Автоморфизмы группы Шевалле типа G_2 над коммутативным кольцом R с обратимой тройкой, порождённым своими обратимыми элементами и идеалом $2R$

Е. И. БУНИНА
Университет им. Бар-Илана, Израиль
e-mail: helenbunina@gmail.com

М. А. ВЛАДЫКИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.552

Ключевые слова: группа Шевалле, автоморфизм.

Аннотация

В данной работе мы доказываем, что каждый автоморфизм (элементарной) группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над коммутативным кольцом R с обратимой 3, порождённым обратимыми элементами и идеалом $2R$, стандартен, т. е. является композицией кольцевого и внутреннего автоморфизмов.

Abstract

E. I. Bunina, M. A. Vladykina, Automorphisms of a Chevalley group of type $\mathbf{G}_2$ *over a commutative ring* R *with* $1/3$ *generated by the invertible elements and* $2R$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 4, pp. 31—45.

In this paper, we prove that every automorphism of a Chevalley group with the root system $\mathbf{G}_2$ over a commutative ring R with $1/3$ generated by the invertible elements and the ideal $2R$ is a composition of ring and inner automorphisms.

Введение

Изучение автоморфизмов классических линейных групп началось с работ О. Шрайера и Б. Л. ван дер Вардена [35] в 1928 году. Ими были описаны все автоморфизмы PSL_n ($n \geqslant 3$) над произвольным полем.

Ж. Дьёдонне [24] (1951) и Ч. Риккарт [34] (1950) ввели метод инволюций, при помощи которого описали автоморфизмы группы GL_n ($n \geqslant 3$) над телом.

Первый шаг в построение автоморфизмов над кольцами, а именно для группы GL_n ($n \geqslant 3$) над кольцом целых чисел, сделали Хуа Логен и И. Райнер [26]

(1951), позже появились несколько работ по коммутативным областям главных идеалов. Методы в упомянутых выше работах были основаны на изучении инволюций в соответствующих линейных группах.

О. Т. О'Мира [30] в 1976 году изобрел совершенно иной (геометрический) метод. С помощью него он описал автоморфизмы группы GL_n ($n \geqslant 3$) над областями целостности.

В 1982 году В. М. Петечук [32] описал автоморфизмы групп GL_n, SL_n ($n \geqslant 4$) над произвольными коммутативными кольцами. При $n = 3$ автоморфизмы линейных групп не всегда стандартны. Они стандартны, если в кольце обратима двойка, либо кольцо является областью целостности, либо это полупростое кольцо.

Изоморфизмы групп $\mathrm{GL}_n(R)$ and $\mathrm{GL}_m(S)$ над произвольными ассоциативными кольцами с $1/2$ для $n, m \geqslant 3$ были описаны в 1981 И. З. Голубчиком и А. В. Михалёвым [25] и независимо Е. И. Зельмановым [8]. В 1997 И. З. Голубчик [7] описал изоморфизмы групп для $n, m \geqslant 4$, для произвольных ассоциативных колец с 1.

В 1950-х годах К. Шевалле [22], Р. Стейнберг [37] и др. ввели понятие групп Шевалле над коммутативными кольцами, которое включает в себя классические линейные группы (специальную линейную SL, специальную ортогональную SO, симплектическую Sp, спинорную Spin, а также их проективные аналоги) над коммутативными кольцами. Естественно, изоморфизмы и автоморфизмы групп Шевалле также активно изучались.

Описание изоморфизмов групп Шевалле над полями было получено Р. Стейнбергом для конечного случая [36] и Дж. Э. Хамфрисом для бесконечного [27]. Много работ посвящено описанию автоморфизмов групп Шевалле над коммутативными кольцами, среди которых следует упомянуть работы А. Бореля и Ж. Титса [13], Р. Картера и Ю Чэня [20], Ю Чэня [21], Э. Абе [10], А. Клячко [29].

В статье Е. И. Буниной [4] было показано, что автоморфизмы элементарной присоединённой группы Шевалле с системой корней одного из типов $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{D}_l$, $\mathbf{E}_l$, $l \geqslant 2$, над локальными кольцами с обратимой 2 — это композиция кольцевого автоморфизма и автоморфизма-сопряжения матрицей нормализатора этой группы в $\mathrm{GL}(V)$. В [3] на основании результатов статьи [4] было показано, что автоморфизм элементарной присоединённой группы Шевалле стандартен, т. е. представим в виде кольцевого, внутреннего и центрального автоморфизмов. В [3] также было дано описание нормализатора групп Шевалле в их присоединённом представлении, которое имеет место и для локальных колец без $1/2$.

В [1, 2, 15] теми же методами получено, что автоморфизмы групп Шевалле с системами корней $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{B}_l$, $l \geqslant 2$, над локальными кольцами с $1/2$ (в случае $\mathbf{G}_2$ — также с $1/3$) стандартны. В [9] описаны автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{D}_l$, $\mathbf{E}_l$, $l \geqslant 3$, над локальными кольцами без $1/2$.

В [16] с помощью всех предыдущих результатов и метода локализации были описаны автоморфизмы присоединённых групп Шевалле рангов не ниже 2 над произвольными коммутативными кольцами с 1, а также с 1/2 для систем корней $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, с 1/2 и 1/3 — для систем корней $\mathbf{G}_2$. В недавней статье [17] этот результат был распространён на все группы Шевалле (не только присоединённые), с теми же ограничениями на кольца.

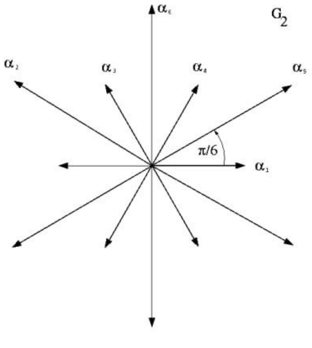
В статьях Е. И. Буниной и П. А. Верёвкина [5, 6] было показано, что автоморфизмы групп Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой стандартны.

В случае полей характеристики 2 и системы корней $\mathbf{F}_4$ существует нестандартный автоморфизм соответствующей группы Шевалле (см. [37]). В случае полей характеристики 2 и систем корней $\mathbf{B}_l$ и $\mathbf{C}_l$ существует нестандартный изоморфизм между соответствующими группами Шевалле (также см. [37]). В случае локальных колец с необратимой двойкой и системы корней $\mathbf{A}_2$ также существует нестандартный автоморфизм соответствующей группы Шевалле (см. [31, 33]). Для систем корней $\mathbf{G}_2$ необратимая тройка также мешает стандартности автоморфизмов, так как для полей характеристики 3 существует нестандартный автоморфизм соответствующих групп Шевалле (см. [37]), однако, как мы видим из [6], необратимость двойки не мешает стандартности автоморфизмов ни для полей, ни для локальных колец.

Таким образом, естественным желанием является распространение результата о стандартности автоморфизмов групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ на произвольные коммутативные кольца с 1/3. На данный момент это удалось сделать для коммутативных колец с 1/3, порождённых своими обратимыми элементами и идеалом $2R$.

1. Определения и формулировка основной теоремы

Мы фиксируем систему корней Φ, имеющую тип $\mathbf{G}_2$ ($\Phi = \mathbf{G}_2$) с системой простых корней $\Delta(\mathbf{G}_2) = \{\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3\}$, системой положительных корней $\mathbf{G}_2^+ = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 = e_1,\ 2\alpha_1 + \alpha_2,\ 3\alpha_1 + \alpha_2,\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$.



Подробную информацию о системах корней и их свойствах можно найти в [14, 28].

Введём элементарные группы Шевалле (см., например, [37]).

Пусть $\mathcal{L}$ — полупростая алгебра Ли (над $\mathbb{C}$) с системой корней $\mathbf{G}_2$, $\pi\colon \mathcal{L} \to \mathrm{gl}(V)$ — её конечномерное точное представление (размерности n). Если $\mathcal{H}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathcal{L}$, то функционал $\lambda \in \mathcal{H}^*$ называется *весом* данного представления, если существует ненулевой вектор $v \in V$ (который называется *весовым вектором*), такой что для любых $h \in \mathcal{H}$ $\pi(h)v = \lambda(h)v$.

В пространстве V существует базис из весовых векторов, такой что все операторы $\pi(x_\alpha)^k/k!$ для $k \in \mathbb{N}$ записываются целочисленными (нильпотентными) матрицами. Этот базис называется *базисом Шевалле*. Целочисленная матрица также может рассматриваться как матрица над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть R — такое кольцо. Рассмотрим матрицы размера $n \times n$ над R, матрицы $\pi(x_\alpha)^k/k!$ при $\alpha \in \mathbf{G}_2$, $k \in \mathbb{N}$ вложим в $\mathrm{M}_n(R)$.

Теперь рассмотрим автоморфизмы свободного модуля R^n вида

$$x_\alpha(t) := \exp(tx_\alpha) = 1 + t\pi(x_\alpha) + \ldots + t^k\pi(x_\alpha)^k/k! + \ldots .$$

Так как все матрицы $\pi(x_\alpha)$ нильпотентны, этот ряд конечен. Автоморфизмы $x_\alpha(t)$ называются *элементарными корневыми элементами*. Подгруппа в $\mathrm{Aut}(R^n)$, порождённая всеми автоморфизмами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathbf{G}_2$, $t \in R$, называется *элементарной группой Шевалле* (обозначение $E_\pi(\mathbf{G}_2, R)$).

Действие элементов $x_\alpha(t)$ на базисе Шевалле описано в [19, 40].

Все веса данного представления (по сложению) порождают решётку (свободную абелеву группу, в которой любой $\mathbb{Z}$-базис также является $\mathbb{C}$-базисом в $\mathcal{H}^*$) Λ_π, называемую *решёткой весов*.

Элементарные группы Шевалле определяются даже не представлением соответствующей алгебры Ли, а просто её *решёткой весов*. Именно, с точностью до абстрактного изоморфизма элементарная группа Шевалле полностью определяется системой корней, коммутативным кольцом R с единицей и решёткой весов Λ_π.

Среди всех решёток выделим решётку, соответствующую присоединённому представлению: она порождается всеми корнями (*решётка корней* Λ_{ad}). Соответствующая элементарная группа Шевалле называется *присоединённой*.

Заметим, что для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ существует лишь одна решётка весов, которая одновременно является односвязной и присоединённой, поэтому для каждого кольца R существует лишь одна группа Шевалле типа $\mathbf{G}_2$: $G(R) = G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$.

В элементарной группе Шевалле можно рассмотреть следующие важные элементы:

— $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$, $t \in R^*$;
— $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$.

Каждая элементарная группа Шевалле удовлетворяет следующим соотношениям.

(R1) Для всех $\alpha \in \mathbf{G}_2$, $t, u \in R$ справедливо $x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t+u)$.

(R2) Если $\{\alpha, \beta\}$ — простые корни системы $\mathbf{G}_2$, α — длинный, β — короткий, $t, u \in R$, то

$$
\begin{aligned}
&[x_\alpha(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+\beta}(tu)x_{\alpha+3\beta}(-tu^3)x_{\alpha+2\beta}(-tu^2)x_{2\alpha+3\beta}(t^2u^3),\\
&[x_{\alpha+\beta}(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+2\beta}(2tu)x_{\alpha+3\beta}(-3tu^2)x_{2\alpha+3\beta}(3t^2u^3),\\
&[x_\alpha(t), x_{\alpha+3\beta}(u)] = x_{2\alpha+3\beta}(tu),\\
&[x_{\alpha+2\beta}(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+3\beta}(-3tu),\\
&[x_{\alpha+\beta}(t), x_{\alpha+2\beta}(u)] = x_{2\alpha+3\beta}(3tu).
\end{aligned}
$$

(R3) Для каждого $\alpha \in \mathbf{G}_2$ справедливо $w_\alpha := w_\alpha(1)$.

(R4) Для всех $\alpha, \beta \in \mathbf{G}_2$, $t \in R^\star$ справедливо $w_\alpha h_\beta(t) w_\alpha^{-1} = h_{w_\alpha(\beta)}(t)$.

(R5) Для всех $\alpha, \beta \in \mathbf{G}_2$, $t \in R$ справедливо $w_\alpha x_\beta(t) w_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha(\beta)}(ct)$, где $c = c(\alpha, \beta) = \pm 1$.

(R6) Для всех $\alpha, \beta \in \mathbf{G}_2$, $t \in R^\star$, $u \in R$ справедливо $h_\alpha(t)x_\beta(u)h_\alpha(t)^{-1} = x_\beta(t^{\langle\beta,\alpha\rangle}u)$.

Введём теперь группы Шевалле (подробнее см. [12, 19, 22, 23, 37, 39, 40].

Рассмотрим полупростые алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями. Это в точности элементарные группы Шевалле $E_\pi(\Phi, K)$. Все эти группы можно определить в группе $\mathrm{SL}_n(K)$ как множество общих нулей полиномов от матричных коэффициентов a_{ij} с целочисленными коэффициентами. Ясно, что умножение и взятие обратного элемента также описываются полиномами с целыми коэффициентами. Таким образом, эти полиномы можно рассматривать как полиномы над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть некоторая элементарная группа Шевалле E над $\mathbb{C}$ определена в $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ полиномами $p_1(a_{ij}), \ldots, p_m(a_{ij})$. Для коммутативного кольца R с единицей рассмотрим группу

$$G(R) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(R) \mid \tilde{p}_1(a_{ij}) = 0, \ldots, \tilde{p}_m(a_{ij}) = 0\},$$

где $\tilde{p}_1(\ldots), \ldots, \tilde{p}_m(\ldots)$ — полиномы, имеющие те же коэффициенты, что и $p_1(\ldots), \ldots, p_m(\ldots)$, но рассматриваемые над R. Эта группа называется *группой Шевалле* $G_\pi(\Phi, R)$ типа G_2 над кольцом R, и для любого алгебраически замкнутого поля K она совпадает с элементарной группой Шевалле

Определим два типа автоморфизмов группы Шевалле $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$; мы назовём их *стандартными*.

Кольцевые автоморфизмы. Пусть $\rho\colon R \to R$ — автоморфизм кольца R. Отображение $x = (x_{ij}) \mapsto \big(\rho(x_{ij})\big)$ из $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$, который обозначается той же буквой ρ и называется *кольцевым автоморфизмом* группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$. Заметим, что для всех $\alpha \in \mathbf{G}_2$ и $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ отображается в $x_\alpha\big(\rho(t)\big)$.

Внутренние автоморфизмы. Пусть S — некоторое кольцо, содержащее R, g — элемент группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, S)$, нормализующий подгруппу $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$. Тогда отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ является автоморфизмом группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$, который обозначается i_g и называется *внутренним автоморфизмом*, *индуцированным элементом* $g \in G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, S)$. Если $g \in G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$, то назовём i_g *строго внутренним* автоморфизмом.

Эти два автоморфизма называются *стандартными*. К стандартным также относятся центральный и диаграммный автоморфизмы, однако в рассматриваемом случае нетривиальных центральных или диаграммных автоморфизмов нет, поэтому будем говорить, что автоморфизм группы $G(R)$ *стандартен*, если он является композицией введённых двух типов автоморфизмов.

Наша главная цель — доказательство следующей основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть $G = G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ или $G = E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ — группа Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ или её элементарная подгруппа, R — коммутативное кольцо с $1/3$, порождённое своими обратимыми элементами и идеалом $2R$. Тогда любой автоморфизм группы G стандартен, т. е. является композицией кольцевого и строго внутреннего автоморфизмов.*

2. Предварительные сведения для доказательства

2.1. Локализация колец и модулей; вложение кольца в произведение его локализаций

Определение 1. Пусть R — коммутативное кольцо. Подмножество $S \subset R$ называется *мультипликативно замкнутым* подмножеством в R, если $1 \in S$ и S замкнуто относительно умножения.

Введём отношение эквивалентности $\sim$ на множестве пар $R \times S$ следующим образом:

$$\frac{a}{s} \sim \frac{b}{t} \iff \text{найдётся } u \in S, \text{ такой что } (at - bs)u = 0.$$

Через $\frac{a}{s}$ мы будем означать весь класс эквивалентности для пары (a, s), а через $S^{-1}R$ — множество всех классов эквивалентности. Введём на $S^{-1}R$ структуру кольца, положив

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

Определение 2. Кольцо $S^{-1}R$ называется *кольцом частных для R по отношению к S*.

Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в R. Тогда множество $S = R \setminus \mathfrak{p}$ мультипликативно замкнуто (это равносильно определению простого идеала). Будем обозначать кольцо частных $S^{-1}R$ в этом случае через $R_{\mathfrak{p}}$. Элементы $\frac{a}{s}$, $a \in \mathfrak{p}$, образуют идеал $\mathfrak{M}$ в $R_{\mathfrak{p}}$. Если $\frac{b}{t} \notin \mathfrak{M}$, то $b \in S$, поэтому $\frac{b}{t}$ обратим в $R_{\mathfrak{p}}$. Значит, идеал $\mathfrak{M}$ состоит из всех необратимых элементов кольца $R_{\mathfrak{p}}$, т. е. $\mathfrak{M}$ — наибольший идеал этого кольца, а $R_{\mathfrak{p}}$ — локальное кольцо.

Процесс перехода от кольца R к кольцу $R_{\mathfrak{p}}$ называется *локализацией по* $\mathfrak{p}$.

Конструкцию $S^{-1}R$ очевидно можно перенести и на R-модуль M. Пусть m/s обозначает класс эквивалентности пары (m, s); $S^{-1}M$ — множество всех таких дробей — превращается в модуль $S^{-1}M$ с помощью естественных операций сложения и скалярного умножения. Будем писать $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$ вместо $S^{-1}M$ для $S = R \setminus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца R.

Предложение 1. *Любое коммутативное кольцо R с единицей можно естественно вложить в декартово произведение всех его локализаций по максимальным идеалам*

$$S = \prod_{\mathfrak{m}\text{ — максимальный идеал } R} R_{\mathfrak{m}}$$

с помощью диагонального отображения, ставящего в соответствие каждому $a \in R$ элемент

$$\prod_{\mathfrak{m}} \left(\frac{a}{1}\right)_{\mathfrak{m}}$$

кольца S.

2.2. Изоморфизмы групп Шевалле над полями

Нам понадобится описание изоморфизмов между группами Шевалле над полями.

Теорема 2 (см. [37, теоремы 30, 31]). *Пусть G, G' — группы Шевалле, построенные по системе корней $\mathbf{G}_2$ и полям k, k' характеристики, отличной от 3, соответственно. Пусть $\varphi\colon G \to G'$ — изоморфизм групп. Тогда поля k и k' изоморфны, а изоморфизм φ является композицией кольцевого изоморфизма между G и G' и строго внутреннего автоморфизма группы G'.*

2.3. Характеристичность подгруппы $E_{\mathrm{ad}}(\mathrm{G}_2, R)$ в группе $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{G}_2, R)$

Определение 3. Подгруппа H группы G называется *характеристической*, если она переходит в себя под действием любого автоморфизма группы G. В частности, характеристическая подгруппа всегда нормальна.

Теорема 3 ([38]). *Если ранг системы корней Φ больше единицы, то элементарная подгруппа $E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является характеристической в группе Шевалле $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$.*

2.4. Нормальная структура групп Шевалле над коммутативными кольцами

Если R — кольцо, I — его идеал, то через $\lambda_I\colon G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R) \to G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R/I)$ $(E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R) \to E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R/I))$ будем обозначать гомоморфизм, получающийся при постановке в соответствие каждому элементу (матрице) $A \in G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ его образа при естественном гомоморфизме $R \to R/I$.

Через Z_I мы обозначим прообраз центра группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R/I)$ при гомоморфизме λ_I.

Теорема 4 [11]. *Если подгруппа $\mathcal{H}$ в $E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ нормальна в $E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$, то*

$$E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R, I) \leqslant \mathcal{H} \leqslant Z_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R, I) \cap E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$$

для некоторого однозначно определённого идеала I кольца R.

Заметим, что центр группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ тривиален.

Определение 4. Пусть N_I обозначает группу $\ker \lambda_I \cap E(\mathbf{G}_2, R)$.

Предложение 2 (см. [16]). *Пусть φ — произвольный автоморфизм группы $E(\mathbf{G}_2, R)$, I — максимальный идеал кольца R. Тогда существует максимальный идеал J кольца R, такой что $\varphi(N_I) = N_J$.*

3. Формулировка основных шагов доказательства

Рассмотрим кольцо R и его максимальный идеал I. Снова кольцо, полученное локализацией R по I, обозначим через R_I, его радикал (он же наибольший идеал) — через $\operatorname{Rad} R_I$. Заметим, что имеется два изоморфных поля — R/I и $R_I/\operatorname{Rad} R_I$:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_I"'] & R_I \arrow[d, "\lambda_{\operatorname{Rad} R_I}"] \\
R/I \arrow[r, "\mu_I"] & R_I/\operatorname{Rad} R_I
\end{tikzcd}.$$

Теперь пусть φ — произвольный автоморфизм группы $E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$. Предложение 2 даёт возможность рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "r_I"'] & E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R) \arrow[d, "r_J"] \\
E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R_I) \arrow[d, "\lambda_{\operatorname{Rad} R_I}"'] & E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R_J) \arrow[d, "\lambda_{\operatorname{Rad} R_J}"] \\
E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R_I/\operatorname{Rad} R_I) \arrow[d, "s_I"'] & E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R_J/\operatorname{Rad} R_J) \arrow[d, "s_J"] \\
E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R/I) \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R/J)
\end{tikzcd}. \qquad (1)$$

Группы $E(\mathbf{G}_2, R/I)$ и $E(\mathbf{G}_2, R/J)$ — это просто элементарные группы Шевалле над полями, изоморфизмы над которыми уже описаны в теореме 2.

Напомним, что поля R/I и R/J изоморфны (как и прежде, обозначим соответствующий изоморфизм через ρ) и

для всех $A \in E(\mathbf{G}_2, R/I)$ справедливо $\bar{\varphi}(A) = i_g \circ \rho(A)$, где $g \in G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R/J)$.

Описание автоморфизмов группы $E(\mathbf{G}_2, R)$ происходит по следующей схеме. Кольцо R вкладывается в кольцо $S = \prod R_I$ — декартово произведение всех локальных колец R_I, полученных локализацией кольца R по различным максимальным идеалам I. Ясно, что группа $E(\mathbf{G}_2, R)$ вкладывается в группу

$$G(\mathbf{G}_2, S) = G\Big(\mathbf{G}_2, \prod R_I\Big).$$

Первый шаг. Доказывается, что для каждого максимального идеала J выполняется равенство

$$r_J\varphi\big(x_\alpha(1)\big) = i_{g_J} r_J\big(x_\alpha(1)\big),$$

где $g_J \in G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, \bar{R}_J)$ ($\bar{R}_J$ — расширение кольца R_J).

Второй шаг. Доказывается, что внутренний автоморфизм группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, S)$, порождённый матрицей $g = \prod g_J$, индуцирует автоморфизм группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ и на самом деле является строго внутренним. Далее показывается, что если взять композицию изначального автоморфизма и внутреннего автоморфизма $i_{g^{-1}}$, то полученный автоморфизм окажется кольцевым.

4. Доказательство первого шага в теореме

Рассмотрим произвольный элемент $x_\alpha(1) \in E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$, $\alpha \in \mathbf{G}_2$. Его образ при отображении r_I — это $x_\alpha(1) = x_\alpha(1/1) \in E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R_I)$. В поле R/I его образ имеет тот же самый вид. Элемент $x'_\alpha = \varphi(x_\alpha(1)) \in E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ при факторизации по идеалу J даёт $\bar{\varphi}\big(x_\alpha(1)\big) = i_{\bar{g}}\big(x_\alpha(1)\big)$, где $\bar{g} \in G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R/J)$.

Выберем теперь $g \in G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R_J)$, такой что при факторизации кольца R_J по радикалу из g получается $\bar{g}$. Теперь рассмотрим следующее отображение $\psi\colon E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R) \to E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R_J)$:

$$\psi = i_{g^{-1}} \circ r_J \circ \varphi.$$

При отображении ψ все $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \mathbf{G}_2$, переходят в такие x'_α, что $x_\alpha(1) - x'_\alpha \in \mathrm{M}_N(\mathrm{Rad}\, R_J)$.

Таким образом, мы получаем набор $\{x'_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{G}_2\} \subset E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R_J)$ элементов, удовлетворяющих тем же соотношениям, что и $\{x_\alpha(1) \mid \alpha \in \mathbf{G}_2\}$, а также сравнимых с соответствующими $x_\alpha(1)$ по модулю радикала кольца R_J. Это ровно ситуация работы [5], где для локального кольца R и системы корней $\mathbf{G}_2$ при $3 \in R^*$ без всяких дополнительных условий на кольцо доказано, что если в группе $E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ некоторые элементы x'_α являются образами соответствующих $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \mathbf{G}_2$, и к тому же $x_\alpha(1) - x'_\alpha \in \mathrm{M}_N(\mathrm{Rad}\, R)$, то существует $g' \in G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$, $g' - E \in \mathrm{M}_N(\mathrm{Rad}\, R)$, такой что для любого $\alpha \in \mathbf{G}_2$

$$x_\alpha(1) = i_{g'}(x'_\alpha).$$

Таким образом, первый шаг теоремы полностью следует из приведённых в предыдущем абзаце утверждений. □

Вложив теперь исходное кольцо R в кольцо $S = \prod\limits_J R_J$, увидим, что

$$\varphi\bigl(x_\alpha(1)\bigr) = g\bigl(x_\alpha(1)\bigr)g^{-1},$$

где $g = \prod\limits_J g_J$.

5. Доказательство второго шага в теореме

Сопряжение элементом $g \in G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, S)$ продолжается до автоморфизма всего матричного кольца $\mathrm{M}_N(S)$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Любая матрица $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathbf{G}_2$, $t \in R^*$ или $t \in 2R$, под действием сопряжения элементом g переходит в матрицу из $\mathrm{GL}_N(R)$.*

Доказательство. Для $x_\alpha(1)$, где $\alpha \in \mathbf{G}_2$, утверждение верно (см. первый шаг).

Пусть α — длинный корень, $\alpha \in \mathbf{G}_2$. Для длинных корней рассмотрим

$$x_\alpha(1) = E + X_\alpha + \frac{X_\alpha^2}{2}, \quad \text{где} \quad \frac{X_\alpha^2}{2} = E_{(\alpha,-\alpha)}.$$

Возьмём два длинных корня $\gamma, \beta \in \mathbf{G}_2$, таких что $\gamma + \beta = \alpha$. Заметим, что

$$(x_\gamma(1)x_\beta(1) - x_\gamma(1) - x_\beta(1) + E)^2 = \pm E_{(\alpha,-\alpha)},$$

откуда мы легко получаем X_α. Значит, любая матрица вида $x_\alpha(t)$ при сопряжении элементом g переходит в матрицу из $\mathrm{M}_N(R)$.

Теперь рассмотрим некоторый обратимый элемент кольца R. Для каждого обратимого $t \in R^*$

$$h_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)x_\alpha(1)^{-1}x_{-\alpha}(-1)^{-1}x_\alpha(1)^{-1}.$$

Поэтому сопряжение элементом g также переводит $h_\alpha(t)$ в матрицу из $\mathrm{M}_N(R)$.

Теперь рассмотрим любой короткий корень β и длинный корень α, для которого

$$\langle \beta, \alpha \rangle = 1.$$

Тогда

$$x_\beta\bigl(t^{\langle \beta,\alpha \rangle}\bigr) = h_\alpha(t)x_\beta(1)h_\alpha(t)^{-1},$$

т. е. $x_\beta(t)$ для любого обратимого $t \in R^*$ переходит под действием сопряжения элементом g в матрицу с коэффициентами из R.

Пусть теперь снова β — некоторый короткий корень. Тогда

$$x_\beta(\pm 1) = E \pm X_\beta + \frac{X_\beta^2}{2} \pm \frac{X_\beta^3}{6},$$

откуда получаем

$$x_\beta(-1)+x_\beta(1)=2E+X_\beta^2,$$

следовательно,

$$X_\beta^2=x_\beta(-1)+x_\beta(1)-2E. \tag{2}$$

Точно так же

$$x_\beta(1)-x_\beta(-1)=2X_\beta+\frac{X_\beta^3}{3}$$

влечёт

$$\frac{X_\beta^3}{3}=x_\beta(1)-x_\beta(-1)-2X_\beta. \tag{3}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}x_\beta(2)&=E+2X_\beta+2X_\beta^2+\frac{4X_\beta^3}{3}=\\&=E+2X_\beta+2x_\beta(1)+2x_\beta(-1)-4E+4x_\beta(1)-4x_\beta(-1)-8X_\beta=\\&=-3E-6X_\beta+6x_\beta(1)-2x_\beta(-1),\end{aligned}$$

откуда, пользуясь обратимостью тройки, получаем

$$2X_\beta=\frac{-x_\beta(2)-2x_\beta(-1)}{3}-E+2x_\beta(1). \tag{4}$$

Из (3) и (4) теперь следует

$$\frac{X_\beta^3}{3}=-x_\beta(1)-\frac{x_\beta(-1)}{3}+\frac{x_\beta(2)}{3}+E. \tag{5}$$

Тогда каждый $x_\beta(t)$, где $t\in 2R$, выражается через $x_\beta(1)$ и t, поэтому также под действием сопряжения элементом g переходит в матрицу с коэффициентами из R.

Таким образом, все $x_\beta(t)$, где t либо обратим, либо делится на 2, переходят под действием сопряжения элементом g в матрицы с коэффициентами из R. □

Если (как в нашем случае) кольцо R порождается обратимыми элементами и идеалом $2R$, то

$$gG_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,R)g^{-1}\subseteq \mathrm{M}_N(R)\cap G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,S)=G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,R).$$

Таким образом,

$$gG_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,R)g^{-1}=G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,R)\quad\text{и}\quad gE_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,R)g^{-1}=E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,R).$$

Значит, взяв композицию исходного автоморфизма $\varphi\in\mathrm{Aut}\big(G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,R)\big)$ и сопряжения $i_{g^{-1}}$ элементом g^{-1}, мы получим некоторый автоморфизм $\rho\in\in\mathrm{Aut}\big(G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,R)\big)$, для которого $\rho\big(x_\alpha(1)\big)=x_\alpha(1)$ для любого $\alpha\in\mathbf{G}_2$.

Лемма 2. *Любой автоморфизм* $\rho\in\mathrm{Aut}\big(G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,R)\big)$ (*или* $\rho\in\mathrm{Aut}\big(E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2,R)\big)$), *для которого для всех* $\alpha\in\mathbf{G}_2$ $\rho\big(x_\alpha(1)\big)=x_\alpha(1)$, *является кольцевым автоморфизмом группы Шевалле* (*соответственно её элементарной подгруппы*).

Доказательство. Для данного $\alpha \in \mathbf{G}_2$ через Γ_α обозначим множество всех таких $x_\beta(1)$, что $[x_\alpha(1), x_\beta(1)] = e$. В [18] доказано, что централизатор множества Γ_α в группе Шевалле (или её элементарной подгруппе) совпадает с CX_α, где C — центр группы Шевалле, а $X_\alpha = \{x_\alpha(t) \mid t \in R\}$. В нашей системе корней $\mathbf{G}_2$ центр тривиальный (потому что группа присоединённая), поэтому мы просто получаем X_α.

Если под действием автоморфизма ρ элементы $x_\beta(1)$ переходят сами в себя, то централизатор любого их множества также переходит в себя, поэтому для любого $t \in R$ существует $s \in R$, такое что $\rho\bigl(x_\alpha(t)\bigr) = x_\alpha(s)$.

Покажем, что полученное отображение $t \mapsto s$ не зависит от выбора корня $\alpha \in \mathbf{G}_2$. Действительно, оно должно совпадать для корней одной длины, так как если α_1 и α_2 имеют одну длину, то существует элемент группы Вейля w (порождённый только элементами $x_\beta(1)$), для которого

$$\text{для всех} \quad t \in R \quad w x_{\alpha_1}(t) w^{-1} = x_{\alpha_2}(t).$$

Обозначим полученное отображение на длинных корнях через ρ_1, а на коротких — через ρ_2.

Применим автоморфизм ρ к выражению $[x_\alpha(t), x_\beta(1)]$, где α, β — простые корни системы $\mathbf{G}_2$, α — длинный, β — короткий:

$$\rho([x_\alpha(t), x_\beta(1)]) = \bigl[\rho\bigl(x_\alpha(t)\bigr), \rho\bigl(x_\beta(1)\bigr)\bigr]$$

тогда и только тогда, когда

$$x_{\alpha+\beta}\bigl(\rho_2(t)\bigr)x_{\alpha+3\beta}\bigl(\rho_1(-t)\bigr)x_{\alpha+2\beta}\bigl(\rho_2(-t)\bigr)x_{2\alpha+3\beta}\bigl(\rho_1(t^2)\bigr) =$$
$$= x_{\alpha+\beta}\bigl(\rho_1(t)\bigr)x_{\alpha+3\beta}\bigl(-\rho_1(t)\bigr)x_{\alpha+2\beta}\bigl(-\rho_1(t)\bigr)x_{2\alpha+3\beta}\bigl(\rho_1(t^2)\bigr),$$

откуда получаем, что ρ_1 и ρ_2 совпадают.

Обозначим полученное отображение также через $\rho\colon R \to R$; нам нужно лишь доказать, что оно является автоморфизмом кольца R.

Действительно, его биективность следует из того, что изначальный автоморфизм ρ биективен.

Его аддитивность следует из формулы

$$x_\alpha\bigl(\rho(t_1) + \rho(t_2)\bigr) = x_\alpha\bigl(\rho(t_1)\bigr)x_\alpha\bigl(\rho(t_2)\bigr) = \rho\bigl(x_\alpha(t_1)\bigr) \cdot \rho\bigl(x_\alpha(t_2)\bigr) =$$
$$= \rho\bigl(x_\alpha(t_1)x_\alpha(t_2)\bigr) = \rho\bigl(x_\alpha(t_1 + t_2)\bigr),$$

а мультипликативность — из формулы в (R2)

$$x_{2\alpha+3\beta}\bigl(\rho(t_1)\rho(t_2)\bigr) = \bigl[x_\alpha\bigl(\rho(t_1)\bigr), x_{\alpha+3\beta}\bigl(\rho(t_2)\bigr)\bigr] = \rho([x_\alpha(t_1), x_{\alpha+3\beta}(t_2)]) =$$
$$= \rho\bigl(x_{2\alpha+3\beta}(t_1t_2)\bigr) = x_{2\alpha+3\beta}\bigl(\rho(t_1t_2)\bigr),$$

где α, β — простые корни в $\mathbf{G}_2$.

Таким образом, ρ является кольцевым автоморфизмом на всех $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathbf{G}_2$, $t \in R$, поэтому он является кольцевым автоморфизмом на элементарной группе Шевалле $E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$. Если исходный автоморфизм рассматривался только на элементарной подгруппе, то лемма доказана.

Предположим теперь, что мы рассматриваем полную группу Шевалле $G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$. Если автоморфизм ρ совпадает с кольцевым автоморфизмом на элементарной подгруппе, то, взяв его композицию с обратным к этому кольцевому автоморфизму, мы получим автоморфизм ρ' группы Шевалле, тождественный на элементарной подгруппе. В этом случае для любого $g \in G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ и любого $x \in E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ мы имеем

$$gxg^{-1} = x',$$

следовательно,

$$\rho'(g)x\rho'(g)^{-1} = x',$$

поэтому

$$\rho'(g)x\rho'(g)^{-1} = gxg^{-1},$$

значит,

$$\big(g^{-1}\rho'(g)\big)x = x\big(g^{-1}\rho'(g)\big).$$

Так как данное равенство верно для всех $x \in E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$, а централизатор элементарной подгруппы в присоединённой группе Шевалле всегда тривиален, то $g^{-1}\rho'(g) = e$ и ρ' — тривиальный автоморфизм.

Таким образом, ρ — кольцевой автоморфизм всей группы Шевалле, а исходный автоморфизм φ является композицией внутреннего и кольцевого автоморфизмов, что и требовалось. $\square$

Литература

[1] Бунина Е. И. Автоморфизмы присоединённых групп Шевалле типов B_2 и G_2 над локальными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 3—27.

[2] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типа B_l над локальными кольцами с 1/2 // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 3—46. — `arXiv:0911.4243`.

[3] Бунина Е. И. Автоморфизмы и нормализаторы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с 1/2 // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 2. — С. 35—59. — `arXiv:0907.5595`.

[4] Бунина Е. И. Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, № 1. — С. 443—470. — `arXiv:math/0702046`.

[5] Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Автоморфизмы групп Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 49—66.

[6] Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Нормализатор группы Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 57—62.

[7] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы общей линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1983. — № 3. — С. 61—72.

[8] Зельманов Е. И. Изоморфизмы полных линейных групп над ассоциативными кольцами // Сиб. матем. журн. — 1985. — Т. 26, № 4. — С. 49—67.

[9] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Vol. 15, вып. 7). — С. 47—80.

[10] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra Analysis. — 1993. — Vol. 5 (2). — P. 74—90.

[11] Abe E., Suzuki K. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tôhoku Math. J. — 1976. — Vol. 28 (1). — P. 185—198.

[12] Borel A. Properties and linear representations of Chevalley groups // Seminar on Algebraic Groups and Related Groups. — Springer, 1970. — (Lect. Notes Math.; Vol. 131). — P. 1—55.

[13] Borel A., Tits J. Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples // Ann. Math. — 1973. — Vol. 97, no. 3. — P. 499—571.

[14] Bourbaki N. Groupes et Algèbres de Lie. — Hermann, 1968.

[15] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with 1/2 // J. Algebra. — 2010. — Vol. 323. — P. 2270—2289.

[16] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. — 2012. — Vol. 335. — P. 154—170.

[17] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings. — 2023. — `http://arxiv.org/abs/2304.13447`.

[18] Bunina E. I., Miasnikov A. G., Plotkin E. B. The Diophantine problem in Chevalley groups. — 2023. — `arxiv.org/abs/2304.26259`.

[19] Carter R. W. Simple Groups of Lie Type. — London: Wiley, 1989.

[20] Carter R. W., Chen Yu. Automorphisms of affine Kac—Moody groups and related Chevalley groups over rings // J. Algebra. — 1993. — Vol. 155. — P. 44—94.

[21] Chen Yu. Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1994. — Vol. 92. — P. 231—237.

[22] Chevalley C. Certains schémas de groupes semi-simples // Sém. Bourbaki (1960—1961). — Vol. 6. — P. 219—234.

[23] Demazure M., Gabriel P. Groupes algébraiques. Vol. I. — Amsterdam: North-Holland, 1970.

[24] Diedonne J. On the automorphisms of classical groups. — 1951. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 2).

[25] Golubchik I. Z. Isomorphisms of the linear general group GL_n, $n \geqslant 4$, over an associative ring // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131, no. 1. — P. 123—136.

[26] Hua L. K., Reiner I. Automorphisms of unimodular groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 71. — P. 331—348.

[27] Humphreys J. E. On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Canad. J. Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 908—911.

[28] Humphreys J. E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. — New York: Springer, 1978.

[29] Klyachko A. A. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras // J. Algebra. — 2010. — Vol. 324, no. 10. — P. 2608—2619.

[30] O'Meara O. T. The automorphisms of linear groups over any integral domain // J. Reine Angew. Math. — 1966. — Vol. 223. — P. 56—100.

[31] Petechuk V. M. Automorphisms of groups $\mathrm{SL}_3(R)$, $\mathrm{GL}_3(R)$ over some local rings // Math. Notes. — 1980. — Vol. 28, no. 2. — P. 187—206.

[32] Petechuk V. M. Automorphisms of matrix groups over commutative rings // Math. Sb. — 1983. — Vol. 45. — P. 527—542.

[33] Petechuk V. M. Automorphisms of groups $\mathrm{SL}_3(R)$, $\mathrm{GL}_3(R)$ // Math. Notes. — 1982. — Vol. 31, no. 5. — P. 657—668.

[34] Rickart C. E. Isomorphic group of linear transformations // Amer. J. Math. — 1950. — Vol. 72. — P. 451—464.

[35] Schreier O., van der Varden B. L. Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1928. — Vol. 6. — P. 303—322.

[36] Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups // Canad. J. Math. — 1960. — Vol. 121. — P. 606—615.

[37] Steinberg R. Lectures on Chevalley Groups. — Yale Univ., 1967.

[38] Vaserstein L. N. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tôhoku Math. J. — 1986. — Vol. 36, no. 5. — P. 219—230.

[39] Vavilov N. A. Structure of Chevalley groups over commutative rings // Proc. Conf. Non-Associative Algebras and Related Topics (Hiroshima, 1990). — London: World Sci. Publ., 1991. — P. 219—335.

[40] Vavilov N. A., Plotkin E. B. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations // Acta Appl. Math. — 1996. — Vol. 45. — P. 73—115.