, является шрайеровым. В недавней статье [66] В. Доценко и У. Умирбаев использовали методы теории операд для построения эффективного комбинаторного критерия шрайеровости многообразия алгебр над полем нулевой характеристики. Применяя этот критерий, авторы доказали, что многообразие всех пре-алгебр Ли является шрайеровым, существует бесконечно много шрайеровых многообразий с одной бинарной операцией, заданных тождествами $xx^2 + ax^2x = 0$ для любых заданных $a \neq 1$; $x\big(x\big(\dots(x \cdot x^2)\big)\big) = 0$.

Подалгебры свободных алгебр многообразий линейных $\Omega$-алгебр рассматривались в [4, 8, 9], шрайеровы многообразия $n$-алгебр Ли описаны в [44].

Свободные алгебры шрайеровых многообразий алгебр рассматривались в монографиях [55, 56, 59, 91, 96, 103].

Более детальную информацию о шрайеровых многообразиях алгебр можно найти в [41, 78, 89, 110] (для многообразий линейных $\Omega$-алгебр см. [4, 8, 9, 26]), см. также [44, 45].

Напомним, что система элементов свободной алгебры $A$ является примитивной, если она является подмножеством некоторого множества свободных образующих алгебры $A$.

А. А. Михалёв, У. У. Умирбаев и А. А. Золотых построили в [21, 93] серию интересных примеров алгебр Ли с одним определяющим соотношением над полем положительной характеристики. Например, пусть $F$ — поле, $\operatorname{char} F = p > 2$, $X = \{x, y, z\}$, $L(X)$ — свободная алгебра Ли, $h = x + [y, z] + (\operatorname{ad} x)^p(z) \in L(X)$, где $(\operatorname{ad} x)(a) = [x, a]$ для всех элементов $a$ алгебры $L(X)$. Тогда элемент $h$ не является примитивным элементом в алгебре $L(X)$, но в то же время $h$ — примитивный элемент свободной $p$-алгебры Ли $L^p(X)$. Пусть $I$ — идеал алгебры Ли $L(X)$, порождённый элементом $h$, $L = L(X)/I$. Поскольку элемент $h$ не является примитивным в свободной алгебре Ли $L(X)$, алгебра Ли $L$ не является свободной алгеброй Ли [23]. Но универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли $L$ — свободная ассоциативная алгебра ранга 2. В частности, когомологическая размерность алгебры Ли $L$ равна 1 [21, 93, 96]. Это показывает, что аналог теоремы Столлингса—Суона (группы когомологической размерности 1 свободны [108, 109]) неверен для алгебр Ли над полем положительной характеристики.

**Проблема 1.** Пусть $\operatorname{char} F = 0$, $L$ — $F$-алгебра Ли. Верно ли, что $L$ — свободная алгебра Ли в том и только в том случае, когда универсальная обёртывающая алгебра $U(L)$ — свободная ассоциативная $F$-алгебра?

**Проблема 2.** Пусть $\operatorname{char} F = 0$. Верно ли, что $F$-алгебра Ли $L$ свободна тогда и только тогда, когда её когомологическая размерность равна 1?

Проблема 2 была положительно решена для двухпорождённых алгебр Ли [42]. Некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы алгебра Ли с одним определяющим соотношением имела когомологическую размерность 1, были получены в [38].

П. Зусманович доказал в [114], что $p$-алгебры Ли когомологической размерности один одномерны.

В. Магнус [81] доказал в 1930 году знаменитую теорему о свободе (Freiheitssatz) для свободных групп; она играет важную роль в комбинаторной теории групп (см., например, [28, 61, 68]). Теорема о свободе для свободных разрешимых и нильпотентных групп была доказана Н. С. Романовским [36]. Обобщённая теорема о свободе (условие Линдона) для многообразий всех групп (всех алгебр Ли) и разрешимых групп (алгебр Ли соответственно) была доказана Н. С. Романовским [37] и О. Г. Харлампович[43] соответственно. Для свободных неассоциативных алгебр теорема о свободе была доказана А. И. Жуковым [16], для свободных (анти)коммутативных неассоциативных алгебр и для свободных алгебр Ли теорема о свободе была доказана А. И. Ширшовым в [49, 50]. Для этих многообразий алгебр теорема о свободе принимает следующий вид.

**Теорема 1 (теорема о свободе [16, 49, 50]).** *Пусть $\mathfrak{M}$ — одно из следующих многообразий алгебр над полем $F$: многообразие всех алгебр; многообразие всех коммутативных алгебр ($\operatorname{char} F \neq 2$); многообразие всех антикоммутативных алгебр; многообразие всех алгебр Ли. Пусть $A = F_{\mathfrak{M}}(X)$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ с множеством $X$ свободных образующих, $a \in A$, $a \neq 0$. Пусть также $(a)$ — идеал алгебры $A$, порождённый элементом $a$. Допустим, что элемент $a$ зависит от образующего $x$ из множества $X$ свободных образующих (это означает, что $a \notin F_{\mathfrak{M}}(X \setminus x)$). Тогда*

$$F_{\mathfrak{M}}(X \setminus x) \cap (a) = 0.$$

**Проблема 3.** Верна ли теорема о свободе для $p$-алгебр Ли и для супералгебр Ли над полем положительной характеристики?

Некоторые частные примеры положительного решения проблемы 3 рассмотрены в [32, 33, 56, 86, 96], для $\Omega$-алгебр см. [7]. Для разрешимых и нильпотентных алгебр Ли терема о свободе доказана В. В. Талаповым [39, 40]. Для ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики теорема о свободе доказана Л. Макар-Лимановым [82] (над полем положительной характеристики для однородного соотношения этот результат был получен М. Хеджесом [69]). Теорема о свободе для алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики была доказана Л. Макар-Лимановым и У. Умирбаевым [84] и для свободных алгебр в многообразии общих алгебр Пуассона — П. Колесниковым, Л. Макар-Лимановым и И. Шестаковым [74], для правосимметричных алгебр — Д Козыбаевым, Л. Макар-Лимановым и У. Умирбаевым [75], для алгебр Новикова над полем нулевой характеристики — Л. Макар-Лимановым и У. Умирбаевым [83]. Изучая ПБВ-пары многообразий, А. А. Михалёв и И. П. Шестаков [89] предложили общее доказательство теоремы о свободе для многообразий всех коммутативных алгебр, всех антикоммутативных алгебр, всех алгебр Акивиса, всех алгебр Сабинина.

В то же время теорема о свободе не имеет места ни для какого промежуточного многообразия между многообразием всех ассоциативных алгебр и многообразием всех коммутативных ассоциативных алгебр, для многообразий всех альтернативных алгебр, всех бинарно-лиевых алгебр, всех алгебр Мальцева, всех алгебр Лейбница, всех $(-1,1)$-алгебр (детали см. в [89]). Для большей информации о применениях теоремы о свободе см. [68, 72].

Применяя теорему о свободе, можно доказать следующий (неалгоритмический) критерий примитивности элемента

**Теорема 2 [23, 92].** *Пусть $F$ — поле, $\mathfrak{M}$ — одно из следующих многообразий алгебр над полем $F$: многообразие всех алгебр; многообразие всех коммутативных алгебр,* $(\operatorname{char} F \neq 2)$; *многообразие всех антикоммутативных алгебр; многообразие всех алгебр Ли. Пусть $A = F_{\mathfrak{M}}(X)$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ с множеством $X$ свободных образующих, $a \in A$, $a \neq 0$. Пусть также $(a)$ — идеал алгебры $A$, порождённый элементом $a$. Тогда $a$ — примитивный элемент свободной алгебры $A$ в том и только в том случае, когда фактор-алгебра $A/(a)$ является свободной алгеброй многообразия $\mathfrak{M}$.*

Теорема 2 для свободных групп была доказана Дж. Уайтхедом [112], для свободных алгебр Ли — Г. П. Кукиным [23].

Алгоритмы распознавания примитивных систем элементов свободных алгебр шрайеровых многообразий и алгоритмы дополнения примитивных систем элементов до свободных порождающих множеств были построены в [18—20, 34, 35, 46, 91, 92, 94—97].

В. Шпильрайн и Дж. Ю [107] показали, что утверждение теоремы 2 неверно для свободных ассоциативных алгебр. Пусть $A_n = F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра над полем $F$.

**Теорема 3 [107].** *Пусть $u = x_1 - (x_1^2 + x_2x_3)x_3$. Тогда для любого $n \geqslant 3$ фактор-алгебра $A_n/(u)$ свободной алгебры $A_n$ по идеалу $(u)$, порождённому элементом $u$, изоморфна алгебре $A_{n-1}$, но $u$ не является примитивным элементом алгебры $A_n$.*

Если характеристика поля $F$ равна нулю, эта теорема даёт отрицательный ответ на вопрос Дж. Бергмана. С другой стороны, В. Дренски и Дж.-Ю [67] показали, что для $n = 2$ не существует примеров такого рода. Аналогичный вопрос для алгебр многочленов, известный как гипотеза о вложении Абьянкара—Сатаи, является одной из основных открытых проблем аффинной алгебраической геометрии.

Для свободной алгебры $F(X)$ шрайерова многообразия всех алгебр над бесконечным полем $F$ К. Ауст [54] доказала, что для ненулевого элемента $a$ алгебры $F(X)$ фактор-алгебра $F(X)/(a)$ является свободной алгеброй тогда и только тогда, когда идеал $(a)$ порождается примитивным элементом алгебры $F(X)$.

**Проблема 4.** Верно ли утверждение теоремы 2 для свободных $p$-алгебр Ли и свободных $p$-супералгебр Ли?

Частные случаи положительного решения этой проблемы были рассмотрены Г. Раквиашвили [101, 102].

Теорема 2 показывает, что если $u$ и $v$ — такие ненулевые элементы свободной алгебры Ли $L = L(X)$, что фактор-алгебры $L/(u)$ и $L/(v)$ являются свободными алгебрами Ли, $L/(u) \cong L/(v)$, то $u$ и $v$ — примитивные элементы свободной алгебры Ли $L$. Следовательно, существует такой автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut}\bigl(L(X)\bigr)$, что $\varphi(u) = v$. В общем случае для непримитивных элементов $u$ и $v$ это утверждение неверно.

**Теорема 4 [90].** *Пусть $F$ — поле, $L = L(x, y, z)$ — свободная $F$-алгебра Ли с множеством $\{x, y, z\}$ свободных образующих,*

$$u = x - \bigl[[x, y], [y, z]\bigr], \quad v = x + \bigl[\bigl[[y, z], x\bigr], y\bigr],$$

*и пусть $(u)$ и $(v)$ — идеалы алгебры Ли $L$, порождённые элементами $u$ и $v$ соответственно. Тогда $L/(u) \cong L/(v)$, но не существует такого автоморфизма $\varphi$ алгебры $L$, что $\varphi(u) = v$.*

**Теорема 5 [90].** *Пусть $F$ — поле, $L = L(x, y)$ — свободная $F$-алгебра Ли с множеством $\{x, y\}$ свободных образующих,*

$$u = x - \bigl[\bigl[[x, y], y\bigr], [x, y]\bigr], \quad v = x - \bigl[\bigl[[x, y], x\bigr], y\bigr],$$

*и пусть $(u)$ и $(v)$ — идеалы алгебры Ли $L$, порождённые элементами $u$ и $v$ соответственно. Тогда $L/(u) \cong L/(v)$, но не существует такого автоморфизма $\varphi$ алгебры $L$, что $\varphi(u) = v$.*

Для свободных групп соответствующие примеры были построены Дж. Маккулом и А. Пиетровским [85] и А. Бруннером [60].

Алгебра Ли $L$ называется финитно аппроксимируемой, если для любых конечно порождённой подалгебры $H$ алгебры $L$ и элемента $h \in L$, $h \notin H$, существуют такие конечномерная алгебра Ли $B$ и эпиморфизм $\phi\colon L \to B$, что $\phi(h) \notin \phi(H)$. Другими словами, пересечение всех идеалов конечной коразмерности алгебры Ли $L$ равно нулю.

С. А. Агалаков [1] построил пример алгебры Ли с одним определяющим соотношением над полем нулевой характеристики, не являющейся финитно аппроксимируемой.

**Теорема 6 [1].** *Пусть $F$ — поле нулевой характеристики, $X = \{x, y\}$, $L(X)$ — свободная алгебра Ли над полем $F$ с множеством $X$ свободных образующих. Пусть $h = \big[[x,y],x\big] - [x,y] - x$, $L = L(X)/\mathrm{id}(h)$. Тогда алгебра Ли $L$ не является финитно аппроксимируемой. Если $F$ — поле положительной характеристики, то алгебра $L$ финитно аппроксимируема.*

**Проблема 5.** Существует ли алгебра Ли с одним определяющим соотношением над полем положительной характеристики, не являющаяся финитно аппроксимируемой?

Дж. Лабьют получил следующий результат.

**Теорема 7 [77].** *Пусть либо $F$ — поле, либо $F$ — область главных идеалов и $r$ — однородный элемент свободной алгебры Ли $L(X)$. Если центр алгебры Ли $L(X)/(r)$ нетривиален, то $X = \{x_1, x_2\}$ и либо $r = ax_1 + bx_2$, $a, b \in F$, $r \neq 0$, либо $r = a[x_1, x_2]$, $a \in F$, $a \neq 0$.*

Отметим, что можно предложить короткое доказательство теоремы 7 (для поля $F$), используя технику композиции Ширшова (стандартный базис идеала $(r)$ свободной алгебры Ли $L(X)$ состоит из одного элемента $r$).

Центр группы с одним определяющим соотношением был описан К. Мурасуги [98].

Б. Н. Демисенов и Г. П. Кукин [14] показали, что подалгебра алгебры Ли с одним определяющим соотношением является прямой суммой двух свободных подалгебр Ли (как линейных пространств).

**Проблема 6.**

1. Разрешима ли проблема вхождения (в конечно порождённые подалгебры) для алгебр Ли с одним определяющим соотношением?
2. Разрешима ли проблема изоморфизма для алгебр Ли с одним определяющим соотношением?
3. Любая ли алгебра Ли $L$ с одним определяющим соотношением является хопфовой (для любого ненулевого идеала $I$ алгебры Ли $L$ фактор-алгебра $L/I$ не изоморфна алгебре $L$)?

Ю. А. Бахтурин и А. Ю. Ольшанский [58] построили два интересных примера ограниченных алгебр Ли с одним определяющим соотношением.

Теорема 2 также верна для свободных алгебр шрайеровых многообразий алгебр с не обязательно одной бинарной операцией.

**Теорема 8 [89].** *Пусть теорема о свободе справедлива для однородного шрайерова многообразия алгебр $\mathcal{W}$, $u$ — ненулевой элемент свободной алгебры $\mathcal{W}[X]$. Тогда $u$ является примитивным элементом алгебры $\mathcal{W}[X]$ тогда и только тогда, когда фактор-алгебра $\mathcal{W}[X]/\mathrm{id}_{\mathcal{W}[X]}(u)$ — свободная алгебра в многообразии $\mathcal{W}$.*

Существует взаимосвязь между теоремой о свободе и разрешимостью проблемы равенства для алгебр с одним определяющим соотношением (во многих случаях теорема о свободе служит очень полезным инструментом для доказательства разрешимости проблемы равенства в алгебрах с одним определяющим соотношением в заданном многообразии), см., например, [16] для свободных неассоциативных алгебр, [49, 50] для свободных (анти)коммутативных алгебр и свободных алгебр Ли, [39, 40] для свободных разрешимых и свободных полинильпотентных алгебр Ли, [75] для свободных правосимметричных алгебр.

Алгебры Ли с одним определяющим соотношением изучались с точки зрения гомологической алгебры в [73, 76, 77]. Отметим, что в гомологической алгебре обычно рассматриваются однородные определяющие соотношения.

Теорема о свободе и проблема равенства для ассоциативных алгебр с одним определяющим соотношением рассматривались в [12, 64, 80] Для свободных ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики теорема о свободе была доказана Л. Макар-Лимановым в [82]. Однако общая проблема равенства для ассоциативных алгебр с одним определяющим соотношением — это открытая проблема.

Ассоциативные алгебры с одним определяющим соотношением изучались с точки зрения гомологической алгебры У. Диксом [65]. В. С. Губа [13] рассмотрел ассоциативные алгебры с одним определяющим соотношением энгелева типа.

## Литература

[1] Агалаков С. А. Алгебра Ли с одним определяющим соотношением не обязана быть финитно аппроксимируемой // Матем. заметки. — 1992. — Т. 51, № 4. — С. 3—7.

[2] Артамонов В. А., Климаков А. В., Михалёв А. А., Михалёв А. В. Примитивные и почти примитивные элементы шрайеровых многообразий // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 2. — С. 3—35.

[3] Артамонов В. А., Михалёв А. А., Михалёв А. В. Автоморфизмы свободных алгебр шрайеровых многообразий // Совр. пробл. матем. и мех. — 2009. — Т. 4, № 3. — С. 39—57.

[4] Баранович Т. М., Бургин М. С. Линейные $\Omega$-алгебры // УМН. — 1975. — Т. 30, № 4. — С. 61—106.

[5] Бахтурин Ю. А. Два замечания о многообразиях алгебр Ли // Матем. заметки. — 1968. — № 4. — С. 387—398.

[6] Бахтурин Ю. А. О тождествах в алгебрах Ли. I, II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1973. — Т. 28, № 1. — С. 12—18; № 2. — С. 30—37.

[7] Бургин М. С. Теорема о свободе в некоторых многообразиях линейные $\Omega$-алгебр и $\Omega$-колец // УМН. — 1969. — Т. 24, № 1. — С. 27—38; Исправление: УМН. — 1970. — Т. 25, № 1. — С. 248.

[8] Бургин М. С. Шрайеровы многообразиях линейных $\Omega$-алгебр // Матем. сб. — 1974. — Т. 93 (135), № 4. — С. 554—572.

[9] Бургин М. С., Артамонов В. А. Некоторые свойства подалгебр в многообразиях линейных $\Omega$-алгебр // Матем. сб. — 1972. — Т. 87, № 1. — С. 67—82.

[10] Гайнов А. Т. Коммутативные свободные и антикоммутативные свободные произведения алгебр // ДАН СССР. — 1960. — Т. 133, № 6. — С. 1275—1278.

[11] Гайнов А. Т. Коммутативные свободные и антикоммутативные свободные произведения алгебр // Сиб. матем. журн. — 1962. — Т. 3, № 6. — С. 805—833.

[12] Герасимов В. Н. Дистрибутивные решетки подпространств и проблема равенства для алгебр с одним соотношением // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 4. — С. 384—435.

[13] Губа В. С. Ассоциативные алгебры с одним соотношением энгелева типа // Сиб. матем. журн. — 1997. — Т. 38, № 6. — С. 1240—1250.

[14] Демисенов В. Н., Кукин Г. П. О подалгебрах лиевой алгебры с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. журн. — 1997. — Т. 38, № 5. — С. 1051—1057.

[15] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[16] Жуков А. И. Приведенные системы определяющих соотношений в неассоциативных алгебрах // Матем. сб. — 1950. — Т. 27, № 2. — С. 267—280.

[17] Зайцев М. В. О шрайеровых многообразиях алгебр Ли // Матем. заметки. — 1980. — Т. 28, № 1. — С. 119—126.

[18] Золотых А. А., Михалёв А. А. Ранг элемента свободной $p$-супералгебры Ли // ДАН СССР. — 1994. — Т. 334, № 6. — С. 690—693.

[19] Золотых А. А., Михалёв А. А. Алгоритмы дополнения примитивных систем элементов свободных алгебр Ли до свободных порождающих множеств // Интеллект. сист. — 1996. — Т. 1, вып. 1-4. — С. 173—183.

[20] Золотых А. А., Михалёв А. А. Комплекс алгоритмов для вычислений в супералгебрах Ли // Программирование. — 1997. — № 1. — С. 12—23.

[21] Золотых А. А., Михалёв А. А., Умирбаев У. У. Пример несвободной алгебры Ли когомологической размерности 1 // УМН. — 1994. — Т. 49, № 1. — С. 203—204.

[22] Корепанов А. И. Свободные неассоциативные суперкоммутативные алгебры // Фундамент. и прикл. матем. — 2003. — Т. 9, вып. 3. — С. 103—109.

[23] Кукин Г. П. Примитивные элементы свободных алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 4. — С. 458—472.

[24] Курош А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Матем. сб. — 1947. — Т. 20, № 2. — С. 239—262.

[25] Курош А. Г. Неассоциативные свободные суммы алгебр // Матем. сб. — 1955. — Т. 37, № 2. — С. 251—264.

[26] Курош А. Г. Свободные суммы мультиоператорных алгебр // Сиб. матем. журн. — 1960. — Т. 1, № 1. — С. 62—70.

[27] Курош А. Г. Мультиоператорные кольца и алгебры // УМН. — 1969. — Т. 24, № 1 (145). — С. 3—15.

[28] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[29] Михалёв А. А. Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли // Матем. заметки. — 1985. — Т. 37, № 5. — С. 653—661.

[30] Михалёв А. А. Свободные цветные супералгебры Ли // ДАН СССР. — 1986. — Т. 286, № 3. — С. 551—554.

[31] Михалёв А. А. Подалгебры свободных $p$-супералгебр Ли // Матем. заметки. — 1988. — Т. 43, № 2. — С. 178—191.

[32] Михалёв А. А. Лемма о слиянии и проблема равенства для цветных супералгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1989. — № 5. — С. 88—91.

[33] Михалёв А. А. Техника композиции А. И. Ширшова в супералгебрах Ли (некоммутативные базисы Грёбнера) // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1995. — Вып. 18. — С. 277—289.

[34] Михалёв А. А., Михалёв А. В., Чеповский А. А. Примитивные элементы свободных коммутативных и антикоммутативных неассоциативных алгебр // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. — 2010. — Т. 10, вып. 4. — С. 62—81.

[35] Михалёв А. А., Михалёв А. В., Чеповский А. А., Шампаньер К. Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 171—192.

[36] Романовский Н. С. Теорема о свободе для групп с одним определяющим соотношением в многообразиях разрешимых и нильпотентных групп данных ступеней // Матем. сб. — 1972. — Т. 89, № 1. — С. 93—99.

[37] Романовский Н. С. Свободные подгруппы в конечно-определенных группах // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 1. — С. 88—97.

[38] Серёгин А. В. Некоторые свойства алгебр Ли когомологической размерности один // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 2. — С. 779—783.

[39] Талапов В. В. О разрешимых алгебрах Ли с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. журн. — 1981. — Т. 22, № 4. — С. 176—181.

[40] Талапов В. В. О полинильпотентных алгебрах Ли, заданных одним определяющим соотношением // Сиб. матем. журн. — 1982. — Т. 23, № 5. — С. 192—204.

[41] Умирбаев У. У. О шрайеровых многообразиях алгебр // Алгебра и логика. — 1994. — Т. 33, № 3. — С. 317—340.

[42] Фельдман Г. Л. Концы алгебр Ли // УМН. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 199—200.

[43] Харлампович О. Г. Условие Линдона для разрешимых алгебр Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1984. — № 9. — С. 50—59.

[44] Хашина Ю. А. Шрайеровы многообразия $n$-лиевых алгебр // Сиб. матем. журн. — 1991. — Т. 32, № 2. — С. 197—199.

[45] Хашина Ю. А. Шрайеровы многообразия обобщённых колец // Научн. тр. ИвГУ. Математика. — 1999. — Вып. 2. — С. 133—141.

[46] Шампаньер К. Алгоритмы реализации ранга и примитивности систем элементов свободных неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 6, вып. 4. — С. 1229—1238.

[47] Ширшов А. И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Матем. сб. — 1953. — Т. 33, № 2. — С. 441—452.

[48] Ширшов А. И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Матем. сб. — 1954. — № 1. — С. 81—88.

[49] Ширшов А. И. Некоторые алгоритмические вопросы для $\varepsilon$-алгебр // Сиб. матем. журн. — 1962. — Т. 3, № 1. — С. 132—137.

[50] Ширшов А. И. Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сиб. матем. журн. — 1962. — Т. 3, № 2. — С. 292—296.

[51] Штерн А. С. Свободные супералгебры Ли // Сиб. матем. журн. — 1986. — Т. 27, № 1. — С. 170—174.

[52] Artamonov V. A. Varieties of algebras // Handbook of Algebra. Vol. 2 / M. Hazenwinkel, ed. — Amsterdam: Elsevier, 2000. — P. 547—575.

[53] Artamonov V. A., Mikhalev A. A., Mikhalev A. V. Combinatorial properties of free algebras of Schreier varieties // Polynomial Identities and Combinatorial Methods / A. Giambruno, A. Regev, M. Zaicev, eds. — New York: Marcel Dekker, 2003. — P. 47—99.

[54] Aust C. Primitive elements and one relation algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 193. — P. 375—387.

[55] Bahturin Yu. A. Identical Relations in Lie Algebras. — De Gruyter, 2021.

[56] Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. Infinite-Dimensional Lie Superalgebras. — Berlin: Walter de Gruyter, 1992.

[57] Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Zaicev M. V. Infinite-dimensional Lie superalgebras // Handbook of Algebra. Vol. 2 / M. Hazenwinkel, ed. — Amsterdam: Elsevier, 2000. — P. 579—614.

[58] Bahturin Yu., Olshanskii A. Large restricted Lie algebras // J. Algebra. — 2007. — Vol. 310. — P. 413—427.

[59] Bokut' L. A., Kukin G. P. Algorithmic and Combinatorial Algebra. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1994.

[60] Brunner A. M. A group with an infinite number of Nielsen inequivalent one-relator presentations // J. Algebra. — 1976. — Vol. 42. — P. 81—84.

[61] Cherix P.-A., Schaeffer G. An asymptotic Freiheitssatz for finitely generated groups // Enseign. Math. (2). — 1998. — Vol. 44, No. 1-2. — P. 9—22.

[62] Chibrikov E. On free Sabinin algebras // Commun. Algebra. — 2011. — Vol. 39. — P. 4014—4035.

[63] Cohn P. M. Free Rings and Their Relations. — London: Academic Press, 1985.

[64] Dicks W. On one-relator associative algebras // J. London Math. Soc. — 1972. — Vol. 5. — P. 249—252.

[65] Dicks W. On the cohomology of one-relator associative algebras // J. Algebra. — 1985. — Vol. 97. — P. 79—100.

[66] Dotsenko V., Umirbaev U. An effective criterion for Nielsen—Schreier varieties // Int. Math. Res. Notices. — 2023. — Issue 23. — P. 20385—20432.

[67] Drensky V., Yu J.-T. Primitive elements of free metabelian algebras of rank two // Int. J. Algebra Comp. — 2003. — Vol. 13, no. 1. — P. 17—33.

[68] Fine B., Rosenberger G. The Freiheitssatz and its extensions // The Mathematical Legacy of Wilhelm Magnus: Groups, Geometry, and Special Functions: Conference on the Legacy of Wilhelm Magnus, May 1—3, 1992, Polytechnic Univ., Brooklyn, New York / W. Abikoff, J. S. Birman, K. Kuiken, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 169). — P. 213—252.

[69] Hedges M. C. The Freiheitssatz for graded algebras // J. London Math. Soc. (2). — 1987. — Vol. 35. — P. 395—405.

[70] Kharchenko V. K. Braided version of Shirshov—Witt theorem // J. Algebra. — 2005. — Vol. 294, no. 1. — P. 196—225.

[71] Kharchenko V. Quantum Lie Theory. A Multilinear Approach. — Berlin: Springer, 2015. — (Lect. Notes Math.; Vol. 2150).

[72] Kharlampovich O. G., Sapir M. V. Algorithmic problems in varieties // Int. J. Algebra Comput. — 1995. — Vol. 5. — P. 379—602.

[73] Kochloukova D. H., Martinez-Perez C. Bass—Serre theory for Lie algebras: A homological approach // J. Algebra. — 2021. — Vol. 585. — P. 143—175.

[74] Kolesnikov P. S., Makar-Limanov L. G., Shestakov I. P. The Freiheitssatz for generic Poisson algebras // SIGMA. — 2014. — Vol. 10. — P. 115.

[75] Kozybaev D., Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras // Asian-Eur. J. Math. — 2008. — Vol. 1, no. 2. — P. 243—254.

[76] Labute J. P. Algèbres de Lie et pro-p-groupes definis par une seule relation // Invent. Math. — 1967. — Vol 4. — P. 142—158.

[77] Labute J. P. Free ideals of one-relator graded Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 347, no. 1. — P. 175—188.

[78] Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 553—562.

[79] Lewin J. Free modules over free algebras and free group algebras: The Schreier technique // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 145. — P. 455—465.

[80] Lewin J., Lewin T. On ideals of free associative algebras generated by a single element // J. Algebra. — 1968. — Vol. 8, no. 2. — P. 248—255.

[81] Magnus W. Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz) // J. Reine Angew. Math. — 1930. — Vol. 163. — P. 141—165.

[82] Makar-Limanov L. G. Algebraically closed skew fields // J. Algebra. — 1985. — Vol. 93. — P. 117—135.

[83] Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz for Novikov algebras // TWMS J. Pure Appl. Math. — 2011. — Vol. 2, no. 2. — P. 228—235.

[84] Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz for Poisson algebras // J. Algebra. — 2011. — Vol. 328. — P. 495—503.

[85] McCool J., Pietrowski A. On free products with amalgamation of two infinite cyclic groups // J. Algebra. — 1971. — Vol. 18. — P. 377—383.

[86] Mikhalev A. A. The composition lemma for color Lie superalgebras and for Lie $p$-superalgebras // Proc. of the Int. Conf. on Algebra Dedicated to the Memory of A. I. Malcev / L. A. Bokut', A. I. Mal'cev, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131, Pt. 2). — P. 91—104.

[87] Mikhalev A. A. Combinatorial aspects of the theory of Lie superalgebras // First Int. Tainan—Moscow Algebra Workshop. — Berlin: Walter de Gruyter, 1996. — P. 37—68.

[88] Mikhalev A. A. Primitive elements and automorphisms of free algebras of Schreier varieties // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 102, No. 6. — P. 4627—4639.

[89] Mikhalev A. A., Shestakov I. P. PBW-pairs of varieties of linear algebras // Commun. Algebra. — 2014. — Vol. 42, No. 2. — P. 667—687.

[90] Mikhalev A. A., Shpilrain V., Umirbaev U. U. On isomorphism of Lie algebras with one defining relation // Int. J. Algebra Comput. — 2004. — Vol. 14, No. 3. — P. 389—393.

[91] Mikhalev A. A., Shpilrain V., Yu J.-T. Combinatorial Methods: Free Groups, Polynomials, and Free Algebras. — New York: Springer, 2004.

[92] Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., Yu J.-T. Automorphic orbits in free non-associative algebras // J. Algebra. — 2001. — Vol. 243. — P. 198—223.

[93] Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., Zolotykh A. A. A Lie algebra with cohomological dimension one over a field of prime characteristic is not necessarily free // First Int. Tainan—Moscow Algebra Workshop. — Berlin: Walter de Gruyter, 1996. — P. 257—264.

[94] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Applications of Fox differential calculus to free Lie superalgebras // Non-Associative Algebra and Its Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1994. — P. 285—290.

[95] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Rank and primitivity of elements of free color Lie ($p$-)super-algebras // Internat. J. Algebra Comput. — 1994. — Vol. 4. — P. 617—656.

[96] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras. — Boca Raton: CRC Press, 1995.

[97] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Algorithms for primitive elements of free Lie algebras and superalgebras // Proc. ISSAC-96. — New York: ACM Press, 1996. — P. 161—169.

[98] Murasugi K. The center of a group with single defining relation // Math. Ann. — 1964. — Vol. 155. — P. 246—251.

[99] Nielsen J. Die Isomorphismengruppe der freien Gruppe // Math. Ann. — 1924. — Vol. 91. — P. 169—209.

[100] Pérez-Izquierdo J. M. Algebras, hyperalgebras, nonassociative bialgebras and loops // Adv. Math. — 2007. — Vol. 208, no. 2. — P. 834—876.

[101] Rakviashvili G. Combinatorial aspects of free associative algebras and cohomologies of Lie p-algebras with one defining relation // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 160, no. 6. — P. 822—832.

[102] Rakviashvili G. Primitive elements of free Lie p-algebras // Bull. Georgian Nat. Acad. Sci. — 2014. — Vol. 8, no. 2. — P. 15—18.

[103] Reutenauer C. Free Lie Algebras. — Oxford: Clarendon Press, 1993.

[104] Schreier O. Die Untergruppen der freien Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1927. — Vol. 5. — P. 161—183.

[105] Selected Works of A. I. Shirshov / Bokut L. A., Latyshev V., Shestakov I., Zelmanov E., eds. — Basel: Birkhäuser, 2009.

[106] Shestakov I. P., Umirbaev U. U. Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras // J. Algebra. — 2002. — Vol. 250. — P. 533—548.

[107] Shpilrain V., Yu J.-T. Factor algebras of free algebras: On a problem of G. Bergman // Bull. London Math. Soc. — 2003. — Vol. 35. — P. 706—710.

[108] Stallings J. On torsion-free groups with infinitely many ends // Ann. Math. — 1968. — Vol. 88. — P. 312—334.

[109] Swan R. G. Groups of cohomological dimension one // J. Algebra. — 1969. — Vol. 12. — P. 585—610.

[110] Umirbaev U. U. Universal derivations and subalgebras of free algebras // Algebra (Krasnoyarsk, 1993). — Berlin: Walter de Gruyter, 1996. — P. 255—271.

[111] Whitehead J. H. C. On certain sets of elements in a free group // Proc. London Math. Soc. — 1936. — Vol. 41. — P. 48—56.

[112] Whitehead J. H. C. On equivalent sets of elements in a free group // Ann. Math. — 1936. — Vol. 37. — P. 782—800.

[113] Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. — 1956. — Vol. 64. — P. 195—216.

[114] Zusmanovich P. On Lie $p$-algebras of cohomological dimension one // Indag. Math. — 2019. — Vol. 30, no. 2. — P. 288—299.