Многообразия с действием тора сложности 1, имеющие конечное число орбит группы автоморфизмов

С. А. ГАЙФУЛЛИН
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: sgayf@yandex.ru

Д. А. ЧУНАЕВ
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: dchunaev@hse.ru

УДК 512.745.4

Ключевые слова: автоморфизм, аффинное алгебраическое многообразие, действие тора, орбита, триномиальное многообразие.

Аннотация

В работе получены достаточные условия конечности числа орбит группы регулярных автоморфизмов на аффинных многообразиях с действием тора сложности 1.

Abstract

S. A. Gaifullin, D. A. Chunaev, Varieties with a torus action of complexity one having a finite number of automorphism group orbits, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 4, pp. 47—59.

In this paper, we obtain sufficient conditions for a variety with a torus action of complexity one to have a finite number of automorphism group orbits.

1. Введение

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Рассмотрим алгебраическое многообразие X над полем $\mathbb{K}$. Обозначим через $\mathrm{Aut}(X)$ группу регулярных автоморфизмов многообразия X. Многообразие X распадается в объединение $\mathrm{Aut}(X)$-орбит для естественного действия $\mathrm{Aut}(X)$ на X. Для некоторых естественных классов многообразий количество $\mathrm{Aut}(X)$-орбит конечно. Примерами классов многообразий с конечным числом $\mathrm{Aut}(X)$-орбит служат, например, следующие:

- алгебраические группы;
- однородные пространства алгебраических групп;
- торические многообразия;

Фундаментальная и прикладная математика, 2023, том 24, № 4, с. 47—59.

- сферические многообразия (этот класс многообразий строго содержит класс торических многообразий) (см. [20, 22]);
- гибкие нормальные аффинные поверхности (см. определение гибкого многообразия в [7], там же доказано, что группа автоморфизмов гибкого многообразия действует транзитивно на множестве гладких точек);
- однородные многообразия, т. е. многообразия с одной $\mathrm{Aut}(X)$-орбитой. Примеры однородных многообразий, не являющихся однородными пространствами алгебраических групп, можно найти в [10]. Также однородными многообразиями являются гладкие аффинные многообразия с действием редуктивной группы с открытой орбитой, доказательство можно найти в [14].

Класс торических многообразий характеризуется тем, что на данных многообразиях существует действие алгебраического тора сложности 0, т. е. с открытой орбитой. В этой работе мы рассматриваем класс аффинных неприводимых алгебраических многообразий с действием тора сложности 1. Это многообразия с эффективным действием тора размерности на единицу меньше, чем размерность многообразия. Мы доказываем, что многообразие X с действием тора сложности 1, удовлетворяющее некоторым техническим условиям, а именно рациональное без непостоянных обратимых функций и с конечно порождённой группой классов, имеет конечное число $\mathrm{Aut}(X)$-орбит при условии, что оно допускает однородное локально нильпотентное дифференцирование горизонтального типа, т. е. нетривиально действующее на рациональных инвариантах тора. Напомним, что локально нильпотентным дифференцированиям соответствуют алгебраические подгруппы в $\mathrm{Aut}(X)$, изоморфные аддитивной группе поля. Такие подгруппы мы будем называть $\mathbb{G}_a$-подгруппами. Если переформулировать условия на локально нильпотентное дифференцирование в терминах этой подгруппы, то получится, что данная $\mathbb{G}_a$-подгруппа должна быть нормализуема действием тора и нетривиально действовать на рациональных инвариантах этого тора.

Частным случаем многообразий с действием тора сложности 1 являются аффинные триномиальные гиперповерхности, задаваемые уравнениями

$$T_{01}^{l_{01}}\dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}}\dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}}\dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}} = 0, \quad n_0 \geqslant 0,\ n_1, n_2 > 0.$$

Если $n_0 = 0$, то первый моном считаем равным единице. Орбиты группы автоморфизмов нежёстких (т. е. допускающих нетривиальную $\mathbb{G}_a$-подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$) триномиальных гиперповерхностей были изучены в [15]. В частности, в этой работе доказано, что орбит конечное число. Заметим, что в случае жёсткой триномиальной гиперповерхности число орбит бесконечно. Описанию группы автоморфизмов жёстких триномиальных гиперповерхностей посвящена работа [8]. В данной работе мы обобщаем результат [15] и доказываем достаточное условие конечности числа $\mathrm{Aut}(X)$-орбит для аффинных триномиальных многообразий (см. теорему 3.7 и следствие 3.13), т. е. аффинных многообразий, заданных согласованной системой триномиальных уравнений, строгое определение дано в конструкции 3.1. Любое триномиальное многообразие X в силу конструкции есть прямое произведение некоторого триномиального многообразия Y и m-мерного аффинного пространства. Если $m = 0$, то $Y = X$. Достаточное условие конечности числа $\mathrm{Aut}(X)$-орбит состоит в том, что многообразие Y не является жёстким, т. е. допускает нетривиальную $\mathbb{G}_a$-подгруппу в $\mathrm{Aut}(Y)$. У этого условия есть явная интерпретация в терминах степеней переменных, входящий в уравнения, т. е. в терминах данных, по которым строится триномиальное многообразие. Триномиальные многообразия изучались в цикле работ [5, 9, 11, 13, 16—19] и др. Они являются примерами многообразий с действием тора сложности 1. Критерий жёсткости для триномиальных многообразий получен в [11] (см. также работы [4, 13], в которых получены более ранние частичные результаты). Этот критерий играет ключевую роль в доказательстве достаточного условия конечности числа $\mathrm{Aut}(X)$-орбит.

Произвольное рациональное неприводимое аффинное многообразие без непостоянных обратимых функций с конечно порождённой группой классов, допускающее действие тора сложности 1, сводится к случаю триномиального многообразия с помощью конструкции Кокса (см., например, [6]). Напомним, что конструкция Кокса позволяет поставить в соответствие любому нормальному многообразию X без непостоянных обратимых функций и с конечно порождённой группой классов дивизоров так называемое кольцо Кокса. Если это кольцо конечно порождено, у него можно рассмотреть спектр $\bar{X}$, называемый тотальным координатным пространством многообразия X. Само же многообразие X реализуется каноническим образом как категорный фактор $\bar{X}$ по действию квазитора (т. е. произведения алгебраического тора на конечную абелеву группу). В [18] доказано, что тотальное координатное пространство для (рационального неприводимого аффинного без непостоянных обратимых функций) многообразия с действием тора сложности 1 является триномиальным многообразием. Используя стандартную технику при работе с автоморфизмами кольца Кокса, однородное относительно группы характеров максимального тора локально нильпотентное дифференцирование горизонтального типа можно поднять на тотальное координатное пространство. Поэтому на тотальном координатном пространстве будет лишь конечное число орбит группы автоморфизмов. Связи групп автоморфизмов многообразия и его тотального пространства посвящена работа [1]. Используя результаты этой работы, мы показываем, что и на исходном многообразии было лишь конечное число орбит группы автоморфизмов. Таким образом, мы получаем, что достаточное условие конечности числа $\mathrm{Aut}(X)$-орбит для произвольного (рационального неприводимого аффинного без непостоянных обратимых функций) многообразия с действием тора сложности 1 состоит в наличии однородного относительно группы характеров максимального тора локально нильпотентного дифференцирования горизонтального типа.

Авторы благодарны И.В. Аржанцеву за ценные обсуждения. Первый автор является победителем конкурса «Молодая математика России» и хотел бы поблагодарить жюри и спонсоров этого конкурса.

2. Локально нильпотентные дифференцирования

В этом разделе собраны необходимые сведения о локально нильпотентных дифференцированиях. Подробные сведения об этой области можно найти, например, в [12].

Пусть A — коммутативная ассоциативная алгебра без делителей нуля над полем $\mathbb{K}$. Будем считать, что алгебра A конечно порождена, т. е. это алгебра регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ на некотором неприводимом аффинном многообразии X.

Определение 2.1. *Дифференцированием* алгебры A называется линейный оператор $\delta\colon A \to A$, удовлетворяющий тождеству Лейбница $\delta(ab) = a\delta(b)+b\delta(a)$.

Определение 2.2. Дифференцирование $\delta\colon A \to A$ называется *локально нильпотентным*, если для любого $a \in A$ найдётся натуральное число n, такое что $\delta^n(a) = 0$.

Пусть на алгебре A задана градуировка коммутативной группой G:

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g.$$

Дифференцирование δ называется однородным, если оно переводит однородные элементы в однородные. Несложно показать, что для любого однородного локально нильпотентного дифференцирования δ существует такой $g_0 \in G$, что δ переводит A_g в A_{g+g_0}. Элемент g_0 называется *степенью* дифференцирования δ. Несложно доказать, что любое дифференцирование может быть разложено в конечную сумму однородных, которые мы будем называть *однородными компонентами* данного дифференцирования.

Пусть задана градуировка группой $\mathbb{Z}$, и пусть δ — локально нильпотентное дифференцирование на A. Тогда $\delta = \sum\limits_{i=l}^{k} \delta_i$. В [21] доказано, что крайние компоненты δ_l и δ_k также будут локально нильпотентны. Отсюда следует, что $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра допускает ненулевое локально нильпотентное дифференцирование тогда и только тогда, когда она допускает ненулевое $\mathbb{Z}$-однородное локально нильпотентное дифференцирование. Данное утверждение легко переносится на случай $\mathbb{Z}^n$-градуировки.

Локально нильпотентные дифференцирования тесно связаны с автоморфизмами алгебры (многообразия). А именно, можно рассмотреть *экспоненту* данного локально нильпотентного дифференцирования δ

$$\exp(\delta) = \mathrm{id} + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \dots .$$

Так как δ локально нильпотентно, при применении к каждому элементу $a \in A$ сумма будет конечной. Экспонента любого локально нильпотентного дифференцирования является автоморфизмом. Более того, по каждому локально нильпотентному дифференцированию δ можно построить подгруппу в группе автоморфизмов $\mathcal{H}_\delta = \{\exp(s\delta) \mid s \in \mathbb{K}\}$. Это будет $\mathbb{G}_a$-подгруппа, т. е. алгебраическая подгруппа в группе автоморфизмов (сама группа автоморфизмов алгебраической обычно не является), изоморфная аддитивной группе поля $\mathbb{K}$.

Градуировки на $A = \mathbb{K}[X]$ свободной абелевой группой $\mathbb{Z}^n$ находятся в естественной биекции с алгебраическими действиями алгебраического тора $T = (\mathbb{K}^\times)^n$ на X. (При этом $\mathbb{Z}^n$ отождествляется с группой характеров $\mathfrak{X}(T)$ тора T.) При этом то, что некоторое локально нильпотентное дифференцирование δ является $\mathbb{Z}^n$-однородным, равносильно тому, что тор T лежит в нормализаторе соответствующей $\mathbb{G}_a$-подгруппы $\mathcal{H}_\delta$. Часто мы будем говорить, что дифференцирование T-однородно, вместо того чтобы сказать, что оно $\mathfrak{X}(T)$-однородно.

Любое дифференцирование на $\mathbb{K}[X]$ однозначно продолжается до дифференцирования поля рациональных функций $\mathbb{K}(X)$.

Определение 2.3. Пусть на многообразии X задано действие тора T. Будем говорить, что T-однородное локально нильпотентное дифференцирование δ имеет *вертикальный тип*, если его продолжение на $\mathbb{K}(X)$ тождественно равно нулю на поле T-инвариантных функций $\mathbb{K}(X)^T$. Если же δ на $\mathbb{K}(X)^T$ не равно нулю, то данное дифференцирование *горизонтального типа*.

Определение 2.4. Многообразие X называется *жёстким*, если на алгебре $\mathbb{K}[X]$ нет ненулевых локально нильпотентных дифференцирований.

3. Триномиальные многообразия

В этом разделе мы изучим орбиты группы автоморфизмов триномиального многообразия. Прежде всего дадим строгое определение триномиального многообразия согласно [18].

Конструкция 3.1 ([18, конструкция 1.1])**.** Пусть даны натуральные числа r и n, целое неотрицательное число m и число $q \in \{0, 1\}$, а также разбиение $n = n_q + \ldots + n_r$ числа n на натуральные слагаемые. Рассмотрим алгебру B многочленов от $m + n$ переменных, которые мы обозначим T_{ij} и S_k:

$$B = \mathbb{K}[T_{ij}, S_k \mid q \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i,\ 1 \leqslant k \leqslant m].$$

Для каждого $i = q, \ldots, r$ фиксируем вектор натуральных чисел $l_i = \bigl(l_{i1}, \ldots, l_{in_i}\bigr)$ и определим моном

$$T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} \ldots T_{in_i}^{l_{in_i}} \in B.$$

Теперь определим *триномиальную алгебру* $R(A)$, которая будет строиться по некоторым данным A. Эти данные различные для двух типов триномиальных алгебр.

Тип 1. $q = 1$, $A = (a_1, \ldots, a_r)$, $a_j \in \mathbb{K}$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Положим $I = \{1, \ldots, r-1\}$ и

$$g_i = T_i^{l_i} - T_{i+1}^{l_{i+1}} - (a_{i+1} - a_i) \in B, \quad i \in I.$$

Тип 2. $q = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \end{pmatrix} \text{ —}$$

матрица с элементами из $\mathbb{K}$, любые два столбца которой линейно независимы. Положим $I = \{0, \ldots, r-2\}$ и

$$g_i = \det \begin{pmatrix} T_i^{l_i} & T_{i+1}^{l_{i+1}} & T_{i+2}^{l_{i+2}} \\ a_{1i} & a_{1i+1} & a_{1i+2} \\ a_{2i} & a_{2i+1} & a_{2i+2} \end{pmatrix} \in B, \quad i \in I.$$

Для обоих типов $R(A) = B/(g_i \mid i \in I)$.

Определение 3.2. Многообразие $X(A) = \operatorname{Spec}\bigl(R(A)\bigr)$ называется *триномиальным*. Типом триномиального многообразия будем называть тип соответствующей триномиальной алгебры.

Замечание 3.3. Несложно видеть, что размерность $X(A)$ равна $m+n-r+1$.

Замечание 3.4. Как видно из конструкции триномиальных многообразий, любое триномиальное многообразие изоморфно произведению другого триномиального многообразия и m-мерного аффинного пространства $X(A) \cong Y(A) \times \mathbb{A}^m$. Для того чтобы получить алгебру регулярных функций на $Y(A)$, нужно убрать порождающие S_k из алгебры регулярных функций на $X(A)$. Тип многообразия $Y(A)$ совпадает с типом многообразия $X(A)$.

На триномиальном многообразии $X(A)$ можно определить действие алгебраического тора $\mathbb{T} \cong (\mathbb{K}^\times)^{n+m-r}$, которое и будет действием тора сложности 1 на $X(A)$. Как известно, группа характеров алгебраического тора — это свободная абелева группа и задание действие алгебраического тора размерности k эквивалентно заданию градуировки алгебры регулярных функций группой $\mathbb{Z}^k$. Нам удобнее определить действие $\mathbb{T}$ на $X(A)$ в таких терминах, т. е. $\mathbb{Z}^{m+n-r}$-градуировку на $R(A)$. Мы введём эту градуировку следующим образом: припишем степени w_{ij} переменным T_{ij} и степени v_k переменным S_k. Эти веса с соотношениями коммутативности и $\deg T_i^{l_i} = \deg T_j^{l_j}$ задают группу $\mathbb{Z}^{m+n-r}$ (см. подробнее в [18]). Нам понадобятся следующие одномерные подторы в торе $\mathbb{T}$. Подтор $\Lambda_{s,u,v} \cong \mathbb{K}^\times$, где $1 \leqslant u, v \leqslant n_s$, действует следующим образом:

$$t \cdot T_{su} = t^{l_{sv}} T_{su}, \quad t \cdot T_{sv} = t^{-l_{su}} T_{sv},$$
$$t \cdot T_{pq} = T_{pq} \ \text{ для всех } (p,q), \text{ кроме } (s,u) \text{ и } (s,v).$$

Для многообразий типа 2 определим ещё один одномерный подтор Ω в $\mathbb{T}$. Элемент $t \in \Omega$ умножает T_{i1} на $t^{\prod\limits_{j \neq i} l_{j1}}$, а функции T_{is} при $s \geqslant 2$ не меняет.

В [11, теорема 4] получен следующий критерий того, что триномиальное многообразие не является жёстким.

Предложение 3.5. *Триномиальное многообразие $X(A)$ не является жёстким тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $m \neq 0$;
2) *многообразие $X(A)$ имеет тип 1 и существует такое $a \in \{1, \ldots, r\}$, что для любого $i \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{a\}$ существует $j(i) \in \{1, \ldots, n_i\}$, такое что $l_{ij(i)} = 1$;*
3) *многообразие $X(A)$ имеет тип 2 и выполнено одно из следующих условий:*

а) *существуют два таких числа* $a, b \in \{0, \ldots, r\}$, *что для любого* $i \in \{0, \ldots, r\} \setminus \{a, b\}$ *существует* $j(i) \in \{1, \ldots, n_i\}$, *такое что* $l_{ij(i)} = 1$,

б) *существуют три таких числа* $a, b, c \in \{0, \ldots, r\}$, *что для любого* $k \in \{0, \ldots, r\} \setminus \{a, b, c\}$ *существует* $j(k) \in \{1, \ldots, n_k\}$, *такое что* $l_{kj(k)} = 1$, *а также для любого* $i \in \{a, b\}$ *существует* $v(i) \in \{1, \ldots, n_i\}$, *такое что* $l_{iv(i)} = 2$ *и для любого* $w \in \{1, \ldots, n_i\}$ *числа* l_{iw} *чётны.*

Замечание 3.6. Для многообразия $Y(A)$ первый случай никогда не реализуется. Поэтому нежёсткость многообразия $Y(A)$ равносильна тому, что выполняется одно из условий 2) или 3).

Первым основным результатом работы является следующее достаточное условие того, что триномиальное многообразие имеет конечное число орбит группы автоморфизмов.

Теорема 3.7. *Если многообразие* $Y(A)$ *не является жёстким, то на многообразии* $X(A)$ *конечное число* $\mathrm{Aut}\big(X(A)\big)$*-орбит.*

Доказательство. Пусть многообразие $Y(A)$ не жёсткое. Фиксируем подмножество J в множестве переменных T_{ij}. Это можно сделать 2^n способами. Докажем, что множество

$$L(J) = \{x \in X(A) \mid T_{ij}(x) = 0 \Leftrightarrow T_{ij} \in J\}$$

лежит в объединении конечного числа $\mathrm{Aut}(X)$-орбит. Из этого, конечно же, будет следовать конечность числа орбит. Начнём со случая, когда множество J не пусто. Обозначим через $L_Y(J)$ аналогичное подмножество, но в многообразии Y:

$$L_Y(J) = \{y \in Y(A) \mid T_{ij}(y) = 0 \Leftrightarrow T_{ij} \in J\}.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3.8. *Пусть* $J \neq \varnothing$. *Тогда для любых двух точек* α *и* β *из* $L_Y(J)$ *можно перевести* α *в* β, *подействовав элементом из* $\mathbb{T}$.

Доказательство. Пусть $T_{is} \in J$. Действуя на α одномерными торами $\Lambda_{i,s,v}$, мы можем сделать значения переменных T_{iv}, не лежащих в J, любыми ненулевыми, в частности, такими же, как в β.

Дальнейшее доказательство проведём отдельно для разных типов $Y(A)$. Пусть $Y(A)$ имеет тип 1. Рассматривая линейные комбинации уравнений, задающих $Y(A)$, легко видеть, что выполняются уравнения $T_i^{l_i} - T_j^{l_j} = a_j - a_i$. Так как $T_i^{l_i}(\alpha) = 0$, получаем $T_j^{l_j}(\alpha) = a_i - a_j \neq 0$. Аналогично $T_j^{l_j}(\beta) = a_i - a_j$. Отсюда следует, что все переменные T_{ju} принимают в точках α и β ненулевые значения. Легко видеть, что с помощью подторов $\Lambda_{j,u,v}$ можно перевести точку α в точку с такими же значениями T_{ju}, что и в точке β. Итак, последовательным применением элементов из $\mathbb{T}$ мы можем привести α в точку, в которой значения всех координат совпадают со значениями в β, т. е. в саму точку β.

Пусть теперь $Y(A)$ имеет тип 2. Снова рассматривая линейные комбинации уравнений, задающих $Y(A)$, легко видеть, что выполняются уравнения

$$\det \begin{pmatrix} T_p^{l_p} & T_q^{l_q} & T_u^{l_u} \\ a_{1p} & a_{1q} & a_{1u} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2u} \end{pmatrix} = 0$$

для всех троек (p,q,u). Подставляя $u = i$ и точки α и β, мы получаем, что $\lambda T_p^{l_p}(\alpha) + \mu T_q^{l_q}(\alpha) = 0$ для некоторых ненулевых λ и μ и $\lambda T_p^{l_p}(\beta) + \mu T_q^{l_q}(\beta) = 0$. Если для всех $j \neq i$ выполнено $T_j^{l_j}(\alpha) = 0$, то для всех j имеем $T_j^{l_j}(\alpha) = T_j^{l_j}(\beta)$. Иначе выберем $j \neq i$, такой что $T_j^{l_j}(\alpha) \neq 0$. С помощью элемента из Ω мы можем перевести α в α', такое что $T_j^{l_j}(\alpha') = T_j^{l_j}(\beta)$. Но тогда из полученных уравнений следует, что для любого k выполнено $T_k^{l_k}(\alpha') = T_k^{l_k}(\beta)$. Далее, используя $\Lambda_{k,u,v}$, можно перевести α' в β аналогично случаю с типом 1.

Лемма доказана. □

Из только что доказанной леммы следует, что если J непусто, то для любых точек α и β из $L(J)$ с помощью действия элемента t тора $\mathbb{T}$ на α можно сделать координаты T_{ij} одинаковыми на $\alpha' = t \cdot \alpha$ и β. С другой стороны, на аффинном пространстве $\mathbb{A}^m$ транзитивно действует группа параллельных переносов, элементом этой группы можно перевести α' в β.

Замечание 3.9. При непустом J даже не использовалось условие нежёсткости $Y(A)$.

Осталось доказать, что $L(\varnothing)$ лежит в объединении конечного числа $\operatorname{Aut}\bigl(X(A)\bigr)$-орбит. Так как многообразие $Y(A)$ не жёсткое, существует локально нильпотентное дифференцирование δ на $R(A)$, такое что $\delta(T_{ij}) \neq 0$ для некоторой пары (i,j). При этом по [12, принцип 5] $\delta(T_{ij})$ не делится на T_{ij} в $R(A)$. Следовательно, найдётся такая точка $x \in L(\{T_{ij}\})$, что $\delta(T_{ij})(x) \neq 0$. Рассмотрим группу G, порождённую $\mathbb{T}$ и $\mathbb{G}_a$-подгруппой $\{\exp(s\delta) \mid s \in \mathbb{K}\}$. Подгруппа G в $\operatorname{Aut}\bigl(X(A)\bigr)$ является алгебраически порождённой, т. е. порождена алгебраическими подгруппами. По [7, утверждение 1.3] любая G-орбита открыта в своём замыкании в топологии Зариского. В частности, этой орбите можно корректно приписать размерность. Так как орбита Gx содержит $L(\{T_{ij}\})$, но не содержится в нём, получается, что орбита Gx имеет бóльшую размерность, чем $\dim L(\{T_{ij}\}) = \dim \mathbb{T} = \dim X(A) - 1$. Следовательно, Gx открыта в $X(A)$. Дополнение к этой открытой орбите — возможно приводимое многообразие размерности не более $\dim \mathbb{T}$. Однако размерность $\mathbb{T}$-орбиты любой точки из $L(\varnothing)$ равна $\dim \mathbb{T}$. Следовательно, размерность G-орбиты любой точки из $L(\varnothing)$ не менее $\dim \mathbb{T}$. Значит, $L(\varnothing)$ покрывается конечным числом G-орбит. (Эти орбиты могут выходить за пределы $L(\varnothing)$.) Так как G-орбиты содержатся в $\operatorname{Aut}\bigl(X(A)\bigr)$-орбитах, из этого следует утверждение теоремы. □

Замечание 3.10. Используя дифференцирования из [13, раздел 4], а также лемму 10 из той же работы, можно явно построить локально нильпотентное дифференцирование на нежёстких триномиальных многообразиях и проследить явно за тем, что $L(\varnothing)$ лежит в одной $\mathrm{Aut}\big(X(A)\big)$-орбите в условиях теоремы 3.7.

Замечание 3.11. Из доказательства теоремы 3.7 видно, что каждое подмножество $L(J)$, где $J \neq \varnothing$, составляет одну $\mathbb{T}$-орбиту, а подмножество $L(\varnothing)$ покрывается конечным числом орбит группы, порождённой $\mathbb{T}$ и одной любой $\mathbb{G}_a$-подгруппой, нетривиально действующей на $Y(A)$.

То, что $\mathbb{T}$-нормализуемая подгруппа $\mathbb{G}_a$-подгруппа нетривиально действует на $Y(A)$, можно сформулировать в терминах соответствующих локально нильпотентных дифференцирований.

Лемма 3.12. *Однородное относительно $\mathbb{T}$ локально нильпотентное дифференцирование δ на $R(A)$ имеет вертикальный тип тогда и только тогда, когда $\delta(T_{ij}) = 0$ для всех пар (i,j).*

Доказательство. Несложно доказать, что поле $\mathbb{T}$-инвариантов лежит в поле, порождённом мономами $T_i^{l_i}$. А именно, в случае типа 1 эти два поля совпадают, а в случае типа 2 поле $\mathbb{T}$-инвариантов порождается отношениями таких мономов. В любом случае если $\delta(T_{ij}) = 0$ для всех пар (i,j), то дифференцирование имеет вертикальный тип.

Напротив, если δ не равно нулю на каком-то T_{ij}, то по замечанию 3.11 группа G, порождённая $\mathbb{T}$ и $\mathcal{H}_\delta$, действует на $X(A)$ с конечным числом орбит, а следовательно, одна из этих орбит является открытой. Это означает, что поле G-инвариантов совпадает с $\mathbb{K}$. С другой стороны,

$$\mathbb{K}\big(X(A)\big)^G = \mathbb{K}\big(X(A)\big)^{\mathbb{T}} \cap \operatorname{Ker}\delta.$$

При этом $\mathbb{K}\big(X(A)\big)^{\mathbb{T}} \neq \mathbb{K}$. Следовательно, δ имеет горизонтальный тип. □

Мы получаем следующее утверждение.

Следствие 3.13. *Если на $R(A)$ есть $\mathbb{T}$-однородное локально нильпотентное дифференцирование δ горизонтального типа, то на многообразии $X(A)$ конечное число $\mathrm{Aut}\big(X(A)\big)$-орбит. Более того, в этом случае на $X(A)$ конечное число G-орбит, где G — подгруппа в $\mathrm{Aut}\big(X(A)\big)$, порождённая $\mathbb{T}$ и $\mathbb{G}_a$-подгруппой, соответствующей δ.*

Доказательство. То, что при наличии $\mathbb{T}$-однородного локально нильпотентного дифференцирования горизонтального типа число $\mathrm{Aut}\big(X(A)\big)$-орбит конечно, следует из леммы 3.12 и теоремы 3.7. Конечность числа G-орбит при выполнении этих условий следует из замечания 3.11. □

4. Многообразия с действием тора сложности 1

Как доказано в [18, следствие 1.9], любое нормальное рациональное неприводимое аффинное многообразие Z без непостоянных обратимых функций, допускающее действие тора сложности 1, может быть канонически получено как категорный фактор некоторого триномиального многообразия $\bar{Z}$ по действию некоторого квазитора $H \subseteq \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ — квазитор, являющийся централизатором $\mathbb{T}$ в $\mathrm{Aut}\big(X(A)\big)$. Эта представление многообразия Z в виде категорного фактора является реализацией Кокса данного многообразия (см. [6]). В [1] доказано, что имеет место следующая точная последовательность:

$$1 \to H \to \widetilde{\mathrm{Aut}(\bar{Z})} \to \mathrm{Aut}(Z) \to 1,$$

где $\widetilde{\mathrm{Aut}(\bar{Z})}$ — группа автоморфизмов $\bar{Z}$, лежащих в нормализаторе H. Здесь гомоморфизм $\widetilde{\mathrm{Aut}(\bar{Z})} \to \mathrm{Aut}(Z)$ — это гомоморфизм ограничения автоморфизма с алгебры функций $\mathbb{K}[\bar{Z}]$ на H-инварианты.

Лемма 4.1. *Если число $\widetilde{\mathrm{Aut}(\bar{Z})}$-орбит на $\bar{Z}$ конечно, то и число $\mathrm{Aut}(Z)$-орбит на Z конечно.*

Доказательство. Морфизм факторизации

$$\pi \colon \bar{Z} \to \bar{Z}/\!/H = Z$$

является сюръективным и образ каждой $\widetilde{\mathrm{Aut}(\bar{Z})}$-орбиты совпадает с $\mathrm{Aut}(Z)$-орбитой. $\square$

Предложение 4.2. *Пусть реализация Кокса неприводимого аффинного алгебраического многообразия Z с действием тора сложности 1 имеет вид*

$$Z = X(A)/\!/H.$$

Тогда если существует локально нильпотентное дифференцирование на $R(A)$, которое является H-однородным степени ноль, и хотя бы одна образующая $T_{ij} \in R(A)$ не лежит в его ядре, то количество $\mathrm{Aut}(Z)$-орбит конечно.

Доказательство. Рассмотрим $\mathbb{G}_a$-подгруппу, которая соответствует локально нильпотентному дифференцированию из условия. Обозначим через G подгруппу, порождённую $\mathbb{T}$ и этой $\mathbb{G}_a$-подгруппой. Так как T_{ij} не входило в ядро этого локально нильпотентного дифференцирования, из замечания 3.11 следует, что количество G-орбит на $X(A)$ конечно. С другой стороны, поскольку данное локально нильпотентное дифференцирование по условию было H-однородным степени ноль, соответствующая $\mathbb{G}_a$-подгруппа лежит в $\widetilde{\mathrm{Aut}\big(X(A)\big)}$, т. е. нормализует H (а на самом деле даже коммутирует с H). Следовательно, $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Aut}\big(X(A)\big)}$. По лемме 4.1 количество $\mathrm{Aut}(Z)$-орбит конечно. $\square$

Предложение 4.2 даёт достаточное условие конечности числа $\mathrm{Aut}(Z)$-орбит в терминах реализации Кокса данного многообразия. Однако было бы полезно иметь такое условие во внутренних терминах многообразия Z. Его даёт следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть Z — аффинное неприводимое рациональное многообразие без непостоянных обратимых функций и с действием тора $\hat{T}$ сложности 1.*

Допустим, что на Z существует $\hat{T}$-однородное локально нильпотентное дифференцирование горизонтального типа. Тогда количество $\mathrm{Aut}(Z)$*-орбит конечно.*

Доказательство. Пусть на Z есть $\hat{T}$-однородное локально нильпотентное дифференцирование горизонтального типа. Ему соответствует $\mathbb{G}_a$-подгруппа Ω в $\mathrm{Aut}(Z)$, которая нетривиально действует на $\mathbb{K}(Z)^{\hat{T}}$. По [6, теорема 4.2.3.2] существует $\mathbb{G}_a$-подгруппа $\bar{\Omega}$ в $\widetilde{\mathrm{Aut}(\bar{Z})}$, такая что она переходит при гомоморфизме ограничения на $\mathbb{K}[Z]$ в Ω. Тогда $\bar{\Omega}$ — это $\mathbb{T}$-однородная $\mathbb{G}_a$-подгруппа, которая нетривиально действует на $\mathbb{K}(\bar{Z})^{\mathbb{T}} = \mathbb{K}(Z)^{\hat{T}}$. Таким образом, $\bar{\Omega}$ соответствует локально нильпотентное дифференцирование горизонтального типа на $\bar{Z}$. По следствию 3.13 на $\bar{Z}$ конечное число G-орбит, где G — группа, порождённая $\mathbb{T}$ и $\bar{\Omega}$. Так как $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Aut}(Z)}$, на $\bar{Z}$ конечное число $\widetilde{\mathrm{Aut}(Z)}$-орбит. По лемме 4.1 количество $\mathrm{Aut}(Z)$-орбит на Z конечно. $\square$

Пример 4.4. Рассмотрим гиперповерхность

$$X = \{x_1 \dots x_k(y_1^{b_1} \dots y_m^{b_m} + z_1^{c_1} \dots z_l^{c_l}) = uv_1^{r_1} \dots v_p^{r_p}\} \subseteq \mathbb{K}^{k+l+m+p+1}.$$

На этой гиперповерхности можно ввести действие тора размерности $k + l + m + p - 1$ аналогично тому, как вводится такое действие для триномиальных гиперповерхностей. А именно, каждой переменной соответствует степень и на эти степени будет ровно два линейных соотношения. При этом можно рассмотреть однородное локально нильпотентное дифференцирование горизонтального типа

$$\delta(u) = b_1 x_1 \dots x_k y_1^{b_1 - 1} \dots y_m^{b_m}, \quad \delta(y_1) = v_1^{r_1} \dots v_p^{r_p},$$

на остальных образующих δ равно нулю. Легко проверить, что данное дифференцирование действительно локально нильпотентно. То, что оно горизонтального типа, следует из того, что оно не равно нулю на рациональном инварианте тора

$$\frac{uv_1^{r_1} \dots v_p^{r_p}}{x_1 \dots x_k z_1^{c_1} \dots z_l^{c_l}}.$$

То, что многообразие X рационально, следует из того, что открытое подмножество $\{v_1^{r_1} \dots v_p^{r_p} \neq 0\} \subseteq X$ изоморфно открытому подмножеству в аффинном пространстве. На X нет непостоянных обратимых функций, так как нет непостоянных однородных обратимых функций. Последнее верно, так как нет ненулевых противоположных друг другу $\mathfrak{X}(T)$-степеней. Наконец, нормальность многообразия X следует из критерия нормальности Серра, так как множество особых точек в X имеет коразмерность 2. По теореме 4.3 на X конечное число $\mathrm{Aut}(X)$-орбит.

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2023 году.

Литература

[1] Аржанцев И. В., Гайфуллин С. А. Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 1. — С. 3—24.

[2] Аржанцев И. В., Зайденберг М. Г., Куюмжиян К. Г. Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 7. — С. 3—30.

[3] Болдырев И. А., Гайфуллин С. А. Автоморфизмы ненормальных торических многообразий // Матем. заметки. — 2021. — Т. 110, № 6. — С. 837—855.

[4] Arzhantsev I. On rigidity of factorial trinomial hypersurfaces // Int. J. Algebra Comput. — 2016. — Vol. 26, no. 5. — P. 1061—1070.

[5] Arzhantsev I., Braun L., Hausen J., Wrobel M. Log terminal singularities, platonic tuples and iteration of Cox rings // Eur. J. Math. — 2018. — Vol. 4, no. 1. — P. 242—312.

[6] Arzhantsev I., Derenthal U., Hausen J., Laface A. Cox Rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015. — (Cambridge Stud. Adv. Math.; Vol. 144).

[7] Arzhantsev I., Flenner H., Kaliman S., Kutzschebauch F., Zaidenberg M. Flexible varieties and automorphism groups // Duke Math. J. — 2013. — Vol. 162, no. 4. — P. 767—823.

[8] Arzhantsev I., Gaifullin S. The automorphism group of a rigid affine variety // Math. Nachr. — 2017. — Vol. 290, no. 5-6. — P. 662—671.

[9] Arzhantsev I., Hausen J., Herppich E., Liendo A. The automorphism group of a variety with torus action of complexity one // Moscow Math. J. — 2014. — Vol. 14, no. 3. — P. 429—471.

[10] Arzhantsev I., Zaitseva Y. Affine homogeneous varieties and suspensions. — 2023. — `arXiv:2309.06170`.

[11] Evdokimova P., Gaifullin S., Shafarevich A. Rigid trinomial varieties. — 2023. — `arXiv:2307.06672`.

[12] Freudenburg G. Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations. — Berlin: Springer, 2017.

[13] Gaifullin S. On rigidity of trinomial hypersurfaces and factorial trinomial varieties. — 2019. — `arXiv:1902.06136`.

[14] Gayfullin S., Shafarevich A. Flexibility of normal affine horospherical varieties // Proc. Amer. Math. Soc. — 2019. — Vol. 147. — P. 3317—3330.

[15] Gaifullin S., Shirinkin G. Orbits of automorphism group of trinomial hypersurfaces. — 2022. — `arXiv:2205.02513`.

[16] Hausen J., Herppich E. Factorially graded rings of complexity one // Torsors, “Étale Homotopy and Applications to Rational Points. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 405). — P. 414—428.

[17] Hausen J., Suess H. The Cox ring of an algebraic variety with torus action // Adv. Math. — 2010. — Vol. 225. — P. 977—1012.

[18] Hausen J., Wrobel M. Non-complete rational T-varieties of complexity one // Math. Nachr. — 2017. — Vol. 290, no. 5-6. — P. 815—826.

[19] Hausen J., Wrobel M. On iteration of Cox rings // J. Pure Appl. Algebra. — 2018. — Vol. 222, no. 9. — P. 2737—2745.

[20] Knop F. The Luna—Vust theory of spherical embeddings // Proc. of the Hyderabad Conf. on Algebraic Groups (Hyderabad, India, 1989). — Madras: Manoj Prakashan, 1991. — P. 225—249.

[21] Rentschler R. Opérations du groupe additif sur le plane affine // C. R. Acad. Sci. — 1968. — Vol. 267. — P. 384—387.

[22] Timashev D. A. Homogeneous Spaces and Equivariant Embeddings. — Berlin: Springer, 2011. — (Encycl. Math. Sci.; Vol. 138).