О кольцах с полудистрибутивными модулями

А. А. ТУГАНБАЕВ
Национальный исследовательский университет МЭИ,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.5

Ключевые слова: полудистрибутивный модуль, кольцо Кёте, кольцо конечного типа представлений.

Аннотация

Модуль называется дистрибутивным, если решётка его подмодулей дистрибутивна. Прямая сумма дистрибутивных модулей называется полудистрибутивным модулем. В работе рассмотрены кольца, над которыми все правые модули полудистрибутивны.

Abstract

A. A. Tuganbaev, On rings with semidistributive modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 3, pp. 171—179.

A module is said to be distributive if the lattice of its submodules is distributive. A direct sum of distributive modules is called a semidistributive module. In this paper, we consider rings A such that all right A-modules are semidistributive.

1. Введение

Мы рассматриваем только ассоциативные унитальные ненулевые кольца и унитарные модули. Говоря «артиново справа кольцо A» («артиново кольцо A») мы считаем, что модуль A_A артинов (соответственно оба модуля A_A и ${}_AA$ артиновы).

В сборнике проблем теории колец «Днестровская тетрадь» [6] Л. А. Скорняков поставил следующие два вопроса (проблема 1.116). Над какими кольцами все правые модули полудистрибутивны? Существуют ли неартиновы кольца с этим свойством?

Замечание 1.1. В [16] показано, что кольцо A, над которым все правые модули полудистрибутивны, является артиновым справа правым кольцом Кёте. (Кольцо A называется *правым кольцом Кёте*, если каждый правый A-модуль является прямой суммой циклических модулей.) Хорошо известно, что правые кольца Кёте являются артиновыми. Это даёт отрицательный ответ на второй вопрос Л. А. Скорнякова; см. также [17, теорема 11.6]. Таким образом, все кольца, над которыми все правые модули полудистрибутивны, являются артиновыми правыми кольцами Кёте. Проблема описания правых колец Кёте A

Фундаментальная и прикладная математика, 2023, том 24, № 3, с. 171—179.

только через внутренние свойства кольца A остаётся нерешённой для произвольных колец; эта проблема называется *проблемой Кёте*. Проблема Кёте затронута во многих статьях (см., например, [5, 7—9, 11, 12, 15]).

Замечание 1.2. По поводу второго вопроса Л. А. Скорнякова см. [16] и [17, раздел 11.1]. В [10] изучался частный случай колец, над которыми все правые модули полудистрибутивны.

Для модуля M через $J(M)$ обозначается радикал Джекобсона модуля M. Пусть A — полупримарное кольцо[1] и B — *базисное* кольцо полупримарного кольца A, т. е. $B = eAe$, где e — *базисный* идемпотент кольца A; это означает, что $e = e_1 + \ldots + e_n$, где $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — такое множество локальных ортогональных идемпотентов из A, что $\{e_1A, \ldots, e_nA\}$ ($\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$) — множество всех попарно неизоморфных неразложимых прямых слагаемых модуля A_A (соответственно ${}_AA$). Если $A = B$, то полупримарное кольцо A называется *самобазисным*. Хорошо известно, что базисное кольцо B полупримарного кольца A является самобазисным, причём категория $\operatorname{Mod} A$ всех правых A-модулей эквивалентна категории всех правых B-модулей, т. е. кольца A и B *Морита-эквивалентны*. Кроме того, известно, что свойство быть артиновым самобазисным кольцом сохраняется при Морита-эквивалентности.

2. Основные результаты

Замечание 2.1. Из замечания 1.1 и изложенного выше вытекает, что любое кольцо A, над которым все правые модули полудистрибутивны, является артиновым кольцом с самобазисным базисным кольцом B, причём кольца A и B Морита-эквивалентны. Ясно, что свойство полудистрибутивности всех правых модулей сохраняется при Морита-эквивалентности. Поэтому все правые B-модули полудистрибутивны. Таким образом, при изучении колец, над которыми все правые модули полудистрибутивны, можно ограничиться такими артиновыми самобазисными кольцами Кёте B, что каждое кольцо, Морита-эквивалентное кольцу B, является артиновым самобазисным кольцом.

Модуль называется *вполне циклическим*, если все его подмодули являются циклическими.

Теорема 2.2 [17, теорема 11.6]. *Для кольца A равносильны условия:*

1) *все правые A-модули полудистрибутивны;*
2) *A — артиново кольцо и каждый правый A-модуль является прямой суммой вполне циклических дистрибутивных модулей с композиционным рядом;*
3) *A — артиново кольцо с базисным идемпотентом e и для любого правого A-модуля M правый eAe-модуль Me_{eAe} является прямой суммой вполне циклических модулей с композиционным рядом.*

[1]Кольцо A называется *полупримарным*, если радикал $J(A)$ нильпотентен, а фактор-кольцо $A/J(A)$ — полупростое артиново кольцо. Каждое артиново справа или слева кольцо полупримарно.

Кольцо A называется кольцом *конечного типа представлений*, если A — артиново кольцо, обладающее с точностью до изоморфизма только конечным числом неразложимых правых модулей и конечным числом неразложимых левых модулей. Кольцо A называется *правым кольцом Кавады*, если каждое кольцо, Морита-эквивалентное кольцу A, является правым кольцом Кёте. Заметим, что все правые кольца Кёте (в частности, все правые кольца Кавады) являются кольцами конечного типа представлений.

Теорема 2.3 [18]. *Для кольца A равносильны условия*:

1) *все правые A-модули полудистрибутивны*;
2) *A — правое кольцо Кавады с базисным кольцом B, причём каждый правый A-модуль и каждый правый B-модуль являются прямыми суммами вполне циклических дистрибутивных модулей*;
3) *A — правое кольцо Кавады с базисным кольцом B и каждый неразложимый правый B-модуль является вполне циклическим модулем.*

Замечание 2.4. В [11] Кавада решил проблему Кёте для конечномерных алгебр над полем. Теорема Кавады также полностью описывает такие самобазисные конечномерные алгебры A над полем, что каждый неразложимый A-модуль имеет цоколь без квадратов и вершину без квадратов; там же описаны все неразложимые A-модули. При этом проблема Кёте остаётся открытой в общем случае. В [11] содержится 19 весьма сложных условий для локальных идемпотентов базисного кольца B алгебры A, выполнение которых равносильно тому, что A — правое кольцо Кёте. В [15] этот результат Кавады анализируется и комментируется. К упомянутым 19 условиям можно добавить следующее условие 20: для любого локального идемпотента e базисной алгебры B модуль eB_B вполне цикличен. Таким образом, получается формальное описание конечномерных алгебр над полем, над которым все правые модули полудистрибутивны. Конечно, такое описание не очень полезно.

Кольцо называется *нормальным* или *абелевым*, если все его идемпотенты центральны.

Следствие 2.5. *Если фактор-кольцо $A/J(A)$ кольца A нормально, то все правые A-модули полудистрибутивны в точности тогда, когда A — артиново кольцо и каждый правый A-модуль является прямой суммой вполне циклических модулей с композиционным рядом.*

Кольцо, в котором все правые идеалы и все левые идеалы являются главными, называется *кольцом главных идеалов.*

Теорема 2.6 [12]. *Артиново кольцо главных идеалов является кольцом Кёте.*

Следствие 2.7 [5, 12]. *Коммутативное кольцо A является кольцом Кёте в точности тогда, когда A — артиново кольцо главных идеалов.*

Модуль называется *цепным*, если все его подмодули линейно упорядочены по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем.

С помощью следствия 2.5 и теоремы 2.6 легко проверить теорему 2.8.

Теорема 2.8. *Для нормального кольца A равносильны условия*:

1) *все правые A-модули полудистрибутивны*;
2) *все левые A-модули полудистрибутивны*;
3) *A — артиново кольцо главных идеалов*;
4) *кольцо A изоморфно прямому произведению конечного числа артиновых цепных колец.*

Для любого модуля M *вершиной* $\operatorname{top} M$ называется фактор-модуль $M/J(M)$. Модулем *без квадратов* называется модуль, не содержащий прямую сумму двух ненулевых изоморфных подмодулей.

Теорема 2.9 [4]. *Нормальное кольцо A является кольцом Кёте в точности тогда, когда A — артиново кольцо главных идеалов.*

В соответствии с [2] кольцо A называется *строгим правым* (*строгим левым*) *кольцом Кёте*, если каждый ненулевой правый (соответственно левый) A-модуль является прямой суммой модулей с ненулевой циклической вершиной без квадратов. Строгие правые и левые кольца Кёте называются *строгими кольцами Кёте*.

В соответствии с [2] кольцо A называется *очень строгим правым* (*очень строгим левым*) *кольцом Кёте*, если каждый ненулевой правый (соответственно левый) A-модуль является прямой суммой модулей с простой вершиной. Очень строгие правые и левые кольца Кёте называются *очень строгими кольцами Кёте*.

Известны следующие строгие включения (см., например, [2]):

$$\text{очень строгие правые кольца Кёте} \subsetneq$$
$$\subsetneq \text{строгие правые кольца Кёте} \subsetneq \text{правые кольца Кёте.}$$

Теорема 2.10 [2]. *Для кольца A равносильны условия*:

1) *A — правое кольцо Кёте*;
2) *каждый ненулевой правый A-модуль является прямой суммой модулей с ненулевой циклической вершиной*;
3) *кольцо A артиново справа и каждый правый A-модуль является прямой суммой модулей с циклической вершиной*;
4) *A — кольцо конечного типа представлений и каждый* (*конечно порождённый*) *неразложимый правый A-модуль имеет циклическую вершину*;
5) *A — кольцо конечного типа представлений и вершина каждого неразложимого правого A-модуля U изоморфно вкладывается в A/J.*

3. Дополнения

В [1] определены кольца ко-Кёте, тесно связанные с кольцами Кёте: кольцо A называется правым (строгим правым, очень строгим правым) кольцом ко-Кёте, если каждый ненулевой правый A-модуль является прямой суммой модулей с ненулевым циклическим цоколем (соответственно с ненулевым цоколем без квадратов, с простым цоколем). Левосторонние аналоги этих понятий определяются аналогично.

Замечание 3.1. Согласно [1] существует очень строгое правое кольцо ко-Кёте, над которым не каждый правый модуль полудистрибутивен.

Модуль называется *равномерным*, если пересечение любых двух его ненулевых подмодулей не равно нулю.

Пример 3.2 (см. также [1; 13; 14; 17, пример 1.22])**.** Пусть A — 5-мерная алгебра над полем $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, состоящая из всех (3×3)-матриц вида

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix},$$

где $f_{ij} \in \mathbb{Z}_2$. Пусть e_{ij} — матрица, у которой элемент на позиции ij равен 1, а элементы на остальных позициях равны 0. Тогда $\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{33}\}$ является $\mathbb{Z}_2$-базисом $\mathbb{Z}_2$-алгебры A. Кроме того, верны следующие утверждения.

1. $1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, где e_{11}, e_{22}, e_{33} — примитивные ортогональные идемпотенты, $e_{12}\mathbb{Z}_2 = e_{12}A$, $e_{13}\mathbb{Z}_2 = e_{13}A$, $J(A) = e_{12}\mathbb{Z}_2 + e_{13}\mathbb{Z}_2$, $J^2 = 0$, и кольцо $A/J(A)$ изоморфно прямому произведению трёх копий поля $\mathbb{Z}_2$.
2. $A_A = e_{11}A \oplus e_{22}A \oplus e_{33}A$, где $e_{22}A = e_{22}\mathbb{Z}_2$ и $e_{33}A = e_{33}\mathbb{Z}_2$ — простые проективные правые A-модули, изоморфные модулям $e_{12}A$ и $e_{13}A$ соответственно.
3. $e_{11}A = e_{11}\mathbb{Z}_2 + e_{12}\mathbb{Z}_2 + e_{13}\mathbb{Z}_2$ — неравномерный неразложимый дистрибутивный (и поэтому без квадратов) вполне циклический A-модуль с композиционным рядом, причём каждый собственный ненулевой подмодуль $e_{11}A$ совпадает либо с проективным модулем $e_{12}A \oplus e_{13}A$, либо с одним из простых проективных неизоморфных модулей $e_{12}A$ и $e_{13}A$.

Можно проверить, что A — наследственное артиново базисное кольцо. Тогда согласно [9] A — кольцо Кёте. Можно проверить, что A имеет 32 элемента, $|U(A)| = 4$ и необратимые элементы кольца A образуют 3 класса указанных ниже изоморфных циклических неразложимых модулей:

$$Q_1 = e_{11}A, \quad Q_2 = e_{11}A/e_{13}A, \quad Q_3 = e_{11}A/e_{12}A,$$
$$Q_4 = e_{11}A/J(A), \quad Q_5 = e_{22}A, \quad Q_6 = e_{33}A.$$

Кроме того, каждый неразложимый циклический правый A-модуль имеет цоколь без квадратов, так как $\operatorname{Soc}(Q_1) = J(A)$ — модуль без квадратов, $\operatorname{Soc} Q_2 = J(A)e_{13}A$, $\operatorname{Soc} Q_3 = J(A)/e_{12}A$, а модули Q_4, Q_5, Q_6 просты. Тогда каждый правый A-модуль — прямая сумма модулей без квадратов (A — (строгое) правое кольцо ко-Кёте), тогда как правый A-модуль $e_{11}A$ не является прямой суммой равномерных модулей (A не является очень строгим правым кольцом ко-Кёте), так как A не является полуцепным справа.

Мы приведём несколько результатов из [1]. Напомним, что полупримарное кольцо A называется *правым QF-2 кольцом* (*правым ко-QF-2 кольцом*), если каждый неразложимый проективный правый A-модуль имеет простой существенный цоколь (соответственно простую вершину).

Полупримарное кольцо A называется *обобщённым левым ко-QF-2 кольцом*, если каждый неразложимый проективный левый A-модуль P имеет вершину без квадратов. Полупримарное кольцо A называется *обобщённым ко-QF-2 кольцом*, если A — обобщённое левое и правое ко-QF-2 кольцо.

Теорема 3.3 [1]. *Следующие условия эквивалентны для кольца A:*

1) *A — правое кольцо ко-Кёте;*
2) *каждый ненулевой правый A-модуль — прямая сумма модулей с ненулевой вершиной и циклическим существенным цоколем;*
3) *A — кольцо конечного типа представлений и каждый (конечно порождённый) неразложимый правый A-модуль имеет циклический (существенный) цоколь;*
4) *A — кольцо конечного типа представлений и цоколь каждого неразложимого правого A-модуля U изоморфно вкладывается в A/J.*

Пусть A — кольцо конечного типа представлений, $\{U_1, \ldots, U_n\}$ — полное множество представителей классов изоморфных конечно порождённых неразложимых правых A-модулей и $UU_A = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$. *Правое кольцо Ауслендера* кольца A — это кольцо $\operatorname{End} U_A$.

Теорема 3.4 [1]. *Пусть A — кольцо и $J = J(A)$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *A — строгое правое кольцо ко-Кёте;*
2) *каждый правый A-модуль — прямая сумма модулей без квадратов;*
3) *каждый ненулевой правый A-модуль — прямая сумма модулей с ненулевой вершиной и (циклическим) цоколем без квадратов;*
4) *A — кольцо конечного типа представлений и каждый (конечно порождённый) неразложимый правый A-модуль имеет (циклический) цоколь без квадратов;*
5) *A — кольцо конечного типа представлений и правое кольцо Ауслендера для A — обобщённое правое QF-2 кольцо;*
6) *A — кольцо конечного типа представлений и правое кольцо Ауслендера для A — обобщённое левое ко-QF-2 кольцо;*
7) *A — кольцо конечного типа представлений с базисным множеством примитивных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$, а цоколь каждого неразложимого правого A-модуля U изоморфно вкладывается в $(e_1A/e_1J) \oplus \ldots \oplus (e_nA/e_n)J$.*

Теорема 3.5 [1]. *Пусть все максимальные правые идеалы кольца A являются идеалами. Следующие условия равносильны:*

1) *A — правое кольцо ко-Кёте;*
2) *A — строгое правое кольцо ко-Кёте;*
3) *A — кольцо конечного типа представлений и каждый неразложимый модуль имеет цоколь без квадратов;*
4) *A — кольцо конечного типа представлений и каждый неразложимый модуль имеет циклический цоколь;*
5) *A — кольцо конечного типа представлений и правое кольцо Ауслендера для A — обобщённое правое QF-2 кольцо;*
6) *A — кольцо конечного типа представлений и правое кольцо Ауслендера для A — обобщённое левое ко-QF-2 кольцо.*

Теорема 3.6 [1]. *Пусть A — конечномерная алгебра над полем. Если A — строгое правое кольцо ко-Кёте, то A — левое кольцо Кёте.*

Модуль M называется *продолжаемым*, если каждый его подмодуль является существенным в прямом слагаемом модуля M.

Теорема 3.7 [1]. *Следующие условия эквивалентны для кольца A:*

1) *A — очень строгое правое кольцо ко-Кёте;*
2) *каждый правый A-модуль — прямая сумма коциклических модулей;*
3) *каждый ненулевой правый A-модуль — прямая сумма модулей с ненулевой вершиной и простым цоколем;*
4) *A — кольцо конечного типа представлений и каждый (конечно порождённый) неразложимый правый A-модуль имеет простой цоколь;*
5) *каждый правый A-модуль — прямая сумма продолжаемых модулей;*
6) *каждый правый A-модуль — прямая сумма равномерных модулей;*
7) *A — кольцо конечного типа представлений и правое кольцо Ауслендера кольца A — правое QF-2 кольцо;*
8) *A — кольцо конечного типа представлений и правое кольцо Ауслендера для A — левое ко-QF-2 кольцо.*

Если выполнены эти условия 1)—8), то A — полуцепное справа, артиново кольцо.

Модуль M называется *поднимаемым*, если для каждого подмодуля N в M существует такое разложение в прямую сумму $M = M_1 \oplus M_2$, что $M_1 \subseteq N$ и подмодуль $N \cap M_2$ мал в M_2.

Теорема 3.8 [1]. *Следующие условия эквивалентны для любого кольца A:*

1) *A — очень строгое кольцо ко-Кёте;*
2) *A — очень строгое кольцо Кёте;*
3) *A — артиново полуцепное кольцо;*
4) *все правые A-модули и левые A-модули являются прямыми суммами равномерных модулей;*

5) *все правые A-модули и левые A-модули являются прямыми суммами продолжаемых модулей;*
6) *все правые A-модули и левые A-модули являются прямыми суммами поднимаемых модулей;*
7) *A — кольцо конечного типа представлений и левое (правое) кольцо Ауслендера для A является QF-2 кольцом;*
8) *A — кольцо конечного типа представлений и левое (правое) кольцо Ауслендера для A является ко-QF-2 кольцом;*
9) *все правые A-модули и левые A-модули являются прямыми суммами конечно порождённых модулей с вершинами без квадратов.*

Открытый вопрос 3.9. Решить проблему Кёте в общем случае.

Открытый вопрос 3.10. Пусть над кольцом A все правые модули полудистрибутивны. Верно ли, что все левые A-модули полудистрибутивны?

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-11-00052, `https://rscf.ru/project/22-11-00052`.

Литература

[1] Asgari Sh., Behboodi M., Khedrizadeh S. Left co-Köthe rings and their characterizations // Commun. Algebra. — 2023.
[2] Asgari Sh., Behboodi M., Khedrizadeh S. Several characterizations of left Köthe rings // Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat. Ser. A-Mat. — 2023. — Vol. 117, no. 145.
[3] Baghdari S., Öiner J. Pure semisimple and Köthe group rings // Commun. Algebra. — 2023. — Vol. 51, no. 7. — P. 2779—2790.
[4] Behboodi M., Ghorbani A., Moradzadeh-Dehkordi A., Shojaee S. H. On left Köthe rings and a generalization of a Köthe—Cohen—Kaplansky theorem // Proc. Amer. Math. Soc. — 2014. — Vol. 8. — P. 2625—2631.
[5] Cohen I. S., Kaplansky I. Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules // Math. Z. — 1951. — Vol. 54. — P. 97—101.
[6] Dniester Notebook: Unsolved Problems in the Theory of Rings and Modules. — Novosibirsk: Math. Inst., Russ. Acad. Sci., Siber. Branch, 1993.
[7] Fazelpour Z., Nasr-Isfahani A. Connections between representation-finite and Köthe rings // J. Algebra. — 2018. — Vol. 514. — P. 25—39.
[8] Fazelpour Z., Nasr-Isfahani A. Auslander correspondence for Kawada rings. — `arXiv:math.RT/2105.10898`.
[9] Fazelpour Z., Nasr-Isfahani A. Coxeter diagrams and the Köthe's problem // Canad. J. Math. — 2021. — Vol. 73, no. 3. — P. 656—686.
[10] Fuller K. R. Rings of left invariant module type // Commun. Algebra. — 1978. — Vol. 6. — P. 153—167.
[11] Kawada Y. On Köthe's problem concerning algebras for which every indecomposable module is cyclic. I—III // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. — 1962. — Vol. 7. — P. 154—230; 1963. — Vol. 8. — P. 1—62; 1964. — Vol. 9. — P. 165—250.

[12] Köthe G. Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring // Math. Z. — 1935. — Vol. 39, no. 1. — P. 31—44.

[13] Nakayama T. Note on uni-serial and generalized uni-serial rings // Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1940. — Vol. 16. — P. 285—289.

[14] Nakayama T. On Frobeniusean algebras. II // Ann. Math. — 1941. — Vol. 42. — P. 1—27.

[15] Ringel C. M. Kawada's theorem // Abelian Group Theorem. Proc. of the Oberwolfach Conf., January 12—17, 1981. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 874). — P. 431—447.

[16] Tuganbaev A. Rings over which every module is a direct sum of distributive modules // Moscow Univ. Math. Bull. — 1980. — No. 1. — P. 61—64.

[17] Tuganbaev A. Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht: Springer, 1998.

[18] Tuganbaev A. $\aleph_0$-distributive modules and rings // Int. J. Algebra Comput. — 2023.