Квазирегулярные радикалы неассоциативных алгебр

А. Ю. ГОЛУБКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: artgolub@hotmail.com

УДК 512.554+512.552.12

Ключевые слова: квазирегулярный радикал, радикал Маккриммона, кольцо Джекобсона, алгебра Ли с конечной преградуировкой (градуировкой), конструкция Титса—Кантора—Кёхера.

Аннотация

В работе рассматриваются конструкции квазирегулярного радикала линейных алгебр, основанные на его ассоциативном и йордановом определениях, и способы построения однородных радикалов алгебр Ли с конечной преградуировкой на базе радикалов линейных йордановых пар, которые позволяют определить лиевы аналоги квазирегулярного радикала.

Abstract

A. Yu. Golubkov, Quasiregular radicals of nonassociative algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 4, pp. 75—128.

This paper considers constructions of the quasiregular radical of linear algebras based on its associative and Jordan definitions, and methods for constructing homogeneous radicals of Lie algebras with finite pregrading based on radicals of linear Jordan pairs that allow one to determine the Lie analogues of the quasiregular radical.

1. Введение

Говоря о радикалах в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ на классах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ как о вариантах одного понятия (об одном из них как об аналоге другого), мы предполагаем наличие сходного описания их значений (общей схемы построения) или (и) соответствия между радикалами на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, отображающего один из них в другой ($\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ — классы алгебраических структур (не обязательно одинаковых), к которым применима теория радикалов Куроша—Амицура).

Наиболее известными аналогами квазирегулярного радикала ассоциативных алгебр или радикала Джекобсона (Перлиса—Джекобсона) среди радикалов алгебр являются квазирегулярные радикалы альтернативных и йордановых алгебр, первый из которых, радикал Смайли—Клейнфелда—Жевлакова, имеет общее с радикалом Джекобсона описание в терминах элементов, модулярных идеалов и неприводимых представлений, второй — сходное с ним по форме описание в терминах элементов и модулярных идеалов (с заменой односторонних на внутренние идеалы). Их конструкции (см. [6, гл. 10, 14; 7; 43]) и идеи [42] (с учётом неточности в следствии 11) объединены во второй части работы в две довольно общие схемы построения квазирегулярных радикалов линейных алгебр. В третьей части работы они применяются к обобщённому варианту теоремы Амицура—Прочези. Вместе с тем построить при помощи этих схем нетривиальный квазирегулярный радикал алгебр Ли скорее всего невозможно. Нельзя согласиться и с его определением из [37], так как оно не позволяет получить наднильпотентный радикал даже на классах конечномерных алгебр Ли над полями нулевой характеристики (см. [37, теорема 2]). Более правильным с нашей точки зрения является определение такого радикала на отдельных классах алгебр Ли через соответствие между их радикалами и радикалами структур, которые обладают квазирегулярным радикалом. Данный подход реализован в финальной части работы при обсуждении взаимосвязей между радикалами алгебр Ли с конечной преградуировкой и линейных йордановых пар.

Всюду далее F — произвольное ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, все алгебры и модули над F являются одновременно левыми и правыми унитарными F-модулями с идентичным левым и правым действием, все классы алгебр над F содержат нулевую алгебру и изоморфные копии своих алгебр. Во второй и третьей части работы рассматриваются только линейные алгебры и используются следующие обозначения: $M(A)$, $L(A)$ и $R(A)$ — алгебры умножений, левых и правых умножений алгебры A над кольцом F, где $M(A) = \langle l_x, r_x \mid x \in A\rangle$, $L(A) = \langle l_x \mid x \in A\rangle$ и $R(A) = \langle r_x \mid x \in A\rangle$ — подалгебры алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(A)$ F-модуля A с указанными множествами порождающих, l_x и r_x — операторы левого и правого умножения на элемент $x \in A$, $l_x\colon y \mapsto xy$ и $r_x\colon y \mapsto yx$, $y \in A$; $M^A(B)$ — подалгебра алгебры $M(A)$, порождённая операторами левого и правого умножения на элементы множества $B \subseteq A$; $(B)_A$ — идеал A, порождённый $B \subset A$; A^1 — алгебра, полученная из A стандартным присоединением единицы, т. е. прямая сумма F-модулей $A^1 = F \oplus A$ с операцией умножения

$$(f + x)(g + y) = fg + (xy + gx + fy) \quad (f, g \in F,\ x, y \in A);$$

$Z(A)$ — центр A,

$$\begin{aligned} Z(A) &= \\ &= \{x \in A \mid xy = yx,\ (x, y, z) = (y, x, z) = (y, z, x) = 0 \text{ для любых } y, z \in A\} = \\ &= \bigl\{x \in A \mid l_x = r_x \in Z\bigl(M(A)\bigr)\bigr\}, \end{aligned}$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор x, y, z. Действие гомоморфизмов F-модулей на элементы мы будем записывать слева: $\phi x = \phi(x)$, $\phi \in \mathrm{Hom}_F(M, N)$, $x \in M$ (т. е. так, как это принято для правых F-модулей). Тождественный изоморфизм F-модуля M мы будем обозначать через Id_M, аннулятор M в F —

через $\operatorname{Ann}_F M = \{f \in F \mid fM = \{0\}\}$. При необходимости мы всегда можем рассматривать M как точный $F/\operatorname{Ann}_F M$-модуль. Будем говорить, что M не имеет f-кручения, $0 \neq f \in F$, если $fx \neq 0$ для всех $0 \neq x \in M$. Алгебры (тройные системы) над F, не имеющие f-кручения как F-модули, мы будем называть *алгебрами* (*системами*) *без f-кручения*. Конечно порождённые как F-модули алгебры над F будем называть *конечными алгебрами над F*.

Пусть G — группоид, A — алгебра над кольцом F, представимая в виде суммы F-подмодулей $A = \sum_{g\in G} A_g$, таких что $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, $g, h \in G$. Система подмодулей $\{A_g\}_{g\in G}$ называется *G-преградуировкой* алгебры A и её *G-градуировкой*, если $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$. Если $|\operatorname{supp}(\{A_g\}_{g\in G})| < \infty$, $\operatorname{supp}(\{A_g\}_{g\in G}) = \{g \in G \mid A_g \neq \{0\}\}$, G-преградуировка $\{A_g\}_{g\in G}$ называется *конечной*. Пара $(A, \{A_g\}_{g\in G})$ называется *G-преградуированной алгеброй*, и при выборе множества S, $\operatorname{supp}(\{A_g\}_{g\in G}) \subseteq S \subseteq G$, *$S$-преградуированной алгеброй*, в этом случае она обозначается через $(A, \{A_g\}_{g\in S})$. Если $G = (\mathbb{Z}, +)$ — аддитивная группа кольца целых чисел $\mathbb{Z}$, $S = \{i\}_{|i|\leqslant n}$ для некоторого $n \geqslant 1$, $(A, \{A_g\}_{g\in S})$ называется также $(2n+1)$-*преградуированной алгеброй*.

Мы будем называть F-подмодуль M алгебры $(A, \{A_g\}_{g\in G})$ *однородным подмодулем*, если $M = \sum_{g\in G} (M \cap A_g)$, гомоморфизм $\phi\colon A \to A'$ алгебр $(A, \{A_g\}_{g\in G})$ и $(A', \{A'_g\}_{g\in G})$ — *однородным гомоморфизмом*, если его ядро $\operatorname{Ker}\phi$ однородно и $\phi(A_g) = \phi(A) \cap A'_g$, $g \in G$. Для G-градуированной алгебры $(A', \{A'_g\}_{g\in G})$ однородность ϕ равносильна тому, что $\phi(A_g) \subseteq A'_g$, $g \in G$. Образы и прообразы однородных подмодулей алгебр $(A, \{A_g\}_{g\in G})$ и $(A', \{A'_g\}_{g\in G})$ при действии однородного гомоморфизма $\phi\colon A \to A'$ однородны. Кроме того, для любого однородного идеала $I \lhd (A, \{A_g\}_{g\in G})$ естественный эпиморфизм A на A/I — однородный эпиморфизм $(A, \{A_g\}_{g\in G})$ на $(A/I, \{(A_g + I)/I\}_{g\in G})$.

По аналогии с обычным определением радикала в смысле Куроша—Амицура можно определить однородный радикал на замкнутом относительно взятия однородных (как подмодули) идеалов и образов при действии однородных гомоморфизмов классе G-преградуированных алгебр над кольцом F, заменив идеалы и гомоморфные образы на их однородные версии. Последнее не меняет стандартные характеризации радикальных и полупростых классов (в данном случае все классы содержат нулевую алгебру и копии своих алгебр при действии только однородных изоморфизмов).

Пары вида $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ и (R, U), где R — F-модуль, $\{\ ,\ ,\ \}\colon R^3 \to R$ — трилинейная композиция и $U\colon R \to \operatorname{End}_F(R)$ — квадратичное отображение, $U\colon fx \mapsto U_{fx} = f^2 U_x$, $x \in R$, $f \in F$, называются *линейными* и *квадратичными тройными системами*. На $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ определено также квадратичное отображение $U'\colon x \mapsto \{x,\ ,x\}$, на (R, U) — трилинейная композиция $\{x, y, z\}' = \{z, y, x\}' = U_{x,z} y$, $U_{x,z} = U_{x+z} - U_x - U_z$, $U_{x,x} = 2U_x$, $U'_{x,z} = \{x,\ ,z\} + \{z,\ ,x\}$, $x, y, z \in R$. Подмодуль $I \subseteq R$ называется *внутренним идеалом* (R, U), если $U(I)R \subseteq I$, *внутренним идеалом* $(R, \{\ ,\ ,\ \})$, если I — внутренний идеал

(R, U'), *идеалом* $(R, \{\ ,\ ,\ \})$, если $\{I, R, R\} + \{R, I, R\} + \{R, R, I\} \subseteq I$, *идеалом* (R, U), если $U(I)R + U(R)I + \{R, R, I\}' \subseteq I$ (как следствие, I — идеал $(R, \{\ ,\ ,\ \}'))$, где $U(A)B$ — подмодуль R, порождённый $\{U_a b \mid a \in A,\ b \in B\}$, $A, B \subseteq R$.

Помимо квадратичных тройных систем, мы будем рассматривать пары вида $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ и $(R^\pm, U^\pm)$, где $R^\pm$ — F-модули, $\{\ ,\ ,\ \}^\pm\colon R^\pm \times R^\mp \times R^\pm \to R^\pm$ — трилинейные композиции и $U^\pm\colon R^\pm \to \mathrm{Hom}_F(R^\mp, R^\pm)$ — квадратичные отображения, $U^\pm\colon fx^\pm \mapsto U^\pm_{fx^\pm} = f^2 U^\pm_{x^\pm}$, $x^\pm \in R^\pm$, $f \in F$, которые будем называть *линейными* и *квадратичными парами*. Аналогично квадратичным тройным системам $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ и $(R^\pm, U^\pm)$ можно превратить в квадратичную пару $(R^\pm, U'^\pm)$ с $U'^\pm\colon x^\pm \mapsto \{x^\pm, \ , x^\pm\}^\pm$, $x^\pm \in R^\pm$, и линейную пару $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}'^\pm)$ с $\{x^\pm, y^\mp, z^\pm\}'^\pm = U^\pm_{x^\pm, z^\pm} y^\mp$, $U^\pm_{x^\pm, z^\pm} = U^\pm_{x^\pm + z^\pm} - U^\pm_{x^\pm} - U^\pm_{z^\pm}$, $x^\pm, y^\pm, z^\pm \in R^\pm$. Каждой линейной тройной системе $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ (квадратичной тройной системе (R, U)) отвечает линейная пара $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ (квадратичная пара $(R^\pm, U^\pm)$), $R^\pm = R$, $\{\ ,\ ,\ \}^\pm = \{\ ,\ ,\ \}$, $U^\pm = U$, любой линейной паре $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ (квадратичной паре $(R^\pm, U^\pm)$) — линейная тройная система $(R^+ \oplus R^-, \{\ ,\ ,\ \})$ (квадратичная тройная система $(R^+ \oplus R^-, U)$),

$$\begin{gathered}\{x^+ + x^-, y^+ + y^-, z^+ + z^-\} = \{x^+, y^-, z^+\}^+ + \{x^-, y^+, z^-\}^-,\\ U_{x^+ + x^-}(y^+ + y^-) = U^+_{x^+} y^- + U^-_{x^-} y^+ \quad (x^\pm, y^\pm, z^\pm \in R^\pm).\end{gathered}$$

Пара подмодулей $(I^\pm)$, $I^\pm \subseteq R$, называется *идеалом* линейной пары $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ (квадратичной пары $(R^\pm, U^\pm)$), если $I^+ \oplus I^-$ — идеал её линейной тройной системы $(R^+ \oplus R^-, \{\ ,\ ,\ \})$ (квадратичной тройной системы $(R^+ \oplus R^-, U)$). Аналогичным образом определяются внутренние идеалы линейных пар и квадратичных пар.

Линейная тройная система $(R, \{\ ,\ ,\ \})$, удовлетворяющая тождествам

$$\begin{gathered}\{x, y, z\} = \{z, y, x\},\\ \big\{x, y, \{a, b, c\}\big\} - \big\{a, b, \{x, y, c\}\big\} = \big\{\{x, y, a\}, b, c\big\} - \{a, \{y, x, b\}, c\},\end{gathered}$$

называется *линейной тройной йордановой системой*. Тройная система (R, U), которая удовлетворяет тождествам

$$V_{x,y} U_x = U_x V_{y,x}, \quad V_{U_x y, y} = V_{x, U_y x}, \quad U_{U_x y} = U_x U_y U_x,$$

где $V_{x,y}\colon z \mapsto \{x, y, z\}'$, $x, y, z \in R$, и всем их линеаризациям, называется *квадратичной тройной йордановой системой* или просто *тройной йордановой системой*. Из тождеств, определяющих тройную йорданову систему, следуют тождества

$$\begin{gathered}\{x, y, \{x, z, x\}'\}' = \{x, \{y, x, z\}', x\}', \quad \big\{\{x, y, x\}', y, z\big\}' = \{x, \{y, x, y\}', z\}',\\ \big\{\{x, y, x\}', z, \{x, y, x\}'\big\}' = \{x, \{y, \{x, z, x\}', y\}', x\}',\end{gathered}$$

равносильные исходным для квадратичной тройной системы без 2-кручения. Каждой тройной йордановой системе (R, U) соответствует линейная тройная йорданова система $(R,\{\ ,\ ,\ \}')$, каждой линейной тройной йордановой системе $(R,\{\ ,\ ,\ \})$ для R без 6-кручения — тройная йорданова система (R,U') (см. [41, п. 2.1, 2.2]). Любую йорданову (линейную йорданову) алгебру R над кольцом F (с $1/2$) можно рассматривать как тройную йорданову систему (R,U), где $U\colon x\mapsto U_x$, $x\in R$, U_x — оператор квадратичного умножения на x, $U_x=2r_x^2-r_{x^2}$ в линейном случае (см. [45, п. 10.1; 6, теорема Ширшова, с. 90]). Линейная пара (квадратичная пара) называется *линейной йордановой парой* (*йордановой парой*), если её линейная тройная система (тройная система) — линейная тройная йорданова система (тройная йорданова система).

Подмодуль M алгебры Ли L называется *внутренним* (*абелевым внутренним*) *идеалом*, если $\big[M,[M,L]\big]\subseteq M$ (и $[M,M]=\{0\}$), где $[\ ,\ ]$ — операция умножения L и всех рассматриваемых далее алгебр Ли. Любым двум абелевым внутренним идеалам $M^{\pm}\subseteq L$ отвечает линейная йорданова пара $(M^+,M^-)=(M^{\pm},\{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$, $\{\ ,\ ,\ \}^{\pm}=\big[[\ ,\ ],\ \big]$.

Алгебра Титса—Кантора—Кёхера линейной йордановой пары $(R^{\pm},\{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ — 3-градуированная алгебра Ли $\mathrm{TKK}(R^+,R^-)=\big(L,\{L_i\}_{|i|\leqslant 1}\big)$ со скобкой

$$[x^+{+}D{+}x^-,y^+{+}T{+}y^-]=(Dy^+{-}Tx^+)+(D_{x^+,y^-}-D_{y^+,x^-}+[D,T])+(Dy^-{-}Tx^-),$$

$x^{\pm},y^{\pm}\in L_{\pm1}=R^{\pm}$, $D,T\in L_0=\mathrm{Lie}(R^+,R^-)$, где $\mathrm{Lie}(R^+,R^-)$ — подалгебра алгебры Ли $\mathrm{End}_F(R^+)^{(-)}\oplus\mathrm{End}_F(R^-)^{(-)}$, состоящая из конечных сумм операторов

$$D_{z^+,z^-}=\{z^+,z^-,\ \}^+-\{z^-,z^+,\ \}^-\quad(z^{\pm}\in L_{\pm1}),$$

$[D,T]=DT-TD$ — произведение D и T в $\mathrm{Lie}(R^+,R^-)$. При этом

1) $(R^{\pm},\{\ ,\ ,\ \}^{\pm})=(L_1,L_{-1})$ — линейная йорданова пара абелевых внутренних идеалов $L_{\pm1}$ алгебры $\mathrm{TKK}(R^+,R^-)$;
2) $L_0=[L_1,L_{-1}]$, $[x_0,L_1+L_{-1}]\neq\{0\}$ для всех $0\neq x_0\in L_0$.

Более того, если $\big(L,\{L_i\}_{|i|\leqslant1}\big)$ — 3-градуированная алгебра Ли со свойством 2), то $\big(L,\{L_i\}_{|i|\leqslant1}\big)=\mathrm{TKK}(L_1,L_{-1})$ (см. [31, предложение 11.2.1, с. 196]). Алгебры Титса—Кантора—Кёхера йордановых пар, систем и алгебр определяются следующим образом: $\mathrm{TKK}(R^+,R^-)$ йордановой пары $(R^{\pm},U^{\pm})$ — $\mathrm{TKK}(R^+,R^-)$ линейной йордановой пары $(R^{\pm},\{\ ,\ ,\ \}'^{\pm})$, $\mathrm{TKK}(R)$ линейной тройной йордановой системы $(R,\{\ ,\ ,\ \})$ — $\mathrm{TKK}(R^+,R^-)$ линейной йордановой пары $(R^{\pm},\{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$, $R^{\pm}=R$, $\{\ ,\ ,\ \}^{\pm}=\{\ ,\ ,\ \}$, $\mathrm{TKK}(R)$ тройной йордановой системы (R,U) — $\mathrm{TKK}(R)$ линейной тройной йордановой системы $(R,\{\ ,\ ,\ \}')$ ($\mathrm{TKK}(R^+,R^-)$ йордановой пары $(R^{\pm},U^{\pm})$, $R^{\pm}=R$, $U^{\pm}=U$), $\mathrm{TKK}(R)$ линейной йордановой алгебры R над F с $1/2$ — $\mathrm{TKK}(R)$ линейной тройной йордановой системы $(R,\{\ ,\ ,\ \}'')$, $\{x,y,z\}''=(1/2)\,U_{x,z}y=(xy)z+(zy)x-(xz)y$ — тройное йорданово произведение x, y, z, $\mathrm{TKK}(R)$ квадратичной йордановой алгебры R — $\mathrm{TKK}(R)$ тройной йордановой системы (R,U).

Напомним, что *наднильпотентность* радикала в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ — это $\mathcal{T}$-радикальность алгебр (структур) с нулевым умножением из его области определения, *специальность* $\mathcal{T}$ — это наднильпотентность и представимость $\mathcal{T}$-полупростых алгебр (структур) в виде подпрямых произведений их $\mathcal{T}$-полупростых факторов, любые два ненулевых идеала которых имеют ненулевое пересечение (первичных $\mathcal{T}$-полупростых факторов), *наследственность* (*идеальная наследственность*) $\mathcal{T}$ — это замкнутость класса $\mathcal{T}$-радикальных ($\mathcal{T}$-радикальных и $\mathcal{T}$-полупростых) алгебр (структур) относительно взятия идеалов.

2. Квазирегулярные радикалы линейных алгебр

Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов класс алгебр над кольцом F и α — отображение, которое ставит в соответствие каждой алгебре R из $\mathfrak{M}$ мультипликативный подмоноид $\alpha(R)$ алгебры умножений $M(R^1)$ алгебры R^1 и удовлетворяет условиям

1) если I — идеал алгебры R, то каждый $\phi \in \alpha(I)$ совпадает с ограничением на подалгебру I^1 алгебры R^1 некоторого $\bar{\phi} \in \alpha(R) \cap M^{R^1}(I^1)$;
2) каждому гомоморфизму алгебр $\psi\colon R \to R'$ соответствует эпиморфизм моноидов $\psi_\alpha\colon \alpha(R) \to \alpha\big(\psi(R)\big)$, при котором $\psi^1\phi(f+x) = (\psi_\alpha\phi)\psi^1(f+x)$, $\phi \in \alpha(R)$, $f \in F$, $x \in R$, где $\psi^1\colon f+x \mapsto f+\psi x$, $f \in F$, $x \in R$ (ψ_α — ограничение на $\alpha(R)$ эпиморфизма $\psi^1_M\colon M(R^1) \to M(\psi(R)^1)$, индуцированного гомоморфизмом ψ^1).

Таким отображением является, например, любое отображение вида $R \mapsto G(R^1)$, $R \in \mathfrak{M}$, где G — мультипликативная подполугруппа алгебры умножений $M(F\langle X\rangle)$ свободной неассоциативной алгебры $F\langle X\rangle$ над кольцом F с множеством свободных порождающих X, $G(R^1)$ — мультипликативный подмоноид алгебры $M(R^1)$, порождённый образами G при действии гомоморфизмов $M(F\langle X\rangle) \to M(R^1)$, индуцированных гомоморфизмами $F\langle X\rangle \to R^1$. Мы будем называть элемент x алгебры $R \in \mathfrak{M}$ *α-квазирегулярным*, если $\phi(1-x) = 1$ для некоторого $\phi \in \alpha(R)$, где 1 — единица алгебры R^1, а алгебры из класса $\mathfrak{M}$, состоящие из таких элементов, — *α-квазирегулярными алгебрами*.

Теорема 2.1. *Класс α-квазирегулярных алгебр $\mathfrak{J}_\alpha$ — радикальный подкласс класса $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть R — алгебра из класса $\mathfrak{M}$. Если I — идеал алгебры R и x — его α-квазирегулярный элемент, то x — α-квазирегулярный элемент R, поскольку $\phi(1-x) = \bar{\phi}(1-x) = 1$ для подходящего $\phi \in \alpha(I)$, где $\bar{\phi}$ — продолжение ϕ до элемента моноида $\alpha(R)$ из условия 1). Следовательно, для любых α-квазирегулярных идеалов J, J' алгебры R и элементов $y \in J$, $y' \in J'$

$$1 = \rho(1-y) = \rho'\rho(1-y-y') = \rho'(1-\rho y')$$

для некоторых $\rho, \rho' \in \alpha(J+J')$, и значит, $J+J'$ — α-квазирегулярный идеал R. Отсюда несложно вывести α-квазирегулярность конечных сумм α-квазирегулярных идеалов R и суммы всех таких её идеалов $\mathcal{J}_\alpha(R)$.

Если $\psi\colon R \to R'$ — гомоморфизм алгебр R и R', $z \in R$, $\nu \in \alpha(R)$, $\nu(1-x) = 1$, то

$$1 = \psi^1 1 = \psi^1\nu(1-x) = (\psi_\alpha\nu)(1-\psi x),$$

где $\psi_\alpha\colon \alpha(R) \to \alpha\bigl(\psi(R)\bigr)$ — индуцированный ψ эпиморфизм моноидов $\alpha(R)$ и $\alpha\bigl(\psi(R)\bigr)$ из условия 2). Поэтому класс $\mathfrak{J}_\alpha$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов и $\psi\bigl(\mathcal{J}_\alpha(R)\bigr) \subseteq \mathcal{J}_\alpha\bigl(\psi(R)\bigr)$.

В случае если элементы ядра $\operatorname{Ker}\psi$ гомоморфизма ψ α-квазирегулярны в алгебре R, элементы R, имеющие α-квазирегулярные образы в алгебре $\psi(R)$, α-квазирегулярны, так как для каждого такого элемента $u \in R$

$$1 = (\psi_\alpha\mu)\psi^1(1-u) = \psi^1\mu(1-u), \quad \mu(1-u) = 1-v, \quad 1 = \tau\mu(1-u)$$

для некоторых $\mu, \tau \in \alpha(R)$ и $v \in \operatorname{Ker}\psi$. Отсюда следует, что $\psi\bigl(\mathcal{J}_\alpha(R)\bigr) = \mathcal{J}_\alpha\bigl(\psi(R)\bigr)$, если $\operatorname{Ker}\psi \subseteq \mathcal{J}_\alpha(R)$, и, в частности, $\mathcal{J}_\alpha\bigl(R/\mathcal{J}_\alpha(R)\bigr) = \{0\}$.

Таким образом, $\mathcal{J}_\alpha\colon R \mapsto \mathcal{J}_\alpha(R)$, $R \in \mathfrak{M}$, — радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{J}_\alpha$ — класс $\mathcal{J}_\alpha$-радикальных алгебр. □

Мы будем называть радикал $\mathcal{J}_\alpha$ на классе $\mathfrak{M}$ (его значение $\mathcal{J}_\alpha(R)$ на алгебре $R \in \mathfrak{M}$) *α-квазирегулярным радикалом* (*алгебры* R).

По аналогии с доказательством теоремы 2.1 можно показать, что каждая алгебра R из класса $\mathfrak{M}$ содержит наибольший идеал $\mathcal{J}'_\alpha(R)$ среди всех идеалов, состоящих из её α-квазирегулярных элементов. При этом $\mathcal{J}'_\alpha\bigl(R/\mathcal{J}'_\alpha(R)\bigr) = \{0\}$, $\psi\bigl(\mathcal{J}'_\alpha(R)\bigr) \subseteq \mathcal{J}'_\alpha\bigl(\psi(R)\bigr)$ для любого гомоморфизма $\psi\colon R \to R'$ алгебр R и R', $\mathcal{J}_\alpha(R) \subseteq \mathcal{J}'_\alpha(R)$.

Отображение $\mathcal{J}'_\alpha\colon R \mapsto \mathcal{J}'_\alpha(R)$, $R \in \mathfrak{M}$, — радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, если и только если $\mathcal{J}'_\alpha = \mathcal{J}_\alpha$.

Инвариантные относительно действия моноида $\alpha(R)$ F-подмодули алгебр $R \in \mathfrak{M}$ и R^1 мы будем называть *α-инвариантными*. Каждый элемент $\phi \in M(R^1)$ представи́м в виде $\phi = f\operatorname{Id}_{R^1} + \phi'$ с однозначно определёнными $f \in F$, $\phi' \in M^{R^1}(R)$. Для всех $x \in R^1$ положим $\alpha(R)x = \{\phi x \mid \phi \in \alpha(R)\}$ и $\alpha(R)'x = \{\phi' x \mid \phi \in \alpha(R)\}$. Будем говорить, что α-инвариантный подмодуль M алгебры R является *α-модулярным*, если $\alpha(R)'(1-x) \subseteq M$ для некоторого $x \in R$. Наибольший из идеалов алгебры R (R^1), входящий в её подмодуль K, мы будем обозначать через $\hat{K}$.

Замечание 2.2. Если $\alpha(R)\,1 = R^1$, $\alpha(R)x$ — F-подмодуль алгебры R^1 для всех $x \in R^1$, то $\mathcal{J}'_\alpha(R) = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{P}_{R^1}} (\hat{M} \cap R)$, где $\mathcal{P}_{R^1}$ — множество всех максимальных α-инвариантных подмодулей R^1.

Доказательство. Если $\mathcal{J}'_\alpha(R) \not\subseteq M$ для некоторого $M \in \mathcal{P}_{R^1}$, то $R^1 = M + \mathcal{J}'_\alpha(R)$, $1 = x + y = \phi(1-x) = \phi y \in M$ для подходящих $x \in \mathcal{J}'_\alpha(R)$, $y \in M$, $\phi \in \alpha(R)$ и $R^1 = M$?! Если $z \in \bigcap\limits_{M \in \mathcal{P}_{R^1}} (\hat{M} \cap R)$ не является α-квазирегулярным элементом алгебры R, то по лемме Цорна собственный α-инвариантный подмодуль $\alpha(R)(1-z)$ алгебры R^1 входит в некоторый подмодуль $N \in \mathcal{P}_{R^1}$ и $R^1 = \alpha(R)\,1 \subseteq \alpha(R)z + \alpha(R)(1-z) \subseteq N$?! Поэтому $\mathcal{J}'_\alpha(R) = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{P}_{R^1}} (\hat{M} \cap R)$. $\square$

Замечание 2.3. Если $\alpha(R)'\,1 = R$, $\mathrm{Id}_{R^1} + \phi' \in \alpha(R)$, $\alpha(R)'x$ — F-подмодуль алгебры R для всех $\phi \in \alpha(R)$, $x \in R^1$, то $\mathcal{J}'_\alpha(R) = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{P}_R} \hat{M}$, где $\mathcal{P}_R$ — множество всех максимальных α-модулярных подмодулей R при их наличии и $\mathcal{P}_R = \{R\}$ в противном случае.

Доказательство. Так как $\big((f\,\mathrm{Id}_{R^1} + \nu)(h\,\mathrm{Id}_{R^1} + \mu)\big)' = f\mu + h\nu + \nu\mu$ для всех $f, h \in F$, $\nu, \mu \in M^{R^1}(R)$, подмодули $\alpha(R)'x$, $x \in R^1$, α-инвариантны. Если элемент $x \in R$ является α-квазирегулярным, то $\phi(1-x) = 1$ для некоторого $\phi = \mathrm{Id}_{R^1} + \phi' \in \alpha(R)$, и значит, $x = \phi'(1-x) \in \alpha(R)'(1-x)$, $\alpha(R)'x \subseteq \subseteq \alpha(R)'(1-x)$, $R = \alpha(R)'\,1 = \alpha(R)'(1-x)$. Вместе с тем каждый элемент $x \in R$, такой что $R = \alpha(R)'(1-x)$, α-квазирегулярен, поскольку $\tau'(1-x) = x$ для подходящего $\tau \in \alpha(R)$, $(\mathrm{Id}_{R^1} + \tau')(1-x) = 1$ и $\mathrm{Id}_{R^1} + \tau' \in \alpha(R)$.

Если $\mathcal{J}'_\alpha(R) \nsubseteq M$ для некоторого $M \in \mathcal{P}_R$, то $R = M + \mathcal{J}'_\alpha(R)$, элемент $x \in R$, для которого $\alpha(R)'(1-x) \subseteq M$, является суммой $x = y + y'$ некоторых $y \in M$, $y' \in \mathcal{J}'_\alpha(R)$ и $R = \alpha(R)'(1-y') \subseteq \alpha(R)'(1-x) + \alpha(R)'y \subseteq M$?!

Если элемент $z \in \bigcap\limits_{M \in \mathcal{P}_R} \hat{M}$ не является α-квазирегулярным в алгебре R, то по лемме Цорна её собственный α-модулярный подмодуль $\alpha(R)'(1-z)$ входит в некоторый собственный подмодуль $K \in \mathcal{P}_R$ и $R = \alpha(R)'\,1 \subseteq \alpha(R)'z + \alpha(R)'(1-z) \subseteq K$?! Поэтому $\mathcal{J}'_\alpha(R) = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{P}_R} \hat{M}$. $\square$

Замечание 2.4. Если $\alpha(R)\,1 = R^1$ и моноид $\alpha(R)$ является группой, то алгебра R $\mathcal{J}_\alpha$-квазирегулярна.

Доказательство. В указанных условиях для каждого $x \in R$ можно подобрать $\phi \in \alpha(R)$, такой что $\phi\,1 = 1 - x$, $\phi^{-1}(1-x) = 1$. $\square$

Следствие 2.5. *Если $\alpha(R)\,1 = R^1$ для всех алгебр $R \in \mathfrak{M}$, то радикал $\mathcal{J}_\alpha(R)$ любой алгебры $R \in \mathfrak{M}$ содержит все её идеалы I, такие что моноид $\alpha(I)$ является группой.*

Элемент x алгебры $R \in \mathfrak{M}$ с условием $\alpha(R)\,1 = R^1$ α-квазирегулярен, если и только если $\alpha(R)(1-x) = R^1$. В общем случае из определения отображения α не следует, что $\mathcal{J}'_\alpha(I) \subseteq I \cap \mathcal{J}'_\alpha(R)$ или (и) $\mathcal{J}'_\alpha(I) \supseteq I \cap \mathcal{J}'_\alpha(R)$ для любых алгебры $R \in \mathfrak{M}$ и её идеала I.

Элемент x алгебры R называется *квазирегулярным*, если элемент $1 - x$ алгебры R^1 обратим. Элемент $x' = 1 - (1-x)^{-1} \in R$ называется *квазиобратным* к элементу x.

Квазиобратные элементы к квазирегулярным центральным элементам алгебры R являются центральными, поскольку обратимые центральные элементы алгебр имеют центральные обратные элементы и $Z(R^1) = Z(R)^1$.

Замечание 2.6. Любой α-квазирегулярный центральный элемент алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ квазирегулярен. Если $\alpha(R)\,1 = R^1$, то для центральных элементов R условия α-квазирегулярности и квазирегулярности равносильны.

Доказательство. Если $z \in Z(R)$ и $\phi(1-z) = 1$ для некоторого $\phi \in \alpha(R)$, то

$$1 = \phi\big((1-z)\,1\big) = (1-z)(\phi\,1) = (\phi\,1)(1-z), \quad \phi\,1 = (1-z)^{-1} \in Z(R^1).$$

В случае если $\alpha(R)\,1 = R^1$, $z \in Z(R)$ и существует $(1-z)^{-1} \in Z(R^1)$, $(1-z)^{-1} = \psi\,1$ для подходящего $\psi \in \alpha(R)$, $\psi(1-z) = (1-z)\psi\,1 = 1$. □

Поскольку центр простой алгебры либо равен нулю, либо является полем, мы сразу получаем следствие.

Следствие 2.7. *Простая алгебра с ненулевым центром из класса $\mathfrak{M}$ $\mathcal{J}_\alpha$-полупроста.*

Для отображения $\alpha_L\colon R \mapsto (L(R^1), \cdot)$, $R \in \mathfrak{U}$, где $(L(R^1), \cdot)$ — мультипликативный моноид алгебры левых умножений $L(R^1)$ алгебры R^1, $\mathfrak{U}$ — класс всех алгебр над кольцом F, α_L-инвариантные и α_L-модулярные подмодули — левые и модулярные левые идеалы. Поэтому на классе альтернативных алгебр над кольцом F α_L-квазирегулярный радикал $\mathcal{J}_{\alpha_L}$ совпадает с классическим квазирегулярным радикалом $\mathcal{J}$ (см. [6, теоремы 2, 5, с. 239, 248] и замечание 2.3).

Пусть $\mathfrak{J}$ — класс линейных йордановых алгебр над кольцом F с $1/2$, R — алгебра из класса $\mathfrak{J}$. Элемент $x \in R$ называется *квазирегулярным*, если существует элемент $y \in R$, такой что $(1-x)(1-y) = 1$, $(1-x)^2(1-y) = 1-x$, где $1 \in R^1$. Элемент y называется *квазиобратным* к элементу x, он является квазирегулярным с квазиобратным x и может быть определён при помощи равенств $U_{1-x}(1-y) = 1-x$ и $U_{1-x}(1-y)^2 = 1$. Алгебры из класса $\mathfrak{J}$, состоящие из квазирегулярных элементов, называются *квазирегулярными*. Они формируют радикальный подкласс класса $\mathfrak{J}$, определяемый им нижний радикал $\mathcal{J}$ на $\mathfrak{J}$ называется *квазирегулярным радикалом линейных йордановых алгебр*.

Приведём вариант интерпретации квазирегулярности элемента йордановой алгебры в терминах α-квазирегулярности для отображения $\alpha_U\colon R \mapsto U(R^1)$, $R \in \mathfrak{J}$, где $U(R^1)$ — мультипликативный подмоноид алгебры $M(R^1)$, порождённый операторами U_x, $x \in R^1$. Элемент x алгебры $R \in \mathfrak{J}$ α_U-квазирегулярен, если $U_{y_n} \cdots U_{y_1}(1-x) = 1$ для некоторых $y_i \in R^1$, $n \geqslant 1$. Согласно тождеству Макдональда отсюда следует, что

$$\mathrm{Id}_{R^1} = U_{U_{y_n} \cdots U_{y_1}(1-x)} = U_{y_n} \cdots U_{y_1} U_{1-x} U_{y_1} \cdots U_{y_n}.$$

Поэтому операторы U_{y_i}, $i = 1, \ldots, n$, и U_{1-x} обратимы и элемент x квазирегулярен (см. [6, лемма 5, с. 356]). Если элемент $x \in R$ квазирегулярен с квазиобратным элементом y, то $U_{1-y}(1-x)^2 = 1$, элемент $2x - x^2$ α_U-квазирегулярен, x α_L-квазирегулярен. Квазирегулярность $2x - x^2$ (обратимость $U_{(1-x)^2} = U_{1-x}^2$) равносильна квазирегулярности x (обратимости U_{1-x}). Следовательно, x квазирегулярен, если и только если $2x - x^2$ α_U-квазирегулярен. Кроме того, $\mathcal{J}_{\alpha_U}(R) \subseteq \mathcal{J}(R) \subseteq \mathcal{J}_{\alpha_L}(R)$ для всех $R \in \mathfrak{J}$.

Если R — ассоциативная коммутативная алгебра, $x \in R$, то квазирегулярность x в смысле йордановых алгебр — это квазирегулярность x в обычном смысле, α_U-квазирегулярность x — это существование обратимого $z \in R^1$, такого что $1 - x = z^2$. В частности, в кольце $\mathbb{Z}_3$ вычетов по модулю 3 элемент -1 квазирегулярен, но не α_U-квазирегулярен, так как $1 \notin \{2z + z^2 \mid z \in \mathbb{Z}_3\} = \{0, -1\}$.

Исследование радикалов $\mathcal{J}_{\alpha_L}$, $\mathcal{J}_{\alpha_U}$ и других α-квазирегулярных радикалов на классе $\mathfrak{J}$ представляет самостоятельный интерес и выходит за рамки данной работы.

Пусть теперь β — отображение, которое ставит в соответствие любым алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ (см. ранее) и элементу $x \in R^1$ множество операторов $\beta(R,x)$, $\varnothing \neq \beta(R,x) \subseteq M(R^1)$, и удовлетворяет следующим условиям:

1) $\beta(R,x) \subseteq M^{R^1}(I^1)$ для любых идеала I алгебры R и $x \in I^1$, $\beta(R,x) \subseteq M^{R^1}(I)$, если $x \in I$, где $\beta(R,x)|_{I^1} = \{\phi|_{I^1} \mid \phi \in \beta(R,x)\} = \beta(I,x)$,
2) $\psi^1(\beta(R,x)y) = \beta(\psi(R), \psi^1 x)\psi^1 y$ для любых гомоморфизма $\psi\colon R \to R'$ алгебр R и R', $x, y \in R^1$, где $\beta(R,x)y = \{\phi y \mid \phi \in \beta(R,x)\}$,
3) если $x \in R$ и ${}_\beta\big(\beta(R,1-x)(R^1)\big)_{R^1} = R^1$, то ${}_\beta\big(\beta(J,1-x)(J^1)\big)_{J^1} = J^1$, где J — идеал R, порождённый x, $\beta(R,z)(R^1) = \bigcup\limits_{y \in R^1} \beta(R,z)y$, $z \in R^1$,
4) ${}_\beta\big(Fx + \beta(R,1-x)(R^1)\big)_{R^1} = R^1$ для всех $x \in R$,

где ${}_\beta(A)_{R^1}$ — наименьший из β-идеалов алгебры R^1, содержащих её подмножество A, *β-идеалы* R^1 — её F-подмодули M, такие что $\beta(R,z)(R^1) \subseteq M$ для всех $z \in M$. Отметим, что идеалы алгебры R являются β-идеалами алгебры R^1, R^1 равна своему β-идеалу M, если и только если $1 \in M$. Элемент x алгебры $R \in \mathfrak{M}$ мы будем называть *β-квазирегулярным*, если ${}_\beta\big(\beta(R,1-x)(R^1)\big)_{R^1} = R^1$, алгебры из класса $\mathfrak{M}$, состоящие из таких элементов, — *β-квазирегулярными алгебрами*.

Теорема 2.8. *Класс β-квазирегулярных алгебр $\mathfrak{J}_\beta$ — радикальный подкласс класса $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть R — алгебра из класса $\mathfrak{M}$. Так как по условию 1) для любых идеала I алгебры R и β-идеала M алгебры R^1

$$\beta(I,z)(I^1) = \beta(R,z)(I^1) \subseteq I^1 \cap M \quad (z \in I^1 \cap M),$$

$I^1 \cap M$ — β-идеал алгебры I^1. Если x — β-квазирегулярный элемент идеала I, то

$$1 \in I^1 = {}_\beta\big(\beta(I,1-x)(I^1)\big)_{I^1} \subseteq {}_\beta\big(\beta(R,1-x)(I^1)\big)_{R^1} \subseteq {}_\beta\big(\beta(R,1-x)(R^1)\big)_{R^1},$$

x — β-квазирегулярный элемент алгебры R. Кроме того, из условия 3) следует, что β-квазирегулярные элементы R являются β-квазирегулярными элементами всех содержащих их идеалов R. Положим

$$\mathcal{J}_\beta(R) = \bigcap_{N \in \mathcal{Q}_{R^1}} (\hat{N} \cap R),$$

где $\mathcal{Q}_{R^1}$ — множество всех максимальных β-идеалов алгебры R^1. Если элемент $y \in R$ не является β-квазирегулярным, то по лемме Цорна и условию 4) собственный β-идеал ${}_{\beta}\big(\beta(R, 1-y)(R^1)\big)_{R^1}$ алгебры R^1 входит в некоторый β-идеал $N \in \mathcal{Q}_{R^1}$ и $R^1 = {}_{\beta}\big(Fy + \beta(R, 1-y)(R^1)\big)_{R^1} \neq N$, $y \notin N$. Если J — β-квазирегулярный идеал R и $J \not\subseteq K$ для некоторого β-идеала $K \in \mathcal{Q}_{R^1}$, то $R^1 = K + J$, $1 = p + q$, $p \in K$, $q \in J$, $R^1 = {}_{\beta}\big(\beta(R, 1-q)(R^1)\big)_{R^1} \subseteq K$?! Поэтому $\mathcal{J}_{\beta}(R)$ — наибольший β-квазирегулярный идеал R и наибольший из идеалов R, состоящих из её β-квазирегулярных элементов.

Поскольку по условию 2) для любого гомоморфизма $\psi \colon R \to R'$ алгебр R и R' образы и прообразы β-идеалов алгебр R^1 и $\psi^1(R^1) = \psi(R)^1$ при действии индуцированного ψ гомоморфизма $\psi^1 \colon R^1 \to {R'}^1$ являются β-идеалами $\psi(R)^1$ и R^1, $\psi\big(\mathcal{J}_{\beta}(R)\big) \subseteq \mathcal{J}_{\beta}\big(\psi(R)\big)$ и $\psi\big(\mathcal{J}_{\beta}(R)\big) = \mathcal{J}_{\beta}\big(\psi(R)\big)$, если $\operatorname{Ker}\psi \subseteq \mathcal{J}_{\beta}(R)$.

Следовательно, $\mathcal{J}_{\beta} \colon R \mapsto \mathcal{J}_{\beta}(R)$, $R \in \mathfrak{M}$, — радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{J}_{\beta}$ — класс $\mathcal{J}_{\beta}$-радикальных алгебр. Радикал $\mathcal{J}_{\beta}$ является наследственным (класс $\mathfrak{J}_{\beta}$ замкнут относительно взятия идеалов), $\mathcal{J}_{\beta}(I) \supseteq I \cap \mathcal{J}_{\beta}(R)$ для любых алгебры $R \in \mathfrak{M}$ и её идеала I. □

Мы будем называть радикал $\mathcal{J}_{\beta}$ на классе $\mathfrak{M}$ (его значение $\mathcal{J}_{\beta}(R)$ на алгебре $R \in \mathfrak{M}$) *β-квазирегулярным радикалом* (*алгебры* R).

Замечание 2.9. Если R — алгебра из класса $\mathfrak{M}$, такая что $\beta(R, x) \subseteq M^{R^1}(I)$ для всех $I \lhd R^1$, $x \in I$, то β-квазирегулярные центральные элементы R квазирегулярны.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$
{}_{\beta}\big(\beta(R, 1-z)(R^1)\big)_{R^1} \subseteq (1-z)R^1
$$

для всех $z \in Z(R)$. □

По аналогии со следствием 2.7 можно сделать следующее замечание.

Замечание 2.10. Если β-квазирегулярные центральные элементы алгебр из класса $\mathfrak{M}$ квазирегулярны, то простые алгебры с ненулевыми центрами из $\mathfrak{M}$ J_{β}-полупросты.

Для отображения $\beta_R \colon (R, x) \mapsto \{r_x\}$, $R \in \mathfrak{M}$, $x \in R^1$, β_R-квазирегулярные элементы алгебры R — её α_L-квазирегулярные элементы, β_R-идеалы алгебры R^1 — её левые идеалы. Поэтому при выполнении для β_R условия 3) (условия 1), 2), 4) всегда выполнены) β_R-квазирегулярный радикал $\mathcal{J}_{\beta_R}$ равен на классе $\mathfrak{M}$ α_L-квазирегулярному радикалу $\mathcal{J}_{\alpha_L}$. В частности, это верно для класса ассоциативных алгебр над кольцом F, на котором $\mathcal{J}_{\beta_R} = \mathcal{J}_{\alpha_L} = \mathcal{J}$.

Отображение $\beta_U \colon (R, x) \mapsto \{U_x\}$, $R \in \mathfrak{J}$, $x \in R$, удовлетворяет условиям 1)—4). При этом ${}_{\beta_U}\big(U_x(R^1)\big)_{R^1} = U_x(R^1)$ для всех $R \in \mathfrak{J}$, $x \in R^1$, β_U-квазирегулярные элементы алгебры R — её квазирегулярные элементы в смысле йордановых алгебр (см. [6, лемма 5, с. 356]), β_U-идеалы алгебры R^1 — её *внутренние идеалы* (внутренние идеалы йордановых алгебр — их внутренние идеалы как тройных йордановых систем). Поэтому β_U-квазирегулярный радикал $\mathcal{J}_{\beta_U}$ совпадает с квазирегулярным радикалом йордановых алгебр $\mathcal{J}$.

3. Варианты теоремы Амицура—Прочези

Согласно теореме Амицура—Прочези (некоммутативной теореме Гильберта о нулях) конечно порождённые ассоциативные PI-алгебры над кольцами Джекобсона являются кольцами Джекобсона. В этой части работы мы приведём обобщённую версию данной теоремы, основанную на доказательстве из [17, теорема 2.3], и ряд её аналогов для неассоциативных алгебр.

Будем говорить, что алгебра R над кольцом F *(k)-полупервична*, $k \geqslant 1$, если R не содержит ненулевых разрешимых идеалов ступени не выше k, и *(k)-первична*, если R (k)-полупервична и любые два её ненулевых идеала имеют ненулевое пересечение. Мы будем называть идеалы R, фактор-алгебры по которым (k)-первичны, *(k)-первичными идеалами*, множество всех таких идеалов $\mathrm{Spec}_{(k)}(R)$ — *(k)-первичным спектром* R, их пересечение

$$\mathrm{Rad}_{(k)}(R) = \bigcap_{P\in \mathrm{Spec}_{(k)}(R)} P \text{ —}$$

(k)-первичным радикалом R. Условия (1)-первичности и (1)-полупервичности совпадают с обычными условиями первичности и полупервичности, $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}_{(1)}(R)$ и $\mathrm{Rad}(R) = \mathrm{Rad}_{(1)}(R)$ — *первичный спектр* и *первичный радикал* R. По аналогии с известным описанием первичного радикала можно показать, что $\mathrm{Rad}_{(k)}(R)$ равен наименьшему из идеалов R, фактор-алгебры по которым (k)-полупервичны, и множеству всех элементов $x \in R$, таких что любая цепь $\{x_i\}_{i\geqslant 0}$ с $x_0 = x$, $x_{i+1} \in (x_i)_R^{(k)}$, $i \geqslant 0$, содержит 0, где $A^{(k)}$ — k-й коммутант алгебры A (см. [3, теорема 2.1; 6, предложение 4, теорема 6, с. 192, 193]).

Описание используемых нами конструкций центроида Мартиндейла (расширенного центроида) и центрального замыкания полупервичной алгебры можно найти в [21, 28—30, 51]. Напомним, что центроид Мартиндейла $\mathrm{CM}(R)$ ненулевой первичной алгебры R над кольцом F — поле, её центральное замыкание $P(R)$ — первичная алгебра над $\mathrm{CM}(R)$, R — F-подалгебра $P(R)$, элементы которой порождают $\mathrm{CM}(R)$-пространство $P(R) = \mathrm{CM}(R)R$, $F\,\mathrm{Id}_{P(R)} \subseteq \mathrm{CM}(R)$, $F\,\mathrm{Id}_{P(R)} \cong F/\operatorname{Ann}_F R$, и

$$\mathrm{CM}(R) = \mathrm{End}_{M(R)'}\big(P(R)\big) = \mathrm{End}_{M(P(R))'}\big(P(R)\big) = Z\big(M\big(P(R)\big)'\big),$$

где $M(R)' = M(R) + F\,\mathrm{Id}_R$ и $M\big(P(R)\big)' = M\big(P(R)\big) + \mathrm{CM}(R)\,\mathrm{Id}_{P(R)}$. Если R — простая алгебра, то $P(R) = R$, $\mathrm{CM}(R) = \mathrm{End}_{M(R)'}(R)$. Если R имеет ненулевой центр $Z(R)$, то мы можем отождествить $Z(R)$ с F-подалгеброй $\{l_z = r_z \mid z \in Z(R)\}$ поля $\mathrm{CM}(R)$, *центральное кольцо частных* $Q = RS^{-1}$ — с $Z(Q)$-подалгеброй $Z(Q)R$ алгебры $P(R)$, $P(R) \cong P(Q)$, $\mathrm{CM}(R) \cong Z\big(P(R)\big) \cong \mathrm{CM}(Q)$, где $S = Z(R)\setminus\{0\}$, $Z(Q) = Z(R)S^{-1}$ — поле частных $Z(R)$ в $\mathrm{CM}(R)$. Поэтому если Q — простая алгебра, $P(R) \cong Q$, $\mathrm{CM}(R) \cong Z(Q)$.

Ассоциативные кольца, полупервичные фактор-кольца которых полупримитивны ($\mathcal{J}$-полупросты), называются *кольцами Джекобсона*.

В последующих утверждениях максимальность аннулятора алгебры R над кольцом F означает, что $\operatorname{Ann}_F R$ — максимальный идеал F. Говоря о размерности центральных замыканий первичных алгебр над их центроидами Мартиндейла, мы предполагаем по умолчанию, что речь идёт о ненулевых алгебрах.

Лемма 3.1. *Если ненулевая конечномерная алгебра R над полем $\mathbb{F}$ конечно порождена над его подобластью F, то $\mathbb{F}$ — конечно порождённая алгебра над F. В случае если F — кольцо Джекобсона, F — поле, $\dim_F R < \infty$* (см. [17, лемма 2.2]).

Теорема 3.2. *Если R — конечно порождённая первичная алгебра над кольцом Джекобсона F с ненулевым центром $Z(R)$ и простым центральным кольцом частных Q, $n = \dim_{Z(Q)} Q < \infty$, то R — подпрямое произведение простых конечных алгебр с единицами над F, которые имеют размерности не выше n над своими центрами и максимальные аннуляторы в F.*

Доказательство. При помощи леммы Цорна мы можем выбрать для каждого элемента $0 \neq z \in Z(R)$ максимальный идеал P_z среди всех идеалов алгебры R, не содержащих элементов её мультипликативной подполугруппы $\langle z\rangle = \{z^k \mid k \geqslant 1\}$. Так как ненулевые идеалы фактор-алгебры $R_z = R/P_z$ имеют непустые пересечения с её подполугруппой $\langle z\rangle + P_z = \langle z + P_z\rangle$ и $\langle z + P_z\rangle \subseteq Z(R_z) \setminus \{0\}$, R_z — первичная алгебра, кольцо частных $Q_z = R_z\langle z + P_z\rangle^{-1}$ — простое кольцо с единицей 1, центр $Z(Q_z) = Z(R_z)\langle z + P_z\rangle^{-1}$ — поле, Q_z — центральное кольцо частных R_z. Алгебры умножений $M(R)$ и $M(R_z)$ алгебр R и R_z можно отождествить с F-подалгебрами алгебр умножений $M(Q)$ и $M(Q_z)$ алгебр Q и Q_z, которые порождают $M(Q)$ и $M(Q_z)$ как $Z(Q)$-пространство и $Z(Q_z)$-пространство. Канонический эпиморфизм $R \to R_z$ алгебр R и R_z индуцирует эпиморфизм их алгебр умножений $M(R) \to M(R_z)$, $t_x \mapsto t_{x+P_z}$, $x \in R$, $t_x \in \{l_x, r_x\}$. Поэтому $M(Q)$, $M(R)$, $M(R_z)$ и $M(Q_z)$ — PI-кольца, (p.i.)-степени которых не превышают n. Простая алгебра Q_z является точным неприводимым модулем над алгеброй $M(Q_z)$. По теореме Капланского алгебра $M(Q_z)$ проста и конечномерна над своим центром

$$Z\big(M(Q_z)\big) = \operatorname{End}_{M(Q_z)}(Q_z) = \{l_x \mid x \in Z(Q_z)\} \cong Z(Q_z),$$

$M(Q_z) = \operatorname{End}_{Z(Q_z)}(Q_z)$ и

$$n_z = \dim_{Z(Q_z)} Q_z = \mathrm{p.\,i.\,deg}\, M(R_z) \leqslant n = \mathrm{p.\,i.\,deg}\, M(R)$$

(см. [49, предложение 1.5.6, теорема 1.5.16, с. 34, 36] с учётом того, что $\phi y = (\phi 1)y$, $\phi 1 \in Z(Q_z)$ для всех $\phi \in \operatorname{End}_{M(Q_z)}(Q_z)$, $y \in Q_z$). Из леммы 3.1 и конечной порождённости алгебры Q_z над кольцом F и областью

$$F_z = F/\operatorname{Ann}_F Q_z = F/\operatorname{Ann}_F R_z \cong F \cdot 1$$

следует, что F_z — поле, $\dim_{F_z} Q_z < \infty$. Значит, $Z(R_z)$ — поле и $Q_z = R_z$. Поскольку простота кольца Q равносильна тому, что $Z(R) \cap I \neq \{0\}$ для любого

$\{0\} \neq I \lhd R$, $\bigcap\limits_{0 \neq z \in Z(R)} P_z = \{0\}$, R — подпрямое произведение простых конечномерных алгебр с единицами R_z над полями F_z, $\dim_{Z(R_z)} R_z \leqslant n$, $0 \neq z \in \in Z(R)$. $\square$

Пусть $\mathfrak{M}$ — класс алгебр над кольцом Джекобсона F, на котором определён радикал $\mathcal{J}_\alpha$ ($\mathcal{J}_\beta$ в условии замечания 2.10), $\mathfrak{M}'$ — класс всех алгебр из $\mathfrak{M}$, таких что их ненулевые первичные фактор-алгебры имеют ненулевые центры и локально конечномерные над своими центрами простые центральные кольца частных. Тогда по теореме 3.2 и следствию 2.7 (замечанию 2.10) $\mathcal{J}_\alpha(R) \subseteq \subseteq \mathrm{Rad}(R)$ ($\mathcal{J}_\beta(R) \subseteq \mathrm{Rad}(R)$) для любой конечно порождённой алгебры $R \in \mathfrak{M}'$ и $\mathcal{J}_\alpha(R) = \mathrm{Rad}(R)$ ($\mathcal{J}_\beta(R) = \mathrm{Rad}(R)$), если радикал $\mathcal{J}_\alpha$ ($\mathcal{J}_\beta$) на классе $\mathfrak{M}$ наднильпотентен. Аналогичным образом, если $\mathcal{T}$ — специальный радикал на классе $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}''$ — класс всех алгебр из $\mathfrak{M}$, ненулевые первичные $\mathcal{T}$-полупростые фактор-алгебры которых имеют ненулевые центры и локально конечномерные над своими центрами простые центральные кольца частных, то $\mathcal{J}_\alpha(R) \subseteq \mathcal{T}(R)$ ($\mathcal{J}_\beta(R) \subseteq \mathcal{T}(R)$) для любой конечно порождённой алгебры $R \in \mathfrak{M}''$.

Первичные невырожденные алгебры из классов, для которых определено условие невырожденности (например, классов альтернативных, йордановых алгебр, алгебр Ли и Мальцева), мы будем называть *сильно первичными*.

Из теоремы 3.2, [6, теорема 9, с. 229, замечание, с. 223; 18; 48] ([24, следствия 1 и 3 теоремы 1]), [11, теорема 5] (с учётом локальной конечномерности йордановых алгебр симметрических билинейных форм на векторных пространствах над полями) и [9, теорема 2] следуют теорема Амицура—Прочези, теорема 6 из [6, с. 253] и результаты [15], которые объединяет следствие 3.3.

Следствие 3.3. *Если R — ненулевая конечно порождённая первичная альтернативная (йорданова) PI-алгебра над кольцом Джекобсона F* (с 1/2), *Q — центральное кольцо частных R, $n = \dim_{Z(Q)} Q$, то R — подпрямое произведение простых $\mathcal{J}$-полупростых конечных алгебр с единицами над F, имеющих размерности не выше n над своими центрами и максимальные аннуляторы в F.*

Любая ненулевая конечномерная первичная алгебра над полем либо проста, либо содержит единственный минимальный идеал, наименьший среди её ненулевых идеалов. Поэтому теорема 3.2 не переносится на все первичные алгебры с конечномерными над их центроидами Мартиндейла центральными замыканиями. Вместе с тем имеются её неполные аналоги для отдельных классов алгебр, например для классов специальных алгебр Ли и Мальцева.

Выделим в свободной неассоциативной алгебре $F\langle X\rangle$ над кольцом F со счётным множеством свободных порождающих $X = \{x_i\}_{i \geqslant 1}$ *систему многочленов разрешимости* $\{g_k\}_{k \geqslant 0}$, полагая $g_0(x_1) = x_1$ и далее

$$g_{k+1}(x_1, \ldots, x_{2^{k+1}}) = g_k(x_1, \ldots, x_{2^k})g_k(x_{2^k+1}, \ldots, x_{2^{k+1}}) \quad (k \geqslant 0).$$

Алгебра R над F называется *слабо разрешимой*, если для любого конечного множества $A \subseteq R$ найдётся $k = k(A) \geqslant 0$, такое что $g_k(a_1, \ldots, a_{2^k}) = 0$ при всех $a_i \in A$. Класс слабо разрешимых алгебр $\mathfrak{W}$ над F — радикальный подкласс класса всех алгебр над F, он содержит все локально разрешимые алгебры над F и все алгебры над F, имеющие нормальные ряды подалгебр со слабо разрешимыми факторами (см. [19; 3, теоремы 2.8, 3.8]). Нижний радикал $T = \mathcal{T}_{\mathfrak{W}}$, определяемый на классе всех алгебр над F классом $\mathfrak{W}$ (*слабо разрешимый радикал*), является специальным (см. [3, замечание 3.10; 19]).

Замечание 3.4. Если алгебра R над кольцом F — n-порождённый F-модуль, $n \geqslant 1$, H — подкольцо F, содержащее его единицу, A — H-подалгебра R, то центральные замыкания первичных фактор-алгебр A имеют размерности не выше n над их центроидами Мартиндейла, слабо разрешимый радикал $T(A)$ разрешим ступени не выше n по модулю первичного радикала $\mathrm{Rad}(A)$, $T(A) = \mathrm{Rad}_{(n)}(A)$.

Доказательство. Первое утверждение напрямую следует из выполнения на алгебре A всех тождеств Капелли порядка $n+1$ и теоремы о ранге (см. [21, теорема 4.1, с. 47]). Остаётся заметить, что слабо разрешимые идеалы первичных фактор-алгебр алгебры A разрешимы ступени не выше n, $T(A)^{(n)} \subseteq \mathrm{Rad}(A)$. $\square$

Для любых алгебры R над кольцом F и фиксированных $s, t \in F$, $(s,t) \in F^2 \setminus \{(0,0)\}$, обозначим через $R^{(s,t)}$ алгебру, полученную из R заменой её операции умножения на операцию $\cdot$, $x \cdot y = sxy + tyx$, $x, y \in R$.

Пусть A — подалгебра алгебры $R^{(s,t)}$, $\langle A\rangle$ — подалгебра алгебры R, порождённая A, I — максимальный среди идеалов R, имеющих нулевое пересечение с A. Тогда

1) любая система порождающих A порождает $\langle A\rangle$;
2) несложно показать по индукции, что $g_m(M)' \subseteq Fg_m(M)$, $M'_k \subseteq FM_k$ для любых $m \geqslant 0$, $k \geqslant 1$ и множества $M \subseteq R$, где $g_m(M)'$ и $g_m(M)$ — множества значений g_m на элементах M в $R^{(s,t)}$ и R, M'_k и M_k — множества неассоциативных слов длины k в алфавите M в $R^{(s,t)}$ и R; как следствие, $\left(R^{(s,t)}\right)^{(m)} \subseteq R^{(m)}$, $\left(R^{(s,t)}\right)^k \subseteq R^k$;
3) если B — подалгебра (идеал) R, $A \cap B$ — подалгебра (идеал) A, причём нильпотентность, локальная нильпотентность, разрешимость, локальная разрешимость, слабая разрешимость, локальная конечность B наследуется $A \cap B$ (см. пункты 1), 2), [6, лемма 7, с. 131]);
4) R/I наследует первичность, (k)-полупервичность, $k \geqslant 1$, T-полупростоту, отсутствие ненулевых нильпотентных, локально нильпотентных, разрешимых, локально разрешимых, локально конечных идеалов A (см. пункт 3));
5) $\mathrm{Rad}_{(k)}(R) \subseteq \mathrm{Rad}_{(k)}\left(R^{(s,t)}\right)$, $A \cap \mathrm{Rad}_{(k)}(R) \subseteq \mathrm{Rad}_{(k)}(A)$ для всех $k \geqslant 1$ (см. описание $\mathrm{Rad}_{(k)}$ с учётом $(x)^{(k)}_{R^{(s,t)}} \subseteq (x)^{(k)}_R$, $x \in R$).

Замечание 3.5. Если размерности центральных замыканий первичных фактор-алгебр алгебры R над их центроидами Мартиндейла не превышают $n \geqslant 1$, тогда центральные замыкания первичных фактор-алгебр алгебры A имеют размерности не выше n над их центроидами Мартиндейла, слабо разрешимый радикал $T(A)$ разрешим ступени не выше n по модулю идеала $A \cap \mathrm{Rad}(R)$, $T(A) = \mathrm{Rad}_{(n)}(A)$.

Доказательство. Можно считать, что $R \neq \mathrm{Rad}(R)$. Так как алгебра $A/\big(A \cap \mathrm{Rad}(R)\big)$ вкладывается в подпрямое произведение алгебр $P(R/P)^{(s,t)}$, $\dim_{\mathrm{CM}(R/P)} P(R/P) \leqslant n$, $R \neq P \in \mathrm{Spec}(R)$, она удовлетворяет всем тождествам Капелли порядка $n+1$, радикал $T\big(A/\big(A \cap \mathrm{Rad}(A)\big)\big)$ разрешим ступени не выше n. Остаётся применить теорему о ранге (см. [21, теорема 4.1, с. 47]). □

Поскольку $A \cap T(R) \subseteq T(A)$ (см. пункт 3)), мы можем также сделать следующее замечание.

Замечание 3.6. Если размерности центральных замыканий первичных T-полупростых фактор-алгебр алгебры R над их центроидами Мартиндейла не превышают $n \geqslant 1$, то центральные замыкания первичных T-полупростых фактор-алгебр алгебры A имеют размерности не выше n над их центроидами Мартиндейла, слабо разрешимый радикал $T(A)$ разрешим ступени не выше n по модулю идеала $A \cap T(R)$.

Замечание 3.7. Если в замечании 3.6 $R/T(R)$ — подпрямое произведение конечных первичных алгебр над кольцом F с максимальными аннуляторами в F, $A \neq T(A)$, то $A/T(A)$ — подпрямое произведение конечных первичных T-полупростых алгебр над F с максимальными аннуляторами в F.

Доказательство. Ненулевые образы алгебры A в факторах такого подпрямого произведения $R/T(R)$ являются конечными алгебрами над кольцом F с максимальными аннуляторами в F, их слабо разрешимые радикалы разрешимы ступени не выше n и равны пересечениям некоторых конечных наборов первичных идеалов, фактор-алгебры по которым T-полупросты (специальность радикала T и артиновость конечномерных алгебр). Пересечение прообразов в алгебре A идеалов из всех таких наборов разрешимо ступени не выше n по модулю её идеала $A \cap T(R)$ и совпадает с радикалом $T(A)$. □

Алгебра Ли (Мальцева) A над кольцом F называется *специальной*, если она вложима в алгебру Ли (Мальцева) $R^{(-)} = R^{(1,-1)}$ некоторой ассоциативной (альтернативной) PI-алгебры R над F. В ряде источников специальность алгебры Мальцева определяется просто как вложимость в алгебру Мальцева подходящей альтернативной алгебры.

Следствие 3.8. *Если A — ненулевая конечно порождённая первичная специальная алгебра Ли (Мальцева без 2-кручения) над кольцом Джекобсона F, то A — подпрямое произведение конечных первичных алгебр над F с максимальными аннуляторами в F.*

Доказательство. Алгебра Мальцева A является подалгеброй алгебры $R^{(-)}$ некоторой конечно порождённой первичной альтернативной PI-алгебры R над кольцом F (см. пункты 1), 4)). Алгебра R не имеет 2-кручения, поскольку R — $(F/\operatorname{Ann}_F R)$-модуль без кручения, A — алгебра без 2-кручения. Остаётся заметить, что алгебра A не содержит ненулевых разрешимых идеалов (см. [16, следствие 1 предложения 5]), и применить замечания 3.5, 3.7 и следствие 3.3.

В случае алгебры Ли A в этом рассуждении следует опустить условие отсутствия 2-кручения и заменить R любой конечно порождённой ассоциативной PI-алгеброй, в алгебру Ли которой вложима A. $\square$

Поскольку простота конечномерной алгебры Мальцева над полем характеристики нуль равносильна её первичности (см. [16, структурная теорема]), мы получаем также следующий результат.

Следствие 3.9. *Если в следствии 3.8 F — алгебра Джекобсона над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, то A — подпрямое произведение конечных простых алгебр над F с максимальными аннуляторами в F.*

Замечание 3.6 использует идеи [1], следствия 3.8, 3.9 включают в себя теорему 5 из [22], описанные здесь свойства соответствия $R \mapsto R^{(s,t)}$ можно переформулировать для отображений классов алгебр, которые ставят в соответствие алгебрам из одного класса алгебры, полученные из них заменой операций умножения, из другого класса.

4. Радикалы и отображения классов алгебр

Данная часть работы посвящена одному из способов построения радикалов на классах алгебр при помощи их отображений в другие классы и радикалов последних, в основе которого лежит следующее соображение.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — замкнутые относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классы алгебр над кольцом F, $\mathcal{T}$ — радикал в смысле Куроша—Амицура на $\mathfrak{N}$ и γ — отображение, которое ставит в соответствие каждой алгебре R из $\mathfrak{M}$ алгебру $\gamma(R)$ из $\mathfrak{N}$ и обладает следующими свойствами:*

1) *существует соответствие $I \mapsto \gamma(I)_R$, $I \lhd R$, между идеалами R и $\gamma(R)$, причём, если $\gamma(I) = \mathcal{T}\big(\gamma(I)\big)$, $\gamma(I)_R = \mathcal{T}(\gamma(I)_R)$; если R — сумма идеалов $\{I_a\}_{a\in\mathcal{A}}$, $\gamma(R)$ — сумма идеалов $\{\gamma(I_a)_R\}_{a\in\mathcal{A}}$;*
2) *любой гомоморфизм алгебр $\psi\colon R \to R'$ индуцирует такой эпиморфизм алгебр $\psi_\gamma\colon \gamma(R) \mapsto \gamma\big(\psi(R)\big)$, что*

$$(\operatorname{Ker}\psi_\gamma + \gamma(\operatorname{Ker}\psi)_R)/\gamma(\operatorname{Ker}\psi)_R = \mathcal{T}\big((\operatorname{Ker}\psi_\gamma + \gamma(\operatorname{Ker}\psi)_R)/\gamma(\operatorname{Ker}\psi)_R\big).$$

Тогда класс $\mathfrak{R}_{\mathcal{T},\gamma} = \big\{R \in \mathfrak{M} \mid \gamma(R) = \mathcal{T}\big(\gamma(R)\big)\big\}$ — радикальный подкласс класса $\mathfrak{M}$.

Доказательство. По условию класс $\mathfrak{R}_{\mathcal{T},\gamma}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов и содержит все алгебры из класса $\mathfrak{M}$, которые являются суммами своих идеалов из $\mathfrak{R}_{\mathcal{T},\gamma}$. Если I — такой идеал алгебры $R \in \mathfrak{M}$, что $I, R/I \in \mathfrak{R}_{\mathcal{T},\gamma}$, то алгебра $\gamma(R)$ содержит конечный ряд идеалов

$$\{0\} \subseteq \gamma(I)_R \subseteq J = \operatorname{Ker}\psi_\gamma + \gamma(I)_R \subseteq \gamma(R)$$

с $\mathcal{T}$-радикальными факторами $\gamma(I)_R$, $J/\gamma(I)_R$,

$$\gamma(R)/J \cong (\gamma(R)/\operatorname{Ker}\psi_\gamma)/(J/\operatorname{Ker}\psi_\gamma),$$

где $\psi\colon R \to R/I$ — канонический эпиморфизм R на R/I, и, как следствие, $\gamma(R) = \mathcal{T}\big(\gamma(R)\big)$, $R \in \mathfrak{R}_{\mathcal{T},\gamma}$. Поэтому класс $\mathfrak{R}_{\mathcal{T},\gamma}$ замкнут относительно взятия расширений. $\square$

В условии 1) ограничение на суммы идеалов можно заменить следующими условиями: соответствие $I \mapsto \gamma(I)_R$, $I \lhd R$, сохраняет отношение включения; если R — объединение упорядоченной по включению системы идеалов $\{I_a\}_{a\in\mathcal{A}}$, $\gamma(R)$ — объединение системы идеалов $\{\gamma(I_a)_R\}_{a\in\mathcal{A}}$.

Приведём ряд примеров отображений γ, к которым применима лемма 4.1. Помимо классов линейных алгебр, мы будем рассматривать также классы линейных тройных систем, квадратичных тройных систем, линейных пар и квадратичных пар, в примерах γ без указания классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ предполагается их совпадение с классами всех структур над кольцом F из областей определения и значения γ. Начнём с отображений $\gamma\colon R \mapsto \gamma(R)$, в которых алгебра $\gamma(R) \in \mathfrak{N}$ получена из алгебры $R \in \mathfrak{M}$ заменой операции умножения, $\gamma(I)_R = \gamma(I)$, $I \lhd R$.

1. $R \mapsto R^{(s,t)}$, $R \in \mathfrak{M}$, $R^{(s,t)} \in \mathfrak{N}$.
2. $R \mapsto (R, \langle\,,\,,\,\rangle)$, $R \in \mathfrak{M}$, $(R, \langle\,,\,,\,\rangle) \in \mathfrak{N}$ — линейная тройная система, $\langle x,y,z\rangle = (xy)z$, $x,y,z \in R$ ($\mathfrak{N}$ — замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов класс линейных тройных систем).
3. $(R, \langle\,,\,,\,\rangle) \mapsto (R, [\,,\,,\,])$, $(R, \langle\,,\,,\,\rangle)$ и $(R, [\,,\,,\,])$ — тройные ассоциативная и лиева системы,
$$[x,y,z] = \langle x,y,z\rangle - \langle y,x,z\rangle - \langle z,x,y\rangle + \langle z,y,x\rangle \quad (x,y,z \in R).$$
4. $(R, \langle\,,\,,\,\rangle) \mapsto (R, U)$, $(R, \langle\,,\,,\,\rangle)$ — тройная альтернативная система, (R,U) — тройная йорданова система, $U\colon x \mapsto \langle x,\ ,x\rangle$, $x \in R$.
5. $R \mapsto (R, [\,,\,,\,])$, R — алгебра Ли (Мальцева), $(R, [\,,\,,\,])$ — тройная лиева система,
$$[x,y,z] = \begin{cases} \big[[x,y],z\big], & \text{если } R \text{ — алгебра Ли,}\\ 2(xy)z - (yz)x - (zx)y, & \text{если } R \text{ — алгебра Мальцева} \end{cases}$$
$$(x,y,z \in R).$$
6. $(R,U) \mapsto (R, \{\,,\,,\,\}')$, $(R, \{\,,\,,\,\}) \mapsto (R, U')$, (R,U), (R,U') — квадратичные тройные системы, $(R, \{\,,\,,\,\})$, $(R, \{\,,\,,\,\}')$ — линейные тройные системы; аналогичные соответствия для линейных пар и квадратичных пар.
7. $R \mapsto (R,U)$, R — йорданова алгебра, (R,U) — тройная йорданова система.
8. $R \mapsto (R, \{\,,\,,\,\}'')$, R — линейная йорданова алгебра, $(R, \{\,,\,,\,\}'')$ — линейная тройная йорданова система.
9. $(R, \{\,,\,,\,\}) \mapsto (R, [\,,\,,\,])$, $(R, \{\,,\,,\,\})$ — линейная тройная йорданова система, $(R, [\,,\,,\,])$ — тройная лиева система,
$$[x,y,z] = \{x,y,z\} - \{y,x,z\} \quad (x,y,z \in R).$$

10. $R \mapsto (R, [\ ,\ ,\ ])$, R — линейная йорданова алгебра, $(R, [\ ,\ ,\ ])$ — тройная лиева система,

$$[x,y,z] = (1/2)\,(\{x,y,z\}'' - \{y,x,z\}'') = (y,z,x) = (yz)x - y(zx) \qquad (x,y,z \in R).$$

11. $(R, \{\ ,\ ,\ \}) \mapsto (R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$, $(R, U) \mapsto (R^{\pm}, U^{\pm})$, $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ и (R, U) — линейная и квадратичная тройные системы, $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ и $(R^{\pm}, U^{\pm})$ — линейная и квадратичная пары, $R^{\pm} = R$, $\{\ ,\ ,\ \}^{\pm} = \{\ ,\ ,\ \}$, $U^{\pm} = U$.
12. $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm}) \mapsto (R^{+} \oplus R^{-}, \{\ ,\ ,\ \})$, $(R^{\pm}, U^{\pm}) \mapsto (R^{+} \oplus R^{-}, U)$, $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ и $(R^{\pm}, U^{\pm})$ — линейная и квадратичная пары, $(R^{+} \oplus R^{-}, \{\ ,\ ,\ \})$ и $(R^{+} \oplus R^{-}, U)$ — их линейная и квадратичная тройные системы.
13. Аналогичные 11, 12 соответствия между линейными тройными йордановыми системами и линейными йордановыми парами, тройными йордановыми системами и йордановыми парами.

В примерах с линейными йордановыми алгебрами основное кольцо F с $1/2$ (см. введение и [39, 45]). К подобным примерам можно отнести также соответствие между радикалами йордановых и правоальтернативных алгебр и описание квазирегулярного радикала ассоциативной алгебры как квазирегулярного радикала её тройной ассоциативной системы, тройной йордановой системы и йордановой алгебры (см. [38, 40, 46, 50]).

Для любого однородного идеала I 3-преградуированной алгебры Ли $\bigl(L, \{L_i\}_{|i|\leqslant 1}\bigr)$ над кольцом F положим

$$I_i = I \cap L_i, \quad |i| \leqslant 1, \quad \langle I_{\pm 1}\rangle = I_1 + [I_1, I_{-1}] + I_{-1},$$
$$L_0(I_{\pm 1}) = [I_1, L_{-1}] + [I_{-1}, L_1], \quad L_0(L, I_{\pm 1}) = \{x \in L_0 \mid [x, L_{\pm 1}] \subseteq I_{\pm 1}\},$$
$$L(I_{\pm 1}) = I_1 + L_0(I_{\pm 1}) + I_{-1}, \quad L(L, I_{\pm 1}) = I_1 + L_0(L, I_{\pm 1}) + I_{-1}.$$

Тогда $L_0(I_{\pm 1}), L_0(L, I_{\pm 1}), [I_1, I_{-1}] \lhd L_0$, $L(I_{\pm 1}), L(I, I_{\pm 1}) \lhd L$, $\langle I_{\pm 1}\rangle \lhd L(I_{\pm 1})$ и

$$[L(L, I_{\pm 1}), \langle L_{\pm 1}\rangle] \subseteq L(I_{\pm 1}) \subseteq I \subseteq L(L, I_{\pm 1}).$$

В случае если $1/2 \in F$, для любых $y_{\pm} \in L_{\pm}$, $x_{\mp}, z_{\mp} \in I_{\mp}$

$$\bigl[[y_{\pm 1}, x_{\mp 1}], [y_{\pm 1}, z_{\mp 1}]\bigr] + [I_1, I_{-1}] = \Bigl[y_{\pm 1}, \bigl[x_{\mp 1}, [y_{\pm 1}, z_{\mp 1}]\bigr]\Bigr] + [I_1, I_{-1}] =$$
$$= \Bigl[y_{\pm 1}, \bigl[[x_{\mp 1}, y_{\pm 1}], z_{\mp 1}\bigr]\Bigr] + [I_1, I_{-1}] = -\bigl[[y_{\pm 1}, x_{\mp 1}], [y_{\pm 1}, z_{\mp 1}]\bigr] + [I_1, I_{-1}] = [I_1, I_{-1}],$$

и, как следствие, алгебра $L(I_{\pm 1})/\langle I_{\pm 1}\rangle$ — сумма однородных абелевых идеалов

$$(I_1 + [y_{\pm 1}, I_{\mp 1}] + [I_1, I_{-1}] + I_{-1})/\langle I_{\pm 1}\rangle \quad (y_{\pm 1} \in L_{\pm 1}).$$

Если $L_0 = [L_1, L_{-1}]$, то $L(J_{\pm 1}), L(L, J_{\pm 1}) \lhd L$, $[L, L(L, J_{\pm 1})] \subseteq L(J_{\pm 1}) \subseteq L(L, J_{\pm 1})$ для любого $(J_1, J_{-1}) \lhd (L_1, L_{-1})$, где (L_1, L_{-1}) — линейная йорданова пара абелевых внутренних идеалов $L_{\pm 1}$ алгебры L (см. введение). Если $L = L_1 \oplus [L_1, L_{-1}] \oplus L_{-1}$, каждый гомоморфизм линейной йордановой пары

$\psi\colon (L_1, L_{-1}) \to (V^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ индуцирует однородный эпиморфизм 3-градуированных алгебр Ли $\bar{\psi}\colon L \to \mathrm{TKK}\Big(\psi\big((L_1, L_{-1})\big)\Big)$, $\bar{\psi}x_{\pm 1} = \psi x_{\pm 1}$, $x_{\pm 1} \in L_{\pm 1}$. Для этого достаточно заметить, что из того, что $\sum\limits_{i=1}^{n}[x_i, y_i] = 0$ для некоторых $x_i \in L_{\pm 1}$, $y_i \in L_{\mp 1}$, $n \geqslant 1$, следует

$$\psi\bigg(\sum_{i=1}^{n}\big[[x_i, y_i], z\big]\bigg) = \sum_{i=1}^{n}\big[[\psi x_i, \psi y_i], \psi z\big] = 0 \quad (z \in L_{\pm 1}),$$

$\sum\limits_{i=1}^{n}[\psi x_i, \psi y_i] = 0$. Поэтому отображение

$$\bar{\psi}\colon x_1 + \sum_{k=1}^{m}[x_1(k), x_{-1}(k)] + x_{-1} \mapsto \psi x_1 + \sum_{k=1}^{m}[\psi x_1(k), \psi x_{-1}(k)] + \psi x_{-1},$$

$x_{\pm 1}, x_{\pm 1}(k) \in L_{\pm 1}$, определено корректно, $\operatorname{Ker}\bar{\psi} = L(L, K_{\pm 1})$, $\operatorname{Ker}\psi = (K_1, K_{-1})$. Кроме того, $\bar{\psi}$ индуцирует эпиморфизм

$$\bar{\psi}_0 = \bar{\psi}|_{L_0}\colon L_0 \to [\psi(L_1), \psi(L_{-1})],$$

$\operatorname{Ker}\bar{\psi}_0 = L_0(L, K_{\pm 1})$. Поскольку здесь $L = L_1 \oplus [L_1, L_{-1}] \oplus L_{-1}$, $\langle J_{\pm 1}\rangle / C_0(\langle J_{\pm 1}\rangle) \cong \mathrm{TKK}(J_1, J_{-1})$ для любого $(J_1, J_{-1}) \lhd (L_1, L_{-1})$, где $C_0(\langle J_{\pm 1}\rangle) = \big\{x \in [J_1, J_{-1}] \mid [x, J_1 + J_{-1}] = \{0\}\big\}$ (см. введение).

Таким образом, по лемме 4.1 (с необходимыми изменениями) получаем следующее.

14. Отображения $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm}) \mapsto \mathrm{TKK}(R^+, R^-) = \big(L, \{L_i\}_{|i| \leqslant 1}\big)$, $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ — линейная йорданова пара, $(I^{\pm}) \mapsto L(I_{\pm 1})$, $I_{\pm 1} = I^{\pm}$, $(I^{\pm}) \lhd (R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$, устанавливают соответствие между однородными наднильпотентными радикалами 3-градуированных алгебр Ли и наднильпотентными радикалами линейных йордановых пар над кольцом F с $1/2$.
15. Отображения $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm}) \mapsto \mathrm{Lie}(R^+, R^-) = L_0$, $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ — линейная йорданова пара, $(I^{\pm}) \mapsto \mathrm{Lie}(I^+, I^-)_{(R^{\pm})} = L_0(I_{\pm 1})$, $I_{\pm 1} = I^{\pm}$, $(I^{\pm}) \lhd (R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$, устанавливают соответствие между наднильпотентными радикалами алгебр Ли и наднильпотентными радикалами линейных йордановых пар над F.

Далее, R — линейная йорданова алгебра над кольцом F с $1/2$, $\mathcal{L}(R)$ — F-модуль левых умножений R, $\mathrm{Inder}(R) = [\mathcal{L}(R), \mathcal{L}(R)]$ и $\mathrm{Lie}(R) = \mathcal{L}(R) + \mathrm{Inder}(R)$ — алгебры Ли её внутренних дифференцирований и лиевых умножений, $\mathcal{L}^R(A)$ — подмодуль $\mathcal{L}(R)$, порождённый операторами l_x, $x \in A$,

$$\mathrm{Inder}^R(A) = [\mathcal{L}^R(A), \mathcal{L}^R(A)], \quad \mathrm{Lie}^R(A) = \mathcal{L}^R(A) + \mathrm{Inder}^R(A),$$
$$\mathrm{Inder}(A)_R = [\mathcal{L}^R(A), \mathcal{L}(R)], \quad \mathrm{Lie}(A)_R = \mathcal{L}^R(A) + \mathrm{Inder}(A)_R$$

для любого множества $A \subseteq R$. Поскольку для всех $x, y, z, u \in R$

$$\big[[l_x, l_y], l_z\big] = l_{[l_x, l_y]z} = l_{(y,z,x)}, \quad [l_{xy}, l_z] + [l_{xz}, l_y] + [l_{yz}, l_x] = 0,$$
$$\big[[l_x, l_y], [l_z, l_u]\big] = [l_{(y,z,x)}, l_u] + [l_z, l_{(y,u,x)}] = [l_y, l_{(u,x,z)}] + [l_{(u,y,z)}, l_x]$$

(см. [6, с. 86, (25)—(27)], $\mathcal{L}(R)$ — подсистема тройной лиевой системы $\bigl(\mathrm{Lie}(R), \bigl[[\,,\,],\,\bigr]\bigr)$, $x \mapsto l_x$, $x \in R^1$, — изоморфизм тройных лиевых систем $(R^1, [\,,\,,\,])$ и $\bigl(\mathcal{L}(R^1), \bigl[[\ ,\ ],\ \bigr]\bigr)$, $\mathrm{Lie}(R^1)$ — стандартная лиева обёртывающая тройной лиевой системы $\bigl(\mathcal{L}(R^1), \bigl[[\,,\,],\,\bigr]\bigr)$ (см. 5, 10) и для любого $I \lhd R$

$$\mathcal{L}^R(I) \lhd \mathcal{L}(R), \quad \mathcal{L}^{R^1}(I^1) \lhd \mathcal{L}(R^1), \quad \mathrm{Inder}^R(I),\ \mathrm{Inder}(I)_R \lhd \mathrm{Inder}(R),$$
$$\mathrm{Inder}^{R^1}(I^1) = \mathrm{Inder}^{R^1}(I), \quad \mathrm{Inder}(I^1)_{R^1} = [\mathcal{L}^{R^1}(I), \mathcal{L}^{R^1}(R)] \lhd \mathrm{Inder}(R^1),$$
$$\mathrm{Lie}^R(I) \lhd \mathrm{Lie}(I)_R \lhd \mathrm{Lie}(R), \quad \mathrm{Lie}^{R^1}(I^1) \lhd \mathrm{Lie}(I^1)_{R^1} \lhd \mathrm{Lie}(R^1).$$

Для любых $I \lhd R$, $x, x' \in I$, $y, y' \in R$

$$[l_{x(x'y')}, l_y] = [l_{x'y'}, l_{xy}] + [l_x, l_{(x'y')y}] \in \mathrm{Inder}^R(I),$$
$$\bigl[[l_x, l_y], [l_{x'}, l_{y'}]\bigr] + \mathrm{Inder}^R(I) = [l_{(x',x,y')}, l_y] + \mathrm{Inder}^R(I) = [l_{(xx')y'}, l_y] + \mathrm{Inder}^R(I) =$$
$$= [l_{(y,x',x)}, l_{y'}] + \mathrm{Inder}^R(I) = -[l_{(xx')y}, l_{y'}] + \mathrm{Inder}^R(I), \quad [l_{(xx')y}, l_y] \in \mathrm{Inder}^R(I),$$

алгебра $\mathrm{Inder}(I)_R / \mathrm{Inder}^R(I)$ — сумма абелевых идеалов

$$\bigl([\mathcal{L}^R(I), l_y] + \mathrm{Inder}^R(I)\bigr) / \mathrm{Inder}^R(I) \quad (y \in R),$$

и потому алгебры

$$\mathrm{Lie}(I)_R / \mathrm{Lie}^R(I) \cong \mathrm{Inder}(I)_R / \bigl(\mathrm{Inder}(I)_R \cap \mathrm{Lie}^R(I)\bigr), \quad \mathrm{Lie}(I^1)_{R^1} / \mathrm{Lie}^{R^1}(I^1)$$

также являются суммами абелевых идеалов.

Гомоморфизм $\pi_I \colon \phi \mapsto \phi|_I$, $\phi \in M(R)$, отображает $H^R(I)$ на $H(I)$, гомоморфизм $\pi_{I^1} \colon \phi \mapsto \phi|_{I^1}$, $\phi \in M^{R^1}(I^1) + \bigl(M^{R^1}(I)\bigr)_{M(R^1)}$, — $H^{R^1}(I^1)$ на $H(I^1)$ и $H^{R^1}(I)$ на $H^{I^1}(I)$, где $\phi|_I$ $(\phi|_{I^1})$ — ограничение ϕ на I (I^1), $I \lhd R$, $H = \mathcal{L}, \mathrm{Inder}, \mathrm{Lie}$, $\mathrm{Ker}\,\pi_I = \mathrm{Ann}_{M(R)} I$, $\mathrm{Ker}\,\pi_{I^1} \subseteq \mathrm{Ann}_{M(R^1)} I^1$. При этом

$$\bigl[[\mathrm{Ker}\,\pi_I \cap \mathcal{L}^R(I), \mathcal{L}^R(I)], \mathcal{L}^R(I)\bigr] = \mathrm{Ker}\,\pi_{I^1} \cap \mathcal{L}^{R^1}(I^1) = \{0\},$$
$$\mathrm{Ker}\,\pi_I \cap \mathrm{Inder}^R(I) \subseteq C\bigl(\mathrm{Inder}^R(I)\bigr),$$
$$\mathrm{Ker}\,\pi_{I^1} \cap \mathrm{Lie}^{R^1}(I^1) = \mathrm{Ker}\,\pi_{I^1} \cap \mathrm{Inder}^{R^1}(I) \subseteq C\bigl(\mathrm{Lie}^{R^1}(I^1)\bigr),$$

где $C(L) = \bigl\{x \in L \mid [x, L] = \{0\}\bigr\}$ — центр алгебры Ли L. Кроме того, любой гомоморфизм $\psi \colon R \to R'$ индуцирует гомоморфизмы $\psi^1 \colon R^1 \to R'^1$, $\psi_M \colon M(R) \to M\bigl(\psi(R)\bigr)$ и $\psi^1_M \colon M(R^1) \to M(\psi(R)^1)$,

$$\mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Ker}\,\psi^1, \quad \mathrm{Ker}\,\psi_M = \{\phi \in M(R) \mid \phi(R) \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi\},$$
$$\mathrm{Ker}\,\psi^1_M = \{\phi \in M^{R^1}(R) \mid \phi|_R \in \mathrm{Ker}\,\psi_M,\ \phi 1 \in \mathrm{Ker}\,\psi\},$$
$$\bigl[[\mathrm{Ker}\,\psi_M \cap \mathcal{L}(R), \mathcal{L}(R)], \mathcal{L}(R)\bigr] \subseteq \mathcal{L}^R(\mathrm{Ker}\,\psi), \quad \mathrm{Ker}\,\psi^1_M \cap \mathcal{L}(R^1) = \mathcal{L}^{R^1}(\mathrm{Ker}\,\psi),$$
$$[\mathrm{Ker}\,\psi_M \cap \mathrm{Inder}(R), \mathrm{Inder}(R)] \subseteq \mathrm{Inder}(\mathrm{Ker}\,\psi)_R,$$
$$\mathrm{Ker}\,\psi^1_M \cap \mathrm{Lie}(R^1) = \mathcal{L}^{R^1}(\mathrm{Ker}\,\psi) + \mathrm{Ker}\,\psi^1_M \cap \mathrm{Inder}(R^1),$$
$$[\mathrm{Ker}\,\psi^1_M \cap \mathrm{Lie}(R^1), \mathrm{Lie}(R^1)] \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\psi)_{R^1}.$$

Тогда по лемме 4.1 верно следующее.

16. Отображения $R \mapsto \big(\mathcal{L}(R^1), [[\,,],]\big)$, $I \mapsto \mathcal{L}^{R^1}(I^1)$ $(R \mapsto \big(\mathcal{L}^R, [[\,,],]\big)$, $I \mapsto \mathcal{L}^R(I))$, $I \lhd R$, устанавливают соответствие между радикалами тройных лиевых систем и линейных йордановых алгебр над кольцом F с $1/2$ (их наднильпотентными радикалами).
17. Отображения $R \mapsto \operatorname{Inder}(R)$, $I \mapsto \operatorname{Inder}(I)_R$ $(R \mapsto \operatorname{Inder}(R^1)$, $I \mapsto \operatorname{Inder}(I^1)_{R^1})$, $I \lhd R$, и $R \mapsto \operatorname{Lie}(R^1)$, $I \mapsto \operatorname{Lie}(I^1)_{R^1}$ $(R \mapsto \operatorname{Lie}^{R^1}(R)$, $I \mapsto \operatorname{Lie}(I)_{R^1})$, $I \lhd R$, устанавливают соответствия между наднильпотентными радикалами алгебр Ли и линейных йордановых алгебр над F.

Заметим, что классы радикальных алгебр относительно радикалов линейных йордановых алгебр, отвечающих наднильпотентным радикалам алгебр Ли в примере 17, содержат все ассоциативные коммутативные алгебры.

Приведём аналог леммы 4.1 для линейной йордановой пары и преградуированных алгебр Ли. Пусть Λ — абелева группа без кручения в аддитивной записи, $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — Λ-преградуированная алгебра Ли над кольцом F. Мы будем называть элемент $0 \neq \alpha \in \operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ *крайним*, если $\phi(\alpha) > |\phi(\beta)|$, $\pm\alpha \neq \beta \in \operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, для некоторого гомоморфизма групп $\phi\colon \Lambda \to (\mathbb{Z}, +)$, и обозначать множество всех таких элементов через $\operatorname{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$. Для любого $\alpha \in \operatorname{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ подмодули $L_{\pm\alpha}$ — абелевы внутренние идеалы алгебры L. Им соответствует линейная йорданова пара $(L_\alpha, L_{-\alpha})$, которую мы будем называть *крайней линейной йордановой парой* L.

Лемма 4.2. *Каждому (наднильпотентному) радикалу в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ линейной йордановой пары над кольцом F отвечает однородный радикал $\mathcal{T}_\Lambda$ на классе алгебр Ли с конечной Λ-градуировкой $\mathfrak{L}_{\mathrm{fg},\Lambda}$ (Λ-преградуировкой $\mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},\Lambda}$) над F с классом $\mathcal{T}_\Lambda$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_\Lambda}$, состоящим из всех алгебр из $\mathfrak{L}_{\mathrm{fg},\Lambda}$ ($\mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},\Lambda}$), крайние линейные йордановы пары ненулевых однородных гомоморфных образов которых $\mathcal{T}$-радикальны.*

Доказательство. Пусть $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \in \mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},\Lambda}$. Если I — однородный идеал алгебры Ли L, такой что $I, L/I \in \mathfrak{R}_{\mathcal{T}_\Lambda}$, то линейные йордановы пары $(L_\alpha, L_{-\alpha})$, $\alpha \in \operatorname{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, $\mathcal{T}$-радикальны, так как

$$\operatorname{ex}(\{I_\lambda = I \cap L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \supseteq \operatorname{supp}(\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \cap \operatorname{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}),$$
$$\operatorname{ex}(\{(L/I)_\lambda = (L_\lambda + I)/I\}_{\lambda\in\Lambda}) \supseteq \operatorname{supp}(\{(L/I)_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \cap \operatorname{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}),$$

$\mathcal{T}\big((I_\alpha, I_{-\alpha})\big) = (I_\alpha, I_{-\alpha}) \lhd (L_\alpha, L_{-\alpha})$ и

$$\mathcal{T}\Big(\big((L/I)_\alpha, (L/I)_{-\alpha}\big)\Big) = \big((L/I)_\alpha, (L/I)_{-\alpha}\big) \cong (L_\alpha, L_{-\alpha})/(I_\alpha, I_{-\alpha}).$$

Если L — сумма однородных идеалов $I_b \in \mathfrak{R}_{\mathcal{T}_\Lambda}$, $b \in B$, то любая её крайняя линейная йорданова пара $(L_\alpha, L_{-\alpha})$ является суммой $\mathcal{T}$-радикальных идеалов $(I_{b,\alpha}, I_{b,-\alpha})$, $I_{b,\pm\alpha} = I_b \cap L_{\pm\alpha}$, $b \in B$, и нильпотентных идеалов $(I(\pm\alpha)_\alpha, I(\pm\alpha)_{-\alpha})$, $I(\pm\alpha) = \Big(L_{\pm\alpha} \cap \Big(\sum\limits_{\pm\alpha\neq\lambda\in\Lambda} L_\lambda\Big)\Big)_L$ (см. [10, доказательство п. (a) леммы 10]), и потому $\mathcal{T}$-радикальна для наднильпотентного радикала

$\mathcal{T}$ и любого $\mathcal{T}$, если $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \in \mathfrak{L}_{\mathrm{fg},\Lambda}$. Проверка $\mathcal{T}$-радикальности крайних линейных йордановых пар ненулевых однородных гомоморфных образов L в обоих этих случаях проводится аналогично (для наднильпотентного $\mathcal{T}$, если $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \in \mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},\Lambda}$). Следовательно, класс $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_\Lambda}$ замкнут относительно взятия однородных расширений и любая алгебра из класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},\Lambda}$ ($\mathfrak{L}_{\mathrm{fg},\Lambda}$) содержит наибольший однородный идеал из $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_\Lambda}$. Замкнутость $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_\Lambda}$ относительно взятия однородных гомоморфных образов следует из его определения. □

Зафиксируем конечное множество S, $0 \in S \subset \Lambda$, и S-преградуированную алгебру Ли $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in S})$ над кольцом F. Назовём элемент $0 \neq \alpha \in S$ *S-крайним*, если $\phi(\alpha) > |\phi(\beta)|$, $\pm\alpha \neq \beta \in S$, для некоторого гомоморфизма групп $\phi\colon \Lambda \to (\mathbb{Z}, +)$, и обозначим через E_S множество всех S-крайних элементов. Мы будем называть линейную йорданову пару $\{(L_\alpha, L_{-\alpha})\}_{\alpha\in E_S}$ *S-крайней линейной йордановой парой* L. По аналогии с леммой 4.2 каждому (наднильпотентному) радикалу $\mathcal{T}$ линейной йордановой пары над F можно поставить в соответствие однородный радикал $\mathcal{T}_S$ на классе S-градуированных (S-преградуированных) алгебр Ли $\mathfrak{L}_{\mathrm{fg},S}$ ($\mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},S}$) над F с классом $\mathcal{T}_S$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_S}$, состоящим из всех алгебр из $\mathfrak{L}_{\mathrm{fg},S}$ ($\mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},S}$) с $\mathcal{T}$-радикальными S-крайними линейными йордановыми парами. Кроме того, $\mathcal{T}$ отвечают однородные радикалы $\mathcal{T}_{S,\alpha}$, $\alpha \in E_S$, на $\mathfrak{L}_{\mathrm{fg},S}$ ($\mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},S}$) с классами $\mathcal{T}_{S,\alpha}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_{S,\alpha}}$, состоящими из всех алгебр $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in S})$ из $\mathfrak{L}_{\mathrm{fg},S}$ ($\mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},S}$) с $\mathcal{T}\big((L_\alpha, L_{-\alpha})\big) = (L_\alpha, L_{-\alpha})$. Если $\mathcal{T}$ наследственный, $\mathcal{T}_S(L) = \bigcap\limits_{\alpha\in E_S} \mathcal{T}_{S,\alpha}(L)$, $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in S}) \in \mathfrak{L}_{\mathrm{fg},S}$.

Лемма 4.3. *Пусть $\mathcal{S}$ — упорядоченная по включению система конечных множеств S, $0 \in S \subseteq \Lambda$, такая что $\{0\} \in \mathcal{S}$ и для любых $S, S' \in \mathcal{S}$, $S' \subset S$, $S' = S_i$ для некоторого i, где $S_0 = S$, $S_{i+1} = S_i \setminus E_{S_i}$, $i \geqslant 0$, $\mathfrak{L}_{\mathrm{fg},\mathcal{S}} = \bigcup\limits_{S\in\mathcal{S}} \mathfrak{L}_{\mathrm{fg},S}$ и $\mathfrak{L}_{\mathrm{fgr},\mathcal{S}} = \bigcup\limits_{S\in\mathcal{S}} \mathfrak{L}_{\mathrm{fgr},S}$ — классы алгебр Ли с S-градуировками и S-преградуировками, $S \in \mathcal{S}$, над кольцом F. Тогда каждому (наднильпотентному) радикалу в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ линейной йордановой пары над F отвечает однородный радикал $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ на классе $\mathfrak{L}_{\mathrm{fg},\mathcal{S}}$ ($\mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},\mathcal{S}}$) с классом $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_{\mathcal{S}}}$, состоящим из всех алгебр $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in S})$ из $\mathfrak{L}_{\mathrm{fg},S}$ ($\mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},S}$), $S \in \mathcal{S}$,*

$$\mathcal{T}\big((\bar{L}(i)_\alpha, \bar{L}(i)_{-\alpha})\big) = (\bar{L}(i)_\alpha, \bar{L}(i)_{-\alpha}) \quad (\alpha \in E_{S_i},\ i \geqslant 0),$$

где $L(i)$ — идеал L, порождённый $L_{\pm\lambda}$, $\lambda \in E_{S_j}$, $0 \leqslant j < i$, $L(0) = \{0\}$, $\bar{L}(i) = L/L(i)$.

Доказательство. Пусть $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in S}) \in \mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},S}$. Так как любой однородный гомоморфизм алгебр Ли $\phi\colon L \to L'$, $(L', \{L'_\lambda\}_{\lambda\in S}) \in \mathfrak{L}_{\mathrm{fpg},S}$, индуцирует эпиморфизмы линейных йордановых пар $(\bar{L}(i)_\alpha, \bar{L}(i)_{-\alpha}) \to \big(\overline{\phi(L)}(i)_\alpha, \overline{\phi(L)}(i)_{-\alpha}\big)$, $\alpha \in E_{S_i}$, $i \geqslant 0$, класс $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_{\mathcal{S}}}$ замкнут относительно взятия однородных гомоморфных образов. Если I — однородный идеал алгебры Ли L, такой что $I, L/I \in \mathfrak{R}_{\mathcal{T}_{\mathcal{S}}}$, то для любых $\alpha \in E_{S_i}$, $i \geqslant 0$

$$\bar{I}_L(i) = \big(I + L(i)\big)/L(i) \lhd \bar{L}(i), \quad (\bar{I}_L(i)_\alpha, \bar{I}_L(i)_{-\alpha}) \lhd (\bar{L}(i)_\alpha, \bar{L}(i)_{-\alpha}),$$

$$\bar I_L(i)\cong I/\big(I\cap L(i)\big)\cong \bar I(i)/\big(\big(I\cap L(i)\big)/I(i)\big),$$
$$\bar L(i)/\bar I_L(i)\cong L/\big(I+L(i)\big)\cong (L/I)/\big(\big(I+L(i)\big)/I\big)=\overline{L/I}(i)$$

и, как следствие, линейные йордановы пары $(\bar I_L(i)_\alpha,\bar I_L(i)_{-\alpha})$, $\Big(\big(\bar L(i)/\bar I_L(i)\big)_\alpha,\big(\bar L(i)/\bar I_L(i)\big)_{-\alpha}\Big)$ и $(\bar L(i)_\alpha,\bar L(i)_{-\alpha})$ $\mathcal T$-радикальны. Если L — сумма однородных идеалов $I_b\in\mathfrak R_{\mathcal T_{\mathcal S}}$, $b\in B$, любая линейная йорданова пара $(\bar L(i)_\alpha,\bar L(i)_{-\alpha})$ — сумма $\mathcal T$-радикальных идеалов $\big(\overline{I_b}_L(i)_\alpha,\overline{I_b}_L(i)_{-\alpha}\big)$, $b\in B$, и нильпотентных идеалов $(I(i,\pm\alpha)_\alpha,I(i,\pm\alpha)_{-\alpha})$, $I(i,\pm\alpha)=\Big(\bar L(i)_{\pm\alpha}\cap\cap\Big(\sum\limits_{\pm\alpha\neq\lambda\in S_i}\bar L(i)_\lambda\Big)\Big)_L$ (см. выше), $\alpha\in E_{S_i}$, $i\geqslant 0$, и, значит, $\mathcal T$-радикальна для наднильпотентного радикала $\mathcal T$ и любого $\mathcal T$, если $(L,\{L_\lambda\}_{\lambda\in S})\in\mathfrak L_{\mathrm{fg},\mathcal S}$. Поэтому класс $\mathfrak R_{\mathcal T_{\mathcal S}}$ замкнут относительно взятия однородных расширений, любая алгебра из класса $\mathfrak L_{\mathrm{fpg},\mathcal S}$ ($\mathfrak L_{\mathrm{fg},\mathcal S}$) содержит наибольший однородный идеал из $\mathfrak R_{\mathcal T_{\mathcal S}}$. $\square$

В частности, если

$$\Lambda=(\mathbb Z,+),\quad \mathcal S_{\mathbb Z}=\big\{\{j\mid |j|\leqslant i\}\big\}_{i\geqslant 0},\quad \mathfrak L_{*,\Lambda}=\mathfrak L_{*,\mathbb Z},\quad *=\mathrm{fg},\mathrm{fpg},$$

то

$$\mathfrak R_{\mathcal T_{\mathcal S_{\mathbb Z}}}=\big\{(L,\{L_i\}_{|i|\leqslant n})\in\mathfrak L_{*,\mathbb Z}\mid \mathcal T\big((\bar L(i)_{n-i},\bar L(i)_{i-n})\big)=(\bar L(i)_{n-i},\bar L(i)_{i-n}),\\ 0\leqslant i<n\big\},$$

где $L(i)$ — идеал L, порождённый L_j, $|j|>n-i$, $L(0)=\{0\}$, $\bar L(i)=L/L(i)$. На классах $\mathfrak L_{3\text{-g}}=\mathfrak L_{\mathrm{fg},S'}$ и $\mathfrak L_{3\text{-pg}}=\mathfrak L_{\mathrm{fpg},S'}$, $S'=\{0,\pm1\}$, радикалы $\mathcal T_{\mathbb Z}$, $\mathcal T_{S'}$ и $\mathcal T_{\mathcal S_{\mathbb Z}}$ определяют один однородный радикал, который мы будем обозначать через $\mathcal T_3$ ($\mathcal T$ наднильпотентен для $\mathfrak L_{\mathrm{fpg},\Lambda}$). Для любой алгебры $(L,\{L_i\}_{|i|\leqslant1})\in\mathfrak L_{3\text{-}*}$, $*=\mathrm g,\mathrm{pg}$, $\mathcal T_3(L)$ — наибольший среди её однородных идеалов I, таких что $\mathcal T\big((I_1,I_{-1})\big)=(I_1,I_{-1})$, $I_{\pm1}=I\cap L_{\pm1}$ (и значит, $I=L(L,I_{\pm1})$). Если $L_0=[L_1,L_{-1}]$, $\mathcal T_3(L)=L(L,T_{\pm1})$, $\mathcal T\big((L_1,L_{-1})\big)=(T_1,T_{-1})$. Вместе с тем соответствие $\mathcal T\mapsto\mathcal T_3$ следует из леммы 4.1 для отображения $L\mapsto(L_1,L_{-1})$, $I\mapsto(I_1,I_{-1})$, $\big(L,\{L_i\}_{|i|\leqslant1}\big)\in\mathfrak L_{3\text{-g}}$, I — однородный идеал L (при изменении условия 1) леммы 4.1 также для $\big(L,\{L_i\}_{|i|\leqslant1}\big)\in\mathfrak L_{3\text{-pg}}$ и наднильпотентного $\mathcal T$).

Замечание 4.4. Если $\mathcal T$ — наднильпотентный радикал линейной йордановой пары над кольцом F с $1/2$, $\mathcal T_3$ — однородный радикал 3-преградуированных алгебр Ли над F, отвечающий $\mathcal T$, $\mathcal T_3'$ — радикал линейной йордановой пары над F, отвечающий $\mathcal T_3$ в примере 14, то $\mathcal T=\mathcal T_3'$.

Как и условие наднильпотентности, условия наследственности радикалов относятся по умолчанию только к радикалам в смысле Куроша—Амицура.

Замечание 4.5. Если $\mathcal T$ — однородный наследственный наднильпотентный радикал 3-градуированных алгебр Ли над кольцом F с $1/2$, $\mathcal T'$ — радикал линейной йордановой пары над F, отвечающий $\mathcal T$ в примере 14, $\mathcal T_3'$ — однородный радикал 3-преградуированных алгебр Ли над F, отвечающий $\mathcal{T}'$, то $\mathcal{T}(L) = \mathcal{T}_3'(L)$, $\mathrm{TKK}(R^+, R^-) = \big(L, \{L_i\}_{|i|\leqslant 1}\big)$ для всех линейных йордановых пар $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ над F.

Доказательство. Положим $I = \mathcal{T}(L)$, $J = \mathcal{T}'_3(L)$, $I_{\pm1} = I \cap L_{\pm1}$, $J_{\pm1} = J \cap L_{\pm1}$. Ввиду наследственности $\mathcal{T}$ (замкнутости класса $\mathcal{T}$-радикальных алгебр относительно взятия однородных идеалов), его наднильпотентности и сделанных ранее замечаний алгебры $\langle I_{\pm1}\rangle$, $L(L, I_{\pm1})$ и $J = L(L, J_{\pm1})$ $\mathcal{T}$-радикальны, и потому $I = \mathcal{T}'_3(I)$, $I = J$. $\square$

Замечание 4.6. Если $\mathcal{T}$ — радикал в смысле Куроша—Амицура линейной пары над кольцом F, $\mathcal{T}'$ — радикал линейной тройной системы над F, отвечающий $\mathcal{T}$ в примере 11, $\mathcal{T}''$ — радикал линейной пары над F, отвечающий $\mathcal{T}'$ в примере 12, то $\mathcal{T} = \mathcal{T}''$.

Доказательство. Если $\Pi = (R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ — линейная пара над кольцом F, $(R^+ \oplus R^-, \{\ ,\ ,\ \})$ — её линейная тройная система и $\Pi' = \big((R^+ \oplus R^-)^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm\big)$ — линейная пара $(R^+ \oplus R^-, \{\ ,\ ,\ \})$, где

$$\big\{(x^+ + x^-)^\pm, (y^+ + y^-)^\mp, (z^+ + z^-)^\pm\big\}^\pm = (\{x^+, y^-, z^+\}^+ + \{x^-, y^+, z^-\}^-)^\pm \quad (x^\pm, y^\pm, z^\pm \in R^\pm),$$

то $\Pi'_+ = \big((R^\pm)^\pm\big)$, $\Pi'_- = \big((R^\mp)^\pm\big) \lhd \Pi'$, $\Pi' = \Pi'_+ \oplus \Pi'_-$, Π изоморфна $\Pi'_\pm$ при помощи изоморфизмов $x^\pm \mapsto (x^\pm)^\pm$, $x^\pm \mapsto (x^\pm)^\mp$, $x^\pm \in R^\pm$. Поэтому $\Pi = \mathcal{T}(\Pi)$, если и только если $\Pi' = \mathcal{T}(\Pi')$. $\square$

Замечание 4.7. Если $\mathcal{T}$ — наследственный на подсистемы радикал линейной тройной системы над кольцом F, $\mathcal{T}'$ — радикал линейной пары над F, отвечающий $\mathcal{T}$ в примере 12, $\mathcal{T}''$ — радикал линейной тройной системы над F, отвечающий $\mathcal{T}'$ в примере 11, то $\mathcal{T}''(R) \subseteq \mathcal{T}(R)$ для всех линейных тройных систем $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ над F.

Доказательство. Любая линейная тройная система $R = (R, \{\ ,\ ,\ \})$ над кольцом F вкладывается в линейную тройную систему $\hat{R} = (R^+ \oplus R^-, \{\ ,\ ,\ \})$ её линейной пары $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$, $R^\pm = R$, $\{\ ,\ ,\ \}^\pm = \{\ ,\ ,\ \}$, при помощи вложения $x \mapsto x^+ + x^-$, $x^\pm = x \in R$. Ввиду замкнутости класса $\mathcal{T}$-радикальных линейных тройных систем относительно взятия подсистем отсюда следует, что, если $\hat{R} = \mathcal{T}(\hat{R})$, $R = \mathcal{T}(R)$. $\square$

Замечание 4.8. Если $\mathcal{T}$ — радикал в смысле Куроша—Амицура линейной тройной системы над кольцом F, $\mathcal{T}'$ — радикал линейной пары над F, отвечающий $\mathcal{T}$ в примере 12, $\Pi = (R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ — линейная пара над F, такая что $\mathcal{T}(\Sigma) = I^+ \oplus I^-$, где $\Sigma = (R^+ \oplus R^-, \{\ ,\ ,\ \})$ — линейная тройная система Π, $I^\pm$ — проекции $\mathcal{T}(\Sigma)$ на $R^\pm$, то $\mathcal{T}'(\Pi) = (I^\pm)$.

Доказательство. Следует лишь заметить, что $(J^\pm) \lhd \Pi$, $J^+ \oplus J^- \lhd \Sigma$ для всех $J \lhd \Sigma$, где $J^\pm = \pi^\pm(J)$, $\pi^\pm \colon x^+ + x^- \mapsto x^\pm$, $x^\pm \in R^\pm$. $\square$

Аналогичные утверждения справедливы для радикалов квадратичных пар и квадратичных тройных систем.

Тройную систему (R, U) над кольцом F, содержащую элемент 1, такой что $U_1 = \mathrm{Id}_R$, мы будем называть *квадратичной тройной системой с единицей* 1 и обозначать через $(R, U, 1)$. Тройная йорданова система с единицей $(R, U, 1)$ называется *квадратичной йордановой алгеброй с единицей* (далее просто *йордановой алгеброй с* 1) (см. [45, п. 9.3, (9.15)]). Если $1/2 \in F$, йорданова алгебра $(R, U, 1)$ является квадратичным представлением линейной йордановой алгебры R с единицей 1 и умножением $x \cdot y = (1/2)\, U_{x,y}1$, $x, y \in R$, т. е. $U_x = 2r_x^2 - r_{x^2}$, где $r_x = (1/2)\, V_{x,1} = (1/2)\, V_{1,x} = (1/2)\, U_{x,1}$, $x \in R$ (см. [45, (9.7)]).

Замечание 4.9. Если $\mathcal{T}$ — радикал в смысле Куроша—Амицура квадратичной пары над кольцом F, $\mathcal{T}'$ — радикал квадратичной тройной системы над F, отвечающий $\mathcal{T}$ в примере 11, то $\mathcal{T}\big((R^{\pm})\big) = (\mathcal{T}'(R)^{\pm})$ для любой квадратичной тройной системы с единицей $(R, U, 1)$ над F, где $(R^{\pm}, U^{\pm})$ — её квадратичная пара.

Доказательство. Достаточно заметить, что $U_1^{\pm} I^{\mp} = \{a^{\pm} \mid a \in I^{\mp}\} \subseteq I^{\pm}$, $I^+ = I^- \lhd R$ для любого $(I^{\pm}) \lhd (R^{\pm}, U^{\pm})$. □

Замечание 4.9 верно также для радикала линейной пары $\mathcal{T}$, отвечающего ему радикала линейной тройной системы $\mathcal{T}'$ и любой линейной тройной системы $(R, \{\ ,\ ,\ \})$, содержащей элементы x и y, такие что $\{x,\ , y\} = \mathrm{Id}_R$.

Следствие 4.10. *Если $\mathcal{T}$ — радикал линейной йордановой пары над кольцом F с $1/2$, $\mathcal{T}_3$ — однородный радикал 3-градуированных алгебр Ли над F, отвечающий $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ — радикал линейных йордановых алгебр над F, который отвечает $\mathcal{T}$ в композиции примеров* 11 (13) *и* 8, *то* $\mathcal{T}_3(L) = L(L, I_{\pm 1})$, $\mathrm{TKK}(R) = \big(L, \{L_i\}_{|i| \leqslant 1}\big)$, $I_{\pm 1} = \mathcal{T}'(R)$ *для любой линейной йордановой алгебры R с* 1 *над F.*

Доказательство. Композиция примеров 11 (13) и 8 — отображение $R \mapsto (R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}''^{\pm})$, где R — линейная йорданова алгебра над кольцом F с $1/2$, $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}''^{\pm})$ — линейная йорданова пара её линейной тройной йордановой системы $(R, \{\ ,\ ,\ \}'')$ $(I \mapsto (I^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}''^{\pm}),\ I \lhd R)$. Если $1 \in R$, $r_x = \{x, 1,\ \}''$, $x \in R$, и потому идеалы $(R, \{\ ,\ ,\ \}'')$ являются идеалами R (обратное верно в любом случае). Значит, для R с 1 значения радикалов линейных тройных йордановых систем на $(R, \{\ ,\ ,\ \}'')$ равны значениям на R радикалов линейных йордановых алгебр, отвечающих им в примере 8. В частности, радикал $\mathcal{T}'(R)$ совпадает со значением на $(R, \{\ ,\ ,\ \}'')$ радикала линейной тройной йордановой системы, отвечающего $\mathcal{T}$ в примере 11 (13). Остаётся применить наблюдение перед замечанием 4.4 и замечание 4.9. □

Список примеров применения леммы 4.1 можно дополнить соответствием между однородными радикалами H-преградуированных и G-преградуированных алгебр над кольцом F, которое определяют гомоморфизм группоидов $\psi\colon G \to H$ и отображение $(A, \{A_g\}_{g \in G}) \mapsto (A, \{A_h\}_{h \in H})$, $A_h = \sum\limits_{g \in G,\ \psi(g) = h} A_g$.

Квазирегулярный радикал и радикал Маккриммона йордановых систем

Тройка $(R, U, {}^2)$, состоящая из квадратичной тройной системы (R, U) над кольцом F и квадратичного отображения ${}^2\colon x \mapsto x^2$, $x, x^2 \in R$, называется *квадратичной йордановой алгеброй* (далее *йордановой алгеброй*), если она удовлетворяет тождествам

$$V_{x,x} = V_{x^2}, \quad U_x V_x = V_x U_x, \quad U_x x^2 = (x^2)^2,$$
$$U_x U_y x^2 = (U_x y)^2, \quad U_{x^2} = U_x^2, \quad U_{U_x y} = U_x U_y U_x,$$

где $V_x y = x \circ y = (x+y)^2 - x^2 - y^2$, $x, y \in R$, и всем их линеариазациям. При этом (R, U) является тройной йордановой системой, $(R, U, {}^2)$ вкладывается как подалгебра в йорданову алгебру с единицей $(R^1 = F \oplus R, U^1)$, где

$$U^1_{f+x}(g+y) = f^2 g + 2fgx + gx^2 + f^2 y + fV_x y + U_x y \quad (f, g \in F,\ x, y \in R)$$

(см. [45, п. 9.6 и 10.1]). Элемент?x алгебры $(R, U, {}^2)$ называется *квазирегулярным*, если $1 - x$ — обратимый элемент алгебры (R^1, U^1), т. е. обратим оператор U^1_{1-x}. Последнее равносильно обратимости оператора $U^1_{1-x}|_R = \mathrm{Id}_R - V_x + U_x$. Внутренний идеал $(R, U, {}^2)$ называется *строго внутренним*, если он инвариантен относительно действия ${}^2\colon R \to R$ (он внутренний идеал (R^1, U^1)). Строго внутренний идеал I называется *x-модулярным*, $x \in R$, если $U^1_{1-x}(R) \subseteq I$, $U^1_{1-x,y}(R^1) \subseteq I$, $y \in I$, и $x - x^2 \in I$.

Для любых линейной тройной системы $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ над кольцом F и $a \in R$ линейную алгебру $R^{(a)} = (R, \cdot_a)$ с умножением $x \cdot_a y = \{x, a, y\}$, $x, y \in R$, мы будем называть *a-гомотопом* $(R, \{\ ,\ ,\ \})$.

Пусть (R, U) — тройная йорданова система над кольцом F. Ввиду [45, п. 10.1] ([41, п. 9.1]) и равенств

$$V_{x,y}^2 = U_{x,x} U_y + V_{x, U_y x} = 2U_x U_y + V_{U_x y, y},$$
$$[V_{x,y}, V_{\{x,y,x\}', y}] = 2[V_{x,y}, V_{U_x y, y}] = 4[U_x U_y, V_{x,y}] = 0 \quad (x, y \in R)$$

(см. [41, (JP9), (JP2), (JP1)]) каждому элементу $a \in R$ отвечают *квадратичный a-гомотоп* (*a-гомотоп*) (R, U) — йорданова алгебра $R^{(a)} = (R, U^{(a)}, {}^{2,a})$, $U^{(a)}\colon x \mapsto U^{(a)}_x = U_x U_a$, ${}^{2,a}\colon x \mapsto x^{2,a} = U_x a$, $x \in R$, и *линейный a-гомотоп* (R, U) (a-гомотоп $(R, \{\ ,\ ,\ \}')$) — линейная йорданова алгебра $R^{(a)} = (R, \cdot_a)$, в которой операторы умножения и квадратичного умножения на элемент $x \in R$ имеют вид

$$r^{(a)}_x = V_{x,a}, \quad U^{(a)}_x = 2(V^2_{x,a} - V_{U_x a, a}) = 4U_x U_a = \{x, \{a,\ , a\}', x\}'$$

(см. [41, (JP6), (JP2)]). Если $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ — линейная тройная йорданова система, удовлетворяющая всем тождествам тройных йордановых систем для композиции $\{\ ,\ ,\ \}$ (см. введение), то тройная йорданова система $\left(R, U'^{(a)}\right)$ a-гомотопа $R^{(a)}$ тройной йордановой системы (R, U') совпадает с тройной йордановой системой a-гомотопа $R^{(a)}$ линейной тройной йордановой системы $(R, \{\ ,\ ,\ \})$. В частности, это верно для линейных тройных йордановых систем без 6-кручения и линейных йордановых алгебр над кольцами с $1/2$ (см. также [6, с. 359, 360]).

Элемент x тройной йордановой системы (R, U) называется *собственно квазирегулярным*, если он квазирегулярен во всех её a-гомотопах $R^{(a)}$, $a \in R$, т. е. обратимы все операторы

$$T_{x,a} = \mathrm{Id}_R - V_x^{(a)} + U_x^{(a)} = \mathrm{Id}_R - V_{x,a} + U_x U_a \quad (a \in R),$$

где $V_x^{(a)} y = (x+y)^{2,a} - x^{2,a} - y^{2,a} = U_{x,y} a = V_{x,a} y$, $y \in R$. Если $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ — линейная тройная йорданова система с тождествами тройных йордановых систем для $\{\ ,\ ,\ \}$, то $V_{x,a} = 2\{x, a, \ \}$, $T_{x,a} = \mathrm{Id}_R - 2\{x, a, \ \} + \{x, \{a, \ , a\}, x\}$. Обратимость оператора $T_{x,a}$, $x, a \in R$, равносильна также его сюръективности (см. [41, п. 3.2; 45, п. 13.2]). Внутренний идеал I тройной йордановой системы (R, U) называется (x, a)-*модулярным*, $x, a \in R$, если I — x-модулярный идеал a-гомотопа $R^{(a)}$. Отметим, что такой идеал I является (z, a)-модулярным для всех $z = x^{n,a} + y$, $y \in I$, $n \geqslant 1$, где $x^{1,a} = x$, $x^{2,a} = U_x a$ и $x^{n+2,a} = U_x^{(a)} x^{n,a}$, $n \geqslant 1$, $I = R$, если и только если $x \in I$ (см. [36, предложения 2.10, 3.1; 44, лемма 5.1.2, с. 411]), $T_{x,a}(R) = U^{1^{(a)}}_{1^{(a)} - x}(R)$ — (z, a)-модулярный внутренний идеал для $z = 2x - x^{2,a}$, $x, a \in R$, $U^{1^{(a)}}_{1^{(a)} - x} = U^{(a)}{}^{1}_{1-x}$ (см. [36, пример 2.7; 41, (JP26); 45, (13.19)]).

Тройные йордановы системы, все элементы которых собственно квазирегулярны, называются *квазирегулярными*. Класс квазирегулярных тройных йордановых систем над кольцом F — радикальный подкласс класса всех тройных йордановых систем над F. Определяемый им нижний радикал (*квазирегулярный радикал тройных йордановых систем*) $\mathcal{J}$ является идеально наследственным. Радикал $\mathcal{J}(R)$ любой тройной йордановой системы (R, U) над F совпадает с множеством всех её собственно квазирегулярных элементов и пересечением квазирегулярных радикалов всех её a-гомотопов (линейных a-гомотопов, если $1/2 \in F$), $\mathcal{J}(R) = \bigcap\limits_{a \in R} \mathcal{J}(R^{(a)})$ [45, п. 13.3]. Кроме того, для любого $a \in R$

$$\mathcal{J}\big(R^{(a)}\big) = U_a^{-1}\big(\mathcal{J}(R)\big) = \{x \in R \mid x + K_a \in \mathcal{J}(R_a)\},$$

где $K_a = \{x \in R \mid U_a x = U_a U_x a = 0\}$ — идеал $R^{(a)}$, $R_a = R^{(a)}/K_a$ — *локальная алгебра* (R, U) *по* a, $K_a = \operatorname{Ker} U_a$ при выполнении любого из следующих условий: $1/2 \in F$; a *регулярен*, т. е. $a \in U_a R$; R невырожденна; R специальна или $*$-специальна (см. [25, предложение 1.2, теорема 2.1 (8); 41, п. 4.18 (3.5), 4.19, 4.20]).

Квазирегулярные радикалы йордановых (линейных йордановых) алгебр над кольцом F (с $1/2$) совпадают с квазирегулярными радикалами их тройных йордановых систем в примере 7 (см. [6, теорема 11, с. 373; 45, 13.4]).

Доказательство теоремы 4.1 из [36] (см. [44, теорема 5.3.1, с. 415]) переносится на тройные йордановы системы следующим образом.

Предложение 4.11. *Квазирегулярный радикал* $\mathcal{J}(R)$ *тройной йордановой системы* (R, U) *равен пересечению всех её максимальных* (x, a)*-модулярных* *внутренних идеалов (наибольших из входящих в них идеалов (R, U)), $x, a \in R$, при их наличии и R в противном случае.*

Доказательство. Если I — такой максимальный (x, a)-модулярный внутренний идеал тройной йордановой системы (R, U), что $\mathcal{J}(R) \not\subseteq I$, то $I + \mathcal{J}(R)$ — (x, a)-модулярный внутренний идеал (R, U), $I + \mathcal{J}(R) = R$, $x = y + z$, $y \in \mathcal{J}(R)$, $z \in I$, (y, a) — модуль I и $R = T_{y,a}(R) \subseteq I$?! Поэтому радикал $\mathcal{J}(R)$ входит в пересечение всех максимальных (x, a)-модулярных внутренних идеалов (R, U), $x, a \in R$, при их наличии.

Если $x \in R$ и $x^{2,a} \in \mathcal{J}(R)$ для всех $a \in R$, то $x \in \mathcal{J}(R)$, поскольку $T_{x,a}T_{-x,a} = T_{x^{2,a},a}$ (см. [41, (JP24)]). Следовательно, для любого $x \in R \setminus \mathcal{J}(R)$ найдутся $a, b \in R$, такие что $x^{2,a} \notin \mathcal{J}(R)$, $T_{x^{2,a},b}(R)$ — собственный (z, b)-модулярный внутренний идеал (R, U),

$$z = 2x^{2,a} - (x^{2,a})^{2,b} = U_x(2a - U_aU_xb).$$

Согласно лемме Цорна $T_{x^{2,a},b}(R) \subseteq M$ для некоторого максимального (z, b)-модулярного внутреннего идеала M, $z \notin M$ и $x \notin M$. Значит, $\mathcal{J}(R)$ равен либо R, либо пересечению всех максимальных (x, a)-модулярных внутренних идеалов (наибольших из входящих в них идеалов) (R, U), $x, a \in R$. $\square$

Пусть $(R^{\pm}, U^{\pm})$ — йорданова пара над кольцом F. Элемент $x^+ + x^-$ её тройной йордановой системы $(R^+ \oplus R^-, U)$, $x^{\pm} \in R^{\pm}$, собственно квазирегулярен, если для любых $a^{\pm} \in R^{\pm}$ оператор $T_{x^+ + x^-, a^+ + a^-}$,

$$T_{x^+ + x^-, a^+ + a^-} = T^+_{x^+, a^-}\pi^+ + T^-_{x^-, a^+}\pi^-,$$
$$T^{\pm}_{x^{\pm}, a^{\mp}} = \mathrm{Id}_{R^{\pm}} - V^{\pm}_{x^{\pm}, a^{\mp}} + U^{\pm}_{x^{\pm}}U^{\mp}_{a^{\mp}} \in \mathrm{End}_F(R^{\pm}),$$

обратим, т. е. обратимы операторы $T^{\pm}_{x^{\pm}, a^{\mp}}$. Последнее равносильно квазирегулярности $x^{\pm}$ в $a^{\mp}$-гомотопах $R^{\pm(a^{\mp})}$ йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$, где $R^{\pm(a^{\mp})} = \big(R^{\pm}, U^{\pm(a^{\mp})}, {}^{2,a^{\mp}}\big)$ — йорданова алгебра, $U^{\pm(a^{\mp})}\colon y \mapsto U^{\pm(a^{\mp})}_{y^{\pm}} = U^{\pm}_{y^{\pm}}U^{\mp}_{a^{\mp}}$, ${}^{2,a^{\mp}}\colon y^{\pm} \mapsto y^{\pm 2,a^{\mp}} = U^{\pm}_{y^{\pm}}a^{\mp}$, $y^{\pm} \in R^{\pm}$ (см. [41, п. 1.9]). Элемент $(x^{\pm})$ йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$, которому отвечает собственно квазирегулярный элемент $x^+ + x^-$ тройной йордановой системы $(R^+ \oplus R^-, U)$, называется *собственно квазирегулярным*.

Мы будем называть F-подмодуль $M \subseteq R^+ \oplus R^-$ однородным, если $M = M^+ \oplus M^-$, где $M^{\pm} = \pi^{\pm}(M)$ (см. замечание 4.8). Если I — внутренний идеал тройной йордановой системы $(R^+ \oplus R^-, U)$, то наибольший однородный подмодуль I — внутренний идеал $(R^+ \oplus R^-, U)$. Любой $(x^{\pm}, a^{\mp})$-модулярный внутренний идеал I, $x^{\pm}, a^{\pm} \in R^{\pm}$, однороден, $I^{\mp} = R^{\mp}$, так как $T_{x^{\pm}, a^{\mp}} = T^{\pm}_{x^{\pm}, a^{\mp}}\pi^{\pm} + \pi^{\mp}$.

Радикалу $\mathcal{J}$ тройной йордановой системы над кольцом F соответствует идеально наследственный радикал $\mathcal{J}$ йордановой пары над F (см. пример 12 (13)), который называется *квазирегулярным радикалом йордановой пары*. Радикал

$\mathcal{J}\big((R^{\pm})\big) = (\mathcal{J}(R^+ \oplus R^-)^{\pm})$ любой йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$ над F совпадает с множеством всех её собственно квазирегулярных элементов (см. замечание 4.8, [41, п. 4.1, 4.2]). Если $(R^{\pm}, U^{\pm})$ — йорданова пара тройной йордановой системы (R, U) над F, то $\mathcal{J}\big((R^{\pm})\big) = (\mathcal{J}(R)^{\pm})$, $\mathcal{J}(R)^{\pm} = \mathcal{J}(R)$. Поэтому радикал тройной йордановой системы $\mathcal{J}$ равен радикалу тройной йордановой системы, отвечающему радикалу йордановой пары $\mathcal{J}$ в примере 11 (13). Из доказательства предложения 4.11 (с учётом $T_{x^{\pm},a^{\mp}}T_{-x^{\pm},a^{\mp}} = T_{x^{\pm 2,a^{\mp}},a^{\mp}}$ и однородности $\mathcal{J}(R^+ \oplus R^-)$ и $T_{x^{\pm},a^{\mp}}(R^+ \oplus R^-) = T^{\pm}_{x^{\pm},a^{\mp}}(R^{\pm}) \oplus R^{\mp}$, $x^{\pm}, a^{\pm} \in R^{\pm}$) можно вывести следующий результат.

Предложение 4.12. *Квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(R^+ \oplus R^-)$ тройной йордановой системы $(R^+ \oplus R^-, U)$ йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$ равен пересечению всех её максимальных $(x^{\pm}, a^{\mp})$-модулярных внутренних идеалов (наибольших из входящих в них однородных идеалов $(R^+ \oplus R^-, U)$), $x^{\pm}, a^{\pm} \in R^{\pm}$, при их наличии и $R^+ \oplus R^-$ в противном случае.*

Отображение $(x^{\pm}) \mapsto x^+ + x^-$, $x^{\pm} \in R^{\pm}$, устанавливает биективное соответствие между внутренними идеалами (идеалами) йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$ и однородными внутренними идеалами (однородными идеалами) тройной йордановой системы $(R^+ \oplus R^-, U)$. Внутренний идеал $(I^{\pm})$ йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$ называется $(x^{\pm}, a^{\mp})$-*модулярным*, $x^{\pm}, a^{\pm} \in R^{\pm}$, если $I^+ + I^-$ — $(x^{\pm}, a^{\mp})$-модулярный внутренний идеал тройной йордановой системы $(R^+ \oplus R^-, U)$. Из предложения 4.12 сразу следует предложение 4.13.

Предложение 4.13. *Квазирегулярный радикал $\mathcal{J}\big((R^{\pm})\big)$ йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$ совпадает с пересечением всех её максимальных $(x^{\pm}, a^{\mp})$-модулярных внутренних идеалов (наибольших из входящих в них идеалов $(R^{\pm}, U^{\pm})$), $x^{\pm}, a^{\pm} \in R^{\pm}$, при их наличии и R в противном случае* (*см. также* [10, лемма JP2]).

Тройная йорданова система (R, U) (йорданова пара $(R^{\pm}, U^{\pm})$) называется *примитивной*, если она обладает максимальным (x, a)-модулярным ($(x^{\pm}, a^{\mp})$-модулярным) внутренним идеалом, не содержащим её ненулевых идеалов. Это равносильно наличию *примитивизатора* — такого собственного (x, a)-модулярного ($(x^{\pm}, a^{\mp})$-модулярного) внутреннего идеала I ($(I^{\pm})$), что $I + J = R$ для всех $\{0\} \neq J \lhd (R, U)$ ($I^{\pm} + J^{\pm} = R^{\pm}$ для всех $\{0\} \neq (J^{\pm}) \lhd (R^{\pm}, U^{\pm})$). Тройные йордановы системы (йордановы пары), отличные от своих квазирегулярных радикалов, являются подпрямыми произведениями примитивных тройных йордановых систем (йордановых пар) (см. предложения 4.11, 4.13). Поэтому по предложению 3.7 из [26] квазирегулярный радикал $\mathcal{J}$ тройной йордановой системы и йордановой пары — кручение, т. е. идеально наследственный специальный радикал.

Элемент x тройной йордановой системы (R, U) называется *абсолютным делителем нуля*, если $U_x = 0$. Абсолютные делители нуля йордановых (линейных йордановых) алгебр — абсолютные делители нуля их тройных йордановых систем. Элемент $(x^{\pm})$ йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$ называется абсолютным делителем нуля, если $x^+ + x^-$ — абсолютный делитель нуля её тройной йордановой системы $(R^+ \oplus R^-, U)$, т. е. $U^{\pm}_{x^{\pm}} = 0$. Тройные йордановы системы, йордановы (линейные йордановы) алгебры и йордановы пары, в которых нет ненулевых абсолютных делителей нуля, называются *невырожденными*.

Классы невырожденных тройных йордановых систем, йордановых (линейных йордановых) алгебр и йордановых пар над кольцом F (с $1/2$) — полупростые подклассы классов всех тройных йордановых систем, йордановых (линейных йордановых) алгебр и йордановых пар над F. Определяемые ими верхние радикалы мы будем называть *радикалами Маккриммона* тройных йордановых систем, *йордановых* (*линейных йордановых*) *алгебр*, йордановых пар и обозначать через Mc. Каждый радикал Mc идеально наследственный. Радикал $\mathrm{Mc}(R)$ любой тройной йордановой системы (R, U) над кольцом F равен объединению неубывающей цепи её идеалов $\{\mathrm{Mc}_\alpha(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$, построенной по аналогии с бэровской цепью идеалов для отображения $\mathrm{Mc}_1 \colon R \mapsto \mathrm{Mc}_1(R)$, где $\mathrm{Mc}_1(R)$ — идеал R, порождённый всеми её абсолютными делителями нуля,

$$\mathrm{Mc}_1(R) = \{x_1 + \ldots + x_k \mid k \geqslant 1,\ x_i \text{ — абсолютный делитель нуля } R\}.$$

Аналогичные факты справедливы для йордановых (линейных йордановых) алгебр и йордановых пар над F (с $1/2$) (см. [6, гл. 14, § 1; 41, п. 4.5—4.13; 45, п. 13.6, 13.7]). Радикалы Маккриммона йордановых (линейных йордановых) алгебр над F (с $1/2$) равны радикалам Маккриммона их тройных йордановых систем. Радикалы Маккриммона тройных йордановых систем и йордановых пар соответствуют друг другу в примерах 11, 12 (13), $\mathrm{Mc}\big((R^{\pm})\big) = (\mathrm{Mc}(R^+ \oplus R^-)^{\pm})$ для всех йордановых пар $(R^{\pm}, U^{\pm})$ (см. замечание 4.8) и $\mathrm{Mc}\big((R^{\pm})\big) = (\mathrm{Mc}(R)^{\pm})$, $\mathrm{Mc}(R)^{\pm} = \mathrm{Mc}(R)$, если $(R^{\pm}, U^{\pm})$ — йорданова пара тройной йордановой системы (R, U).

Радикал $\mathrm{Mc}(R)$ любой тройной йордановой системы (R, U) над кольцом F с $1/2$ совпадает с множеством всех $x \in R$, таких что любая цепь $\{x_i\}_{i \geqslant 0}$, $x_0 = x$, $x_{i+1} \in U_{x_i}(R)$, $i \geqslant 0$, содержит 0 (см. [13, теорема 1]). Поэтому

$$U_x\big(\mathrm{Mc}(R^{(x)})\big) \subseteq \mathrm{Mc}(R) \subseteq \bigcap_{a \in R} \mathrm{Mc}(R^{(a)}) \quad (x \in R),$$

$\mathrm{Mc}(R) = \bigcap\limits_{a \in R} \mathrm{Mc}\big(R^{(a)}\big)$, если существует $x \in R$, такой что $U_x(R) = R$. Из поэлементного описания Mc также следует, что он является кручением на классах тройных йордановых систем, йордановых (линейных йордановых) алгебр и йордановых пар над кольцами с $1/2$ (см. [13, теорема 3]).

Класс локально нильпотентных йордановых пар над кольцом F — радикальный подкласс класса всех йордановых пар над F (см. [8, теорема 4]). Определяемый им нижний радикал LN на классе всех йордановых пар над F (*локально нильпотентный радикал йордановых пар*) является кручением (см. [8, теорема 5; 41, п. 4.9; 27, следствие 3.11]). Существование локального нильпотентного радикала тройной йордановой системы LN можно вывести из рассуждений [8] или замечания 4.6 с учётом равносильности условий локальной нильпотентности тройной йордановой системы и её йордановой пары (тройной йордановой системы этой йордановой пары) (локальная нильпотентность тройной йордановой системы (йордановой пары) — это нильпотентность алгебр умножений их конечно порождённых подсистем (подпар)). Радикал тройных йордановых систем LN также является кручением (аналогично для йордановых пар с заменой [41, п. 4.9] на [45, п. 13.7]).

Элемент x тройной йордановой системы (R, U) называется *собственно ниль-элементом*, если операторы $U_x U_a$, $a \in R$, нильпотентны (x — ниль-элемент всех a-гомотопов $R^{(a)}$). Элемент $(x^{\pm})$ йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$ называется *собственно ниль-элементом*, если $x^{+} + x^{-}$ — собственно ниль-элемент её тройной йордановой системы $(R^{+} \oplus R^{-}, U)$, т. е. операторы $U^{\pm}_{x^{\pm}} U^{\mp}_{a^{\mp}}$, $a^{\mp} \in R^{\mp}$, нильпотентны ($x^{\pm}$ — ниль-элементы всех $a^{\mp}$-гомотопов $R^{\pm(a^{\mp})}$), и *ниль-элементом*, если оператор $U^{+}_{x^{+}} U^{-}_{x^{-}}$ нильпотентен. Тройные йордановы системы (йордановы пары) над кольцом F, состоящие из собственно ниль-элементов (*собственно ниль* тройные йордановы системы (йордановы пары)), формируют радикальный подкласс класса всех тройных йордановых систем (йордановых пар) над F. Класс собственно ниль йордановых пар совпадает с классом йордановых пар над F, состоящих из ниль-элементов (*ниль* йордановых пар). Нижний радикал $\mathcal{N}$, определяемый классом собственно ниль тройных йордановых систем (йордановых пар) над F (*собственно ниль-радикал* тройных йордановых систем (*ниль-радикал* йордановых пар)), является кручением. Радикал $\mathcal{N}(R)$ любой тройной йордановой системы (R, U) над F — наибольший из идеалов (R, U), состоящих из её собственно ниль-элементов,

$$\mathrm{Mc}(R) \subseteq \mathrm{LN}(R) \subseteq \mathcal{N}(R) \subseteq \mathcal{J}(R), \quad \mathcal{N}(R) \subseteq \bigcap_{a \in R} \mathcal{N}\bigl(R^{(a)}\bigr),$$

где $\mathcal{N}\bigl(R^{(a)}\bigr)$ — собственно ниль-радикал тройной йордановой системы $\bigl(R^{(a)}, U^{(a)}\bigr)$, если (R, U) — йорданова алгебра с единицей, $\mathcal{N}(R) = \bigcap_{a \in R} \mathcal{N}\bigl(R^{(a)}\bigr)$ — её верхний ниль-радикал (см. [45, п. 13.6, 13.7; 41, п. 3.8, 4.14—4.17; 27, следствие 3.11]; специальность $\mathcal{N}$ доказывается аналогично специальности верхнего ниль-радикала алгебр с ассоциативными степенями; для любых $x \in \mathrm{LN}(R)$, $a \in R$, подсистема, порождённая x и $U_a x$, нильпотентна, и потому $(U_x U_{U_a x})^k x = (U_x U_a)^{2k} x = x^{2k+1,a} = 0$ при некотором $k \geqslant 0$). Радикал йордановых пар $\mathcal{N}$ обладает сходными свойствами.

Локально нильпотентные и верхние ниль-радикалы йордановых (линейных йордановых) алгебр (над кольцами с 1/2) равны локально нильпотентным и собственно ниль-радикалам их тройных йордановых систем. Радикал тройных йордановых систем $\mathcal{T}$ и радикал йордановых пар $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} = \mathrm{LN}, \mathcal{N}$, соответствуют друг другу в примерах 11, 12 (13), значения $\mathcal{T}$ на йордановой паре и её тройной йордановой системе и $\mathcal{N}$ на тройной йордановой системе и её йордановой паре связаны так же, как и значения на них радикалов $\mathcal{J}$ и Mc.

Отмеченную выше связь между радикалами Джекобсона тройных йордановых систем и их гомотопов (тройных ассоциативных систем 1-го типа и их гомотопов (см. [46])) можно рассматривать в общем контексте соответствий между радикалами алгебр и линейных тройных систем. Последние устанавливает пример 2 и следующее замечание.

Замечание 4.14. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}$ — замкнутые относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классы линейных алгебр и линейных тройных систем над кольцом F, $R^{(a)} \in \mathfrak{M}$ для всех $(R, \{\ ,\ ,\ \}) \in \mathfrak{K}$, $a \in R$, $\mathcal{T}$ — радикал в смысле Куроша—Амицура на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$ — класс всех $(R, \{\ ,\ ,\ \}) \in \mathfrak{K}$, таких что $R = \mathcal{T}\big(R^{(a)}\big)$, $a \in R$. Тогда в случае если $R = \mathcal{T}\big(R^{(a')}\big)$ для любых $(R, \{\ ,\ ,\ \}) \in \mathfrak{L}$, $(R', \{\ ,\ ,\ \}) \in \mathfrak{K}$, $R \lhd (R', \{\ ,\ ,\ \})$, $a' \in R'$, $\mathfrak{L}$ — радикальный подкласс класса $\mathfrak{K}$.

Доказательство. Пусть класс $\mathfrak{L}$ удовлетворяет указанному условию, $(R, \{\ ,\ ,\ \}) \in \mathfrak{K}$, $\mathcal{T}'(R)$ — сумма всех идеалов алгебры R из $\mathfrak{L}$. Так как идеал $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ входит в $\mathfrak{L}$, если и только если он $\mathcal{T}$-радикален во всех её гомотопах, $\mathcal{T}'(R) \in \mathfrak{L}$, $\mathcal{T}'(R) \subseteq \bigcap\limits_{a \in R} \mathcal{T}\big(R^{(a)}\big)$. Любой гомоморфизм линейных тройных систем $\phi\colon R \to R'$ индуцирует эпиморфизмы алгебр $\psi_a\colon R^{(a)} \mapsto \psi(R)^{(\psi a)}$, $\operatorname{Ker}\psi_a = \operatorname{Ker}\psi^{(a)}$, $a \in R$. Значит, $\psi\big(\mathcal{T}'(R)\big) \subseteq \mathcal{T}'\big(\psi(R)\big)$, и в случае если $\operatorname{Ker}\psi \subseteq \mathcal{T}'(R)$, $\psi\big(\mathcal{T}'(R)\big) = \mathcal{T}'\big(\psi(R)\big)$, $\mathcal{T}'\big(R/\mathcal{T}'(R)\big) = \{0\}$. Поэтому $\mathcal{T}'\colon R \mapsto \mathcal{T}'(R)$, $(R, \{\ ,\ ,\ \}) \in \mathfrak{K}$, — радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ — класс $\mathcal{T}'$-радикальных линейных тройных систем. Отметим, что $\mathcal{T}'(R) = \bigcap\limits_{a \in R} \mathcal{T}(R^{(a)})$, если $\bigcap\limits_{a \in R} \mathcal{T}\big(R^{(a)}\big) \lhd (R, \{\ ,\ ,\ \})$, $\mathcal{T}$ — наследственный радикал. $\square$

Замечание 4.14 переносится на тройные йордановы системы и их линейные и квадратичные гомотопы (для классов $\mathfrak{M}$ линейных йордановых и йордановых алгебр).

Радикалы йордановых пар и алгебр Ли с конечной Λ-преградуировкой

Элемент x алгебры Ли L называется *оболочкой сэндвича*, если $\operatorname{ad}_x^2 = \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y \operatorname{ad}_x = 0$ для всех $y \in L$, где $\operatorname{ad}_x = l_x = [x,\ ]$, и *$n$-энгелевым*, $n \geqslant 1$, если $\operatorname{ad}_x^n = 0$. Алгебры Ли, не содержащие ненулевых оболочек сэндвичей, называются *невырожденными*. Для алгебр Ли без 2-кручения невырожденность равносильна отсутствию ненулевых 2-энгелевых элементов. *Радикалом Кострикина алгебры Ли L* называется наименьший идеал $K(L)$ среди всех идеалов L, фактор-алгебры по которым невырожденны. *Радикал Кострикина алгебр Ли* — отображение K, ставящее в соответствие алгебрам Ли над одним кольцом F их радикалы Кострикина (радикал Кострикина на классе алгебр Ли над F). Вопрос о радикальности K в смысле Куроша—Амицура на классе алгебр Ли над любым кольцом F остаётся открытым, но известно, что K — кручение, если F — алгебра над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ (см. [10, 34]).

Для любой алгебры Ли $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ с конечной Λ-преградуировкой положим

$$n(L) = \max_{\lambda,\alpha\in\operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}),\,\alpha\neq 0} \max\{k \geqslant 1 \mid \{\lambda, \lambda+\alpha, \ldots, \lambda+(k-1)\alpha\} \subseteq \subseteq \operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})\}.$$

Если $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — Λ-градуированная алгебра Ли, $x = x_{\lambda_1} + \ldots + x_{\lambda_n}$ — оболочка сэндвича L, $x_{\lambda_i} \in L_{\lambda_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$, $1 \leqslant i \neq i' \leqslant n$, λ_k — S_x-крайний элемент, $S_x = \{0\}\cup\{\lambda_i\}$, то x_{λ_k} — оболочка сэндвича L. Поэтому Λ-градуированная алгебра Ли невырожденна, если и только если она не содержит ненулевых однородных оболочек сэндвичей, её радикал Кострикина — наименьший среди её однородных идеалов, фактор-алгебры по которым невырожденны.

Предложение 4.15. *Пусть $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — алгебра Ли с конечной Λ-градуировкой над кольцом F с $1/6$. Тогда*

1) $\mathrm{Mc}_\Lambda(L) \subseteq K(L) + L_0$;
2) $\mathrm{Mc}_\Lambda(L) \subseteq K(L)$, *если $L = L_s$, где $L_s = \langle L_\lambda \mid 0 \neq \lambda \in \Lambda\rangle$;*
3) $K(L) \subseteq \mathrm{Mc}_\Lambda(L)$, *если F — алгебра над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, или $L = = \langle x \mid \mathrm{ad}_x^n = 0\rangle$ и $1/(2n-2)! \in F$ для некоторого $n \geqslant n(L)$.*

Доказательство. Радикал Маккриммона Mc линейной йордановой пары над кольцом F с $1/6$ — радикал Маккриммона их йордановой пары, радикал Mc_Λ — отвечающий ему однородный радикал алгебр Ли с конечной Λ-преградуировкой над F (см. пример 6 и лемму 4.2). Если $(x^\pm)$ — абсолютный делитель нуля йордановой пары $(M^+, M^-) = \mathrm{Mc}\big((M^+, M^-)\big)$, $x^\pm \in M^\pm = \mathrm{Mc}_\Lambda(L)_{\pm\alpha}$, $\alpha \in \operatorname{ex}(\{\mathrm{Mc}_\Lambda(L)_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, то $U^\pm_{x^\pm} y^\mp = -\mathrm{ad}^2_{x^\pm} y^\mp = 0$, $y^\pm \in M^\pm$, и значит, $x^\pm \in \in K\big(\mathrm{Mc}_\Lambda(L)\big) \subseteq K(L)$ (см. [10, лемма 4]; $M_\lambda = M \cap L_\lambda$ для любых $M \subseteq L$, $\lambda \in \Lambda$). Поэтому $\mathrm{Mc}_\Lambda(L) \subseteq K(L) + L_0$.

Если алгебра Ли L порождается подмодулями L_λ, $0 \neq \lambda \in \Lambda$, идеалы L, входящие в L_0, центральны, $\mathrm{Mc}_\Lambda\big(L/K(L)\big) \subseteq C\big(L/K(L)\big) = \{0\}$, $\mathrm{Mc}_\Lambda(L) \subseteq \subseteq K(L)$.

Обозначим через K (${}_{\mathrm{h}}K$) идеал алгебры Ли L, порождённый всеми её оболочками (однородными оболочками) сэндвичей. Если L порождается n-энгелевыми элементами и $1/(2n-2)! \in F$, то идеалами L являются те и только те подмодули L, которые инвариантны относительно действия всех её автоморфизмов $\exp(\mathrm{ad}_x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{\mathrm{ad}_x^i}{i!}$, $x \in L$, $\mathrm{ad}_x^n = 0$. Как следствие, в этом случае K — подалгебра, порождённая всеми оболочками сэндвичей L (*сэндвичева подалгебра* L).

Если $y = \sum\limits_{i=1}^{k} [y_{in_i}, [\ldots, [y_{i1}, y_i] \ldots]] \in K$, $y_i, y_{ij} \in L$, $\mathrm{ad}^2_{y_i} = 0$, $k \geqslant 1$, $n_i \geqslant 0$, F — алгебра над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, $F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$ — свободная алгебра Ли над F с множеством свободных порождающих

$$X = \{x', x'', x_i, x_{ij} \mid j = 1, \ldots, n_i,\ n_i \geqslant 1,\ i = 1, \ldots, k\},$$

I — идеал $F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$, порождённый $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathrm{ad}^2_{x_i}(F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle)$,

$$x=\sum_{i=1}^{k}\bigl[x_{in_i},[\ldots,[x_{i1},x_i]\ldots]\bigr],$$

то $(\mathrm{ad}^2_{\bar x}\,\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}^2_{\overline{x'}}\bar x})^q\overline{x''}=0$ для некоторого $q\geqslant 1$ (см. [5; 10, доказательство леммы 8]), $\bar u=u+I$, $u\in F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$, и значит, $(\mathrm{ad}^2_y\,\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}^2_z y})^q z'=0$, $z,z'\in K'$, где K' — любое скалярное расширение K. Если $y=\sum\limits_{i=1}^{k}y_i\in K$, $1/(2n-2)!\in F$, I — идеал $F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$, $X=\{x',x'',x_1,\ldots,x_k\}$, порождённый

$$\mathrm{ad}^n_{x'}(F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle)\cup\mathrm{ad}^n_{x''}(F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle)\cup\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{ad}^2_{x_i}(F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle),$$

$x=\sum\limits_{i=1}^{k}x_i$, то также можно найти $q\geqslant 1$, такой что $(\mathrm{ad}^2_{\bar x}\,\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}^2_{\overline{x'}}\bar x})^q\overline{x''}=0$ (см. [14]), и потому $(\mathrm{ad}^2_y\,\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}^2_z y})^q z'=0$, $z,z'\in K'$, $\mathrm{ad}^n_z=\mathrm{ad}^n_{z'}=0$ (y_i, $\bar u$ и K', как и ранее). Отсюда следует, что в условиях пункта 3) для любых $y^\pm\in K^\pm={}_{\mathrm{h}}K_{\pm\alpha}$, $\alpha\in\mathrm{ex}(\{{}_{\mathrm{h}}K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, можно подобрать $q(y^+,y^-)\geqslant 1$, при котором

$$U^{\pm(a^\mp)^{2q(y^+,y^-)}}_{y^\pm}b^\pm=\bigl(\mathrm{ad}^2_{y^\pm}\,\mathrm{ad}^2_{a^\mp}\bigr)^{2q(y^+,y^-)}b^\pm=\bigl(\mathrm{ad}^2_{y^\pm}\,\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}^2_{a^\mp}y^\pm}\bigr)^{q(y^+,y^-)}b^\pm=0,$$

$$U^{(a^++a^-)^{2q(y^+,y^-)}}_{y^++y^-}(b^++b^-)=0\quad(a^\pm,b^\pm\in K^\pm)$$

и, более того, $\bigl(\tilde U^{(a)}_{y^++y^-}\bigr)^{2q(y^+,y^-)}b=0$, $a,b\in\tilde K$, где $(K^+\oplus K^-,U)$ — тройная йорданова система йордановой пары (K^+,K^-), тройная йорданова система $(\tilde K,\tilde U)$ — любое её скалярное расширение. Поэтому $y^++y^-\in\mathrm{Mc}\bigl((K^+\oplus K^-)\bigr)$ (см. [13, лемма 2, теорема 1]), $K^+\oplus K^-=\mathrm{Mc}\bigl((K^+\oplus K^-)\bigr)$ и $(K^+,K^-)=\mathrm{Mc}\bigl((K^+,K^-)\bigr)$. Аналогичным образом доказывается Mc-радикальность всех крайних йордановой пары ненулевых однородных гомоморфных образов алгебры $({}_{\mathrm{h}}K,\{{}_{\mathrm{h}}K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$. Значит,

$${}_{\mathrm{h}}K=\mathrm{Mc}_\Lambda({}_{\mathrm{h}}K)\subseteq\mathrm{Mc}_\Lambda(L),\quad K(L)\subseteq\mathrm{Mc}_\Lambda(L).$$

Пункт 3) верен также для алгебры Ли $(L,\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ с конечной Λ-преградуировкой, так как Mc_Λ-полупростая алгебра Ли $L/\mathrm{Mc}_\Lambda(L)$ не содержит ненулевых однородных нильпотентных идеалов, имеет конечную градуировку и по доказанному невырожденна (см. [10, лемма 10], где условие $L=L_s$ существенно только для центральности идеалов, входящих в L_0). $\square$

Из пунктов 2), 3) предложения 4.15 и наблюдений перед замечанием 4.4 можно сразу вывести следствие.

Следствие 4.16. *Если* $\mathrm{TKK}(R^+, R^-) = (L, \{L_i\}_{|i|\leqslant 1})$, $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ — *линейная йорданова пара над кольцом* F *с* $1/6$, *то* $K(L) = \mathrm{Mc}_3(L) = L(L, M_{\pm 1})$, $\mathrm{Mc}\big((L_1, L_{-1})\big) = (M_1, M_{-1})$ (*см.* [34, предложение 2.7]).

Далее, LN_Λ, $\mathcal{N}_\Lambda$, $\mathcal{J}_\Lambda$ — однородные радикалы алгебр Ли с конечной Λ-преградуировкой над кольцом F с $1/6$, отвечающие радикалам йордановых пар (линейных йордановых пар) LN, $\mathcal{N}$, $\mathcal{J}$ (см. пример 6 и лемму 4.2). По определению $\mathrm{Mc}_\Lambda(L) \subseteq \mathrm{LN}_\Lambda(L) \subseteq \mathcal{N}_\Lambda(L) \subseteq \mathcal{J}_\Lambda(L)$ для любой алгебры Ли с конечной Λ-преградуировкой $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ над F.

Замечание 4.17. Если $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — невырожденная PI-алгебра Ли с конечной Λ-преградуировкой над кольцом F с $1/6$, то $\mathcal{N}_\Lambda(L) \subseteq L_0$.

Доказательство. Можно считать, что $L = \mathcal{N}_\Lambda(L)$ (см. [10, лемма 4]). Если существует $\alpha \in \mathrm{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, то йордановы (линейные йордановы) алгебры L по элементам подмодулей $L_{\pm\alpha}$ (локальные алгебры по ним тройной йордановой системы йордановой пары (линейной тройной йордановой системы линейной йордановой пары) $(L_\alpha, L_{-\alpha})$) являются ниль-полупростыми PI-алгебрами (см. [4, замечание 2.2; 9, теорема 4; 32, предложение 2.15; 33, предложение 4.2]). Так как $(L_\alpha, L_{-\alpha})$ $\mathcal{N}$-радикальна, они также являются ниль-алгебрами и равны нулю, $L_{\pm\alpha} \subseteq K(L) = \{0\}$ ($\mathrm{ad}_x^2 = 0$, $x \in L_{\pm\alpha}$)?! □

Следствие 4.18. *Если алгебра Ли* $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ *в третьем утверждении предложения* 4.15 — *PI-алгебра, то* $\mathrm{Mc}_\Lambda(L) = \mathrm{LN}_\Lambda(L) = \mathcal{N}_\Lambda(L)$. *В частности, радикалы* Mc_Λ, LN_λ *и* $\mathcal{N}_\Lambda$ *совпадают на классах PI-алгебр Ли с конечной* Λ*-преградуировкой над алгебрами над полями характеристики нуль.*

Замечание 4.19. Если $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — конечная невырожденная алгебра Ли с конечной Λ-преградуировкой над нётеровым кольцом Джекобсона F с $1/6$, то $\mathcal{J}_\Lambda(L) \subseteq L_0$.

Доказательство. Невырожденность и конечность над кольцом F идеалов алгебры Ли L позволяют считать, что $L = \mathcal{J}_\Lambda(L)$ (см. [10, лемма 4]). Если имеется $\alpha \in \mathrm{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, то йордановы алгебры L по элементам подмодулей $L_{\pm\alpha}$ конечны над F и $\mathcal{J}$-полупросты (см. следствие 3.3, [32, предложение 2.15]). Ввиду $\mathcal{J}$-радикальности йордановой пары $(L_\alpha, L_{-\alpha})$ они $\mathcal{J}$-радикальны и равны нулю, $L_{\pm\alpha} \subseteq K(L) = \{0\}$?! □

Элемент x алгебры Ли L над кольцом F называется *алгебраическим*, если для любого $y \in L$ можно подобрать многочлен

$$ {}_{x,y}f(t) = t^{n_{x,y}} + {}_{x,y}f_{n_{x,y}-1}t^{n_{x,y}-1} + \ldots + {}_{x,y}f_1 t \in F[t], \quad n_{x,y} \geqslant 1, $$

такой что ${}_{x,y}f(\mathrm{ad}_x)y = 0$. Мы будем называть Λ-преградуированную алгебру Ли $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ над F 0-*алгебраической*, если все элементы L_0 алгебраические.

Замечание 4.20. Если $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — невырожденная 0-алгебраическая PI-алгебра Ли с конечной Λ-преградуировкой над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2, 3$, то $\mathcal{J}_\Lambda(L) \subseteq L_0$.

Доказательство. Как и в замечании 4.19, мы можем считать, что $L = \mathcal{J}_\Lambda(L)$. Если имеется $\alpha \in \mathrm{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, то йордановы алгебры L по элементам подпространств $L_{\pm\alpha}$ $\mathcal{J}$-полупросты, так как они являются невырожденными алгебраическими линейными йордановыми PI-алгебрами и, следовательно, подпрямыми произведениями центральных простых $\mathcal{J}$-полупростых линейных йордановых PI-алгебр (см. [4, замечания 2.1, 2.2; 11, теорема 5, замечание 2.10; 33, предложение 4.2]). Вместе с тем они $\mathcal{J}$-радикальны, $L_{\pm\alpha} \subseteq K(L) = \{0\}$?! □

В замечании 4.17 (4.19, 4.20) $\mathcal{N}_\Lambda(L) = \{0\}$ ($\mathcal{J}_\Lambda(L) = \{0\}$), если $L = L_s$ (центральность идеалов $L = L_s$, входящих в L_0).

Следствие 4.21. *На классе 0-алгебраических PI-алгебр Ли с конечной Λ-преградуировкой над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$, радикалы Mc_Λ и $\mathcal{J}_\Lambda$ совпадают.*

Следствие 4.22. *Если простая невырожденная алгебра Ли без 6-кручения с конечной Λ-преградуировкой $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ над кольцом F содержит такой элемент $0 \neq x \in L_{\pm\alpha}$, $\alpha \in \mathrm{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, что её йорданова алгебра по нему $L_x \cong (L_\alpha \oplus L_{-\alpha})_x$ $\mathcal{J}$-полупроста, то L $\mathcal{J}_\Lambda$-полупроста.*

В следствии 4.22 простота алгебры Ли L гарантирует её невырожденность, если $L = \langle x \in L \mid \mathrm{ad}_x^n = 0\rangle$, $1/(2n-2)! \in F$ для некоторого $n \geqslant 1$, и, в частности, если L — $(2k+1)$-преградуированная алгебра, $1/(4k+1)! \in F$, $k \geqslant 1$ (см. [31, предложение 3.4.6, с. 72]). Йорданова алгебра L_x наследует невырожденность алгебры Ли L. Если L_x — PI-алгебра (L — PI-алгебра), F — поле, $\mathrm{char}\,F \neq 2, 3$, и F бесконечно, $|F| > \dim_F L_{\mp\alpha}$ ($x \in L_{\pm\alpha}$) или (и) L_x алгебраична над F, то L_x $\mathcal{J}$-полупроста (см. замечание 4.20, [33, предложение 4.2; 9, теорема 4; 44, теорема 3.2.2, с. 391]).

Пусть $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — алгебра Ли с конечной Λ-преградуировкой над кольцом F с $1/6$, $\alpha \in \mathrm{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, $\phi\colon \Lambda \to (\mathbb{Z}, +)$ — гомоморфизм групп Λ и $(\mathbb{Z}, +)$, такой что $\phi(\alpha) > |\phi(\beta)|$, $\pm\alpha \neq \beta \in \mathrm{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$. Мы будем называть однородную подалгебру I алгебры L её (α, ϕ)-*внутренним идеалом*, если

$$\big[[\ldots[L, I_{\lambda_1}], \ldots], I_{\lambda_k}\big] \subseteq I \quad (k \geqslant 1,\ \lambda_i \in \Lambda,\ |\phi(\lambda_1) + \ldots + \phi(\lambda_k)| > \phi(\alpha)),$$

где $I_\lambda = I \cap L_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ (I — внутренний идеал алгебры с конечной $\mathbb{Z}$-преградуировкой $(L, \{L_i\}_{i\in\mathbb{Z}})$, $L_i = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda,\ \phi(\lambda)=i} L_\lambda$, в смысле [12]). Для любых $x_{\pm\alpha} \in L_{\pm\alpha}$ положим

$$T'_{x_\alpha, x_{-\alpha}} = \mathrm{Id}_L - 2\,\mathrm{ad}_{x_\alpha}\mathrm{ad}_{x_{-\alpha}} + \mathrm{ad}_{x_\alpha}^2\,\mathrm{ad}_{x_{-\alpha}}^2 \in \mathrm{End}_F(L)$$

($T'_{x_\alpha, x_{-\alpha}} = T^+_{x^+, x^-} = \mathrm{Id}_{L^+} - 2\,\mathrm{ad}_{[x^+, x^-]}|_{L^+} + \mathrm{ad}_{x^+}^2\,\mathrm{ad}_{x^-}^2|_{L^+}$, $x^\pm = x_{\pm\alpha}$, $L^\pm = L_{\pm\alpha}$), $B_\lambda = \{0\}$ для $\lambda \notin \mathrm{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, $B_\alpha = T'_{x_\alpha, x_{-\alpha}}(L_\alpha)$ и для $\alpha \neq \lambda \in \mathrm{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$

$$B_\lambda = \sum_{\substack{\beta_i\in\Lambda,\ \phi(\beta_i)>0,\ i=1,\ldots,k,\\ \lambda=\alpha-\beta_1-\ldots-\beta_k}} \big[[\ldots[B_\alpha, L_{-\beta_1}], \ldots, L_{-\beta_k}\big] \quad (\phi(\lambda) \geqslant 0),$$

$B_\lambda = L_\lambda$, $\phi(\lambda) < 0$. По [12, лемма 5.4]

$$B(x_\alpha, x_{-\alpha}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \langle B_\alpha, L_\lambda, \lambda\in\Lambda, \phi(\lambda) < 0\rangle \text{ — }$$

(α,ϕ)-внутренний идеал (тождество Макдональда йордановой пары в доказательстве леммы 5.3 из [12] — (JP26) из [41]; $1/6 \in F$ можно заменить на отсутствие 6-кручения в L). $(B_\alpha, B_{-\alpha})$ и $(B_\alpha + Fy_\alpha, B_{-\alpha})$ — $(z_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярный и $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярный внутренние идеалы йордановой пары $(L_\alpha, L_{-\alpha})$, $z_\alpha = 2x_\alpha - x_\alpha^{2,x_{-\alpha}} = 2x_\alpha + \mathrm{ad}^2_{x_\alpha} x_{-\alpha}$, $y_\alpha = x_\alpha + \mathrm{ad}^2_{x_\alpha} x_{-\alpha}$, $B_\alpha = L_\alpha$, если и только если $B_\alpha + Fy_\alpha = L_\alpha$ (см. [36, замечания 2.8, 6.4]). Следуя [12], назовём (α,ϕ)-внутренний идеал I $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-*модулярным*, если $(I_\alpha, I_{-\alpha})$ — $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярный идеал $(L_\alpha, L_{-\alpha})$, $B(x_\alpha, x_{-\alpha}) \subseteq I$. В частности, $B(x_\alpha, x_{-\alpha})$ $(z_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярен, поскольку

$$\begin{aligned} T'_{z_\alpha, x_{-\alpha}}(L_\alpha) &= {U^{+(x_{-\alpha})}}^{1}_{1-z_\alpha}(L_\alpha) = \\ &= {U^{+(x_{-\alpha})}}^{1}_{{U^{+(x_{-\alpha})}}^{1}_{1-x_\alpha}1}(L_\alpha) = {T'_{x_\alpha, x_{-\alpha}}}^{2}(L_\alpha) \subseteq B_\alpha, \end{aligned}$$

$U^{+(x_{-\alpha})}\colon u_\alpha \mapsto U^{+(x_{-\alpha})}_{u_\alpha} = \mathrm{ad}^2_{u_\alpha}\mathrm{ad}^2_{x_{-\alpha}}$, $u_\alpha \in L_\alpha$. Назовём алгебру Ли $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ (α,ϕ)-*примитивной*, если L обладает максимальным $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярным (α,ϕ)-внутренним идеалом, не содержащим её ненулевых однородных идеалов, и α-*примитивной*, если йорданова пара $(L_\alpha, L_{-\alpha})$ примитивна с $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярным примитивизатором и $I_\alpha \neq \{0\}$ для любого однородного идеала $I \lhd L$. Если M — максимальный $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярный (α,ϕ)-внутренний идеал L, I — её однородный идеал, то (α,ϕ)-внутренний идеал $M+I$ $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярен и равен или M, или L, так как

$$(M+I)_\alpha = M_\alpha + I_\alpha + (M+I)'_\alpha, \quad (M+I)'_\alpha = (M+I)_\alpha \cap \biggl(\sum_{\alpha\neq\lambda\in\Lambda} L_\lambda\biggr),$$

идеал $\bigl((M+I)'_\alpha\bigr)_L$ нильпотентен, $(M+I)'_\alpha \subseteq M_\alpha$ (см. [10, доказательство п. (a) леммы 10], предложение 4.13),

$$\bigl((M+I)_\alpha, (M+I)_{-\alpha}\bigr) = (M_\alpha, M_{-\alpha}) + (I_\alpha, I_{-\alpha}) = (M_\alpha + I_\alpha, L_{-\alpha}) \text{ — }$$

$(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярный внутренний идеал $(L_\alpha, L_{-\alpha})$. Поэтому (α,ϕ)-примитивность L равносильна наличию у L примитивизатора — максимального $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярного (α,ϕ)-внутреннего идеала M, такого что $M + I = L$ для любого однородного идеала $\{0\} \neq I \lhd L$ (если L равна $L(\alpha,\phi) = \langle L_\alpha, L_\lambda, \lambda\in\Lambda, \phi(\lambda) < \lambda\rangle$, максимальность M можно опустить). Для данных α и ϕ обозначим через $\mathcal{M}_L(\alpha,\phi)$ множество всех максимальных $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярных (α,ϕ)-внутренних идеалов L, через $\hat{\mathcal{J}}_{\alpha,\phi}(L)$ — наибольший среди однородных идеалов L, входящих в $\mathcal{J}_{\alpha,\phi}(L)$, $\mathcal{J}_{\alpha,\phi}(L) = \bigcap_{M\in\mathcal{M}_L(\alpha,\phi)} M$, если $\mathcal{M}_L(\alpha,\phi) \neq \varnothing$, и $\mathcal{J}_{\alpha,\phi}(L) = L$ иначе.

Аналогичным образом можно определить (α,ϕ)-внутренние и $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярные идеалы любой S-преградуированной алгебры Ли $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in S})$, $0 \in S \subset \Lambda$, $|S| < \infty$, над кольцом F с $1/6$ для $\alpha \in E_S$, гомоморфизма

$\phi\colon \Lambda \to (\mathbb{Z},+)$, $\phi(\alpha) > |\phi(\beta)|$, $\pm\alpha \neq \beta \in S$, $x_{\pm\alpha} \in L_{\pm\alpha}$, и соответствующие условия примитивности.

Предложение 4.23. *Пусть* $L = L(\alpha,\phi)$, $\mathcal{J}\big((L_\alpha, L_{-\alpha})\big) = (J_\alpha, J_{-\alpha})$. *Тогда* $\mathcal{J}_{\alpha,\phi}(L)_\alpha \subseteq J_\alpha$ *и* $\hat{\mathcal{J}}_{\alpha,\phi}(L)$ *— наибольший из однородных идеалов* $I \lhd L$, $I_\alpha \subseteq J_\alpha$. *Если* $1/(2n(L)-2)! \in F$, *алгебра Ли* L (α,ϕ)*-примитивна с примитивизатором* M, *то* L α*-примитивна и* $(M_\alpha, M_{-\alpha})$ *— примитивизатор йордановой пары* $(L_\alpha, L_{-\alpha})$. *Если* L α*-примитивна,* M *—* $(x_\alpha, x_{-\alpha})$*-модулярный* (α,ϕ)*-внутренний идеал* L *и* $(M_\alpha, M_{-\alpha})$ *— примитивизатор* $(L_\alpha, L_{-\alpha})$, M *входит в некоторый* $(x_\alpha, x_{-\alpha})$*-модулярный примитивизатор* L (ср. с [12, леммы 6.2—6.4]).

Доказательство. Каждый оператор $T'_{v,w}|_{L_\alpha} \in \mathrm{End}_F(L_\alpha)$ с $v \in \mathcal{J}_{\alpha,\phi}(L)_\alpha = \mathcal{J}_{\alpha,\phi}(L) \cap L_\alpha$, $w \in L_{-\alpha}$ обратим, поскольку в противном случае $T'_{v,w}(L_\alpha) \neq L_\alpha$ для некоторых таких v и w, по лемме Цорна $(2v - v^{2,w}, w)$-модулярный (α,ϕ)-внутренний идеал $B(v,w) \neq L$ входит в некоторый максимальный $(2v - v^{2,w}, w)$-модулярный (α,ϕ)-внутренний идеал $M \subset L$ и $v \notin M$ (иначе $v \in M$, $v^{2,w} \in M$, $2v - v^{2,w} \in M$, $M_\alpha = L_\alpha$, $M = L(\alpha,\phi) = L$)?! Поэтому $\mathcal{J}_{\alpha,\phi}(L)_\alpha \subseteq J_\alpha$. Если $M \in \mathcal{M}_L(\alpha,\phi)$, I — однородный идеал алгебры L, $I_\alpha \subseteq J_\alpha$ и $I \not\subseteq M$, то $M + I$ — $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярный (α,ϕ)-внутренний идеал L, $M + I = L$, $M_\alpha + I_\alpha = L_\alpha$ (см. выше), и значит, $x_\alpha = y_\alpha + z_\alpha$, $y_\alpha \in M_\alpha$, $z_\alpha \in I_\alpha$, $(z_\alpha, x_{-\alpha})$ — модуль M, $L_\alpha = T'_{z_\alpha, x_{-\alpha}}(L_\alpha) \subseteq M$, $M = L(\alpha,\phi) = L$?! Следовательно, $I \subseteq \hat{\mathcal{J}}_{\alpha,\phi}(L)$.

Если L — (α,ϕ)-примитивная алгебра с примитивизатором $M \in \mathcal{M}_L(\alpha,\phi)$, I — её однородный идеал, $I_\alpha = \{0\} \neq I$, то, как и ранее, $M + I = L$, $M_\alpha = M_\alpha + I_\alpha = L_\alpha$, $M = L$?! Если $1/(2n(L)-2)! \in F$, $(M_\alpha, M_{-\alpha})$ — $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярный примитивизатор йордановой пары $(L_\alpha, L_{-\alpha})$ (см. [12, доказательство леммы 6.4; 10, лемма 14 и её следствие]). Если L α-примитивна, M — $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярный (α,ϕ)-внутренний идеал L, такой что $(M_\alpha, M_{-\alpha})$ — примитивизатор $(L_\alpha, L_{-\alpha})$, то $M \subseteq M'$ для некоторого $M' \in \mathcal{M}(\alpha,\phi)$ (существование M' следует из леммы Цорна и того, что $x_\alpha \notin M$), $I_\alpha \neq \{0\}$ для любого однородного идеала $\{0\} \neq I \lhd L$ и, как следствие, $M_\alpha + I_\alpha = L_\alpha$, $M' + I = L$. $\square$

В частности, если алгебра Ли $L = L(\alpha,\phi)$ Λ-градуирована,

$$\hat{\mathcal{J}}_{\alpha,\phi}(L) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}_L(\alpha,\phi)} \hat{M},$$

где $\hat{N}$ — наибольший среди однородных идеалов L, входящих в подмодуль $N \subseteq L$. При этом если $\hat{\mathcal{J}}_{\alpha,\phi}(L) = \{0\}$, L — подпрямое произведение своих (α,ϕ)-примитивных (α-примитивных, если $1/(2n(L)-2)! \in F$) фактор-алгебр.

Следствие 4.24. *Если* $(L, \{L_i\}_{|i|\leqslant 3})$ *— 3-преградуированная алгебра Ли над кольцом* F *с* $1/6$, $L_0 = [L_1, L_{-1}]$, *то* $\mathcal{J}_3(L) = \hat{J}$, $J = \mathcal{J}_{1,\phi}(L) \cap \mathcal{J}_{-1,\phi}(L)$, где $0 \neq \phi \in \mathrm{End}(\mathbb{Z})$.

Используя сильную первичность примитивных йордановых пар (см. [26, предложение 3.7]), утверждение 3) предложения 4.15 и идеальную наследственность радикала Маккриммона Mc йордановой пары, можно сделать следующее замечание.

Замечание 4.25. Если алгебра Ли L α-примитивна и удовлетворяет условиям утверждения 3) предложения 4.15, то L однородно сильно первична.

Однородная сильная первичность алгебры Ли L означает, что L невырожденна и любые два её ненулевых однородных идеала имеют ненулевое пересечение. В замечании 4.25 алгебра Ли $L = L_s$ также сильно первична (см. [10, лемма 10]).

Пусть G — группоид с нейтральным элементом e, I — однородный идеал G-преградуированной алгебры $(A, \{A_g\}_{g\in G})$, I_s и $I_{s,A}$ — подалгебра и идеал A, порождённые $\bigcup\limits_{e\neq g\in G} I_g$. Мы будем называть I *s-идеалом*, если $I = I_s$, и *сильным идеалом*, если $I = I_{s,A}$. Однородные гомоморфизмы алгебры A, ядра которых являются s-идеалами (сильными идеалами), мы будем называть s-гомоморфизмами (*сильными гомоморфизмами*).

Аналогично однородному радикалу можно определить s-радикал (сильный радикал) на замкнутом относительно взятия s-идеалов (сильных идеалов) и образов при действии s-гомоморфизмов (сильных гомоморфизмов) классе G-преградуированных алгебр над кольцом F, внеся необходимые изменения в определение радикала в смысле Куроша—Амицура.

Если I — однородный идеал Λ-преградуированной алгебры Ли $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, то $I_{s,L} = \sum\limits_{0\neq\lambda\in\Lambda}([I_\lambda, L_{-\lambda}] + I_\lambda)$, $I_s = I_{s,I} \lhd I_{s,L}$. Поэтому сильные радикалы Λ-преградуированных алгебр Ли являются их s-идеалами и, значит, s-радикалами.

Поскольку суммы s-идеалов, сильных и однородных идеалов G-преградуированных алгебр являются их s-идеалами, сильными и однородными идеалами соответственно, каждая Λ-преградуированная алгебра Ли $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ над кольцом F содержит вместе с любым из наибольших локально конечных идеалов (локально конечных над $I \lhd F$ (см. [2])), существующих во всех алгебрах Ли, $\mathcal{L}(L)$ наибольшие локально конечные s-идеал, сильный и однородный идеалы (наибольшие из таких идеалов L, входящих в $\mathcal{L}(L)$) $\mathcal{L}_s(L)$, $\mathcal{L}_{\mathrm{st}}(L)$ и $\mathcal{L}_{\mathrm{h}}(L)$, $\mathcal{L}_s(L) \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{st}}(L) \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{h}}(L) \subseteq \mathcal{L}(L)$. В частности, это верно для её наибольших локально нильпотентного и локально конечного и разрешимого идеалов $\mathrm{LN}(L)$ и $\mathrm{LSF}(L)$.

Если $\left|\mathrm{supp}\big(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\big)\right| < \infty$ и $1/n(L)! \in F$, $\mathrm{LN}_s(L) = \mathrm{LSF}_s(L)$ и $\mathrm{LN}_{\mathrm{st}}(L) = \mathrm{LSF}_{\mathrm{st}}(L)$ — наибольшие локально разрешимые s-идеал и сильный идеал L (см. [10, лемма 13 и следствие 2 из леммы 12]),

$$\mathrm{LN}_\star\big(L/\mathrm{LN}_\star(L)\big) = \{0\}, \quad \mathrm{LN}_{\mathrm{h}}\big(L/\mathrm{LN}_{\mathrm{st}}(L)\big) = \mathrm{LN}_{\mathrm{h}}\big(L/\mathrm{LN}_{\mathrm{st}}(L)\big)_0,$$

где $\star = s, \mathrm{st}$, и для $L = L_s$

$$\mathrm{LN}\big(L/\mathrm{LN}_{\mathrm{st}}(L)\big) \subseteq C\big(L/\mathrm{LN}_{\mathrm{st}}(L)\big) = C\big(L/\mathrm{LN}_{\mathrm{st}}(L)\big)_0, \quad \mathrm{LN}(L) = \mathrm{LN}_{\mathrm{h}}(L)$$

(см. [10, предложение 3]). Поэтому LN_s ($\mathrm{LN}_s\colon L \mapsto \mathrm{LN}_s(L)$) — s-радикал на классах алгебр Ли с конечной Λ-преградуировкой над алгебрами над полями характеристики нуль и S-преградуированных алгебр Ли, $0 \in S \subset \Lambda$, $|S| < \infty$, над кольцами с $1/n(S)!$, где $n(S)$ определяется аналогично $n(L)$ с заменой $\mathrm{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ на S.

Элемент x алгебры Ли L над кольцом F называется PK-*алгебраическим*, если для любого $y \in L$ подалгебра $\langle \mathrm{ad}_x^k y \mid k \geqslant 0\rangle$ конечно порождена (см. [2, 20]). Будем называть Λ-преградуированную алгебру Ли $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ над F 0-PK-*алгебраической*, если все элементы L_0 PK-алгебраические.

Предложение 4.26. *Если $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — 0-PK-алгебраическая алгебра Ли с конечной Λ-преградуировкой над кольцом F с $1/n(L)!$, то $\mathrm{LSF_h}(L)$ — наибольший локально разрешимый идеал L и $\mathrm{LSF_h}\bigl(L/\mathrm{LSF_h}(L)\bigr) = \{0\}$.*

Доказательство. Согласно [20] LSF — радикал в смысле Куроша—Амицура на классе PK-алгебраических алгебр Ли над любым кольцом, значения LSF на алгебрах из этого класса — их наибольшие локально разрешимые идеалы (см. также [2, теорема 2.1, замечание 1.4]). Так как $I_{s,L} \subseteq \mathrm{LN_{st}}(\bar L) = \{0\}$, $I = I_0$ для всех локально разрешимых однородных идеалов I алгебры Ли $\bar L = L/\mathrm{LN_{st}}(L)$, $\mathrm{LSF_h}(\bar L) = \mathrm{LSF_h}(\bar L)_0$ — наибольший локально разрешимый однородный идеал $\bar L$. Если A — прообраз $\mathrm{LSF_h}(\bar L)$ в алгебре Ли L, то, повторяя рассуждения [20], мы можем записать любую конечно порождённую подалгебру $B \subseteq A$ в виде $B = B' + B''$, где B' — конечно порождённый подмодуль B_0, B'' — конечно порождённая подалгебра $B \cap \mathrm{LN_{st}}(L)$, $B'' \lhd B$, и вывести отсюда конечность и разрешимость B. Поэтому $A = \mathrm{LSF_h}(L)$ — наибольший локально разрешимый однородный идеал L. Обозначим через C прообраз $\mathrm{LSF_h}\bigl(\bar L/\mathrm{LSF_h}(\bar L)\bigr)$ в $\bar L$. Поскольку сильный идеал $C_{s,\bar L}$ локально нильпотентен по модулю $\mathrm{LSF_h}(\bar L)$ и Λ-преградуировка $\bar L$ является её Λ-градуировкой (см. [10, лемма 10 (а)]), для любой конечно порождённой однородной подалгебры $D = D_s \subseteq C_{s,\bar L}$ можно выбрать $k \geqslant 1$, такое что $D^k \subseteq \mathrm{LSF_h}(\bar L)$, $D^{k+1} = 0$. Отсюда следует, что $C_{s,\bar L} \subseteq \mathrm{LN_{st}}(\bar L) = \{0\}$, $C = C_0$ и $C = \mathrm{LSF}(C)$ (см. выше и [10, лемма 13]), $C = \mathrm{LSF_h}(\bar L)$. Значит, $\mathrm{LSF_h}\bigl(L/\mathrm{LSF_h}(L)\bigr) \cong \mathrm{LSF_h}\bigl(\bar L/\mathrm{LSF_h}(\bar L)\bigr) = \{0\}$. Если J — локально разрешимый идеал $\bar L$, то

$$\Bigl(\bigcup_{0\neq\lambda}(J \cap \bar L_\lambda)\Bigr)_{\bar L} \subseteq \mathrm{LN_{st}}(\bar L) = \{0\}, \quad J = J_0 \subseteq \mathrm{LSF_h}(\bar L)$$

(см. [10, лемма 10 (б)] без условия $L = L_s$ с учётом того, что в доказательстве пункта (б) фактор-алгебра L по наибольшему из её идеалов, входящих в L_0, наследует отсутствие сильных нильпотентных идеалов (сильный идеал $I \lhd L$, нильпотентный по модулю L_0, нильпотентен, так как, если $I^k \subseteq L_0$ при некотором $k \geqslant 1$, $[I_\lambda, I^k] = \bigl[[I_\lambda, L_{-\lambda}], I^k\bigr] = \{0\}$, $0 \neq \lambda \in \Lambda$, $I^{k+1} = \{0\}$)). Таким образом, $\mathrm{LSF_h}(L)$ — наибольший локально разрешимый идеал L. □

Поэтому $\mathrm{LSF_h}$ — однородный радикал на классах 0-PK-алгебраических алгебр Ли с конечной Λ-преградуировкой над алгебрами над полями характеристики нуль и 0-РК-алгебраических S-преградуированных алгебр Ли, $0 \in S \subset \Lambda$, $|S| < \infty$, над кольцами с $1/n(S)!$.

Обозначим через $\mathrm{LN_h}$ нижний однородный радикал на классе Λ-преградуированных алгебр Ли $\mathfrak{L}_{\mathrm{pg},\Lambda}$ над кольцом F, определяемый классом локально нильпотентных алгебр из $\mathfrak{L}_{\mathrm{pg},\Lambda}$. В условиях утверждения 3) предложения 4.15 $K(L) \subseteq \mathrm{LN_h}(L) \subseteq \mathrm{LN}_\Lambda(L)$. Если $L = L_s$ — PI-алгебра, эти включения переходят в равенства (см. утверждение 2 предложения 4.15, следствие 4.18). Доказательство предложения 4.26, [10, наблюдения перед предложением 4 и лемма 10 (б)] позволяют сделать следующие замечания.

Замечание 4.27. Если $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — алгебра Ли с конечной Λ-преградуировкой над кольцом F с $1/n(L)!$, $L = L_s$, то $\mathrm{LN_h}(L)$ — прообраз в L центра $C(\bar{L})$ алгебры Ли $\bar{L} = L/\mathrm{LN_{st}}(L)$, алгебра Ли $L/\mathrm{LN_h}(L)$ не содержит ненулевых локально разрешимых идеалов.

Замечание 4.28. Если $(L, \{L_i\}_{|i|\leqslant 1})$ — 3-преградуированная алгебра Ли над кольцом F, $L = L_s$, то L нильпотентна (локально нильпотентна), если и только если такой является линейная йорданова пара (L_1, L_{-1}).

Доказательство. Если $X_{\pm1} \subseteq L_{\pm1}$, A — подалгебра L, порождённая $X_1 \cup X_{-1}$, и B — подпара (L_1, L_{-1}), порождённая X_1 и X_{-1}, то, выделив подмодули $X_{\pm1}(1) = FX_{\pm1}$,

$$X_{\pm1}(2k+1) = \big[[X_{\pm1}(2k-1), X_{\mp1}(1)], X_{\pm1}(1)\big] + \big[[X_{\mp1}(2k-1), X_{\pm1}(1)], X_{\pm1}(1)\big],$$
$$X_0(2k) = [X_1(2k-1), X_{-1}(1)] + [X_{-1}(2k-1), X_1(1)] \quad (k \geqslant 1),$$

мы можем записать m-е степени A^m и B^m, $m \geqslant 1$, в виде

$$A^m = A^m_1 + A^m_0 + A^m_{-1}, \quad B^m = (A^{2m-1}_1, A^{2m-1}_{-1}) \quad (m \geqslant 1),$$
$$A^m_i = \sum_{2k+|i|\geqslant m} X_i(2k+|i|) \subseteq A^m \cap L_i \quad (i = 0, \pm1)$$

(элементы алгебры Ли — суммы нормированных коммутаторов её порождающих). Как следствие, нильпотентность A равносильна нильпотентности B. $\square$

Следствие 4.29. *Линейная йорданова пара $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ над кольцом F нильпотентна (локально нильпотентна), если и только если такой является алгебра Ли $\mathrm{TKK}(R^+, R^-)$.*

Замечание 4.30. $\mathrm{LN}_3(L) = \mathrm{LN_h}(L)$ для любой линейной йордановой пары $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ над кольцом F с $1/6$, $\mathrm{TKK}(R^+, R^-) = (L, \{L_i\}_{|i|\leqslant 1})$, в алгебре Ли $L/\mathrm{LN}_3(L)$ нет ненулевых локально разрешимых идеалов.

Доказательство. Радикал $\mathrm{LN}_3(L)$ содержит конечный нормальный ряд однородных подалгебр с локально нильпотентными факторами

$$\{0\} \lhd \langle N_{\pm1}\rangle \lhd L(N_{\pm1}) \lhd \mathrm{LN}_3(L) = L(L, N_{\pm1}),$$

где $\mathrm{LN}\big((L_1, L_{-1})\big) = (N_1, N_{-1})$ (см. замечание 4.28, наблюдения перед замечанием 4.4 и пример 14). Нормальному ряду однородных подалгебр с локально нильпотентными факторами и достижимыми по ряду элементами

$\{M_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ радикала $\mathrm{LN}_\mathrm{h}(L)$ отвечает нормальный ряд подпар с локально нильпотентными факторами и достижимыми по ряду элементами $\{(M_\beta \cap L_1, M_\beta \cap L_{-1}) \mid \beta \leqslant \alpha\}$ идеала $(\mathrm{LN}_\mathrm{h}(L)_1, \mathrm{LN}_\mathrm{h}(L)_{-1})$ йордановой пары (L_1, L_{-1}), $\mathrm{LN}_\mathrm{h}(L)_{\pm 1} = \mathrm{LN}_\mathrm{h}(L) \cap L_{\pm 1}$. Поэтому

$$\mathrm{LN}\big((\mathrm{LN}_\mathrm{h}(L)_1, \mathrm{LN}_\mathrm{h}(L)_{-1})\big) = (\mathrm{LN}_\mathrm{h}(L)_1, \mathrm{LN}_\mathrm{h}(L)_{-1}), \quad \mathrm{LN}_3(L) = \mathrm{LN}_\mathrm{h}(L).$$

Отсутствие в алгебре $L/\mathrm{LN}_3(L)$ ненулевых локально разрешимых идеалов следует из замечания 4.27 (см. конец доказательства предложения 4.26). □

Интересным направлением дальнейших исследований может стать обобщение этих выводов на другие локально конечные радикалы.

Замечание 4.31. $\mathrm{RN}_3(L) = \mathrm{RN}_\mathrm{h}(L)$ для любой линейной йордановой пары $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ над кольцом F с $1/2$, $\mathrm{TKK}(R^+, R^-) = (L, \{L_i\}_{|i| \leqslant 1})$, где RN — нижний ниль-радикал линейной йордановой пары над F и RN_h — однородный нижний ниль-радикал 3-градуированных алгебр Ли над F.

Доказательство. Поскольку нормальному ряду однородных подалгебр с абелевыми факторами и достижимыми по ряду элементами $\{N_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ радикала $\mathrm{RN}_\mathrm{h}(L)$ отвечает нормальный ряд подпар с факторами с нулевыми композициями и достижимыми по ряду элементами $\{(N_\beta \cap L_1, N_\beta \cap L_{-1}) \mid \beta \leqslant \alpha\}$ идеала $(\mathrm{RN}_\mathrm{h}(L)_1, \mathrm{RN}_\mathrm{h}(L)_{-1})$ линейной йордановой пары (L_1, L_{-1}), $\mathrm{RN}_\mathrm{h}(L)_{\pm 1} = \mathrm{RN}_\mathrm{h}(L) \cap L_{\pm 1}$,

$$\mathrm{RN}\big((\mathrm{RN}_\mathrm{h}(L)_1, \mathrm{RN}_\mathrm{h}(L)_{-1})\big) = (\mathrm{RN}_\mathrm{h}(L)_1, \mathrm{RN}_\mathrm{h}(L)_{-1}), \quad \mathrm{RN}_\mathrm{h}(L) \subseteq \mathrm{RN}_3(L).$$

Если $\{(W^\pm_\tau) \mid \tau \leqslant \sigma\}$ — нормальный ряд подпар с факторами с нулевыми композициями и достижимыми по ряду элементами радикала $\mathrm{RN}\big((V^\pm)\big) = (W^\pm)$ линейной йордановой пары $(V^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ над кольцом F, то ряд подалгебр $\{M_\tau = \langle W^\pm_\tau \rangle \mid \tau \leqslant \sigma\}$ алгебры Ли $\mathrm{TKK}(W^+, W^-)$,

$$M_\tau \lhd L(W^\pm_\tau) \lhd L(M_{\tau+1}, W^\pm_\tau) \lhd M_{\tau+1} \quad (\tau < \sigma),$$

можно уплотнить подалгебрами $L(W^\pm_\tau)$ и $L(M_{\tau+1}, W^\pm_\tau)$ до нормального ряда однородных подалгебр с RN-радикальными факторами и достижимыми по ряду элементами и, как следствие, $(W^\pm) \subseteq \mathrm{RN}'_\mathrm{h}\big((V^+, V^-)\big)$, где RN'_h — радикал линейной йордановой пары над F, отвечающий радикалу RN_h в примере 14 (см. наблюдения перед ним). Поэтому

$$\mathrm{RN}_3(L) \subseteq \mathrm{RN}'_{\mathrm{h}3}(L) = \mathrm{RN}_\mathrm{h}(L) \subseteq \mathrm{RN}_3(L), \quad \mathrm{RN}_3(L) = \mathrm{RN}_\mathrm{h}(L)$$

(см. замечание 4.5). □

Центральные замыкания R-полупервичных йордановых систем и их алгебр Титса—Кантора—Кёхера

Введённые в [21] условия полупервичности и первичности алгебр сигнатуры Ω (далее условия R-полупервичности и R-первичности) совпадают с обычными вариантами этих условий в случае линейных алгебр и являются их ослабленной версией в общем случае. В частности, линейная тройная система $(R, \{\ ,\ ,\ \})$

над кольцом F называется *R-полупервичной*, если

$$\{I, I, R\} + \{I, R, I\} + \{R, I, I\} \neq \{0\} \quad (\{0\} \neq I \lhd R),$$

и *R-первичной*, если она R-полупервична и $I \cap J \neq \{0\}$ для всех $\{0\} \neq I, J \lhd R$, т. е.

$$\{I, J, R\} + \{J, I, R\} + \{I, R, J\} + \{J, R, I\} + \{R, I, J\} + \{R, J, I\} \neq \{0\} \qquad (\{0\} \neq I, J \lhd R).$$

Полупервичные линейные тройные системы (линейные тройные системы, не имеющие ненулевых идеалов с нулевой композицией) R-полупервичны, первичные линейные тройные системы (полупервичные линейные тройные системы с ненулевым пересечением любых двух ненулевых идеалов) R-первичны. Мы будем называть линейную пару $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ *R-полупервичной* (*R-первичной*), если такой является её линейная тройная система $(R^{+} \oplus R^{-}, \{\ ,\ ,\ \})$ (для $(R^{+} \oplus R^{-}, \{\ ,\ ,\ \})$ условия R-полупервичности и R-первичности равносильны данным условиям для её однородных идеалов). Вместе со стандартным первичным радикалом $\mathrm{Rad}(R)$ линейной тройной системы $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ можно определить её *R-первичный радикал* $\mathrm{Rad}_R(R)$, равный наименьшему из её идеалов, фактор-системы по которым R-полупервичны, пересечению всех её R-первичных идеалов и множеству всех $x \in R$, таких что любая цепь $\{x_i\}_{i \geqslant 0}$ с

$$x_0 = x, \ \ x_{i+1} \in (\{(x_i)_R, (x_i)_R, R\} + \{(x_i)_R, R, (x_i)_R\} + \{R, (x_i)_R, (x_i)_R\})_R \ \ (i \geqslant 0)$$

содержит 0. Аналогичным образом определяется R-первичные радикалы линейных пар и алгебр сигнатуры Ω.

По умолчанию во всех приводимых ниже утверждениях о центральном замыкании полупервичных линейных тройных систем речь идёт о ненулевых системах.

Центральное замыкание R-полупервичной линейной тройной системы $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ — R-полупервичная линейная тройная система $(P(R), \{\ ,\ ,\ \})$ над полупервичной коммутативной алгеброй над F (центроидом Мартиндейла R) $\mathrm{CM}(R) = \mathrm{End}_{M(R)'}\big(P(R)\big)$ с композицией $\{\ ,\ ,\ \}$, продолженной с R по $\mathrm{CM}(R)$-линейности, где $P(R)$ — квазиинъективная оболочка $M(R)'$-модуля R,

$$M(R)' = M(R) + F\,\mathrm{Id}_R, \quad M(R) = \langle \{x, y,\ \},\ \{x,\ , y\},\ \{\ , x, y\} \mid x, y \in R\rangle.$$

Если R R-первична, $\mathrm{CM}(R)$ — поле, $P(R)$ — R-первичная линейная тройная система над $\mathrm{CM}(R)$ (см. [21, лемма 3.1, предложения 3.1, 3.2, с. 42—44]).

Используя доказательство предложения 2.6 из [35], можно сделать следующее замечание.

Замечание 4.32. Если $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ — линейная йорданова пара над кольцом F, I — идеал алгебры Ли $\mathrm{TKK}(R^{+}, R^{-}) = \big(L, \{L_i\}_{|i| \leqslant 1}\big)$, I_i — проекция I на L_i, то $I' = I_1 \oplus I_0 \oplus I_{-1} \lhd L$, $(I_1, I_{-1}) \lhd (L_1, L_{-1}) = (R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ и

$$L(L, I_{\pm 1})^{(3)} \subseteq L(I_{\pm 1})^{(2)} \subseteq I \subseteq I' \subseteq L(L, I_{\pm 1}).$$

Доказательство. Так как $[I, L_i]_j = [I_{j-i}, L_i] \subseteq I_j$, $|i|, |j| \leqslant 1$, $I' \lhd L$, $(I_1, I_{-1}) \lhd (L_1, L_{-1})$ и $[L(L, I_{\pm 1}), L] \subseteq L(I_\pm) \subseteq I'$ (см. наблюдения перед примером 14). Кроме того,

$$\begin{aligned}
&\big[[I_{\pm 1}, I_{\mp 1}], L_{\pm 1}\big] = \big[[I_{\pm 1}, I], L_{\pm 1}\big] \subseteq I \cap L_{\pm 1},\\
&\big[[I_{\pm 1}, L_{\mp 1}], I_{\pm 1}\big] + I \subseteq \big[[I_0, L_{\mp 1}], I_{\pm 1}\big] + I \subseteq [I_1, I_{-1}] + I,\\
&([I_1, L_{-1}] + [I_{-1}, L_1])^2 + I \subseteq ([I_0, L_{-1}] + [I_0, L_1])^2 + I \subseteq\\
&\quad \subseteq (I_1 + I_{-1})^2 + I = [I_1, I_{-1}] + I,
\end{aligned}$$

и следовательно,

$$\begin{aligned}
&L(I_{\pm 1})^2 = \big(\big[[I_1, L_{-1}] + [I_{-1}, L_1], I_1\big]\big) \oplus ([I_1, I_{-1}] + ([I_1, L_{-1}] + [I_{-1}, L_1])^2) \oplus\\
&\quad \oplus \big(\big[[I_1, L_{-1}] + [I_{-1}, L_1], I_{-1}\big]\big) \subseteq [I_1, I_{-1}] + I,\\
&L(I_{\pm 1})^{(2)} \subseteq ([I_1, I_{-1}] + I)^2 \subseteq I. \qquad \square
\end{aligned}$$

Таким образом, в замечании 4.32 первичный радикал $\mathrm{Rad}(L)$ алгебры Ли L — однородный первичный радикал L (наименьший среди её однородных идеалов, фактор-алгебры по которым не содержат ненулевых однородных идеалов с нулевым умножением (однородно полупервичны)).

Теорема 4.33. *Линейная йорданова пара* $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ *над кольцом* F R*-полупервична* (R*-первична*), *если и только если алгебра Ли* $\mathrm{TKK}(R^+, R^-) = (L, \{L_i\}_{|i| \leqslant 1})$ *полупервична* (*первична*).

Доказательство. Если линейная йорданова пара $(L_1, L_{-1}) = (R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ R-полупервична и алгебра Ли L содержит однородный идеал I, $I^2 = \{0\}$, то $L(I_{\pm 1})^2 = \{0\}$ $(L(I_{\pm 1}) \subseteq I)$,

$$\begin{aligned}
&L(I_{\pm 1})^2_{\pm 1} = \big[[I_1, L_{-1}] + [I_{-1}, L_1], I_{\pm 1}\big] = \{0\},\\
&L(I_{\pm 1})^2_0 = [I_1, I_{-1}] + ([I_1, L_{-1}] + [I_{-1}, L_1])^2 = \{0\},
\end{aligned}$$

$I_1 \oplus I_{-1}$ — идеал линейной тройной йордановой системы $(L_1 \oplus L_{-1} = R^+ \oplus R^-,\ \{\ ,\ ,\ \})$, такой что

$$\begin{aligned}
&\{I_1 \oplus I_{-1}, I_1 \oplus I_{-1}, L_1 \oplus L_{-1}\} = \big[[I_1, I_{-1}], L_1\big] \oplus \big[[I_{-1}, I_1], L_{-1}\big] = \{0\},\\
&\{I_1 \oplus I_{-1}, L_1 \oplus L_{-1}, I_1 \oplus I_{-1}\} = \big[[I_1, L_{-1}], I_1\big] \oplus \big[[I_{-1}, L_1], I_{-1}\big] = \{0\},
\end{aligned}$$

и значит, $I_{\pm 1} = \{0\}$, $I = I_0 \subseteq L(L, \{0\}_{\pm 1}) = \{0\}$.

Если L полупервична, $J \lhd (L_1 \oplus L_{-1}, \{\ ,\ ,\ \})$, $J_{\pm 1}$ — проекции J на $L_{\pm 1}$ и

$$\begin{aligned}
&\{J, J, L_1 \oplus L_{-1}\} + \{J, L_1 \oplus L_{-1}, J\} =\\
&\quad = \big(\big[[J_1, J_{-1}], L_1\big] + \big[[J_1, L_{-1}], J_1\big]\big) \oplus \big(\big[[J_{-1}, J_1], L_{-1}\big] + \big[[J_{-1}, L_1], J_{-1}\big]\big) = \{0\},
\end{aligned}$$

то $(J_1, J_{-1}) \lhd (L_1, L_{-1})$,

$$\begin{aligned}
L(J_{\pm 1})^2_{\pm 1} &= \big[[J_1, L_{-1}] + [J_{-1}, L_1], J_{\pm 1}\big] =\\
&= \big[[J_{\mp 1}, L_{\pm 1}], J_{\pm 1}\big] = \big[[J_{\mp 1}, J_{\pm 1}], L_{\pm 1}\big] = \{0\},
\end{aligned}$$

$L(J_{\pm1})^2 = L(J_{\pm1})^2_0 \subseteq L(L, \{0\}_{\pm1}) = \{0\}$, $L(J_{\pm1}) = \{0\}$, $J = \{0\}$ (см. замечания 4.32, 4.8).

Поэтому R-полупервичность (L_1, L_{-1}) равносильна полупервичности (однородной полупервичности) L.

Если (L_1, L_{-1}) R-первична и имеются идеалы $\{0\} \neq M, N \lhd L$, $M \cap N = \{0\}$, то из полупервичности L и замечания 4.32 следует, что существуют однородные идеалы $\{0\} \neq A, B \lhd L$, $A \subseteq M$, $B \subseteq N$, $A \cap B = \{0\}$. Так как $(L_1 \oplus L_{-1}, \{\ ,\ ,\ \})$ R-первична и $A'' = A_1 \oplus A_{-1}$, $B'' = B_1 \oplus B_{-1} \lhd (L_1 \oplus L_{-1}, \{\ ,\ ,\ \})$, $A'' \cap B'' = \{0\}$, A'' или (и) B'' равен нулю, т. е. $A \subseteq L(L, \{0\}_{\pm1}) = \{0\}$ или (и) $B \subseteq L(L, \{0\}_{\pm1}) = \{0\}$?!

Если L первична и существуют идеалы $\{0\} \neq C, D \lhd (L_1 \oplus L_{-1}, \{\ ,\ ,\ \})$, $C \cap D = \{0\}$, то

$$\{X, Y, L_1 \oplus L_{-1}\} = \big[[X_1, Y_{-1}], L_1\big] \oplus \big[[X_{-1}, Y_1], L_{-1}\big] = \{0\},$$
$$\{X, L_1 \oplus L_{-1}, Y\} = \big[[X_1, L_{-1}], Y_1\big] \oplus \big[[X_{-1}, L_1], Y_{-1}\big] = \{0\},$$

где $X = C, D$, $Y \in \{C, D\} \setminus \{X\}$, и, как следствие,

$$\begin{aligned}
&[L(C_{\pm1}), L(D_{\pm1})]_{\pm1} = \\
&\quad = \big[[C_1, L_{-1}] + [C_{-1}, L_1], D_{\pm1}\big] + \big[[D_1, L_{-1}] + [D_{-1}, L_1], C_{\pm1}\big] = \\
&\quad = \big[[C_{\mp1}, L_{\pm1}], D_{\pm1}\big] + \big[[D_{\mp1}, L_{\pm1}], C_{\pm1}\big] = \\
&\quad = \big[[C_{\pm1}, D_{\mp1}] + [D_{\pm1}, C_{\mp1}], L_{\pm1}\big] = \{0\},
\end{aligned}$$

$[L(C_{\pm1}), L(D_{\pm1})] = [L(C_{\pm1}), L(D_{\pm1})]_0 \subseteq L(L, \{0\}_{\pm1}) = \{0\}$, $L(C_{\pm1}) = \{0\}$, $C = \{0\}$ или (и) $L(D_{\pm1}) = \{0\}$, $D = \{0\}$?!

Таким образом, R-первичность (L_1, L_{-1}) эквивалентна первичности L. □

Следствие 4.34. $\mathrm{Rad}(L) = L(L, T_{\pm1})$, $\mathrm{Rad}_R\big((L_1, L_{-1})\big) = (T_1, T_{-1})$ *для любой линейной йордановой пары* $(R^{\pm}, \{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ *над кольцом* F, $\mathrm{TKK}(R^+, R^-) = \big(L, \{L_i\}_{|i| \leqslant 1}\big)$, *где* Rad_R — *R-первичный радикал линейной йордановой пары над* F. *Кроме того,* $I = L(L, I_{\pm1})$ *для всех* $I \lhd L$, $\mathrm{Rad}(L/I) = \{0\}$,

$$\mathrm{Spec}(L) = \big\{P = L(L, P_{\pm1}) \mid (P_1, P_{-1}) \in \mathrm{Spec}_R\big((L_1, L_{-1})\big)\big\},$$

где $\mathrm{Spec}_R\big((L_1, L_{-1})\big)$ — *множество всех R-первичных идеалов* (L_1, L_{-1}).

Доказательство. Согласно замечанию 4.32 и теореме 4.33 $I = L(L, I_{\pm1})$ для любого $I \lhd L$, $\mathrm{Rad}(L/I) = \{0\}$, линейная йорданова пара $(L_1, L_{-1})/(J_1, J_{-1})$, $(J_1, J_{-1}) \lhd (L_1, L_{-1})$, R-полупервична (R-первична), если и только если алгебра Ли $L/L(L, J_{\pm1}) \cong \mathrm{TKK}\big((L_1, L_{-1})/(J_1, J_{-1})\big)$ полупервична (первична) (см. наблюдения перед примером 14). □

Предложение 4.35. *Если* $(R, \{\ ,\ ,\ \})$ — *R-полупервичная линейная тройная йорданова система с единицей* 1 *над кольцом* F, *то* $P\big(\mathrm{TKK}(R)\big) \cong \mathrm{TKK}\big(P(R)\big)$, $\mathrm{CM}\big(\mathrm{TKK}(R)\big) \cong \mathrm{CM}(R)$.

Доказательство. Ввиду R-полупервичности линейной тройной йордановой системы $(R,\{\ ,\ ,\ \})$ и наличия в ней 1, $\{1,\ ,1\}=\mathrm{Id}_R$, её линейная йорданова пара $(R^{\pm},\{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ R-полупервична, алгебра Ли $\mathrm{TKK}(R)$ полупервична (см. замечание 4.9, теорему 4.33). Отождествим алгебру $\mathrm{TKK}(R)=\bigl(L,\{L_i\}_{|i|\leqslant 1}\bigr)$ с F-подалгеброй алгебры $\mathrm{TKK}\bigl(P(R)\bigr)=\bigl(\bar L,\{\bar L_i\}_{|i|\leqslant 1}\bigr)$, её алгебру умножений с единицей $\mathrm{Ad}(L)'=M(L)'$ — с F-подалгеброй $A=\mathrm{Ad}^{\bar L}(L)+F\,\mathrm{Id}_{\bar L}$ алгебры $\mathrm{Ad}(\bar L)'$, $\bar L=\mathrm{CM}(R)L$, $\bar L_i=\mathrm{CM}(R)L_i$. Если M — A-подмодуль $\bar L$, то $M=M_1\oplus M_0\oplus M_{-1}$, $M_i=M\cap\bar L_i$, где $M_{\pm1}=\Bigl[\Bigl[\bigl[[M,e_{\mp1}],e_{\mp1}\bigr],e_{\pm1}\Bigr],e_{\pm1}\Bigr]$ — $M^{P(R)}(R)$-подмодули $P(R)=\bar L_{\pm1}$, $e_{\pm1}=1\in L_{\pm1}$, $\bigl[[M_{\pm1},e_{\mp1}],e_{\mp1}\bigr]\subseteq M_{\mp1}$, $M'=M_{\pm1}$. Поскольку

$$L(M_{\pm1},L)\subseteq M\subseteq L(\bar L,M_{\pm1},L),\quad [L_0(\bar L,M_{\pm1},L),L_0]\subseteq L_0(M_{\pm1},L),$$
$$L(M_{\pm1},L)=M_1\oplus L_0(M_{\pm1},L)\oplus M_{-1},\quad L(\bar L,M_{\pm1},L)=M_1\oplus L_0(\bar L,M_{\pm1},L)\oplus M_{-1},$$
$$L_0(M_{\pm1},L)=[M_1,L_{-1}]+[M_{-1},L_1],\quad L_0(\bar L,M_{\pm1},L)=\{x\in\bar L_0\mid [x,L_{\pm1}]\subseteq M_{\pm1}\},$$

в случае если $M\neq\{0\}$, $M'\neq\{0\}$, $M'\cap R\neq\{0\}$ и $M\cap L\neq\{0\}$. Каждый гомоморфизм A-модулей $\psi\colon M\to\bar L$ индуцирует гомоморфизм $M^{P(R)}(R)$-модулей $\psi'\colon M'\to P(R)$, $\psi'=\psi|_{M_{\pm1}}$, $\psi(M_0)\subseteq\bar L_0$, так как $\psi(M_{\pm1})=\Bigl[\Bigl[\bigl[[\psi(M),e_{\mp1}],e_{\mp1}\bigr],e_{\pm1}\Bigr],e_{\pm1}\Bigr]\subseteq\bar L_{\pm1}$,

$$\psi|_{M_{\mp1}}\bigl[[x_{\pm1},e_{\mp1}],e_{\mp1}\bigr]=\bigl[[\psi|_{M_{\pm1}}x_{\pm1},e_{\mp1}],e_{\mp1}\bigr]\quad(x_{\pm1}\in M_{\pm1}),$$

и если $\psi x_0=y_1+y_0+y_{-1}$, $x_0\in M_0$, $y_i\in\bar L_i$,

$$0=\psi\bigl[[x_0,e_{\mp1}],e_{\mp1}\bigr]=\bigl[[\psi x_0,e_{\mp1}],e_{\mp1}\bigr]=\bigl[[y_{\pm1},e_{\mp1}],e_{\mp1}\bigr]=y_{\pm1}.$$

Гомоморфизм ψ' продолжается до эндоморфизмов $\psi''\in\mathrm{CM}(R)=$ $=\mathrm{End}_{M^{P(R)}(R)}\bigl(P(R)\bigr)$ и $\overline{\psi''}\in\mathrm{End}_A(\bar L)$,

$$\overline{\psi''}\colon x_1+\sum_{k=1}^{m}[x_1(k),x_{-1}(k)]+x_{-1}\mapsto\psi''x_1+\sum_{k=1}^{m}[\psi''x_1(k),\psi''x_{-1}(k)]+\psi''x_{-1},$$

$x_{\pm1},x_{\pm1}(k)\in\bar L_{\pm1}$, $\psi''\colon\bar L_{\pm1}\to\bar L_{\pm1}$ (см. наблюдения перед примером 14). По построению для всех $x_i\in M_i$, $y_{\pm1}\in L$

$$\overline{\psi''}x_{\pm1}=\psi x_{\pm1},\quad \overline{\psi''}[x_0,y_{\pm1}]=\bigl[\overline{\psi''}x_0,y_{\pm1}\bigr]=\psi[x_0,y_{\pm1}]=[\psi x_0,y_{\pm1}],$$

$\overline{\psi''}|_M=\psi$. Таким образом, $\bar L$ — квазиинъективная оболочка A-модуля ($\mathrm{Ad}(L)'$-модуля) L, $\mathrm{End}_A(\bar L)\cong\mathrm{CM}(R)$ ($\psi\mapsto\psi'$, $\psi=\overline{\psi'}\in\mathrm{End}_A(\bar L)$). $\square$

Следствие 4.36. *Для R-полупервичной линейной тройной йордановой системы $(R,\{\ ,\ ,\ \})$ с 1 над кольцом F специальность алгебры Ли $\mathrm{TKK}(R)$ равносильна $\sup\limits_{R\neq P\in\mathrm{Spec}_R(R)}\dim_{\mathrm{CM}(R/P)}P(R/P)<\infty$, для R-первичной $(R,\{\ ,\ ,\ \})$ специальность $\mathrm{TKK}(R)$ равносильна $\dim_{\mathrm{CM}(R)}P(R)<\infty$, где $\mathrm{Spec}_R(P)$ — множество всех R-первичных идеалов R.*

Доказательство. Из следствия 4.34 и доказательства предложения 4.35 следует, что
$$\mathrm{Spec}(L) = \{L(L, P_{\pm1}) \mid P = P_{\pm1} \in \mathrm{Spec}_R(R)\},$$
$\mathrm{TKK}(R) = \bigl(L, \{L_i\}_{|i|\leqslant 1}\bigr)$. Для первичной алгебры Ли L специальность равносильна
$$\dim_{\mathrm{CM}(L)} P(L) = \dim_{\mathrm{CM}(R)} \mathrm{TKK}\bigl(P(R)\bigr) < \infty,$$
для полупервичной L —
$$\sup_{L\neq P\in \mathrm{Spec}(L)} \dim_{\mathrm{CM}(L/P)} P(L/P) = \sup_{R\neq P\in \mathrm{Spec}_R(R)} \dim_{\mathrm{CM}(R/P)} \mathrm{TKK}\bigl(P(R/P)\bigr) < \infty$$
(см. замечание 3.5 и [1; 4, наблюдения перед замечанием 3.3; 18; 48]). $\square$

Для простоты мы определим понятия градуированных центрального замыкания и центроида Мартиндейла для случая градуированной полупервичной линейной алгебры (градуированные алгебры сигнатуры Ω рассматриваются аналогично).

Пусть Γ — абелева группа в аддитивной записи, $(R, \{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$ — Γ-градуированная однородно полупервичная алгебра над кольцом F, $(M(R)', \{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$ — Γ-градуированная алгебра умножений с единицей R, $M_0 = F\,\mathrm{Id}_R + M(R)_0$, $M_\gamma = M(R)_\gamma$, $0\neq\gamma\in\Gamma$, где
$$M(R)_\alpha = \biggl\{\sum_{k=1}^{m} t_{k1}\cdots t_{kn_k} \biggm| t_{ki}\in\{l_{x_{ki}}, r_{x_{ki}}\},\ x_{ki}\in R_{\gamma_{ki}},\ \sum_{i=1}^{n_k}\gamma_{ki}=\alpha,\ m, n_k\geqslant 1\biggr\} \qquad (\alpha\in\Gamma),$$
$Q_{\mathrm{gr}}(R)$ — градуированная инъективная оболочка Γ-градуированного $M(R)'$-модуля R, $P_{\mathrm{gr}}(R) = \mathrm{End}_{M(R)'\text{-}\mathrm{gr}}\bigl(Q_{\mathrm{gr}}(R)\bigr)R$ — его градуированная квазиинъективная оболочка в $Q_{\mathrm{gr}}(R)$ ($M(R)'$-подмодуль $Q_{\mathrm{gr}}(R)$, порождённый образами R при действии однородных $M(R)'$-эндоморфизмов $Q_{\mathrm{gr}}(R)$), $\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(R) = \mathrm{End}_{M(R)'\text{-}\mathrm{gr}}\bigl(P_{\mathrm{gr}}(R)\bigr)$ — алгебра однородных $M(R)'$-эндоморфизмов $P_{\mathrm{gr}}(R)$ (ограничений однородных $M(R)'$-эндоморфизмов $Q_{\mathrm{gr}}(R)$ на $P_{\mathrm{gr}}(R)$; однородный гомоморфизм Γ-градуированных $M(R)'$-модулей $\phi\colon A\to B$ с Γ-градуировками $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ и $\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — такой их $M(R)'$-гомоморфизм, что $\phi(A_\gamma)\subseteq B_\gamma$, $\gamma\in\Gamma$; компоненты Γ-градуировок модулей над F-алгебрами — их F-подмодули) (см. [47, с. 21, 283]). $P_{\mathrm{gr}}(R)$ имеет Γ-градуировку $\{\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(R)R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ и с точностью до однородного $M(R)'$-изоморфизма определяется следующими свойствами:

1) R — существенный однородный $M(R)'$-подмодуль (имеет ненулевые пересечения со всеми ненулевыми однородными $M(R)'$-подмодулями) $P_{\mathrm{gr}}(R)$;
2) любой однородный гомоморфизм $\phi\colon M\to P_{\mathrm{gr}}(R)$ однородного $M(R)'$-подмодуля M в $P_{\mathrm{gr}}(R)$ продолжается до однородного эндоморфизма $P_{\mathrm{gr}}(R)$.

Из доказательств (с необходимыми изменениями) леммы 3.1 и предложений 3.1, 3.2 из [21, с. 42—44] следует коммутативность F-алгебры $\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(R)$, позволяющая наделить $P_{\mathrm{gr}}(R)$ структурой Γ-градуированной $\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(R)$-алгебры с умножением, продолженным с R по $\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(R)$-линейности,

$$\Big(\sum_{i\geqslant 1}\phi_i x_i\Big)\Big(\sum_{j\geqslant 1}\psi_j y_j\Big)=\sum_{i,j\geqslant 1}(\phi_i\psi_j)(x_i y_j)\quad (x_i,y_j\in R,\ \phi_i,\psi_j\in \mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(R)),$$

полупервичность $\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(R)$, однородная полупервичность $P_{\mathrm{gr}}(R)$ и то, что для однородно первичной R (произведение любых двух ненулевых однородных идеалов R отлично от нуля) $\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(R)$ — поле, $P_{\mathrm{gr}}(R)$ — однородно первичная алгебра над $\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(R)$.

Алгебры $P_{\mathrm{gr}}(R)$ и $\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(R)$ называются *градуированным центральным замыканием* и *градуированным центроидом Мартиндейла* алгебры R. Применяя эти конструкции к 3-градуированной алгебре Ли $\mathrm{TKK}(R^+,R^+)$ линейной йордановой пары $(R^{\pm},\{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$, мы получаем следующее предложение.

Предложение 4.37. *Если $\Pi=(R^{\pm},\{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ — R-полупервичная линейная йорданова пара над кольцом F, $\Sigma=(R^+\oplus R^-,\{\ ,\ ,\ \})$ — её линейная тройная йорданова система, то*

$$P_{\mathrm{gr}}\big(\mathrm{TKK}(\Pi)\big)\cong \mathrm{TKK}(\bar\Pi),\quad \mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}\big(\mathrm{TKK}(\Pi)\big)\cong \mathrm{CM}(\Sigma),$$

где $\bar\Pi=(\mathrm{CM}(\Sigma)R^{\pm},\{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ — подпара линейной йордановой пары $(P(\Sigma)^{\pm},\{\ ,\ ,\ \}^{\pm})$ линейной тройной йордановой системы $P(\Sigma)$.

Доказательство. По теореме 4.33 алгебра Ли $\mathrm{TKK}(\Pi)$ полупервична. Отождествим алгебру $\mathrm{TKK}(\Pi)=\big(L,\{L_i\}_{|i|\leqslant 1}\big)$ с F-подалгеброй алгебры $\mathrm{TKK}(\bar\Pi)=\big(\bar L,\{\bar L_i\}_{|i|\leqslant 1}\big)$, её алгебру умножений с единицей $\mathrm{Ad}(L)'$ — с F-подалгеброй $A=\mathrm{Ad}^{\bar L}(L)+F\,\mathrm{Id}_{\bar L}$ алгебры $\mathrm{Ad}(\bar L)'$, $\bar L=\mathrm{CM}(\Sigma)L$, $\bar L_i=\mathrm{CM}(\Sigma)L_i$. Так как $I=\bar L_1\cap\bar L_{-1}$ — идеал R-полупервичной линейной тройной йордановой системы $P(\Sigma)$ и $\{I,P(\Sigma),P(\Sigma)\}=\{P(\Sigma),I,P(\Sigma)\}=\{0\}$, $I=\{0\}$ и $P(\Sigma)=\bar L_1\oplus\bar L_{-1}$. Если M — однородный A-подмодуль $\bar L$ и $M_{\pm1}=M\cap\bar L_{\pm1}=0$, $M\subseteq L(\bar L,\{0\}_{\pm1},L)=\{0\}$. Поэтому если $M\neq\{0\}$, то $M_1\oplus M_{-1}$ — ненулевой $M^{P(\Sigma)}(\Sigma)$-подмодуль $P(\Sigma)$ и $\{0\}\neq M_1\oplus M_{-1}\cap L_1\oplus L_{-1}\subseteq M\cap L$.

Любой однородный гомоморфизм A-модулей $\psi\colon M\to\bar L$ индуцирует гомоморфизм $M^{P(\Sigma)}(\Sigma)$-модулей $\psi'=\psi|_{M_1\oplus M_{-1}}\colon M_1\oplus M_{-1}\to P(\Sigma)$, который можно продолжить до эндоморфизмов $\psi''\in\mathrm{CM}(\Sigma)=\mathrm{End}_{M^{P(\Sigma)}(\Sigma)}\big(P(\Sigma)\big)$ и $\overline{\psi''}\in\mathrm{End}_{A\text{-}\mathrm{gr}}(\bar L)$, $\overline{\psi''}|_L=\psi$ (см. доказательство предложения 4.35). Следовательно, $\bar L$ — градуированная квазиинъективная оболочка градуированного A-модуля ($\mathrm{Ad}(L)'$-модуля) L, $\mathrm{End}_{A\text{-}\mathrm{gr}}(\bar L)\cong\mathrm{CM}(\Sigma)$. □

Следствие 4.38. *Для R-полупервичной линейной йордановой пары Π над кольцом F специальность алгебры Ли $\mathrm{TKK}(\Pi)$ равносильна $\sup\limits_{\Sigma\neq P\in\mathrm{Spec}_R(\Sigma)}\dim_{\mathrm{CM}(\Sigma/P)}P(\Sigma/P)<\infty$, для R-первичной Π специальность $\mathrm{TKK}(\Pi)$ равносильна $\dim_{\mathrm{CM}(\Sigma)}P(\Sigma)<\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим случай R-полупервичной линейной йордановой пары Π. Тогда алгебра Ли $\mathrm{TKK}(\Pi)=\big(L,\{L_i\}_{|i|\leqslant1}\big)$ полупервична и, следовательно, специальна, если и только если $\sup\limits_{L\neq P\in\mathrm{Spec}(L)}\dim_{\mathrm{CM}(L/P)}P(L/P)<\infty$

(см. следствие 4.36). Условие

$$\sup_{(L_1,L_{-1})\neq(P_1,P_{-1})\in\operatorname{Spec}_R((L_1,L_{-1}))} \dim_{\mathrm{CM}(\Sigma/P_1\oplus P_{-1})} P(\Sigma/P_1\oplus P_{-1})<\infty$$

равносильно условию

$$\sup_{L\neq P\in\operatorname{Spec}(L)} \dim_{\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(L/P)} P_{\mathrm{gr}}(L/P)<\infty$$

(см. следствие 4.34). При их выполнении алгебра L удовлетворяет всем тождествам Капелли порядка $n+1$,

$$\sup_{L\neq P\in\operatorname{Spec}(L)} \dim_{\mathrm{CM}(L/P)} P(L/P)\leqslant n=\sup_{L\neq P\in\operatorname{Spec}(L)} \dim_{\mathrm{CM}_{\mathrm{gr}}(L/P)} P_{\mathrm{gr}}(L/P)$$

(см. [21, теорема 4.1, с. 47]). Вместе с тем R-полупервичная линейная тройная йорданова система Σ — подпрямое произведение R-первичных линейных тройных йордановых систем $\Sigma/P_1\oplus P_{-1}$, $(P_1,P_{-1})\in\operatorname{Spec}_R\big((L_1,L_{-1})\big)$, каждая $\Sigma/P_1\oplus P_2$ — F-подсистема линейной тройной йордановой системы

$$\overline{\Sigma/P_1\oplus P_{-1}}=(\mathrm{CM}(L/P)(L/P)_1\oplus\mathrm{CM}(L/P)(L/P)_{-1},\{\ ,\ ,\ \}),\quad P=L(L,P_{\pm1}),$$

линейной йордановой пары абелевых внутренних идеалов $(\mathrm{CM}(L/P)(L/P)_1,\mathrm{CM}(L/P)(L/P)_{-1})$ первичной алгебры Ли $P(L/P)$. Если L специальна, Σ удовлетворяет всем тождествам Капелли порядка $m+1$,

$$\sup_{\Sigma\neq P\in\operatorname{Spec}_R(\Sigma)} \dim_{\mathrm{CM}(\Sigma/P)} P(\Sigma/P)\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{L\neq P\in\operatorname{Spec}(L)} \dim_{\mathrm{CM}(L/P)} \overline{\Sigma/P_1\oplus P_{-1}}\leqslant m=\sup_{L\neq P\in\operatorname{Spec}(L)} \dim_{\mathrm{CM}(L/P)} P(L/P)$$

(см. [21, теорема 4.1, с. 47]). Случай R-первичной Π (первичной L) рассматривается аналогично. □

Следствие 4.39. *Если F — алгебра над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F}=0$, линейная йорданова пара Π R-первична и алгебра Ли $\mathrm{TKK}(\Pi)$ специальна, то $\bar{\Pi}$ — простая линейная йорданова пара над полем $\mathrm{CM}(\Sigma)$.*

Доказательство. Поскольку в данном случае алгебра Ли $\mathrm{TKK}(\bar{\Pi})$ конечномерна над полем $\mathrm{CM}(\Sigma)$, $\operatorname{char}\mathrm{CM}(\Sigma)=\{0\}$, первична и, следовательно, проста, $\bar{\Pi}$ — простая линейная йорданова пара над $\mathrm{CM}(\Sigma)$ (см. [35, предложение 2.6]). □

Любое множество порождающих $X^+\cup X^-$, $X^\pm\subseteq R^\pm$, линейной йордановой пары $(R^\pm,\{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ порождает алгебру Ли $\mathrm{TKK}(R^+,R^-)$. Поэтому конечно порождённой $(R^\pm,\{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ отвечает конечно порождённая $\mathrm{TKK}(R^+,R^-)$.

Замечание 4.40. Если $(R,\{\ ,\ ,\ \})$ — такая конечно порождённая R-полупервичная линейная тройная йорданова система с единицей над кольцом Джекобсона F, что алгебра Ли $\mathrm{TKK}(R)$ специальна, то $(R,\{\ ,\ ,\ \})$ — подпрямое произведение конечных R-первичных линейных тройных йордановых систем с единицами над F с максимальными аннуляторами в F.

Доказательство. Алгебра Ли $\mathrm{TKK}(R) = \big(L, \{L_i\}_{|i|\leqslant 1}\big)$ содержит систему первичных идеалов $\{P_a\}_{a\in A}$, таких что $\bigcap\limits_{a\in A} P_a = \{0\}$, $\operatorname{Ann}_F L_a$ — максимальный идеал кольца F, $\dim_{F_a} L_a < \infty$, где $L_a = L/P_a$, $F_a = F/\operatorname{Ann}_F L_a$, $a \in A$ (см. следствие 3.8). Вместе с тем $P_a = L(L, P_{a,\pm 1})$, $P'_a = P_{a,\pm 1} \in \operatorname{Spec}_R(R)$, $\operatorname{Ann}_F L_a = \operatorname{Ann}_F R_a$, $R_a = R/P'_a$,

$$\dim_{F_a} R_a \leqslant \dim_{F_a} \mathrm{TKK}(R_a) = \dim_{F_a} L_a < \infty,$$

$a \in A$, и $\bigcap\limits_{a\in A} P'_a = \{0\}$. □

Сходным образом доказывается следующее замечание.

Замечание 4.41. Если $(R^{\pm}, \{\,,\,,\,\}^{\pm})$ — такая конечно порождённая R-полупервичная линейная йорданова пара над кольцом Джекобсона F, что алгебра Ли $\mathrm{TKK}(R^+, R^-)$ специальна, то $(R^{\pm}, \{\,,\,,\,\}^{\pm})$ — подпрямое произведение конечных R-первичных линейных йордановых пар над F с максимальными аннуляторами в F.

Используя равносильность простоты и первичности для конечномерных алгебр Ли над полями характеристики нуль и [35, предложение 2.6], отсюда можно вывести следствие.

Следствие 4.42. *Если в условиях замечания* 4.41 F — *алгебра Джекобсона над полем* $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, *то линейная йорданова пара* $(R^{\pm}, \{\,,\,,\,\}^{\pm})$ — *подпрямое произведение конечных простых линейных йордановых пар над* F *с максимальными аннуляторами в* F.

Замечание 4.43. Если $(R^{\pm}, U^{\pm})$ — такая невырожденная конечно порождённая йорданова пара над кольцом Джекобсона F с $1/2$, что алгебра Ли $\mathrm{TKK}(R^+, R^-)$ специальна, то $(R^{\pm}, U^{\pm})$ — подпрямое произведение конечных примитивных йордановых пар над F с максимальными аннуляторами в F.

Доказательство. Линейная йорданова пара $(R^{\pm}, \{\,,\,,\,\}'^{\pm})$ конечно порождена, R-полупервична, идеалы $(R^{\pm}, \{\,,\,,\,\}'^{\pm})$ являются идеалами йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$ и наоборот $(1/2 \in F)$. Следовательно, $(R^{\pm}, U^{\pm})$ — подпрямое произведение конечных R-первичных (как линейные йордановы пары (см. пример 6)) йордановых пар $\{(R^{\pm}_a, U^{\pm}_a)\}_{a\in A}$ над кольцом F с максимальными аннуляторами в F. Поскольку

$$\mathcal{J}\big((R^{\pm}_a)\big) = \mathcal{N}\big((R^{\pm}_a)\big) = \mathrm{LN}\big((R^{\pm}_a)\big) = \mathrm{Mc}\big((R^{\pm}_a)\big) -$$

наибольший нильпотентный идеал $(R^{\pm}_a, U^{\pm}_a)$, $a \in A$ (см. [45, п. 13.6; 23, леммы 3 и 5] (или [27])), $\sup\limits_{a\in A} \dim_{\mathrm{CM}(\Sigma_a)} P(\Sigma_a) < \infty$, $\Sigma_a = (R^+_a \oplus R^-_a, \{\,,\,,\,\}'_a)$, индексы нильпотентности $\mathcal{J}\big((R^{\pm}_a)\big)$ не превосходят некоторого $n \geqslant 1$. Поэтому пересечение всех прообразов в $(R^{\pm}, U^{\pm})$ идеалов $(R^{\pm}_a, U^{\pm}_a)$, $a \in A$, фактор-пары по которым примитивны, является нильпотентным идеалом $(R^{\pm}, U^{\pm})$ индекса не выше n и, значит, равно нулю (Mc-радикальность разрешимых идеалов йордановой пары следует из идеальной наследственности Mc). □

Замечания 4.40, 4.41, 4.43 устанавливают связь между следствиями 3.3 и 3.8.

Исследование выполнено за счёт гранта МЦФПМ в МГУ им. М. В. Ломоносова «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем».

Литература

[1] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. О первичном радикале специальных алгебр Ли // УМН. — 1994. — Т. 49, № 1. — С. 233.

[2] Голубков А. Ю. Локальная конечность алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 6. — С. 25—75.

[3] Голубков А. Ю. Конструкции специальных радикалов алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 1. — С. 57—133.

[4] Голубков А. Ю. Алгебраические алгебры Ли ограниченной степени // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 5. — С. 209—242.

[5] Гришков А. Н. О локальной нильпотентности идеала алгебры Ли, порождённого элементами 2-го порядка // Сиб. матем. журн. — 1982. — Т. 23, № 1. — С. 181—182.

[6] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[7] Зельманов Е. И. О первичных йордановых алгебрах // Алгебра и логика. — 1979. — Т. 18, № 2. — С. 162—175.

[8] Зельманов Е. И. Абсолютные делители нуля в йордановых парах и алгебрах Ли // Матем. сб. — 1980. — Т. 112 (154), № 4 (8). — С. 611—629.

[9] Зельманов Е. И. Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. матем. журн. — 1980. — Т. 23, № 6. — С. 100—116.

[10] Зельманов Е. И. Алгебры Ли с алгебраическим присоединённым представлением // Матем. сб. — 1983. — Т. 121 (163), № 4 (8). — С. 545—561.

[11] Зельманов Е. И. Первичные йордановы алгебры II // Сиб. матем. журн. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 89—104.

[12] Зельманов Е. И. Алгебры Ли с конечной градуировкой // Матем. сб. — 1984. — Т. 124 (166), № 3 (7). — С. 353—392.

[13] Зельманов Е. И. Характеризация радикала Маккриммона // Сиб. матем. журн. — 1984. — Т. 25, № 5. — С. 190—192.

[14] Зельманов Е. И., Кострикин А. И. Теорема о сэндвичевых алгебрах // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1988. — Т. 183. — С. 106—111.

[15] Ильтяков А. В. Радикал конечно порождённых йордановых PI-алгебр // Сиб. матем. журн. — 1985. — Т. 26, № 3. — С. 44—48.

[16] Кузьмин Е. Н. Структура и представления конечномерных алгебр Мальцева // Тр. Ин-та матем. СО АН СССР, Исследования по теории колец и алгебр. — 1989. — Т. 16. — С. 75—101.

[17] Львов И. В. Теорема Брауна о радикале конечно порождённой PI-алгебры: Препринт № 63. — Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1984.

[18] Марков В. Т. О размерности некоммутативных аффинных алгебр // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — Т. 37. — С. 284—288.

[19] Парфёнов В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли // Сиб. матем. журн. — 1971. — Т. 12, № 1. — С. 171—176.

[20] Плоткин Б. И. Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли // УМН — 1958. — Т. 13, № 6 (84). — С. 133—138.

[21] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

[22] Размыслов Ю. П. О радикале Джекобсона в PI-алгебрах // Алгебра и логика. — 1974. — Т. 13, № 3. — С. 337—360.

[23] Чехонадских А. В. Ниль-идеалы йордановых тройных систем с условиями конечности // Сиб. матем. журн. — 1985. — Т. 26, № 1. — С. 159—169.

[24] Шестаков И. П. Абсолютные делители нуля и радикалы конечно порождённых альтернативных алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 5. — С. 585—602.

[25] D'Amour A., McCrimmon K. The local algebras of Jordan systems // J. Algebra. — 1995. — Vol. 177. — P. 199—239.

[26] Anquela J. A., Cortés T. Primitive Jordan pairs and triple systems // J. Algebra. — 1996. — Vol. 184. — P. 632—678.

[27] Anquela J. A., Cortés T., Zelmanov E. Local nilpotency of the McCrimmon radical of a Jordan system // Тр. МИАН. — 2016. — Vol. 292. — P. 7—15.

[28] Baxter W. E., Martindale W. S., 3rd. Central closure of semiprime non-associative rings // Commun. Algebra. — 1979. — Vol. 7, no. 11. — P. 1103—1132.

[29] Beidar K. I., Martindale W. S., 3rd, Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[30] Erickson T. S., Martindale W. S., 3rd, Osborn J. M. Prime non-associative algebras // Pacific J. Math. — 1975. — Vol. 60, no. 1. — P. 49—63.

[31] Fernández López A. Jordan Structures in Lie Algebras. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2019. — (Math. Surv. Monogr. Amer. Math. Soc.; Vol. 240).

[32] Fernández López A., García E., Gómez Lozano M. The Jordan algebras of a Lie algebra // J. Algebra. — 2007. — Vol. 308. — P. 164—177.

[33] Fernández López A., Golubkov A. Yu. Lie algebras with an algebraic adjoint representation revisited // Manuscripta Math. — 2013. — Vol. 140, no. 3-4. — P. 363—376.

[34] García E., Gómez Lozano M. A characterization of the Kostrikin radical of a Lie algebra // J. Algebra. — 2011. — Vol. 346. — P. 266—283.

[35] García E., Neher E. Tits—Kantor—Koecher superalgebras of Jordan superpairs covered by grids // Commun. Algebra. — 2003. — Vol. 31, no. 7. — P. 3335—3375.

[36] Hogben L., McCrimmon K. Maximal modular inner ideals and the Jacobson radical of a Jordan algebra // J. Algebra. — 1981. — Vol. 68. — P. 155—169.

[37] Kamiya N. On the Jacobson radical of infinite-dimensional Lie algebras // Hiroshima Math. J. — 1979. — Vol. 9. — P. 37—40.

[38] Lister W. G. Ternary rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 154. — P. 37—55.

[39] Loos O. Über eine Beziehung zwischen Malcev-Algebren und Lie-Tripelsystemen // Pacific J. Math. — 1966. — Vol. 18, no. 3. — P. 553—562.

[40] Loos O. Assoziative Tripelsysteme // Manuscripta Math. — 1972. — Vol. 7, no. 2. — P. 103—112.

[41] Loos O. Jordan Pairs. — New York: Springer, 1975. — (Lect. Notes Math.; Vol. 460)

[42] Marcos J. C., Velasco M. V. The Jacobson radical of a non-associative algebra and the uniqueness of the complete norm topology // Bull. London Math. Soc. — 2010. — Vol. 42, no. 6. — P. 1010—1020.

[43] McCrimmon K. The radical of a Jordan algebra // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1969. — Vol. 62. — P. 671—678.

[44] McCrimmon K. A Taste of Jordan Algebras. — New York: Springer, 2004.

[45] Meyberg K. Lectures on Algebras and Triple Systems. — Charlottesville: Univ. of Virginia, 1972.

[46] Myung H. C. A characterization of the Jacobson radical in ternary algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 38, no. 2. — P. 228—234.

[47] Năstăsescu C., Van Oystaeyen F. Methods of Graded Rings. — Berlin: Springer, 2004. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1836).

[48] Rowen L. H. Some results on the center of ring with polynomial identity // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — No. 1. — P. 219—223.

[49] Rowen L. H. Polynomial Identities in Ring Theory. — London: Academic Press, 1980. — (Pure Appl. Math.; Vol. 84).

[50] Thedy A. Radicals of right-alternative and Jordan rings // Commun. Algebra. — 1984. — Vol. 12, no. 7. — P. 857—887.

[51] Wisbauer R. Modules and Algebras: Bimodule Structure and Group Actions on Algebras. — CRC Press, 1996. — (Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math.; Vol. 81).