Конгруэнц-простые полигоны над вполне простыми полугруппами*

И. Б. КОЖУХОВ
НИУ МИЭТ,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

К. А. КОЛЕСНИКОВА
НИУ МИЭТ,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ksenya.koless@gmail.com

УДК 512.534.3

Ключевые слова: полигон над полугруппой, конгруэнц-простой полигон, вполне простая полугруппа.

Аннотация

Доказано, что полигон X над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ является конгруэнц-простым (т. е. не имеет нетривиальных конгруэнций) в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий: 1) $|X| = 1$; 2) $|X| = 2$ и $|XS| = 1$; 3) $X = \{z_1, z_2\}$, где z_1, z_2 — нули; 4) $X \cong R/\rho$, где R — минимальный правый идеал полугруппы S, а ρ — максимальная собственная конгруэнция правого идеала R, рассматриваемого как полигон над S. Все такие конгруэнции описаны.

Abstract

I. B. Kozhukhov, K. A. Kolesnikova, Congruence-simple acts over completely simple semigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 4, pp. 133—142.

We prove that an act X over a completely simple semigroup $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ is congruence-simple (i.e., it has no nontrivial congruences) if and only if one of the following conditions holds: (1) $|X| = 1$; (2) $|X| = 2$ and $|XS| = 1$; (3) $X = \{z_1, z_2\}$, where z_1 and z_2 are zeros; (4) $X \cong R/\rho$, where R is a minimal right ideal of the semigroup S and ρ is a maximal proper congruence of the right ideal R, which is considered as an act over S. We describe these congruences.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 22-11-00052.

Фундаментальная и прикладная математика, 2023, том 24, № 4, с. 133—142.

Светлой памяти нашего учителя
замечательного математика
Александра Васильевича Михалёва

Введение

Простые универсальные алгебры играют в структурной теории важную роль. Причиной является, по-видимому, то, что выяснение строения алгебр естественно начинать с простых алгебр. Иногда это сделать сравнительно легко: скажем, простые поля (поля, не имеющие собственных подполей) имеют в самом деле достаточно простое строение. Однако простые группы (группы, не имеющие нетривиальных нормальных подгрупп), простые кольца (кольца, не имеющие нетривиальных идеалов) составляют предмет целых направлений соответствующих разделов общей алгебры.

Термин «простая алгебра» неоднозначен. Будем называть алгебру *простой*, если она не имеет собственных подалгебр, и *конгруэнц-простой*, если у неё нет нетривиальных конгруэнций. Употребимы также сочетания «простая в смысле подалгебр» и «простая в смысле конгруэнций». Таким образом, «простые группы» и «простые кольца» — это, согласно нашему определению, конгруэнц-простые группы и соответственно кольца.

Цель данной работы — охарактеризовать простые и конгруэнц-простые полигоны над вполне простой полугруппой.

Не определяемые в работе термины теории полугрупп можно найти в [1], теории полигонов — в [2, 4], универсальной алгебры — в [3].

1. Предварительные рассмотрения

Множество X называется *полигоном над полугруппой* S, если задано отображение $X \times S \to X$, $x \mapsto xs$, такое что $(xs)t = x(st)$ для любых $x \in X$ и $s, t \in S$ [2,4]. Полигон является алгебраической моделью *автомата*: здесь X — множество состояний, S — полугруппа входных воздействий. Кроме того, полигон является *унарной алгеброй*: унарными операциями являются отображения $X \to X$, $x \mapsto xs$, определённые для каждого $s \in S$.

Полигон X над полугруппой S называется *квазиунитарным*, если $XS = X$. Нетрудно проверить, что для полугрупп с единицей понятие квазиунитарного полигона совпадает с понятием унитарного. *Нуль* полигона X — это такой его элемент z, что $zS = \{z\}$. Ясно, что одноэлементные подполигоны $Y = \{y\}$ полигона X — это в точности такие полигоны, у которых y — нуль полигона X.

Пусть A — универсальная алгебра. Обозначим через $\operatorname{Con} A$ *решётку конгруэнций* алгебры A. Это полная решётка с нулевым элементом $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ (*отношением равенства*) и единичным элементом $\nabla_A = A \times A$ (*универсальным отношением*). В дальнейшем индекс у Δ и ∇ мы будем часто опускать. Ясно, что конгруэнц-простая алгебра — это в точности такая алгебра A, у которой $\operatorname{Con} A = \{\Delta, \nabla\}$.

Напомним, что вполне простая полугруппа — это полугруппа, не имеющая собственных идеалов и содержащая примитивный идемпотент (т. е. идемпотент, являющийся минимальным относительно естественного порядка на множестве идемпотентов: $e \leqslant f \iff ef = fe = e$). Далее, пусть G — группа, I и Λ — множества, $P = \|p_{\lambda i}\|$ — $(\Lambda \times I)$-матрица с элементами из G. Тогда множество $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ выражений вида $(g)_{i\lambda}$ ($g \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$) с умножением $(g)_{i\lambda}(h)_{j\mu} = (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}$ называется рисовской матричной полугруппой. Согласно теореме Сушкевича—Риса [1, теорема 3.5] вполне простые полугруппы — это в точности полугруппы, изоморфные рисовским матричным полугруппам.

Если $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — вполне простая полугруппа и $i \in I$, определим подмножество

$$R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G,\ \lambda \in \Lambda\}.$$

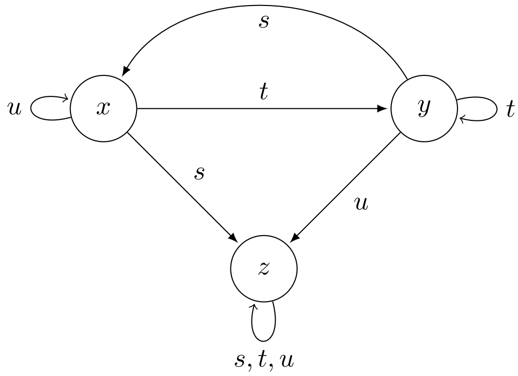
Очевидно, R_i — правый идеал полугруппы S, а значит, полигон над S. Нетрудно проверить, что R_i — простой полигон. Кроме того, полигоны R_i и R_j изоморфны друг другу при любых $i, j \in I$.

Полигон X называется *тривиальным*, если $|X| = 1$. Если X — полигон, то для каждого его подполигона Y можно определить *конгруэнцию Риса* по формуле $\rho_Y = (Y \times Y) \cup \Delta_X$. Заметим, что если $|Y| > 1$ и $Y \neq X$, то рисовская конгруэнция ρ_Y отлична от Δ_X и ∇_X, поэтому конгруэнц-простой полигон не может содержать нетривиальных собственных подполигонов.

Копроизведение универсальных алгебр — это понятие, двойственное понятию прямого произведения. В случае полигонов копроизведение $\coprod\limits_{k \in K} X_k$ полигонов X_k ($k \in K$) — это дизъюнктное объединение этих полигонов или их изоморфных копий.

Пусть X — нетривиальный полигон над полугруппой S. Если X простой в смысле конгруэнций, то, как уже отмечалось, он не имеет нетривиальных собственных подполигонов. Однако он может иметь одноэлементный подполигон (этот подполигон единственный при $|X| > 2$, и их не более двух при $|X| = 2$). Ниже приведена диаграмма Мура конгруэнц-простого полигона $\{x, y, z\}$ над полугруппой, порождённой элементами s, t, u, имеющий собственный подполигон $\{z\}$.

Очевидно, всякий полигон X, у которого $|X| \leqslant 2$, является конгруэнц-простым. Покажем, что конгруэнц-простой полигон X, у которого $|X| > 2$, обязательно квазиунитарен. Действительно, если $XS \neq X$, то XS — собственный подполигон. Если $|XS| > 1$, то рисовская конгруэнция ρ_{XS} отлична от Δ_X и ∇_X. Если $|XS| = 1$, то $XS = \{z\}$, где z — нуль полигона X, поэтому X — полигон с нулевым умножением. В этом случае любое отношение эквивалентности на X является конгруэнцией, а так как $|X| > 2$, то X не может быть конгруэнц-простым — противоречие. Эти рассуждения показывают, что при описании конгруэнц-простых полигонов с более чем двумя элементами можно ограничиться квазиунитарными полигонами.



Конгруэнц-простой полигон X, у которого $|X| > 2$, неразложим в копроизведение других полигонов. Действительно, если $X = X_1 \sqcup X_2$, то без ограничения общности мы можем считать, что $|X_1| > 1$. Тогда рисовская конгруэнция ρ_{X_1} отлична от Δ_X и ∇_X.

2. Полигоны над вполне простой полугруппой

В дальнейшем будем рассматривать полигоны только над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Символ e всегда будет обозначать единицу группы G.

Предложение 1. *Простые в смысле подполигонов полигоны над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — это в точности полигоны, изоморфные какому-либо полигону R_i/ρ, где $\rho \in \operatorname{Con} R_i$.*

Доказательство. В [5, лемма 4.11] было доказано, что простой в смысле подполигонов полигон X над S представи́м в виде R_i/ρ, где $\rho \in \operatorname{Con} R_i$. Осталось заметить, что полигон R_i простой, а значит, простыми являются все полигоны вида R_i/ρ, как гомоморфные образы простого полигона R_i. $\square$

Далее мы будем описывать конгруэнции полигона R_i. Имеем:

$$R_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G)_{i\lambda},$$

где

$$(G)_{i\lambda} = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G\}.$$

Пусть $\rho \in \operatorname{Con} R_i$. Для $g_1, g_2 \in G$ положим $g_1 \, \sigma \, g_2 \iff (g_1)_{i\lambda} \, \rho \, (g_2)_{i\lambda}$. Очевидно, σ — отношение эквивалентности на G. Если $g_1 \, \sigma \, g_2$, то $(g_1)_{i\lambda} \, \rho \, (g_2)_{i\lambda}$, а поскольку ρ — конгруэнция, выполнено соотношение $(g_1)_{i\lambda}(p_{\lambda i}^{-1} g)_{i\lambda} \;\; \rho \;\; (g_2)_{i\lambda}(p_{\lambda i}^{-1} g)_{i\lambda}$, т. е. $(g_1g)_{i\lambda}\ \rho\ (g_2g)_{i\lambda}$. Таким образом, $g_1\ \sigma\ g_2 \Longrightarrow g_1g\ \sigma\ g_2g$. Это означает, что σ — правая конгруэнция группы G, поэтому существует подгруппа H_λ, такая что $(g_1)_{i\lambda}\ \rho\ (g_2)_{i\lambda} \iff H_\lambda g_1 = H_\lambda g_2$. В [5, лемма 4.12] было доказано, что $H_\lambda = H_\mu$ при любых $\lambda, \mu \in \Lambda$, поэтому вместо H_λ мы будем писать просто H. Далее будем подгруппу H называть *подгруппой, ассоциированной с конгруэнцией* ρ полигона R_i.

Лемма 1. *Любая подгруппа* H *группы* G *ассоциирована с некоторой конгруэнцией* ρ *на* R_i.

Доказательство. Пусть H — произвольная подгруппа группы G. Положим

$$\rho = \bigl\{\bigl((a)_{i\lambda}, (b)_{i\lambda}\bigr) \bigm| \lambda \in \Lambda,\ Ha = Hb\bigr\}.$$

Нетрудно проверить, что ρ — конгруэнция полигона R_i и H ассоциирована с ρ. □

В примере, приведённом в доказательстве леммы, конгруэнция ρ обладает тем свойством, что

$$\bigl((G)_{i\lambda} \times (G)_{i\mu}\bigr) \cap \rho = \varnothing$$

при $\lambda \neq \mu$. Однако другие конгруэнции полигона R_i могут этим свойством не обладать.

Лемма 2. *Для любых* a, $b \in G$ *и* $\lambda, \mu \in \Lambda$

$$(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu} \Longrightarrow b \in Hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu}$. Подействуем на обе части отношения элементом $(e)_{i\lambda}$ и получим отношение $(ap_{\lambda i})_{i\lambda}\ \rho\ (bp_{\mu i})_{i\lambda}$, поэтому $Hap_{\lambda i} = Hbp_{\mu i}$, откуда следует, что $b \in Hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$. □

Заметим, что при $\mu = \lambda$ импликация (1) следует из определения подгруппы H.

Лемма 3. *Если* $(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu}$, *то для любого* $j \in I$ *выполнено*

$$p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Ha \cdot p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu}$. Тогда по (1) выполнено $b \in Hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$. Кроме того, для любых $j \in I$, $\nu \in \Lambda$ имеем $(a)_{i\lambda}(e)_{j\nu}\ \rho\ (b)_{i\mu}(e)_{j\nu}$, откуда следует, что $(ap_{\lambda j})_{i\nu}\ \rho\ (bp_{\mu j})_{i\nu}$, а значит, $Hap_{\lambda j} = Hbp_{\mu j}$. Подставим в это равенство $b = hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$ (для некоторого $h \in H$) и получим $Hap_{\lambda j} = Hhap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}$, откуда и следует (2). □

Назовём *собственной* конгруэнцию, отличную от ∇.

Для λ, $\mu \in \Lambda$ положим

$$A_{\lambda\mu} = \bigl\{p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}\bigl(p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1}\bigr)^{-1} \bigm| j \in I\bigr\}.$$

Очевидно, что при $\lambda = \mu$ мы имеем $A_{\lambda\lambda} = \{e\}$.

Теорема 1. *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и $i \in I$. Отношение эквивалентности ρ на полигоне R_i является его конгруэнцией в том и только в том случае, если существует подгруппа H группы G, такая что выполнены условия*:

(i) *для любых $a, b \in G$ и $\lambda \in \Lambda$ верно*

$$(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\lambda} \iff Ha = Hb;$$

(ii) *для любых $a, b \in G$ и $\lambda, \mu \in \Lambda$ верно*

$$(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu} \Longrightarrow (b \in Hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}\ \wedge\ A_{\lambda\mu} \subseteq a^{-1}Ha).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\rho \in \operatorname{Con} R_i$. Обозначим через H подгруппу, ассоциированную с конгруэнцией ρ. Тогда утверждение (i) следует из определения ассоциированной подгруппы.

Пусть $(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu}$. Тогда $b \in Hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$ по лемме 2. А по лемме 3 имеем, что для любого $j \in I$ верно $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Ha \cdot p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$. Отсюда следует, что $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \cdot p_{\mu i}p_{\lambda i}^{-1} \in a^{-1}Ha$. Значит, $A_{\lambda\mu}^{-1} \subseteq a^{-1}Ha$, а следовательно, $A_{\lambda\mu} \subseteq a^{-1}Ha$.

Достаточность. Пусть выполнены (i) и (ii) для некоторого отношения эквивалентности ρ на множестве R_i и подгруппы H группы G. Покажем, что ρ является конгруэнцией. Пусть для некоторых $a, b \in G$, $\lambda, \mu \in \Lambda$ выполнено $(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu}$. Подействуем на элементы $(a)_{i\lambda}$ и $(b)_{i\mu}$ произвольным элементом $(g)_{j\nu} \in S$:

$$(a)_{i\lambda} \cdot (g)_{j\nu} = (ap_{\lambda j}g)_{i\nu}, \quad (b)_{i\mu} \cdot (g)_{j\nu} = (bp_{\mu j}g)_{i\nu}.$$

Покажем, что $Hap_{\lambda j}g = Hbp_{\mu j}g$. Воспользуемся тем, что b представимо в виде $h_1ap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$ для некоторого $h_1 \in H$. Имеем

$$Hbp_{\mu j}g = Hh_1ap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}g = Hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}g.$$

Поскольку $A_{\lambda\mu} \subseteq a^{-1}Ha$, элемент $p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}p_{\lambda j}^{-1}$ представи́м в виде $a^{-1}h_2a$ для некоторого $h_2 \in H$. Тогда

$$Hbp_{\mu j}g = Ha \cdot p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j} \cdot g = Ha \cdot a^{-1}h_2ap_{\lambda j} \cdot g = Hap_{\lambda j}g.$$

Значит, $Hap_{\lambda j}g = Hbp_{\mu j}g$ и $(ap_{\lambda j}g)_{i\nu}\ \rho\ (bp_{\mu j}g)_{i\nu}$. □

Как было отмечено выше, любая подгруппа H группы G ассоциирована с некоторой конгруэнцией на R_i. Найдём теперь наибольшую конгруэнцию, с которой заданная подгруппа H будет ассоциирована. Для этого нам понадобится одна лемма.

Лемма 4. *Если $A_{\lambda\mu} \subseteq a^{-1}Ha$ и $b \in Hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$, то $A_{\mu\lambda} \subseteq b^{-1}Hb$ и $a \in$ $\in Hbp_{\mu i}p_{\lambda i}^{-1}$.*

Доказательство. Второе утверждение леммы очевидно. Докажем первое утверждение. Имеем $b = hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$ при некотором $h \in H$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} b^{-1}Hb &= p_{\mu i}p_{\lambda i}^{-1}a^{-1}h^{-1} \cdot H \cdot hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1} = p_{\mu i}p_{\lambda i}^{-1} \cdot a^{-1}Ha \cdot p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1} \supseteq \\ &\supseteq p_{\mu i}p_{\lambda i}^{-1} \cdot A_{\lambda\mu} \cdot p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1} = p_{\mu i}p_{\lambda i}^{-1} \cdot \left\{p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}\left(p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1}\right)^{-1} \mid j \in I\right\} \cdot p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1} = \\ &= \left\{p_{\mu i}p_{\lambda i}^{-1}p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}p_{\lambda j}^{-1}p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1} \mid j \in I\right\} = \left\{p_{\mu j}p_{\lambda j}^{-1}p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1} \mid j \in I\right\}. \end{aligned}$$

Последнее множество обозначим через $A_{\mu\lambda}^{-1}$, поскольку оно состоит в точности из элементов, обратных элементам множества $A_{\mu\lambda}$. Тогда если $A_{\mu\lambda}^{-1} \subseteq b^{-1}Hb$, то и $A_{\mu\lambda} \subseteq b^{-1}Hb$. $\square$

Доказательство следующей теоремы можно найти в [5, лемма 4.14].

Теорема 2. *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — вполне простая полугруппа и H — подгруппа в G. Определим отношение ρ на множестве R_i следующим образом: для $a, b \in G$ и $\lambda, \mu \in \Lambda$*

$$(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu} \Longleftrightarrow \big(A_{\lambda\mu} \subseteq a^{-1}Ha \wedge b \in Hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}\big). \tag{3}$$

Тогда ρ — наибольшая конгруэнция полигона R_i, для которой H является ассоциированной подгруппой.

Далее наибольшую конгруэнцию, ассоциированную с H, будем обозначать через $\rho(H)$.

Лемма 5. *Если X — нетривиальный конгруэнц-простой полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, то имеет место ровно один из следующих случаев:*

(i) *$X = \{z, x\}$, где $XS = \{z\}$ (т. е. X — полигон с нулевым умножением);*
(ii) *$X = \{z_1, z_2\}$, где z_1, z_2 — нули;*
(iii) *X — простой квазиунитарный полигон.*

Доказательство. Пусть X конгруэнц-простой. Вначале рассмотрим случай, когда X не является квазиунитарным. Тогда для всех $x \in X$ выполнено неравенство $xS \neq X$. Так как X конгруэнц-простой и xS — его собственный подполигон, то $|xS| = 1$. Множество $\{x\} \cup xS$ также подполигон. Предположим вначале, что найдётся такое $x \in X$, что $\{x\} \cup xS = X$. Тогда $|X| = 2$. Имеем $xS = \{z\}$ для некоторого z. Очевидно, z — нуль и выполнено (i). Теперь считаем, что для всех $x \in X$ выполнено неравенство $\{x\} \cup xS \neq X$. Тогда $|\{x\} \cup xS| = 1$ при всех $x \in X$. Следовательно, X состоит из нулей. Но тогда X квазиунитарный, что противоречит предположению.

Пусть теперь X квазиунитарен. Тогда

$$X = XS = \bigcup_{x \in X} xS = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{i \in I} xR_i.$$

Полигон xR_i, как гомоморфный образ простого полигона R_i, является простым. Следовательно, X является объединением простых подполигонов. При этом для любых xR_i, yR_j либо $xR_i = yR_j$, либо $xR_i \cap yR_j = \varnothing$. Следовательно, X является копроизведением простых подполигонов: $X = \coprod_{\omega \in \Omega} X_\omega$, где X_ω простые. Так как $\operatorname{Con} X = \{\Delta, \nabla\}$, то $|\Omega| \leqslant 2$, причём если $|\Omega| = 1$, то X простой, а значит, выполнено (iii). Пусть $|\Omega| = 2$, тогда $X = X_{\omega_1} \sqcup X_{\omega_2}$. Из конгруэнц-простоты следует отсутствие нетривиальных собственных подполигонов, поэтому $|X_{\omega_1}| = |X_{\omega_2}| = 1$, а значит, выполнено (ii). $\square$

Таким образом, за исключением двух легко описываемых случаев над вполне простой полугруппой конгруэнц-простые полигоны просты и квазиунитарны. Простой полигон, как было показано ранее, имеет вид R_i/ρ. Очевидно, он будет тривиальным при $\rho = \nabla$, а нетривиальным конгруэнц-простым в том и только том случае, когда ρ — максимальная собственная конгруэнция полигона R_i. Значит, нам надо найти такие конгруэнции. Начнём со случая, когда $H = G$.

Лемма 6. *Пусть $X = R_i/\rho$ — нетривиальный квазиунитарный полигон и H — подгруппа группы G, ассоциированная с конгруэнцией ρ. Если $H = G$, то полигон X будет являться конгруэнц-простым в том и только том случае, если множество Λ можно разбить на два непустых подмножества Λ_1 и Λ_2, $X = \{x_1, x_2\}$ и*

$$\forall\, x \in X \;\forall\, g \in G \;\forall\, \lambda \in \Lambda \quad x(g)_{i\lambda} = \begin{cases} x_1, & \text{если } \lambda \in \Lambda_1, \\ x_2, & \text{если } \lambda \in \Lambda_2. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Достаточность очевидна, так как двухэлементный полигон является конгруэнц-простым.

Докажем необходимость. Так как $H = G$, то

$$\forall\, a, b \in G \;\forall\, \lambda \in \Lambda \quad (a)_{i\lambda}\; \rho\; (b)_{i\lambda}. \tag{5}$$

Введём на множестве Λ отношение $\sim$, полагая

$$\lambda \sim \mu \iff (e)_{i\lambda}\; \rho\; (e)_{i\mu}. \tag{6}$$

Очевидно, $\sim$ — отношение эквивалентности. Из (5) и (6) получаем

$$\forall\, a, b \in G \;\forall\, \lambda, \mu \in \Lambda \quad \lambda \sim \mu \iff (a)_{i\lambda}\; \rho\; (b)_{i\mu}. \tag{7}$$

Рассмотрим фактор-множество $\bar{\Lambda} = \Lambda/{\sim}$. Через $\bar{\lambda}$ будем обозначать класс отношения $\sim$, содержащий λ. Множество $\bar{\Lambda}$ становится полигоном над S, если положить $\bar{\lambda} \cdot (g)_{j\mu} = \bar{\mu}$ для всех $\lambda, \mu \in \Lambda$, $g \in G$, $j \in I$. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon R_i \to \bar{\Lambda}, \quad (g)_{i\lambda} \mapsto \bar{\lambda}.$$

Очевидно, φ — сюръективный гомоморфизм полигонов. Из (7) видно, что ядро этого гомоморфизма $\ker \varphi = \rho$. Отсюда по теореме об изоморфизме получаем $R_i/\rho \cong \bar{\Lambda}$. Нетрудно проверить, что полигон $\bar{\Lambda}$ обладает свойством $\bar{\Lambda} \cdot \lambda = \bar{\lambda}$ для всех $\lambda \in \Lambda$, поэтому любое отношение эквивалентности на $\bar{\Lambda}$ является конгруэнцией. Так как $X \cong R_i/\rho \cong \bar{\Lambda}$ и X — нетривиальный конгруэнц-простой полигон, то $|X| = 2$. Тогда $X = \{x_1, x_2\}$. Изоморфизм $\bar{\Lambda}$ и X даёт требуемое разбиение множества Λ на подмножества Λ_1 и Λ_2, при которых выполнено (4). □

Лемма 7. *Пусть ρ — конгруэнция полигона R_i, ассоциированная с подгруппой H группы G. Тогда $\rho(H) = \nabla$ в том и только том случае, если $H = G$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\rho(H) = \nabla$. Значит, H такова, что для любых $a, b \in G$ и для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ верно $b \in Hap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$. Но тогда $H = G$.

Докажем достаточность. Очевидно, что при $H = G$ для любых $a, b \in G$ и для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ верно $a^{-1}Ga = G$ и $b \in Gap_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$, а значит, выполнено $(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu}$. □

Для каждой подгруппы H группы G определим граф $\Gamma(H)$, такой что множество вершин графа $\Gamma(H)$ совпадает с множеством Λ, а ребро (λ, μ) лежит в графе $\Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда существует $a \in G$, такой что $A_{\lambda\mu} \subseteq a^{-1}Ha$. Отметим, что по лемме 4 из наличия в графе $\Gamma(H)$ ребра (λ, μ) следует наличие в нём ребра (μ, λ).

Все максимальные конгруэнции описаны в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть ρ — конгруэнция полигона R_i и H — ассоциированная с ρ подгруппа группы G. Тогда ρ является максимальной собственной конгруэнцией полигона R_i в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий:*

(i) *$H = G$ и существует разбиение Λ на два непустых подмножества Λ_1 и Λ_2, таких что для любых $a, b \in G$, λ, $\mu \in \Lambda$*

$$(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu} \Longleftrightarrow (\lambda, \mu \in \Lambda_1 \vee \lambda, \mu \in \Lambda_2);$$

(ii) *$\rho = \rho(H)$, H — максимальная собственная подгруппа группы G и граф $\Gamma(H)$ связный.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть ρ — максимальная собственная конгруэнция. Из теоремы 2 следует, что $\rho \subseteq \rho(H)$, откуда получаем, что либо $\rho \subset \rho(H) = \nabla$, либо $\rho = \rho(H) \subset \nabla$.

Рассмотрим первый случай. По лемме 7 имеем $H = G$. Тогда любое отношение эквивалентности, содержащее ρ, будет конгруэнцией, и из максимальности ρ следует наличие ровно двух классов эквивалентности: $\{(G)_{i\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_1\}$ и $\{(G)_{i\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_2\}$.

Рассмотрим второй случай. Сразу отметим, что по лемме 7 $H \neq G$. Пусть при этом H не является максимальной собственной подгруппой. Тогда существует подгруппа H', такая что $H \subset H' \subset G$. Покажем, что $\rho = \rho(H) \subset \rho(H')$. Включение $\rho(H) \subseteq \rho(H')$ очевидно. Чтобы показать, что оно строгое, возьмём $a, b \in G$, такие что $Ha \neq Hb$ и $H'a = H'b$. Тогда $(a)_{i\lambda}$ и $(b)_{i\lambda}$ будут находиться в отношении $\rho(H')$, но не будут находиться в отношении ρ. Это противоречит максимальности ρ. Теперь предположим, что граф $\Gamma(H)$ несвязен. Пусть Λ_1 — одна его компонента связности, а Λ_2 — объединение остальных компонент. Рассмотрим на R_i отношение эквивалентности ρ', такое что

$$(a)_{i\lambda}\ \rho'\ (b)_{i\mu} \Longleftrightarrow (\lambda, \mu \in \Lambda_1 \vee \lambda, \mu \in \Lambda_2).$$

Оно является и конгруэнцией, поскольку результатом действия элементом $(g)_{i\delta}$ всегда будет элемент из $(G)_{i\delta}$-компоненты. Покажем, что $\rho \subseteq \rho' \subset \nabla$. Действительно, из $(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu}$ следует $A_{\lambda\mu} \subseteq a^{-1}Ha$, что означает наличие в графе

$\Gamma(H)$ ребра (λ, μ). Тогда λ и μ обязаны лежать в одной компоненте связности графа $\Gamma(H)$, поэтому либо $\lambda, \mu \in \Lambda_1$, либо $\lambda, \mu \in \Lambda_2$, а значит, $(a)_{i\lambda}\ \rho'\ (b)_{i\mu}$. Итак, $\rho \subseteq \rho'$. Из определения ρ' видно, что подгруппой, ассоциированной с ρ', является G. Следовательно, $\rho \subset \rho'$. Так как при $\lambda \in \Lambda_1$ и $\mu \in \Lambda_2$ будет выполняться $\big((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}\big) \notin \rho'$, то $\rho' \neq \nabla$. Таким образом, $\rho \subset \rho' \subset \nabla$, а это противоречит тому, что ρ — максимальная собственная конгруэнция.

Докажем достаточность. Пусть выполнено (i). Тогда очевидно, что конгруэнция, которая имеет ровно два класса эквивалентности, является максимальной собственной конгруэнцией.

Пусть выполнено (ii), и пусть $\rho \subset \rho'$ для некоторой конгруэнции ρ'. Обозначим через H' подгруппу группы G, ассоциированную с ρ'. Очевидно, $H \subseteq H'$. Так как H — максимальная собственная подгруппа, то либо $H = H'$, либо $H' = G$. Пусть $H = H'$. Тогда по теореме 2 $\rho' \subseteq \rho(H') = \rho(H) = \rho$, что невозможно. Следовательно, $H' = G$.

Возьмём любые $\lambda, \mu \in \Lambda$. Так как граф $\Gamma(H)$ связен, то в нём существует путь из λ в μ. Этот путь состоит из рёбер

$$(\lambda, \lambda_1),\ (\lambda_1, \lambda_2), \ldots, (\lambda_{n-2}, \lambda_{n-1}),\ (\lambda_{n-1}, \lambda_n),\ (\lambda_{n-1}, \mu).$$

Положим $\lambda_0 = \lambda$, $\lambda_n = \mu$. По определению графа $\Gamma(H)$ существуют $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1} \in G$, такие что $\big((a_t)_{i\lambda_t}, (b_t)_{i\lambda_{t+1}}\big) \in \rho$ при $t = 0, 1, \ldots, n-1$. Так как $H' = G$, то $\big((b_t)_{i\lambda_{t+1}}, (a_{t+1})_{i\lambda_{t+1}}\big) \in \rho'$ при $t = 0, 1, \ldots, n-1$. Так как $\rho \subseteq \rho'$ и ρ' транзитивно, то $\big((a_0)_{i\lambda}, (b_{n-1})_{i\mu}\big) \in \rho'$. Если g_1, g_2 — произвольные элементы из G, то мы имеем

$$(g_1)_{i\lambda}\ \rho'\ (a_0)_{i\lambda}\ \rho'\ (b_n)_{i\mu}\ \rho'\ (g_2)_{i\mu}.$$

Таким образом, $\rho' = \nabla$. Доказательство того, что ρ' — максимальная собственная конгруэнция, завершено. $\square$

Литература

[1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1972.

[2] Кожухов И. Б., Михалёв А. В. Полигоны над полугруппами // Фундамент. и прикл. матем. — 2020. — Т. 23, вып. 3. — С. 141—199.

[3] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[4] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[5] Kozhuhov I. B., Pryanichnikov A. M. Acts with identities in the congruence lattice // Algebra Universalis. — 2022. — Vol. 83. — No. 16.