Расширяемое эссе
как веб-ресурс поддержки лекционных курсов

С. А. АБРАМОВ
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» РАН
e-mail: sergeyabramov@mail.ru

А. А. РЯБЕНКО
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» РАН
e-mail: anna.ryabenko@gmail.com

Д. Е. ХМЕЛЬНОВ
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» РАН
e-mail: dennis_khmelnov@mail.ru

УДК 519.7

Ключевые слова: расширяемое эссе, веб-ресурс, компьютерная алгебра.

Аннотация

Расширяемое эссе в роли расширяемого конспекта — веб-ресурс, облегчающий пользователю овладение материалом того или иного лекционного курса. Для примера рассмотрены лекции по одному из разделов компьютерной алгебры.

Abstract

S. A. Abramov, A. A. Ryabenko, D. E. Khmelnov, Extendable essay as a web resource for supporting lecture courses, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 4, pp. 3—9.

An extendable essay as extendable lecture notes is a web resource that makes it easier for the user to master the material of a particular lecture course. For example, we consider such a course on a chapter of computer algebra.

1. Введение

В расширяемом эссе кратко излагаются базовые положения предмета, скажем лекционного учебного курса. Читателю (пользователю) в некоторых местах даётся возможность запросить подробности или иллюстративный пример. Регулярно предлагается возможность получения контрольного вопроса, ответ на который будет проверен.

Обращение к расширяемому эссе может быть полезным как для предварительного знакомства с предметом и содержанием лекционного курса, так и

Фундаментальная и прикладная математика, 2023, том 24, № 4, с. 3—9.

в ходе слушания подробных аудиторных лекций, а также при подготовке к итоговому экзамену (повторение материала) — эссе даёт возможность бросить достаточно быстрый взгляд на основные понятия и утверждения, присутствующие в курсе лекций.

Идея расширяемого эссе прошла несколько этапов развития и реализации [2, 4].

Ниже в статье даётся разбор расширяемого эссе «Лорановы решения линейных дифференциальных систем», разработанного в поддержку специального курса «Компьютерная алгебра операторных матриц» [3] для студентов магистратуры, читаемого одним из авторов на факультете вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ. Эта иллюстрация показывает возможности жанра расширяемого эссе. Такие возможности могут представлять интерес как поддержка различных лекционных курсов.

2. Структура расширяемого эссе

Эссе предлагаемого вида допускают некоторые вставки, которые мы и называем *расширениями*, согласованные с их активными («кликабельными») значками на полях текста:

- **+** — сказать больше,
- **:** — привести пример,
- **[ ]** — указать, где об этом написано подробнее,
- **T** — задать контрольный вопрос с последующей проверкой ответа,
- $\longleftarrow$ — закрыть ранее открытое расширение (но такая возможность блокируется, если имеется ссылка на это расширение из другого открытого расширения; тогда значок $\longleftarrow$ будет автоматически затемнён).

Расширяемое эссе первоначально выглядит как отображённый на экране компактный текст, который даёт первое представление о предмете. Если содержание какого-то абзаца текста вызывает интерес и если этот абзац помечен на полях значком расширения того или иного типа, то такой абзац можно расширить. Расширенный текст сам может допускать расширения и т. д. От любого выполненного расширения можно отказаться и вернуться к предыдущему варианту текста. Итоговый вариант можно сохранить, распечатать.

Как уже говорилось во введении, обсуждаемое далее эссе «Лорановы решения линейных дифференциальных систем» тематически связано с вопросами компьютерной алгебры, рассматриваемыми в полугодовом спецкурсе для студентов магистратуры ВМК МГУ. Эссе содержит 13 небольших разделов.

> 1. Индуцированные системы. 2. Операторные матрицы. 3. Независимость уравнений. 4. Определяющие уравнения. 5. Алгоритм EG_σ. 6. Линейные ограничения. 7. Полиномиальные коэффициенты: ло-

1. Индуцированные системы. Обсудим ситуацию, когда дифференциальная система обладает лорановым решением в виде двустороннего ряда (2). Будет показано, что для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A_r(x)\,y^{(r)}(x) + A_{r-1}(x)\,y^{(r-1)}(x) + \cdots + A_0(x)\,y(x) = 0, \tag{3}$$

где $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_r(x) \in \mathrm{Mat}_m(K[x])$, это возможно, если и только если последовательность вектор-столбцов $c(n) = (c_1(n), \ldots, c_m(n))^T$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет так называемой *индуцированной рекуррентной системе*

$$B_l(n)c(n+l) + B_{l-1}(n)c(n+l-1) + \cdots + B_t(n)c(n+t) = 0, \tag{4}$$

где $l, t \in \mathbb{Z}$, $l \geqslant t$ и $B_l(n), \ldots, B_t(n) \in \mathrm{Mat}_m(K[n])$. В (4) даже не предполагается существование $\nu \in \mathbb{Z}$ такого, что $c(n) = 0$ при $n < \nu$, соотношения (4) будут выполняться и при рассмотрении ряда (2), имеющего ненулевые коэффициенты при x^n с отрицательными n со сколь угодно большой абсолютной величиной.

$A_r(x)$, $B_l(n)$ — ненулевые матрицы, это *ведущие матрицы* систем (3), (4).

Для начала рассмотрим подробности случая одной неизвестной функции, иначе говоря — скалярного случая $m = 1$. Преобразование (замена)

$$x \to \sigma^{-1}, \quad \frac{d}{dx} \to (n+1)\sigma \tag{5}$$

переводит дифференциальный оператор

$$L = a_r(x)\frac{d^r}{dx^r} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

в *индуцированный* разностный оператор

$$L^{\textcircled{i}} = b_l(n)\sigma^l + \cdots + b_t(n)\sigma^t,$$

где σ — операция сдвига: $\sigma c(n)$ — это такая последовательность, назовем ее $d(n)$, что $d(n) = c(n+1)$ для всех целых n; соответственно σ^{-1} — сдвиг в обратную сторону: если $d(n) = \sigma^{-1}c(n)$, то $d(n) = c(n-1)$ для всех целых n.

T_1

$+_2$ При любой двусторонней последовательности $c(n) \in K^\infty$ применение L к ряду (1) даст ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}(n)x^n$. Двусторонняя последовательность $\bar{c}(n)$ получается применением $L^{\textcircled{i}}$ к последовательности $c(n)$:

$$\bar{c}(n) = b_l(n)c(n+l) + b_{l-1}(n)c(n+l-1) + \cdots + b_t(n)c(n+t), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Мы имеем, таким образом,

$$L(y) = 0 \iff L^{\textcircled{i}}(c) = 0.$$

Это применимо и к общему случаю $m \geqslant 1$.

Обратимся к иллюстративному примеру.

Пусть, например, $L = x\frac{d}{dx} - (x-1)$, тогда $L^{\textcircled{i}} = \sigma^{-1}(n+1)\sigma - (\sigma^{-1} - 1) = n + 1 - \sigma^{-1}$. Если мы интересуемся лорановыми решениями уравнения $L(y) = 0$ с указанным L, то вид $L^{\textcircled{i}}$ позволяет заметить, что $c(n) = 0$ при $n \leqslant -2$, а $c(-1)$ может быть выбрано произвольно, и $c(n) = \frac{c(-1)}{(n+1)!}$ при $n \geqslant -1$.

Для множества скалярных дифференциальных операторов мы используем обозначение $K[x, \frac{d}{dx}]$, так как эти операторы выглядят как полиномы над K от x и $\frac{d}{dx}$. Эти "полиномы" считаются записанными по степеням $\frac{d}{dx}$. Аналогично для разностного случая используется обозначение $K[n, \sigma, \sigma^{-1}]$.

$[\,]_3$ Общая теория такого рода "некоммутативных полиномов" была предложена О. Оре.

Рис. 1. Фрагмент эссе

$\vdots_4$ В общем случае исходную систему можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{m1} & \dots & L_{mm} \end{pmatrix} y(x) = 0, \tag{6}$$

$L_{ij} \in K[x, \frac{d}{dx}]$, $i, j = 1, \dots, m$.

$\vdots_5$ Индуцированная рекуррентная система для (6) имеет вид

$$\begin{pmatrix} L_{11}^{\textcircled{1}} & \dots & L_{1m}^{\textcircled{1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{m1}^{\textcircled{1}} & \dots & L_{mm}^{\textcircled{1}} \end{pmatrix} c(n) = 0, \tag{7}$$

$L_{ij}^{\textcircled{1}} \in K[n, \sigma, \sigma^{-1}]$, $i, j = 1, \dots, m$. Каждый оператор $L_{ij}^{\textcircled{1}}$ получается из L_{ij} преобразованием (5).

Рис. 2. Продолжение фрагмента с рис. 1

> рановы решения. 8. Коэффициенты-ряды: полнота ранга. 9. Представление бесконечных рядов. 10. Бесконечные индуцированные рекуррентные системы. 11. Алгоритм $\mathrm{EG}_\sigma^\infty$. 12. Ленивые вычисления. 13. Реализация в системе компьютерной алгебры Maple.

Наряду с «расширяемым эссе» в контексте вопросов поддержки лекционных курсов, возможно, уместен термин «расширяемый конспект».

3. Подборка расширений: пример

На рис. 1 и 2 представлен фрагмент эссе с расширениями. Индексы при значках расширений проставлены исключительно для ссылок в комментариях.

Обсудим присутствующие в этом фрагменте расширения.

На рис. 3 можно видеть один из контрольных вопросов T_1 (вопрос выбирается случайным образом из нескольких вариантов, заготовленных авторами эссе для этого расширения). Читателю предлагается выбирать один из предложенных ответов, в данном случае из двух ответов: «да» и «нет». Как только ответ выбран, в доступном вложенном расширении $+_{1,1}$ (рис. 4) можно получить пояснение (рис. 5). При расширении знак $+$ заменяется знаком $\longleftarrow$, нажав на который, пользователь закрывает пояснения и контрольный вопрос.

← *Вопрос:*

Существует ли такой дифференциальный оператор L, для которого $L^{\textcircled{1}} = n$?

1. да
2. нет

Выберите ответ:

Рис. 3. T_1 — контрольный вопрос

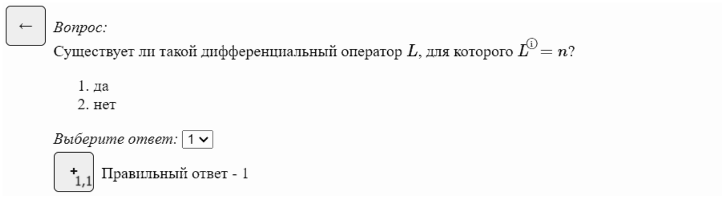

Рис. 4. T_1 после выбора ответа

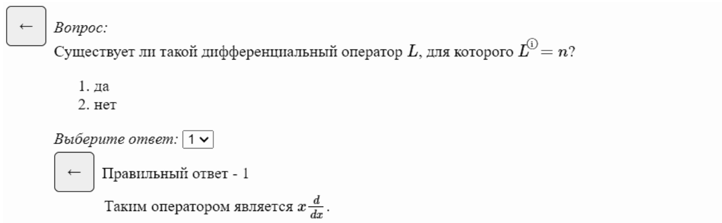

Рис. 5. Расширенное пояснение $+_{1,1}$

Следующий значок $+_2$ (см. рис. 1) позволяет расширить отмеченный абзац, чтобы открыть его более подробное изложение, которое содержит ещё одно (вложенное) расширение (рис. 6).

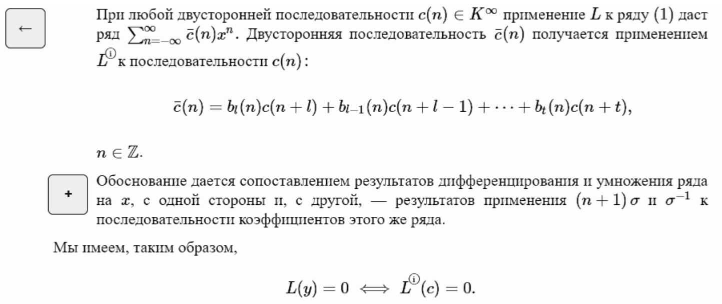

Рис. 6. Расширенный абзац $+_2$ (сказать больше)

Если расширить абзац $[\,]_3$ на рис. 1, то читателю будет предложен список литературы, где можно узнать подробнее о полиномах Оре (рис. 7).

Абзацы на рис. 2, отмеченные значками $:_4$ и $:_5$, можно расширить и увидеть поясняющие примеры (рис. 8). Как правило, читатель может расширять отмеченные абзацы и закрывать расширения независимо друг от друга. Но в некоторых случаях возникает подчинённость расширений. Поскольку пример в $:_5$ имеет ссылку на формулу (6″) из примера $:_4$, то расширение абзаца $:_5$ приводит к автоматическому расширению и предыдущего абзаца. При этом значок ←

←

Общая теория такого рода “некоммутативных полиномов” была предложена О. Оре.

– O. Ore. Theory of non-commutative polynomials. Annals of Mathematics, 34 (1933), 480–508, 1933.
– M. Bronstein, M. Petkovšek. An introduction to pseudo-linear algebra. Theoretical Computer Science, 157 (1996), 3–33.
– С. Абрамов. Элементы компьютерной алгебры линейных обыкновенных дифференциальных, разностных и q-разностных операторов. М: МЦНМО, 2012 (см. §3).

Рис. 7. Расширенный абзац $[\,]_3$ (литература)

верхнего расширения на рис. 8 затемнён, знак не активен, закрыть расширение невозможно, пока не закрыто связанное с ним расширение. Это обеспечивает полноту текста открытой части расширяемого эссе — из открытой части текста не должно быть ссылок на текст в закрытой части.

←

В общем случае исходную систему можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{m1} & \dots & L_{mm} \end{pmatrix} y(x) = 0, \tag{6}$$

$L_{ij} \in K[x, \frac{d}{dx}]$, $i, j = 1, \dots, m$. Например, переписав дифференциальную систему

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} y'(x) + \begin{pmatrix} 1 & x^2+1 \\ -x & 0 \end{pmatrix} y(x) = 0 \tag{6'}$$

в виде (6), получим

$$\begin{pmatrix} x\frac{d}{dx}+1 & x\frac{d}{dx}+x^2+1 \\ x\frac{d}{dx}-x & x\frac{d}{dx} \end{pmatrix} y(x) = 0. \tag{6”}$$

←

Индуцированная рекуррентная система для (6) имеет вид

$$\begin{pmatrix} L^{①}_{11} & \dots & L^{①}_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ L^{①}_{m1} & \dots & L^{①}_{mm} \end{pmatrix} c(n) = 0, \tag{7}$$

$L^{①}_{ij} \in K[n, \sigma, \sigma^{-1}]$, $i, j = 1, \dots, m$. Каждый оператор $L^{①}_{ij}$ получается из L_{ij} преобразованием (5). Это преобразование переводит (6”) в систему вида (7), в которой

$$L^{①}_{11} = n+1, \quad L^{①}_{12} = (n+1)+\sigma^{-2}, \quad L^{①}_{21} = n-\sigma^{-1}, \quad L^{①}_{22} = n.$$

Индуцированную рекуррентную систему для (6”) можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} n+1 & n+1 \\ n & n \end{pmatrix} c(n) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} c(n-1) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c(n-2) = 0.$$

Рис. 8. Расширенный абзац $:_5$ автоматически расширяет абзац $:_4$

4. Заключение

Итак, расширяемое эссе (конспект) может быть средством поддержки того или иного лекционного курса. Но, заметим, такого рода эссе может рассматриваться и как разновидность эссе в обычном понимании этого жанра — достаточно короткого обсуждения какого-то сюжета в облегчённом разговорном стиле без претензии, как правило, на глубину и всесторонность. Если же говорить о лекционных курсах, то совсем не обязательно это должны быть лекции по каким-то математическим дисциплинам. И не обязателен охват целого курса, это может быть, фактически, одна лекция или одно занятие. Так, в расширяемом эссе, доступном по ссылке `http://www.ccas.ru/ca/essay_on_portrait_of_adele.html`, обсуждается несколько живописных произведений художника Густава Климта[1]. Можно также представить себе, например, расширяемое эссе, обсуждающее употребление артиклей (неопределённого, определённого и «нулевого») в текстах на английском языке, и т. д.

Нелишне будет добавить, что первое расширяемое эссе `http://www.ccas.ru/sabramov/essay/` было предложено и обсуждено в [2], тематически оно было связано с лекциями «Сложность алгоритмов», читаемыми студентам ВМК МГУ (см. [1]). Этим эссе студенты пользуются и в настоящее время. Имеется вариант этого эссе на английском языке: `http://www.ccas.ru/sabramov/essay/english.htm`. В той же публикации [2] описаны принципы и программные средства разработки расширяемого эссе, эти средства отличаются от предложенных позднее в [4]. Там же, в [2], дано расширяемое эссе, содержащее в себе инструкции по работе с предлагаемыми средствами — «расширяемое эссе о расширяемых эссе»: `http://www.ccas.ru/ca/essay_on_essay.html`. Впоследствии в [4] некоторые принципы были уточнены и был предложен новый редактор. Именно этот редактор использовался при подготовке расширяемого эссе «Лорановы решения линейных дифференциальных систем», кратко представленного выше в разделах 2, 3: `http://www.ccas.ru/ca/essay_on_laurent_solution.html`. Также этот редактор использован при подготовке расширяемого эссе о системе компьютерной алгебры Sage [4]: `http://www.ccas.ru/ca/essay_on_sage.html`.

Литература

[1] Абрамов С. А. Лекции о сложности алгоритмов. М.: МЦНМО, 2020.

[2] Абрамов С. А., Бордаченкова Е. А., Хмельнов Д. Е. Расширяемое эссе как гипертекстовая схема информационного и учебного материала // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53, № 3. — С. 495—501.

[3] Абрамов С. А., Рябенко А. А., Хмельнов Д. Е. Компьютерная алгебра операторных матриц. — М.: МАКС Пресс, 2024 (готовится к печати).

[4] Бордаченкова Е. А., Зубарева В. Н., Панфёров А. А. Расширяемое эссе о системе компьютерной алгебры Sage и редактор для создания расширяемых зссе // Программирование. — 2024. — № 2.

[1]Поддерживаемый список разработанных расширяемых эссе вместе с обновляемыми ссылками можно найти по адресу `http://www.ccas.ru/ca/essay`.