О решётках топологий полигонов над полугруппами правых и левых нулей

А. В. КАРТАШОВА
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

УДК 512.567.5

Ключевые слова: полигон над полугруппой, решётка топологий полигона, полугруппа левых нулей, полугруппа правых нулей.

Аннотация

В заметке описаны полигоны над полугруппами правых и левых нулей с модулярными решётками топологий, а также полигоны над полугруппами правых нулей, решётки топологий которых являются решётками с дополнениями.

Abstract

A. V. Kartashova, On topology lattices of acts over right or left zero semigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 4, pp. 129—132.

In this note, we describe all acts over right or left zero semigroups with modular topology lattices, as well as acts over right zero semigroups whose topology lattices are complemented.

Левым полигоном над полугруппой S (или просто *полигоном*) называется множество X, на котором определено действие полугруппы S, т. е. задано отображение $S \times X \to X$, $(s, x) \mapsto sx$, удовлетворяющее условию $(ts)x = t(sx)$ при $s, t \in S$, $x \in X$.

Полигоны над полугруппами образуют широкий класс алгебраических объектов, которые изучались многими авторами (см., например, [1, 3, 7]).

Полигон X над полугруппой S можно рассматривать как унарную алгебру, если для каждого элемента $s \in S$ задать унарную операцию $\delta_s \colon X \to X$ по правилу $\delta_s(x) = sx$, $x \in X$. Кроме того, полигон является алгебраической моделью автомата без выходов (см. [2]). При этом X — множество состояний автомата, а S — полугруппа входных сигналов.

Полигон X называется *связным*, если для любых двух элементов $a, b \in X$ найдётся целое положительное число n и элементы $c_i \in X$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, $s_j, t_j \in S$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, такие что $a = c_0$, $b = c_n$ и $s_i c_{i-1} = t_i c_i$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Любой максимальный по включению связный подполигон произвольного полигона X называется *компонентой связности* этого полигона.

Пусть X — полигон над полугруппой S и σ — некоторая топология на множестве X. Будем говорить, что σ — топология данного полигона, если для любых

$s \in S$ и $U \in \sigma$ $\delta_s^{-1}(U) \in \sigma$. Очевидно, что топологии полигона X образуют полную решётку по включению. Будем обозначать её через $\Im(X)$. Наибольший элемент этой решётки обозначается через $1_{\Im(X)}$, а наименьший — через $0_{\Im(X)}$.

Лемма 1. *Если в полигоне X есть три попарно непересекающихся подполигона, то решётка $\Im(X)$ топологий этого полигона не является модулярной.*

Доказательство. Пусть X_i, $i \in \{1,2,3\}$, — непересекающиеся подполигоны полигона X. Положим

$$\sigma_1 = \{X_1, X_1 \cup X_2, X, \varnothing\}, \quad \sigma_2 = \{X_1, X_2, X_1 \cup X_2, X, \varnothing\}, \quad \sigma_3 = \{X_2 \cup X_3, X, \varnothing\}.$$

Очевидно, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Im(X)$, $\sigma_1 < \sigma_2$,

$$\sigma_1 \wedge \sigma_3 = \sigma_2 \wedge \sigma_3 = 0_{\Im(X)},$$
$$\sigma_1 \vee \sigma_3 = \sigma_2 \vee \sigma_3 = \{X_1, X_1 \cup X_2, X_2 \cup X_3, X, \varnothing\}.$$

Следовательно, решётка $\Im(X)$ не является модулярной (см., например, [4, с. 70]). □

Полугруппой правых (*левых*) *нулей* называется такая полугруппа S, что $st = t$ ($st = s$) для любых $s, t \in S$. В [5] изучались решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей.

Лемма 2. *Пусть X — полигон над полугруппой S правых нулей и $sa \neq ta$ для некоторых $s, t \in S$ и $a \in X$. Тогда решётка $\Im(X)$ топологий этого полигона немодулярна и не является решёткой с дополнениями.*

Доказательство. Пусть (a) — циклический подполигон полигона X, порождённый элементом a. Непосредственная проверка показывает, что для любых $c \in S$ и $U \subseteq (a)$ справедливы равенства

$$\delta_c^{-1}(U) = \begin{cases} U \setminus \{a\}, & \text{если } a \in U,\ ca \notin U, \\ U \cup \{a\}, & \text{если } a \notin U,\ ca \in U, \\ U & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

Положим теперь

$$\sigma_1 = \big\{\{sa\}, \{a, sa\}, (a), \varnothing\big\},$$
$$\sigma_2 = \big\{\{sa\}, \{a, sa\}, \{sa, ta\}, \{a, sa, ta\}, (a), \varnothing\big\},$$
$$\sigma_3 = \big\{\{ta\}, \{a, ta\}, (a), \varnothing\big\}.$$

Тогда $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Im\big((a)\big)$ в силу (1). Кроме того, $\sigma_1 < \sigma_2$ и $\sigma_1 \wedge \sigma_3 = \sigma_2 \wedge \sigma_3$, $\sigma_1 \vee \sigma_3 = \sigma_2 \vee \sigma_3$, поскольку $sa \neq ta$. Это означает, что решётка топологий подполигона (a) полигона X не является модулярной [4, с. 70]. Следовательно, согласно [6, теорема 3] решётка $\Im(X)$ также немодулярна.

Предположим, что решётка $\Im(X)$ является решёткой с дополнениями. Согласно [6, лемма 15] решётка $\Im\big((a)\big)$ топологий полигона (a) также решётка с дополнениями. Пусть $\sigma_4 = \big\{\{a\}, (a), \varnothing\big\}$. По (1) получаем $\sigma_4 \in \Im\big((a)\big)$. Обозначим через σ_5 дополнение элемента σ_4 в решётке $\Im(X)$. Тогда

$$\sigma_4 \vee \sigma_5 = 1_{\Im((a))}, \quad \sigma_4 \wedge \sigma_5 = 0_{\Im((a))}. \tag{2}$$

Поэтому $\{sa\} \in \sigma_4 \vee \sigma_5$ и, значит,

$$\{sa\} = \bigcup_{i \in I} T_i \cap T_i',$$

где $T_i \in \sigma_4$, $T_i' \in \sigma_5$. Отсюда следует, что $\{sa\} \in \sigma_5$, так как $sa \notin \{a\}$. Далее, $\delta_s^{-1}(\{a\}) = \{a, sa\}$ ввиду (1), откуда получаем, что $\{a, sa\} \in \sigma_5$. Аналогично рассуждая, получаем $\{a, ta\} \in \sigma_5$. Следовательно, $\{a\} = \{a, sa\} \cap \{a, ta\} \in \sigma_5$, что противоречит (2). □

Алгебра $\langle X, f\rangle$ с одной унарной операцией f называется *унаром* (*моноунарной алгеброй*).

Из леммы 2 непосредственно вытекает следствие.

Следствие. *Если решётка $\Im(X)$ топологий полигона X над полугруппой S правых нулей модулярна или является решёткой с дополнениями и $s \in S$, то $\Im(X)$ изоморфна решётке топологий унара $\langle X, \delta_s\rangle$.* □

Теорема 1. *Решётка $\Im(X)$ топологий полигона X над полугруппой S правых нулей является решёткой с дополнениями тогда и только тогда, когда $sa = ta$ для всех $s, t \in S$ и $a \in X$.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы следует из леммы 2.

Предположим теперь, что $sa = ta$ для всех $s, t \in S$ и $a \in X$. Зафиксируем произвольный элемент $s \in S$. Тогда согласно следствию из леммы 2 решётка $\Im(X)$ топологий полигона X изоморфна решётке топологий унара $\langle X, \delta_s\rangle$. Кроме того, для любого элемента $x \in X$ справедливы равенства $\delta_s^2(x) = ssx = sx = \delta_s(x)$, и значит, согласно [6, теорема 9] решётка топологий унара $\langle X, \delta_s\rangle$ является решёткой с дополнениями. □

Теорема 2. *Пусть S — полугруппа правых или левых нулей. Тогда решётка $\Im(X)$ топологий произвольного полигона X над полугруппой S модулярна в том и только том случае, когда $|X| \leqslant 2$.*

Доказательство. Если S — полугруппа правых нулей, то согласно следствию из леммы 2 и [6, теорема 7] решётка $\Im(X)$ полигона X над полугруппой S модулярна только в случае $|X| \leqslant 2$.

Пусть теперь S — полугруппа левых нулей, X — полигон над S и решётка $\Im(X)$ топологий этого полигона модулярна. Согласно лемме 1 возможны следующие случаи:

1) X — связный полигон;

2) X содержит ровно две связные компоненты.

В случае 1) убедимся сначала, что $ua = ub$ для любых $u \in S$ и $a, b \in X$. Действительно, в силу связности полигона X существуют целое положительное число n и элементы $c_i \in X$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $s_j, t_j \in S$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, такие что $a = c_0$, $b = c_n$ и $s_i c_{i-1} = t_i c_i$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда получаем $us_i c_{i-1} = ut_i c_i$, т. е. $uc_{i-1} = uc_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, так как S — полугруппа левых нулей. Следовательно, $ua = uc_0 = uc_1 = \ldots = uc_{n-1} = uc_n = ub$. Таким образом,

$$\delta_u^{-1}(T) \in \{X, \varnothing\} \tag{3}$$

для любых $u \in S$ и $T \subseteq X$. Поэтому всякая топология на носителе полигона X является топологией этого полигона, т. е. решётка $\Im(X)$ изоморфна решётке топологий на множестве X. Поскольку эта решётка модулярна, то $|X| \leqslant 2$ ввиду [8, теорема 3.1].

В случае 2) обозначим через X_1 и X_2 связные компоненты полигона X. По [6, теорема 3] решётка топологий каждого из полигонов X_1 и X_2 изоморфна некоторой подрешётке решётки $\Im(X)$. Поэтому решётки $\Im(X_1)$ и $\Im(X_2)$ модулярны. Следовательно, $|X_1| \leqslant 2$ и $|X_2| \leqslant 2$, поскольку X_1 и X_2 — связные полигоны над полугруппой S.

Проверим, что оба полигона X_1 и X_2 одноэлементны. Действительно, предположим, что $|X_1| = 2$, $X_1 = \{a, b\}$. Пусть

$$\sigma_1 = \{X_1, X, \varnothing\}, \quad \sigma_2 = \{X_1, \{a\}, X, \varnothing\}, \quad \sigma_3 = \{X_2 \cup \{a\}, X, \varnothing\}.$$

Тогда, используя (3), получаем $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Im(X)$. Далее, очевидно, что $\sigma_1 < \sigma_2$, $\sigma_1 \wedge \sigma_3 = \sigma_2 \wedge \sigma_3 = 0_{\Im(X)}$, $\sigma_1 \vee \sigma_3 = \sigma_2 \vee \sigma_3 = \big\{\{a\}, X_1, X_2 \cup \{a\}, X, \varnothing\big\}$, что противоречит предложению 2 из [4, с. 70], так как $\Im(X)$ — модулярная решётка. Следовательно, $|X| \leqslant 2$. $\square$

Литература

[1] Кожухов И. Б. Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1335—1344.

[2] Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. — М.: Высшая школа, 1994.

[3] Скорняков Л. А. Характеризация категории полигонов // Матем. сб. — 1969. — Т. 80 (122), № 4 (12). — С. 492—502.

[4] Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. — М.: Наука, 1983.

[5] Халиуллина А. Р. Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей // Дальневост. матем. журн. — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 102—120.

[6] Kartashova A. V. On lattices of unary algebras // J. Math. Sci. — 2003. — T. 114, no. 2. — C. 1086—1118.

[7] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: W. de Gruyter, 2000.

[8] Steiner A. K. The lattice of topologies: structure and complementation // Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. - Vol. 122. — P. 379—398.