Простые правоальтернативные супералгебры

С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ
Финансовый университет при Правительстве РФ
e-mail: pchelinzev@mail.ru

О. В. ШАШКОВ
Финансовый университет при Правительстве РФ

УДК 512.554

Ключевые слова: конечномерные простые правоальтернативные супералгебры, унитальные супералгебры, сингулярных супералгебры, абелевы супералгебры, дифференцирования простых супералгебр, автоморфизмы простых супералгебр.

Аннотация

Данная работа представляет собой обзор результатов по решению проблемы Шестакова, связанной с классификацией конечномерных простых правоальтернативных супералгебр.

Abstract

S. V. Pchelintsev, O. V. Shashkov, Simple right alternative superalgebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 4, pp. 171—197.

This paper is a review of results on the solution of the Shestakov problem related to the classification of finite-dimensional simple right-alternative superalgebras.

Светлой памяти
Александра Васильевича Михалёва
посвящается

1. Введение

Проблема классификации простых алгебр является одной из центральных в структурной теории колец. В 1954 г. А. А. Алберт [37] доказал, что всякая простая конечномерная правоальтернативная алгебра альтернативна. Замечательные результаты о бесконечномерных простых правоальтернативных алгебрах принадлежат И. М. Михееву [12] и В. Г. Скосырскому [27]: в [12] приведён пример простой правоальтернативной алгебры с тождеством $x^3 = 0$; в [27] доказано, что невырожденная правоальтернативная алгебра альтернативна, в частности, простая унитальная правоальтернативная алгебра альтернативна.

В последние полвека значительный интерес алгебраистов был связан с изучением супералгебр, как с построением содержательной структурной теории,

© 2023 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

так и с применением супералгебр к решению трудных теоретико-кольцевых проблем.

Первое применение супералгебр в теории колец было указано в работах А. Р. Кемера [9,10], посвящённых положительному решению проблемы Шпехта.

Важные применения супералгебр в теории альтернативных и йордановых алгебр указаны в работах Е. И. Зельманова и И. П. Шестакова [6,7] — решение проблемы Ширшова о разрешимости йордановой ниль-алгебры ограниченной степени и проблемы Жевлакова о нильпотентности радикала свободной альтернативной алгебры.

Использование супералгебр для построения контрпримеров указано в [28, 33, 46].

В теории йордановых и $(-1,1)$-алгебр важную роль играют супералгебры векторного типа $J(\Gamma,\delta)$ и $B(\Gamma,D,\gamma)$, введённые К. Маккриммоном [45] и И. П. Шестаковым [34]. В [53] указана связь супералгебр векторного типа с алгебрами Грассмана и первичными монстрами. В [1] указано применение супералгебр к изучению относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством Ли-нильпотентности степени 5 и 6.

В 1964 г. Ч. Т. К. Уолл [61] описал строение простых ассоциативных супералгебр, в частности доказал, что всякая простая конечномерная ассоциативная унитальная супералгебра A над алгебраически замкнутым полем изоморфна либо супералгебре $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}]$, либо $\mathrm{M}_{m|n}$.

Простые супералгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 были классифицированы В. Г. Кацем [42, 43]. Детальному изложению теоремы Каца посвящена книга М. Шейнерта [57].

Простые йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 были классифицированы В. Г. Кацем [42] и И. Л. Кантором [8].

Первичные альтернативные супералгебры характеристики, отличной от 2 и 3, описаны Е. И. Зельмановым и И. П. Шестаковым [7]. Простые альтернативные супералгебры произвольной характеристики описаны И. П. Шестаковым в [34]. Он же получил описание простых $(-1,1)$-супералгебр [35].

М. Расин и Е. Зельманов [54] классифицировали конечномерные простые йордановы супералгебры с полупростой чётной частью. К. Мартинес и Е. Зельманов [44] дали описание конечномерных простых унитальных йордановых супералгебр, чётная часть которых имеет ненулевой нильпотентный идеал. Простые йордановы супералгебры произвольной размерности с ассоциативной ниль-полупростой чётной частью изучал В. Н. Желябин [3, 4]. В. Н. Желябин и И. П. Шестаков [5] в одном важном частном случае получили описание йордановых супералгебр абелева типа без каких-либо ограничений на размерность. Ими было доказано, что при некоторых ограничениях специальная йорданова супералгебра является центральным порядком в йордановой супералгебре векторного типа $J(\Gamma,\delta)$, где δ — ненулевое дифференцирование унитальной ассоциативно-коммутативной δ-простой алгебры Г. А. П. Пожидаев и И. П. Шестаков [14, 15] описали простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры над полем характеристики 0.

В 1993 г. Н. А. Писаренко [13] доказал, что для конечномерных альтернативных супералгебр при определённых ограничениях на типы простых компонент полупростой части справедлив аналог теоремы Веддербёрна об отщеплении радикала. Там же доказано, что всякая полупростая альтернативная супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2 и 3, разлагается в прямую сумму суперидеалов (градуированных идеалов), являющихся простыми супералгебрами.

Задача описания простых конечномерных правоальтернативных супералгебр была сформулирована И. П. Шестаковым в «Днестровской тетради» [30]. В [62] Ж. П. да Силвой, Л. С. И. Мураками и И. П. Шестаковым были приведены первые примеры простых правоальтернативных супералгебр размерности 2, 5 и 8, чётная часть которых является одной из следующих алгебр:

а) основное поле,
б) 2-мерная алгебра с нулевым умножением,
в) алгебра матриц 2-го порядка.

При изучении супералгебр естественным образом возникают бимодули. Понятия бимодуля (бипредставления) для произвольного класса алгебр были введены С. Эйленбергом [40]. Наряду с ассоциативными алгебрами и алгебрами Ли теория бипредставлений была развита для других классов алгебр; так, для альтернативных алгебр результаты получил Р. Д. Шафер [55], для йордановых алгебр Н. Свартхольм [59] и Н. Джекобсон [41], для алгебр Мальцева — Р. Карлссон [39] и Е. Н. Кузьмин [11]. Теория правых представлений правоальтернативных алгебр была разработана А. М. Слинько и И. П. Шестаковым [29]. Неприводимые правоальтернативные бимодули над алгеброй $\mathrm{M}_2(\Phi)$ матриц 2-го порядка изучали Л. И. Мураками и И. П. Шестаков [48]. В [48] было доказано, что над алгеброй $\mathrm{M}_2(\Phi)$ существует бесконечно много неизоморфных неприводимых правоальтернативных бимодулей и что не всякий бимодуль над алгеброй $\mathrm{M}_2(\Phi)$ вполне приводим.

Изучение простых объектов тесно связано с их автоморфизмами и дифференцированиями, поэтому задача описания автоморфизмов, как и дифференцирований, простых алгебр и супералгебр представляет несомненный интерес (см. [2, 56]). В частности, простые исключительные алгебры Ли типа G_4 и типа F_2 возникали как алгебры дифференцирований алгебр Кэли—Диксона C (у Э. Картана и Н. Джекобсона) и исключительных алгебр Алберта $H_3(\mathrm{C})$ (у К. Шевалье и Р. Д. Шафера). Общие результаты в этом направлении принадлежат Ж. Титсу [60].

Данная работа представляет собой обзор результатов по решению проблемы Шестакова, связанной с классификацией конечномерных простых правоальтернативных супералгебр. Решению проблемы Шестакова посвящены работы [16—26, 31, 32, 47, 49—52, 58]. Заметим, что рассматриваемый класс простых супералгебр содержит в себе два наиболее важных подкласса: класс унитальных и класс сингулярных супералгебр.

Работа состоит из пяти разделов и посвящена изучению простых правоальтернативных супералгебр. Термин «супералгебра», если не оговорено противное, означает простую правоальтернативную супералгебру.

Раздел 1 содержит основные определения и примеры унитальных супералгебр.

В разделе 2 рассматриваются унитальные супералгебры с бимодульными ограничениями. Нечётная часть B_1 супералгебры $B = B_0 \oplus B_1$ является бимодулем над чётной частью B_0. Если чётная часть B_0 ассоциативна и коммутативна, а нечётная часть B_1 — ассоциативный бимодуль над B_0, такие супералгебры называются *абелевыми*. Приведена классификация абелевых супералгебр. Если B — ассоциативный бимодуль над B_0, то супералгебра B либо ассоциативна, либо абелева.

Кроме того, в разделе 2 построена структурная теория произвольных конечномерных (не обязательно простых) унитальных супералгебр B, являющихся альтернативными бимодулями над B_0. Описана структура супералгебр с полупростой чётной частью и супералгебр ёмкости 1 с некоммутативной простой компонентой в чётной части.

В разделе 3 дана классификация унитальных супералгебр с ограничениями на чётную часть:

1) чётная часть ассоциативна и коммутативна;
2) чётная часть полупроста;
3) чётная часть является суммой ниль-радикала и основного поля.

В разделе 4 изучаются сингулярные супералгебры, т. е. супералгебры, в которых произведение чётных элементов равно 0. Выделены два важных подкласса сингулярных супералгебр: линейно порождённые и алгебраически порождённые. Приведена классификация линейно порождённых супералгебр: каждая такая алгебра является аналогом йордановой алгебры билинейной формы. Всякая алгебраически порождённая супералгебра является так называемым расширенным дублем. Доказано, что если чётная часть двумерна, то супералгебра пятимерна и её структура полностью описана. Кроме того, в этом разделе полностью решена проблема размерности конечномерной сингулярной супералгебры (см. п. 4.5.5).

Раздел 5 посвящён изучению дифференцирований и автоморфизмов простых супералгебр.

В последнем разделе приведены открытые вопросы и нерешённые задачи, представляющие интерес.

1.1. Основные определения и тождества

Все супералгебры рассматриваются над полем Φ характеристики, отличной от 2. Ряд результатов доказан при условии, что основное поле имеет характеристику 0; такие результаты далее отмечаются звёздочкой.

Согласно [36] алгебра A называется *правоальтернативной*, если она удовлетворяет тождеству

$$(a,b,b)=0,$$

где $(a,b,c)=(ab)c-a(bc)$ — ассоциатор элементов a, b, c.

Как обычно, через $[a,b]=ab-ba$ обозначается коммутатор; $a\circ b=ab+ba$ — йорданово произведение элементов a, b. Определяющее тождество правой альтернативности эквивалентно его линеаризации

$$(ab)c+(ac)b=a(b\circ c);$$

в дальнейшем это тождество используется без дополнительных пояснений.

Положим также $X*Y=XY+YX$, если одно из множеств X, Y является линейным пространством над основным полем. Через $\operatorname{span} X$ обозначается подпространство, порождённое множеством X.

1.2. Правоальтернативные супералгебры

Напомним, что *супералгеброй* $A=A_0\oplus A_1$ называется $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра, т. е. $A_i\cdot A_j\subseteq A_{i+j\,(\mathrm{mod}\ 2)}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное многообразие алгебр; $G=G_0\oplus G_1$ — ассоциативная алгебра Грассмана с единицей 1, стандартной системой порождающих и стандартной градуировкой; супералгебра $A=A_0\oplus A_1$ называется *$\mathfrak{M}$-супералгеброй*, если её грассманова оболочка $G(A)=A_0\otimes G_0\oplus A_1\otimes G_1$ является $\mathfrak{M}$-алгеброй [7].

Всюду ниже, если не оговорено противное, чётная часть супералгебры обозначается через A, а нечётная часть — через M.

Супералгебра $B=A\oplus M$ является правоальтернативной тогда и только тогда, когда для однородных элементов выполнено супертождество

$$(p,q,r)+(-1)^{|q|\cdot|r|}(p,r,q)=0, \tag{1}$$

где $|q|$ — чётность элемента $q\in A\cup M$, т. е. $|q|=0$, если $q\in A$, и $|q|=1$, если $q\in M$.

Если $x,y\in M$, то из равенства (1) следует, что $(p,x,y)-(p,y,x)=0$, т. е.

$$(px)y=(py)x+p[x,y]. \tag{2}$$

Если $a\in A$, $p,q\in A\cup M$, то из равенства (1) следует

$$(pa)q+(pq)a=p(a\circ q). \tag{3}$$

1.3. Простые супералгебры

Супералгебра с единицей называется *унитальной*. Унитальная супералгебра называется *простой*, если она не имеет собственных градуированных идеалов и её нечётная часть отлична от 0.

1.3.1. Простые ассоциативные супералгебры

В 1964 г. Ч. Т. К. Уолл (см. [61]) доказал, что всякая простая конечномерная ассоциативная супералгебра изоморфна $\mathrm{M}_{m|n}$ или $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}]$: $\mathrm{M}_{m|n} = A \oplus M$ и

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathrm{M}_m, \ b \in \mathrm{M}_n \right\}, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathrm{M}_{m\times n}, \ y \in \mathrm{M}_{n\times m} \right\};$$

$\mathrm{M}_n[\sqrt{1}] = \mathrm{M}_n \oplus \mathrm{M}_n u$, где элемент $u = \sqrt{1}$ «централен» и $u^2 = 1$.

1.3.2. Простая коммутативная альтернативная супералгебра $\mathrm{B}_{1|2}$ (см. [34])

Пусть $\operatorname{char}\Phi = 3$, $\mathrm{B}_{1|2} = A \oplus M$ — супералгебра над Φ, у которой

$$A = \Phi \cdot 1, \quad M = \Phi x + \Phi y,$$

где 1 — единица $\mathrm{B}_{1|2}$ и $x^2 = y^2 = 0$, $xy = -yx = 1$.

1.3.3. Простая альтернативная супералгебра Шестакова $\mathrm{S}_{4|2}$ (см. [34])

Пусть $\operatorname{char}\Phi = 3$, $\mathrm{S}_{4|2} = A \oplus M$ — супералгебра над Φ, $A = \mathrm{M}_2(\Phi)$, $M = \mathrm{C}_2 = \Phi m_1 + \Phi m_2$ — стандартный бимодуль Кэли. Умножение на M определено равенствами

$$m_1^2 = e_{12}, \quad m_2^2 = -e_{21}, \quad m_1 m_2 = e_{22}, \quad m_2 m_1 = -e_{11}.$$

1.3.4. Простые абелевы супералгебры

Супералгебра $B = A \oplus M$ называется *абелевой*, если её чётная часть A ассоциативна и коммутативна, а нечётная часть M является ассоциативным A-бимодулем. В [16] получена классификация простых конечномерных право-альтернативных абелевых супералгебр характеристики 0. Напомним, что эти супералгебры получаются с помощью следующей конструкции.

Пусть A — ассоциативная и коммутативная унитальная алгебра над полем Φ, τ — автоморфизм алгебры A, χ — ненулевой линейный оператор пространства A над Φ; $[A]$ — линейная копия A. Обозначим через $B(A, \tau, \chi)$ супералгебру $B = A \oplus [A]$ с таблицей умножения однородных элементов

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot [b] = [ab], \quad [a] \cdot b = [ab^\tau], \quad [a] \cdot [b] = ab^\chi,$$

где ab означает произведение элементов a, b в алгебре A. Градуировка на $B = A \oplus [A]$: чётная часть A, нечётная часть $[A]$.

1.3.5. Асимметричные дубли

Пусть $w \in \mathrm{M}_2(\Phi)$ — фиксированная матрица с ненулевым следом ($\operatorname{tr} w \neq 0$). Умножение однородных элементов в асимметричном дубле $\mathrm{B}_{4|4}(w) = \mathrm{M}_2(\Phi) \oplus [\mathrm{M}_2(\Phi)]$ имеет вид

$$[a][b] = a \cdot \frac{\operatorname{tr} b}{\operatorname{tr} w}, \quad [a]b = [a\bar{b}], \quad a[b] = [ab - ([a][b])^D],$$

где $x^D = [x, w]$ — внутреннее дифференцирование чётной части.

В [24, 25] получено описание и классификация асимметричных дублей, их автоморфизмов и дифференцирований. Впервые простые правоальтернативные (неальтернативные) супералгебры с чётной частью $\mathrm{M}_2(\Phi)$ появились в [62]. В цитированной статье предполагалось, что нечётная часть — это неприводимый M_2-бимодуль размерности, не большей 6, а основное поле алгебраически замкнуто.

1.3.6. Скрученные супералгебры векторного типа

Пусть D — ненулевое дифференцирование алгебры Γ и γ — фиксированный элемент из Γ. Тогда супералгебра $B(\Gamma, D, \gamma) = \Gamma \oplus \bar{\Gamma}$ с умножением

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot b = \overline{ab}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \gamma ab + 2a^D \cdot b + a \cdot b^D$$

называется скрученной супералгеброй векторного типа. Супералгебры $B(\Gamma, D, \gamma)$ были введены И. П. Шестаковым [34, 35] при классификации простых альтернативных супералгебр и простых $(-1, 1)$-супералгебр. Супералгебра $B(\Gamma, D, \gamma)$ является строго $(-1, 1)$-супералгеброй, т. е. она правоальтернативна и удовлетворяет тождеству

$$\big[[x, y]_s, z\big]_s = 0,$$

где $[x, y]_s = xy - (-1)^{|x|\,|y|}yx$ — суперкоммутатор однородных элементов x, y.

2. Унитальные супералгебры с бимодульными ограничениями

2.1. Супералгебры абелева типа

2.1.1. Критерии простоты и правой альтернативности дублей $B(A, \tau, \chi)$

В [16] получена классификация простых конечномерных правоальтернативных абелевых супералгебр характеристики 0.

Класс дублей $B(A, \tau, \chi)$ (см. п. 1.3.4) достаточно обширен, и не всякий такой дубль является простой правоальтернативной супералгеброй. Выполнены следующие критерии.

Предложение 2.1.

1. *$B(A, \tau, \chi)$ является супералгеброй абелева типа.*
2. *$B(A, \tau, \chi)$ правоальтернативна только, если для любых $a, b \in A$*

$$\big(a(b + b^\tau)\big)^\chi = a^\chi(b + b^\tau), \quad a^\chi b - ab^\chi = -(a^\chi b - ab^\chi)^\tau.$$

3. *Если* $B(A,\tau,\chi)$ — *простая супералгебра, то* A *не имеет собственных* (τ,χ)*-инвариантных идеалов.*
4. *Допустим, что* $1 \in A \cdot A^{\chi}$. *Если алгебра* A *не имеет собственных* (τ,χ)*-инвариантных идеалов, то супералгебра* $B(A,\tau,\chi)$ *проста.*
5. *Если супералгебра* $B(A,\tau,\chi)$ *проста и* τ,χ *перестановочны, то* $1 \in A \cdot A^{\chi}$.

Предложение 2.2. *Простая супералгебра* $B(A,\tau,\chi)$ *ассоциативна тогда и только тогда, когда существует*

$$g \in A, \text{ такой что } g = g^{\tau},\ \tau^2 = \mathrm{Id},\ \chi = \tau R_g,$$

где Id — *тождественное отображение.*

2.1.2. Примеры простых дублей

Скалярный ω-дубль $B(A,\tau,R_\omega)$. Супералгебра $B(A,\tau,R_\omega)$ получается из $B(A,\tau,\chi)$, если в качестве линейного оператора χ взять оператор R_ω правого умножения на элемент $\omega \in A$. Эту супералгебру $B(A,\tau,R_\omega)$ назовём *скалярным ω-дублем* алгебры A.

Напомним, что алгебра A является *τ-простой*, если она не содержит собственных τ-инвариантных идеалов.

Предложение 2.3. *Пусть алгебра* A *является* τ*-простой и* ω *обратим в* A. *Тогда*

1) ω*-дубль* $B(A,\tau,R_\omega)$ *является простой правоальтернативной супералгеброй*;
2) *если* $\tau \neq \mathrm{Id}$, *то супералгебра* $B(A,\tau,R_\omega)$ *неассоциативна*;
3) *центр* ω*-дубля* $B(A,\tau,R_\omega)$ *совпадает с подалгеброй* τ*-неподвижных элементов* $\{a \in A \mid a^{\tau} = a\}$ *алгебры* A.

Супералгебру $B(A,\tau) := B(A,\tau,\mathrm{Id})$ назовём *стандартным дублем* A.

Циклический дубль $\mathrm{B}_{n|n}$. Важный пример стандартного дубля — *циклический дубль* $\mathrm{B}_{n|n}$. Пусть Φ^n — прямая сумма n экземпляров поля Φ. Если $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \Phi^n$, то положим $a^{\tau} = (a_2,\ldots,a_n,a_1)$. Ясно, что τ — автоморфизм алгебры Φ^n порядка n. Положим $\mathrm{B}_{n|n} = B(\Phi^n,\tau)$.

В силу предложения 2.3 циклический дубль $\mathrm{B}_{n|n}$ является центральной простой правоальтернативной супералгеброй; $\mathrm{B}_{n|n}$ ассоциативна только при $n = 1$.

Расщепляемый композиционный дубль $\mathrm{B}_{2|2}(\nu)$. Пусть $\Phi^2 = \Phi e_1 \oplus \Phi e_2$ — расщепляемая композиционная алгебра над Φ с базисом $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ и стандартной инволюцией $*$: $(a,b)^* = (b,a)$. Обозначим через $\mathrm{B}_{2|2}(\nu)$ супералгебру $B(\Phi^2,*,\chi)$, где $\nu \in \Phi$ и $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & \nu\end{smallmatrix}\right)$ — матрица оператора χ в базисе $\{e_1,e_2\}$.

Предложение 2.4. *Расщепляемый композиционный дубль* $\mathrm{B}_{2|2}(\nu)$ *является центральной простой правоальтернативной супералгеброй.*

Нерасщепляемый композиционный дубль $\boldsymbol{B_{2|2}(\Gamma,*,\lambda,\mu)}$**.** Пусть Γ — конечное расширение поля Φ и $*$ — автоморфизм расширения Γ/Φ. Супералгебру $B(\Gamma,*,\chi)$, для которой выполнены следующие условия: Γ — поле, $\dim_\Phi \Gamma = 2$, $* \neq \mathrm{Id}$ и найдутся $\lambda \in \Phi$, $\mu \in \Gamma$, такие что для всех $a \in \Gamma$ $a^\chi = \lambda a^* + \mu a$, назовём *нерасщепляемым композиционным дублем* и обозначим через $B_{2|2}(\Gamma,*,\lambda,\mu)$.

Предложение 2.5. *$B_{2|2}(\Gamma,*,\lambda,\mu)$ является центральной простой правоальтернативной супералгеброй, но не является ω-дублем.*

Циклический ω-дубль $\boldsymbol{B\Big(\Gamma^n, \bigoplus_i \tau_i, \bigoplus_i \omega_i\Big)}$**.** Пусть $\Gamma^n = \Gamma_1 \oplus \ldots \oplus \Gamma_n$ — прямая сумма изоморфных полей и задан набор τ_i $(i = \overline{1,n})$ изоморфизмов

$$\tau_1 \colon \Gamma_1 \to \Gamma_n, \quad \tau_{i+1} \colon \Gamma_{i+1} \to \Gamma_i \quad (i = \overline{1,n-1}).$$

Положим также

$$\tau = \tau_1 \oplus \ldots \oplus \tau_n, \quad \omega = \omega_1 \oplus \ldots \oplus \omega_n,$$

где $\omega_1 \in \Gamma_1 = \Gamma, \ldots, \omega_n \in \Gamma_n$.

Если элемент ω обратим, то супералгебру $B(A,\tau,R_\omega)$ назовём *циклическим ω-дублем* и обозначим её через $B\Big(\Gamma^n, \bigoplus_i \tau_i, \bigoplus_i \omega_i\Big)$. В силу предложения 2.3 эта супералгебра правоальтернативна, но не ассоциативна, и является простой.

Предложение 2.6. *Циклический ω-дубль $B\Big(\Gamma^n, \bigoplus_i \tau_i, \bigoplus_i \omega_i\Big)$ централен тогда и только тогда, когда автоморфизм $\tau = \tau_1\tau_n\tau_{n-1}\ldots\tau_2$ порождает группу Галуа $\mathrm{Gal}(\Gamma/\Phi)$.*

2.1.3. Классификационные теоремы

Пусть $B = A \oplus M$ обозначает простую конечномерную правоальтернативную унитальную супералгебру абелева типа над полем Φ характеристики 0 с чётной частью A и нечётной частью $M \neq 0$.

Теорема 2.1*. *Пусть поле Φ алгебраически замкнуто. Тогда супералгебра $B = A \oplus M$ изоморфна одной из следующих супералгебр:* $\mathrm{M}_{1|1}(\Phi)$, $\mathrm{B}_{2|2}(\nu)$, $\mathrm{B}_{n|n}$ $(n \geqslant 1)$.

Теорема 2.2*. *Конечномерная центральная простая супералгебра $B = A \oplus M$ абелева типа изоморфна одной из следующих супералгебр:*

$$\Phi[\sqrt{1}], \quad \mathrm{M}_{1|1}(\Phi), \quad B(\Gamma,*,\omega), \quad \mathrm{B}_{2|2}(\nu), \quad B_{2|2}(\Gamma,*,\lambda,\mu),$$
$$B\Big(\Gamma^n, \bigoplus_i \tau_i, \bigoplus_i \omega_i\Big) \quad (n \geqslant 2),$$

где Γ — подходящее поле конечной степени над Φ.

2.1.4. Абелевы супералгебры, чётная часть которых поле

В [18] изучались простые супералгебры $B = \Gamma \oplus M$ абелева типа при условии, что чётная часть Γ является полем (такие супералгебры бесконечномерны, за исключением одного тривиального случая).

Предложение 2.7. *Пусть $B = \Gamma \oplus M$ — правоальтернативная унитальная супералгебра. Если Γ — поле и $M^2 \neq 0$, то супералгебра B является простой.*

Получена основная классификационная теорема для таких супералгебр.

Теорема 2.3. *Пусть поле Φ алгебраически замкнуто. Простая правоальтернативная супералгебра $B = \Gamma \oplus M$ абелева типа, в которой чётная часть Γ является полем (расширение поля Φ), изоморфна либо коммутативной альтернативной супералгебре $B_{1|2}$ или $B(\Gamma, D, 0)$ $(\operatorname{char}\Phi = 3)$, либо скрученной $(-1,1)$-супералгебре Шестакова $B(\Gamma, D, \gamma)$, либо скалярному ω-дублю $B(\Gamma, *, R_\omega)$.*

2.2. Супералгебры с сильно ассоциативной и сильно альтернативной чётной частью

2.2.1. Полупростота сильно ассоциативной чётной части

Подалгебра A в B называется *сильно ассоциативной*, если B является ассоциативным бимодулем над A. По определению всякая абелева супералгебра имеет сильно ассоциативную чётную часть.

В [21] доказана следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная унитальная супералгебра над полем Φ характеристики 0. Если чётная часть A сильно ассоциативна в B, то A полупроста.*

2.2.2. Супералгебры с полупростой сильно ассоциативной чётной частью

Супералгебры с полупростой сильно ассоциативной чётной частью изучались в [20]. Там были доказаны следующие классификационные теоремы.

Теорема 2.5. *Простые конечномерные правоальтернативные унитальные супералгебры с полупростой сильно ассоциативной чётной частью над полем Φ исчерпываются ассоциативными супералгебрами и супералгебрами абелева типа.*

Следствие. *Простая конечномерная правоальтернативная унитальная супералгебра с полупростой сильно ассоциативной чётной частью над алгебраически замкнутым полем изоморфна одной из следующих супералгебр:*

$$\mathrm{M}_n[\sqrt{1}], \quad \mathrm{M}_{m|n} \quad \mathrm{B}_{1|2} \ \ (\operatorname{char}(\Phi) = 3), \quad \mathrm{B}_{2|2}(\nu), \quad \mathrm{B}_{n|n}.$$

2.2.3. Полупростота сильно альтернативной чётной части

Подалгебра A в B называется *сильно альтернативной*, если B является альтернативным бимодулем над A.

По аналогии с доказательством теоремы 2.4 в [31] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.6. *Пусть $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная унитальная супералгебра над полем Φ характеристики 0. Если чётная часть A сильно альтернативна в B, то A полупроста.*

2.2.4. Супералгебры с полупростой сильно альтернативной чётной частью

В [47] описано строение конечномерных унитальных правоальтернативных супералгебр с полупростой сильно альтернативной чётной частью над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики, отличной от 2.

Слабый аннулятор. *Слабым аннулятором* (Weak Annihilator) супералгебры $B = A \oplus M$ назовём множество $A_0 + M_0$, которое обозначим через $\mathrm{WA}(B)$, если

$$M_0 = \{x \in M \mid x * M = 0\}, \quad A_0 = \{a \in A \mid a * M \subseteq M_0\}.$$

Если чётная часть A полупроста и сильно альтернативна, то слабый аннулятор $\mathrm{WA}(B)$ является идеалом в супералгебре; фактор-алгебра по слабому аннулятору имеет нулевой слабый аннулятор. Супералгебру назовём *WA-полупростой*, если её слабый аннулятор равен 0.

Напомним, что супералгебра называется *полупростой*, если она не имеет ненулевых градуированных идеалов с нулевым умножением.

Ветвление. Обозначим через $\mathrm{V}_{2|1} = \mathrm{V}_{2|1}(e_i, e_j)$ супералгебру с чётной частью $A = \Phi e_i \oplus \Phi e_j$ и нечётной $M = \Phi u_{ij}$, где ненулевыми произведениями базисных элементов e_i, e_j, u_{ij} являются только $e_i^2 = e_i$, $e_j^2 = e_j$, $e_i u_{ij} = u_{ij} e_j = u_{ij}$, $u_{ij}^2 = e_i$.

Легко проверить, что супералгебра $\mathrm{V}_{2|1}$ правоальтернативна, содержит единственный собственный суперидеал $\Phi e_i + \Phi u_{ij}$. Кроме того, она полупроста и WA-полупроста, но не разлагается в прямую сумму идеалов, являющихся простыми супералгебрами. Супералгебра $\mathrm{V}_{2|1}$ абелева и не альтернативна.

Будем называть супералгебру $\mathrm{V}_{2|1}(e_i, e_j)$ *ветвью*.

Пусть $B = A + M$, $A = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$ — разложение полупростой алгебры A в прямую сумму простых алгебр и $A_j = \Phi e_j$ — одномерная компонента в A. Если $B \cap \mathrm{V}_{2|1}(e_i, e_j) = \Phi e_j$, то *ветвлением* супералгебры B с помощью ветви $\mathrm{V}_{2|1}(e_i, e_j)$ назовём супералгебру $B^{(j,i)} = B \boxplus \mathrm{V}_{2|1}(e_i, e_j)$, определённую следующим образом.

1. Пространство $B^{(j,i)}$ является суммой векторных пространств B и $\mathrm{V}_{2|1}(e_i, e_j)$. Чётная часть супералгебры $B^{(j,i)}$ является суммой A и Φe_i, а нечётная часть — суммой M и $\Phi u_{i,j}$.

2. Пусть $\hat{A}_j = \sum\limits_{k \neq j} A_k$. Тогда $(\hat{A}_j + M) * u_{ij} = 0$ и подпространства B и $\mathrm{V}_{2|1}(e_i, e_j)$ являются подалгебрами в $B^{(j,i)}$.

Оператор (j,i) назовём *оператором ветвления*.

Пусть B — одна из супералгебр $\mathrm{B}_{n|n}$, в частности $\Phi[\sqrt{1}]$ при $n = 1$ или $\mathrm{V}_{2|1}(e_i, e_j)$. Обозначим через η цепочку (может быть, и пустую) операторов ветвления и назовём супералгебру B^η *ветвлением супералгебры* B.

Строение супералгебр с сильно альтернативной чётной частью.

Теорема 2.7. *Пусть $B = A \oplus M$ — конечномерная сильно альтернативная унитальная правоальтернативная супералгебра с полупростой чётной частью. Тогда она разлагается в прямую сумму WA-полупростой супералгебры $\check{B}$ и слабого аннулятора $\mathrm{WA}(B)$: $B = \check{B} \oplus \mathrm{WA}(B)$, причём слабый аннулятор $\mathrm{WA}(B)$ является суперидеалом супералгебры B и фактор по нему $B/\mathrm{WA}(B)$ изоморфен прямому слагаемому $\check{B}$.*

Теорема 2.8. *Всякая WA-полупростая сильно альтернативная унитальная правоальтернативная супералгебра с полупростой чётной частью разлагается в прямую сумму простых супералгебр $\mathrm{B}_{1|2}$, $\mathrm{S}_{4|2}$ $(\mathrm{char}\,\Phi = 3)$, $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}]$, $\mathrm{M}_{m|n}$, $\mathrm{B}_{2|2}(\nu)$ и ветвлений супералгебр $\mathrm{B}_{n|n}$ и $\mathrm{V}_{2|1}$.*

Следствие 1. *Всякая WA-полупростая унитальная ассоциативная супералгебра с полупростой чётной частью разлагается в прямую сумму простых ассоциативных супералгебр $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}]$ и $\mathrm{M}_{m|n}$.*

Следствие 2. *Всякая WA-полупростая унитальная альтернативная супералгебра с полупростой чётной частью разлагается в прямую сумму простых супералгебр $\mathrm{B}_{1|2}$, $\mathrm{S}_{4|2}$ $(\mathrm{char}\,\Phi = 3)$, $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}]$ и $\mathrm{M}_{m|n}$.*

Следствие 3. *Всякая WA-полупростая унитальная альтернативная супералгебра с полупростой чётной частью характеристики, отличной от 3, ассоциативна.*

Следствие 4. *Всякая простая унитальная правоальтернативная супералгебра с полупростой сильно альтернативной чётной частью либо альтернативна, либо абелева.*

2.3. Супералгебры ёмкости 1

Далее мы будем говорить, что *супералгебра $B = A \oplus M$ имеет ёмкость* 1, если фактор-алгебра чётной части A по её ниль-радикалу $\mathfrak{R}$ является простой алгеброй S. При этом алгебру S будем называть *простой компонентой чётной части*, если $A = S \oplus \mathfrak{R}$.

В [32,58] изучалось строение конечномерных правоальтернативных супералгебр ёмкости 1 с сильно альтернативной чётной частью над алгебраически замкнутым полем Φ. В [32] доказан ряд структурных теорем для всех случаев строения простой некоммутативной компоненты S. Например, если S является алгеброй матриц порядка выше 2, доказано следующее утверждение.

Предложение 2.8. *Супералгебра B при $M^2 \nsubseteq \mathfrak{R}$ является прямой суммой простой супералгебры $\check{B} = \mathrm{M}_n[\sqrt{1}]$ и супералгебры $\mathfrak{B} = \check{B}\mathfrak{R}$, причём супералгебра $\mathfrak{B}$ является идеалом B и $B/\mathfrak{B} \simeq \check{B}$.*

Работа [58] является продолжением [32] и посвящена доказательству того, что отщеплённый в [32] идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен.

Теорема 2.9. *Пусть $B = A \oplus M$ — правоальтернативная супералгебра с сильно альтернативной чётной частью ёмкости 1 над алгебраически замкнутым полем Φ; S — простая конечномерная некоммутативная компонента алгебры A, причём единица алгебры S является единицей в B; B — альтернативный унитальный бимодуль над A. Тогда $B = \check{B} \oplus \mathfrak{B}$, где $\check{B}$ — простая супералгебра (может быть, с нулевой нечётной частью), а $\mathfrak{B}$ — нильпотентный градуированный идеал супералгебры B.*

3. Унитальные супералгебры с ограничениями на чётную часть

3.1. Супералгебры с ниль-унитальной чётной частью

Исследование супералгебр без бимодульных ограничений началось в [17] с описания простых супералгебр с ниль-унитальной чётной частью.

Алгебра называется *ниль-унитальной*, если она получена внешним присоединением единицы к ниль-алгебре.

Была доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная супералгебра над полем Φ характеристики 0. Если чётная часть A ниль-унитальна и её единица является единицей в супералгебре B, то супералгебра B ассоциативна.*

3.2. Супералгебры с ассоциативно-коммутативной чётной частью

В [22] доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная унитальная супералгебра над полем Φ характеристики 0. Если A — ассоциативно-коммутативная алгебра, то B является супералгеброй абелева типа.*

3.3. Асимметричные дубли

В работах [24, 25] изучались простые правоальтернативные супералгебры, чётная часть которых — алгебра матриц второго порядка. В [25] доказана следующая теорема.

Теорема 3.3. *Всякая простая конечномерная правоальтернативная супералгебра* $B = A \oplus M$ *над полем* Φ, *у которой чётная часть совпадает с алгеброй матриц* $\mathrm{M}_2(\Phi)$ *порядка* 2, *изоморфна либо ассоциативной супералгебре Уолла* $\mathrm{W}_{2|2}(\omega)$, *либо альтернативной супералгебре Шестакова* $\mathrm{S}_{4|2}(\sigma)$ $(\mathrm{char}\,\Phi = 3)$, *либо асимметричному дублю* $\mathrm{B}_{4|4}(w)$.

Если основное поле алгебраически замкнуто, то ассоциативная супералгебра, указанная в теореме, изоморфна супералгебре Уолла $\mathrm{M}_2[\sqrt{1}]$; супералгебра $\mathrm{S}_{4|2}(\sigma)$ изоморфна $\mathrm{S}_{4|2}$; асимметричный дубль изоморфен супералгебре да Силвы—Мураками—Шестакова (см. [62]).

Простая альтернативная супералгебра $\mathrm{S}_{4|2}(\sigma)$, $\sigma \neq 0$, определена над полем характеристики 3. Нечётная часть этой супералгебры — стандартный бимодуль Кэли с базисом m_1, m_2 и следующей таблицей умножения нечётных элементов: $m_1^2 = \sigma e_{12}$, $m_1 m_2 = \sigma e_{22}$, $m_2 m_1 = -\sigma e_{11}$, $m_2^2 = -\sigma e_{21}$.

3.4. Супералгебры с полупростой чётной частью

В [26] был завершён основной этап изучения простых конечномерных унитальных правоальтернативных супералгебр. Была доказана следующая теорема.

Теорема 3.4. *Простая конечномерная правоальтернативная унитальная супералгебра с полупростой чётной частью над алгебраически замкнутым полем является*

— *либо одной из матричных супералгебр* $\mathrm{M}_{m|n}$, $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}]$, $\mathrm{B}_{4|4}(w)$, $\mathrm{S}_{4|2}$,
— *либо одной из абелевых супералгебр* $\mathrm{B}_{1|2}$, $\mathrm{B}_{n|n}$, $\mathrm{B}_{2|2}(\nu)$.

Кроме того, в работе получено описание правоальтернативных супералгебр с простой чётной частью. Таких супералгебр на удивление мало; для каждой такой супералгебры справедливо, что либо она является простой, либо её нечётная часть имеет нулевое умножение.

4. Сингулярные супералгебры

Под *сингулярной супералгеброй* мы понимаем простую правоальтернативную супералгебру с нулевым умножением в чётной части. Заметим, что в многообразиях альтернативных, йордановых и лиевых алгебр, как правило, нет простых супералгебр, чётные части которых имеют нулевое умножение.

4.1. Супералгебры малых размерностей

В [19] приведена классификация пятимерных сингулярных супералгебр с точностью до изоморфизма. Сначала там доказано, что не существует супералгебр $B = A \oplus M$, в которых $A^2 = 0$ и выполнено одно из ограничений: $\dim A = 1$, $\dim M \leqslant 2$. Значит, наименьшая размерность сингулярной супералгебры равна 5.

Рассмотрим супералгебру $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi) = A \oplus M$, в которой a_1, a_2 — базис A, m_1, m_2, m_3 — базис M и ненулевыми являются следующие произведения:

$$a_1m_1 = m_2, \quad m_1a_1 = -m_2, \quad a_1m_2 = m_3,$$
$$a_2m_2 = m_1, \quad a_2m_3 = -m_2, \quad m_3a_2 = m_2,$$
$$m_1m_2 = \varphi a_1 + \xi a_2, \quad m_3m_2 = -\xi a_1 + \psi a_2.$$

Легко видеть, что супералгебра $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$ является простой тогда и только тогда, когда $\xi^2+\varphi\psi \neq 0$. Кроме того, $B_{2|3}(-1, 0, 1) = B_{2|3}$. Впервые супералгебра $B_{2|3}$ появилась в [62].

Теорема 4.1. *Всякая простая правоальтернативная сингулярная супералгебра размерности не выше* 5 *изоморфна супералгебре вида* $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$.

Теорема 4.2. *Простые супералгебры* $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$ *и* $B_{2|3}(\varphi', \xi', \psi')$ *изоморфны тогда и только тогда, когда эквивалентны квадратичные формы, заданные матрицами*

$$\begin{pmatrix} \varphi & \xi \\ \xi & -\psi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \varphi' & \xi' \\ \xi' & -\psi' \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ простые супералгебры вида $B_{2|3}(p, 0, 1)$, где p — простое целое число, попарно неизоморфны, а также что всякая простая правоальтернативная сингулярная супералгебра размерности не выше 5 над алгебраически замкнутым полем изоморфна супералгебре $B_{2|3}$.

В [23] доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. *Не существует сингулярных супералгебр размерности* 6.

В разделе 4.5.5 будет приведён результат, решающий проблему размерности сингулярных супералгебр.

4.2. Линейно порождённые супералгебры

В [49] выделены два важных класса сингулярных супералгебр: линейно порождённые и алгебраически порождённые супералгебры.

Определение. Пусть $P = \mathrm{Ann}_l(B) = \{p \in B \mid pB = 0\}$ — левый аннулятор. Элементы множества $P \cap M$ называются *левыми аннуляторами*.

Супералгебру B назовём *алгебраически порождённой* (над P), если $B = \mathrm{alg}(A \cup P)$, т. е. алгебра B порождается множеством $A \cup P$.

Супералгебра $B = A \oplus M$ с левым аннулятором p называется *линейно порождённой* или *линейной* (над A), если $M = \Phi p + Ap$.

Линейные супералгебры полностью изучены: выяснена их структура, описаны автоморфизмы и дифференцирования.

В [49] начинается изучение сингулярных супералгебр, порождённых чётной частью и переключателем (одним левым аннулятором). Основной пример таких супералгебр даёт конструкция супералгебры двух отображений, напоминающая йорданову супералгебру невырожденной билинейной суперформы. Приведён критерий простоты и правой альтернативности такой супералгебры. В конечномерном случае указан её канонический базис и введено понятие супералгебры $B_{2n|2n+1}(H)$, ассоциированной с невырожденной симметрической матрицей H.

Пусть E — симплектический базис пространства A относительно кососимметрической формы $\langle\, , \rangle$. Базис $E \cup Ep \cup \{p\}$ называется *каноническим базисом* супералгебры $B_{2n|2n+1}(H)$. Таблица умножения элементов канонического базиса имеет вид

$$\begin{cases} a \cdot bp = -bp \cdot a = \langle a, b\rangle p, \\ [X]p = H[E], \end{cases}$$

где $[X] = [E^*]p$ и $*$ обозначает сопряжение на A относительно формы $\langle\, , \rangle$. Доказана следующая теорема.

Теорема 4.4. *Всякая конечномерная сингулярная супералгебра, линейно порождённая над чётной частью, изоморфна супералгебре $B_{n|n+1}(H)$, ассоциированной с подходящей невырожденной симметрической матрицей, причём порядок матрицы является чётным числом, а размерность супералгебры сравнима с* 1 *по модулю* 4.

Теорема 4.5. *Супералгебры $B_{2n|2n+1}(H)$ и $B_{2n|2n+1}(H')$ изоморфны тогда и только тогда, когда квадратичные формы, определяемые матрицами H и H', эквивалентны.*

Теорема 4.6. *Алгебраически порождённая сингулярная супералгебра с двумерной чётной частью является линейно порождённой и, значит, изоморфна супералгебре $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$.*

Указаны также примеры бесконечномерных сингулярных супералгебр; у таких супералгебр чётная часть бесконечномерна.

4.3. Алгебраически порождённые супералгебры

В [50] доказано, что всякая алгебраически порождённая супералгебра с невырожденным переключателем либо линейна, либо является расширенным дублем. Конструкция расширенного дубля является аналогом скрученной супералгебры векторного типа, введённой И. П. Шестаковым при изучении простых альтернативных и $(-1,1)$-супералгебр. С помощью конструкции расширенного дубля построены новые примеры сингулярных супералгебр.

Определение. Пусть $B = B_0 \oplus B_1$ — сингулярная супералгебра. Элемент $p \in B_1 \cap \mathrm{Ann}_l(B)$ назовём *переключателем.*

Определение. Переключатель p назовём *невырожденным*, если $ap = 0$ влечёт $a = 0$ для любого $a \in B_0$.

Вначале доказана теорема о спектре оператора $D = R_p^2$, где R_a — оператор правого умножения на элемент $a \in A$.

Теорема 4.7. *Пусть B — алгебраически порождённая сингулярная супералгебра с невырожденным переключателем p. Тогда спектр $\Lambda_0(D)$ оператора $D = R_p^2$ на чётной части состоит из чисел $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_m$, где все $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_m$ попарно различны. Спектр $\Lambda_1(D)$ оператора D на нечётной части состоит из чисел $0, \pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_m$. Ядро оператора D совпадает с левым аннулятором супералгебры $\ker D = \mathfrak{L}(B) = \{q \in M \mid qB = 0\}$.*

Доказана теорема о линейной структуре алгебраически порождённой сингулярной супералгебры с невырожденным переключателем.

Теорема 4.8. *Пусть B — алгебраически порождённая сингулярная супералгебра, p — невырожденный переключатель и $D = R_p^2$. Тогда*

$$B = A \oplus X \oplus X', \quad \ker D = X = A(Ap), \quad B^D = A + X'.$$

Приведены критерии правой альтернативности и простоты алгебраически порождённых супералгебр, в которых чётная часть тривиальна (имеет нулевое умножение).

В [51] продолжается изучение конечномерных сингулярных алгебраически порождённых супералгебр.

Доказаны следующие два результата.

Теорема 4.9. *Конечномерная сингулярная алгебраически порождённая супералгебра над бесконечным полем содержит невырожденный переключатель.*

Теорема 4.10. *Всякая сингулярная супералгебра $B = A \oplus M$ с двумерной чётной частью A изоморфна супералгебре $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$. В частности, не существует бесконечномерных сингулярных супералгебр с двумерной чётной частью.*

4.4. Расширенные дубли

Пусть A и X — конечномерные пространства, $(x_1, \ldots, x_n)$ — базис X. Положим $p = x_1 + \ldots + x_n$. Пусть $D\colon A \to A$ — невырожденный линейный оператор, $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ — набор попарно перестановочных линейных операторов $\psi_i\colon A \to A$, таких что $\psi_1 + \ldots + \psi_n = 1_A$, $\sigma\colon A \otimes A \to \mathrm{End}_\Phi X$ — линейное отображение, такое что

$$(a\otimes b)^\sigma=-(b\otimes a)^\sigma,\quad (a^{\psi_i D}\otimes b)^\sigma=(b^{\psi_i D}\otimes a)^\sigma,\quad x_i^{(a\otimes b)^\sigma}=p^{(a\otimes b^{\psi_i})^\sigma}.$$

Предположим также, что пространство X не содержит собственных $(A\otimes A)^\sigma$-инвариантных подпространств.

Пусть $[A]$ — линейная копия пространства A. Рассмотрим градуированное пространство $B=B_0\oplus B_1$, где $B_0=A$, $B_1=X\oplus[A]$.

Определим произведение однородных элементов из $B_0\cup B_1$:

а) $a\cdot x_i=\left[a^{\psi_i}\right]$, $[a]\cdot x_i=a^{\psi_i D}$,

б) $a\cdot[b]=-[b]\cdot a=p^{(a\otimes b)^\sigma}$,

в) остальные произведения базисных элементов нулевые.

Супералгебру B обозначим через $B(A,X,D,\sigma,\Psi)$ и назовём (*сингулярным*) *расширенным дублем* (*алгебры A с нулевым умножением*).

Теорема 4.11. *Всякая конечномерная алгебраически порождённая сингулярная супералгебра с невырожденным переключателем является расширенным дублем с нулевым правым аннулятором.*

4.5. Примеры расширенных дублей и их размерности

4.5.1. Стандартная супералгебра $B_{2n|3n}$

Сначала построим *стандартную супералгебру* $B_{2n|3n}$ (см. [50]), которая представляет собой естественное обобщение супералгебры $B_{2|3}$. Базисными элементами $B=B_{2n|3n}$ являются следующие однородные элементы:

$$A\colon a_1,\dots,a_n,\quad b_1,\dots,b_n,\quad X\colon x_1,\dots,x_n,\quad X'\colon x'_1,\dots,x'_n,\quad y'_1,\dots,y'_n.$$

Обозначим через τ цикл $(1,2,\dots,n)$, т. е. $1^\tau=2,\dots,\ (n-1)^\tau=n$, $n^\tau=1$. Определим произведения базисных элементов, считая, что выполнены равенства $A^2=XB={X'}^2=0$. Ненулевыми считаются только следующие произведения однородных элементов:

$$a_ix_i=x'_i,\quad b_ix_i=y'_i,$$
$$a_iy'_i=-y'_ia_i=-b_ix'_i=x'_ib_i=x_{i\tau},\quad x'_ix_i=a_i,\quad y'_ix_i=-b_i.$$

В частности, произведения элементов вида p_iq_j, где p_i, q_j — базисные элементы с различными индексами, т. е. $i\neq j$, являются нулевыми.

4.5.2. Расширенный дубль размерности $5n+4m$

Построим супералгебру $B=B_{2n+2m|3n+2m}=A\oplus M$ (см. [50]) с невырожденным переключателем, которая является расширенным дублем и имеет набор размерностей

$$(\dim A,\dim M)=(2n+2m,\,3n+2m),\quad 1\leqslant n\geqslant m\geqslant 0.$$

Рассмотрим базисные элементы алгебры B:

$$A\colon a_1,\ldots,a_n,\quad b_1,\ldots,b_n,\quad e_1,\ldots,e_m,\quad g_1,\ldots,g_m,$$
$$X\colon x_1,\ldots,x_n,\quad X'\colon x'_1,\ldots,x'_n,\quad y'_1,\ldots,y'_n,\quad z'_1,\ldots,z'_m,\quad t'_1,\ldots,t'_m.$$

Назовём следующие пары элементов *согласованными*:

— (c,x), если $c\in a,b,e,g$,
— (w,x), если $w\in x',y',z',t'$,
— (a,y'), (b,x'), (e,t'), (g,z').

Определим произведения базисных элементов, считая, что выполнены равенства $A^2=XB={X'}^2=0$. Обозначим через τ циклическую подстановку $(1,2,\ldots,n)$, т. е. $1^\tau=2,\ldots,\ (n-1)^\tau=n,\ n^\tau=1$. Перечислим ненулевые произведения базисных элементов:

$$a_ix_i=x'_i,\quad b_ix_i=y'_i,\quad e_ix_i=z'_i,\quad g_ix_i=t'_i,$$
$$a_iy'_i=-y'_ia_i=-b_ix'_i=x'_ib_i=x_{i\tau},\quad e_it'_i=-t'_ie_i=x_i,\quad g_iz'_i=-z'_ig_i=-x_i,$$
$$x'_ix_i=a_i,\quad y'_ix_i=-b_i,\quad z'_ix_i=e_i,\quad t'_ix_i=-g_i.$$

Нулевыми считаются произведения несогласованных элементов и произведения вида p_iq_j, где p_i, q_j — базисные элементы и $i\neq j$.

4.5.3. Расширенный дубль $B_{8|11}$ размерности 19

Положим $B=A\oplus M$ (см. [51]), где $A=A_1\oplus A_{-1}$, $M=X\oplus M_1\oplus M_{-1}$,

$$A_1=\operatorname{span}\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle,\quad A_{-1}=\operatorname{span}\langle b_1,b_2,b_3,b_4\rangle,$$
$$M_1=A_1p,\quad M_{-1}=A_{-1}p,\quad X=\operatorname{span}\langle x_1,x_2,x_3\rangle.$$

Определим умножение однородных базисных элементов, считая, что выполнены соотношения

$$A^2=XB=(AX)^2=(M_1+M_{-1})\circ A=0,$$
$$a(bp)=-b(ap),\quad a(a'p)=b(b'p)=0$$

для любых $a,a'\in A_1$, $b,b'\in A_{-1}$. Перечислим ненулевые произведения однородных базисных элементов:

$$a_1x_1=a_1p,\quad b_1x_1=b_1p,\quad a_2x_2=a_2p,\quad b_2x_2=b_2p,$$
$$a_3x_3=a_3p,\quad b_3x_3=b_3p,\quad a_4x_2=a_4p,\quad b_4x_2=b_4p,$$
$$a_1(b_1p)=-b_1(a_1p)=x_2,\quad a_2(b_2p)=-b_2(a_2p)=x_3,$$
$$a_3(b_3p)=-b_3(a_3p)=x_2,\quad a_4(b_4p)=-b_4(a_4p)=x_1,$$
$$(a_ip)x_i=a_i,\quad (b_ip)x_i=-b_i\quad (i=1,2,3),$$
$$(a_4p)x_2=a_4,\quad (b_4p)x_2=-b_4.$$

4.5.4. Расширенный дубль $B_{14|17}$ размерности 31

Положим $B = A \oplus M$ (см. [51]), где $A = A_1 \oplus A_{-1}$, $M = X + M_1 \oplus M_{-1}$,

$$A_1 = \mathrm{span}\langle a_1, \ldots, a_7\rangle, \quad A_{-1} = \mathrm{span}\langle b_1, \ldots, b_7\rangle,$$
$$M_1 = A_1 p, \quad M_{-1} = A_{-1} p, \quad X = \mathrm{span}\langle x_1, x_2, x_3\rangle.$$

Определим умножение однородных базисных элементов, считая, что выполнены соотношения

$$A^2 = XB = (AX)^2 = (M_1 + M_{-1}) \circ A = 0,$$
$$a(bp) = -b(ap), \quad a(a'p) = b(b'p) = 0$$

для любых $a, a' \in A_1$, $b, b' \in A_{-1}$. Перечислим ненулевые произведения однородных базисных элементов:

$$a_i x_i = a_i p, \quad b_i x_i = b_i p, \quad a_{i+4} x_i = a_{i+4} p, \quad b_{i+4} x_i = b_{i+4} p \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$a_1(b_1 p) = -b_1(a_1 p) = a_5(b_5 p) = -b_5(a_5 p) = x_2,$$
$$a_2(b_2 p) = -b_2(a_2 p) = a_6(b_6 p) = -b_6(a_6 p) = x_3,$$
$$a_3(b_3 p) = -b_3(a_3 p) = a_7(b_7 p) = -b_7(a_7 p) = x_2,$$
$$a_4(b_4 p) = -b_4(a_4 p) = x_1,$$
$$(a_i p)x_i = a_i, \quad (a_{i+4} p)x_i = a_{i+4} \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$(b_i p)x_i = -b_i, \quad (b_{i+4} p)x_i = -b_{i+4} \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$(a_4 p)x_2 = a_4, \quad (b_4 p)x_2 = -b_4.$$

4.5.5. Размерности расширенных дублей

В [51] доказано отсутствие расширенных дублей размерностей 7, 8 и 11 и существование дублей любой чётной размерности начиная с 10.

Из размерностей примеров расширенных дублей следует, что не существует сингулярных расширенных дублей $B = A \oplus M$ размерности 6, 7, 8 и 11. Для всех остальных значений $N \geqslant 5$ существуют N-мерные сингулярные расширенные дубли.

4.6. Алгебраическая порождённость сингулярных супералгебр

Статья [52] является завершающей в цикле работ авторов, посвящённых конечномерным сингулярным супералгебрам. В предыдущих работах были изучены алгебраически порождённые сингулярные супералгебры и доказано, что всякая такая супералгебра имеет структуру расширенного дубля. В этой статье доказывается следующая теорема.

Теорема 4.12. *Сингулярная супералгебра с конечномерной чётной частью является алгебраически порождённой, значит конечномерной, супералгеброй.*

Отсюда вытекает, что всякая сингулярная супералгебра имеет структуру расширенного дубля.

5. Дифференцирования и автоморфизмы простых супералгебр

5.1. Абелевы супералгебры

Предложение 5.1. $\mathrm{B}_{2|2}(\nu) \simeq \mathrm{B}_{2|2}(\nu')$ *тогда и только тогда, когда* $\nu = \nu'$.

Предложение 5.2. *Если* $\nu \neq 0$, *то* $\mathrm{Aut}\,\mathrm{B}_{2|2}(\nu) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. *Кроме того,* $\mathrm{Aut}\,\mathrm{B}_{2|2}(0) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Предложение 5.3. $\mathrm{Aut}\,\mathrm{B}_{n|n} \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{n}$.

Теорема 5.1. *Группа автоморфизмов простой конечномерной правоальтернативной абелевой супералгебры B абелева. Точно так же всякое дифференцирование супералгебры B является нулевым.*

5.2. Асимметричные дубли

5.2.1. Изоморфизмы и специализации дублей

Определение. Матрицы w и w' из $\mathrm{M}_2(\Phi)$ назовём *эквивалентными*, если существуют скаляр $\varepsilon \in \Phi$ и матрица $s \in \mathrm{SL}_2$, такие что $w' = \varepsilon^2 w^s$.

Теорема 5.2. *Дубли* $\mathrm{B}_{4|4}(w)$ *и* $\mathrm{B}_{4|4}(w')$ *изоморфны тогда и только тогда, когда матрица w' и w эквивалентны.*

Как хорошо известно, всякая матрица в зависимости от её спектра подобна либо диагональной, либо жордановой, либо обобщённо жордановой. Заметим, что $\mathrm{tr}(w) \neq 0$. Более точно, имеют место следующие варианты.

1. Собственные значения матрицы w различны и содержатся в поле Φ. Тогда матрица w подобна диагональной, но не скалярной.
2. Собственные значения матрицы w различны и не содержатся в поле Φ. Тогда матрица w подобна обобщённо жордановой $w = \alpha + \beta\zeta$ (матрица $e_{12} + \zeta^2 e_{21}$ для элемента $\zeta \notin \Phi$, такого что $\zeta^2 \in \Phi$, отождествляется с самим элементом ζ).
3. Собственные значения совпадают, значит, содержатся в поле Φ. Тогда матрица w либо скалярна, либо подобна жордановой.

Тем самым, возникают три типа асимметричных дублей: *диагональный*, *жорданов* и *обобщённо жорданов*, которыми исчерпываются все асимметричные дубли над произвольным полем.

Среди диагональных дублей имеются два класса дублей, имеющих нетипичное поведение при автоморфизмах и дифференцированиях: скалярные и вырожденные.

Дубль, определяемый скалярной матрицей λ, называется *скалярным*. Заметим, что в скалярных дублях пространство M как правый модуль над M_2 «ассоциативен слева», пространство M — ассоциативный левый модуль над M_2, однако сам бимодуль не является альтернативным.

Отметим наиболее красивый скалярный дубль, который назовём *исключительным*: $\mathrm{E}_{4|4} = \mathrm{B}_{4|4}(1/2)$, т. е. его определяющая матрица совпадает с $1/2$. Таблица умножения однородных элементов исключительного дубля $\mathrm{E}_{4|4}$ записывается наиболее простым образом:

$$[a][b] = a\,\mathrm{tr}(b), \quad [a]b = [a\bar{b}], \quad a[b] = [ab].$$

5.2.2. Изоморфизм специальных дублей

Предложение 5.4. *Диагональные дубли $B = \mathrm{B}_{4|4}(\lambda e_{11} + \mu e_{22})$ и $B' = \mathrm{B}_{4|4}(\lambda' e_{11} + \mu' e_{22})$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\varepsilon \in \Phi^{\times}$, что $\lambda' = \varepsilon^2\lambda$, $\mu' = \varepsilon^2\mu$ или $\lambda' = \varepsilon^2\mu$, $\mu' = \varepsilon^2\lambda$.*

В частности, скалярные дубли $\mathrm{B}_{4|4}(\lambda)$ и $\mathrm{B}_{4|4}(\lambda')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\lambda' = \varepsilon^2\lambda$.

Жордановы дубли $\mathrm{B}_{4|4}(\lambda + e_{12})$ и $\mathrm{B}_{4|4}(\lambda' + e_{12})$ изоморфны тогда и только тогда, когда имеется такой скаляр $\varepsilon \in \Phi^{\times}$, что $\lambda' = \varepsilon^2\lambda$.

Обобщённо жордановы дубли $\mathrm{B}_{4|4}(\lambda + \mu\zeta)$ и $\mathrm{B}_{4|4}(\lambda' + \mu'\zeta')$ изоморфны тогда и только тогда, когда имеется такой скаляр $\varepsilon \in \Phi^{\times}$, что $\lambda + \mu\zeta = \varepsilon^2(\lambda' \pm \mu'\zeta')$.

5.2.3. Автоморфизмы асимметричных дублей

Теорема 5.3. *Группа автоморфизмов скалярного дубля $\mathrm{B}_{4|4}(\lambda)$ является прямым произведением $U_2 \times \mathrm{SL}_2$, где $U_2 = \{\pm 1\}$. Если w не скалярная матрица, то группа автоморфизмов дубля $\mathrm{B}_{4|4}(w)$ абелева.*

В частности,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Aut}\,\mathrm{B}_{4|4}(\lambda e_{11} + \mu e_{22}) \simeq U_2 \times \Phi^{\times} \quad (\lambda \neq \mu),\\
&\mathrm{Aut}\,\mathrm{B}_{4|4}(\lambda + e_{12}) \simeq U_2 \times \Phi,\\
&\mathrm{Aut}\,\mathrm{B}_{4|4}(\lambda + \mu\zeta) = U_2 \times U_{\zeta^2}, \quad \text{где} \quad U_{\zeta^2} := \{\alpha + \beta\zeta \mid \alpha^2 - \beta^2\zeta^2 = 1\}.
\end{aligned}$$

Например, если $\Phi = \mathbb{R}$, а $\zeta = i$, то

$$U_{\zeta^2} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in [0, 2\pi) \right\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

5.2.4. Дифференцирования асимметричных дублей

Определение. Линейное отображение $D\colon B \to B$ супералгебры $B = A + M$ называется *чётным дифференцированием*, если $A^D \subseteq A$, $M^D \subseteq M$ и для

любых $x, y \in A \cup M$
$$(xy)^D = x^D y + xy^D.$$

Теорема 5.4. *Алгебра чётных дифференцирований скалярного дубля $\mathrm{B}_{4|4}(\lambda)$ изоморфна $\mathfrak{sl}_2$. Алгебры чётных дифференцирований остальных дублей одномерны, значит, абелевы.*

Определение. Линейное отображение $D\colon B \to B$ супералгебры $B = A + M$ называется *нечётным дифференцированием*, если $A^D \subseteq M$, $M^D \subseteq A$ и для любых $x, y \in A \cup M$
$$(xy)^D = (-1)^{|y|} x^D y + xy^D.$$

Теорема 5.5. *Ненулевые нечётные дифференцирования имеют только вырожденные дубли. Более точно, нечётное дифференцирование D вырожденного дубля $\mathrm{B}_{4|4}(\lambda e_{22})$ задаётся правилами*
$$a^D = -\lambda\beta[e_{22} a e_{12}],\ [a]^D = \beta a e_{12} \text{ при подходящем } \beta \neq 0.$$
Супералгебра дифференцирований любого нескалярного дубля является абелевой. Супералгебра дифференцирований скалярного дубля изоморфна $\mathfrak{sl}_2$.

5.3. Сингулярные супералгебры

5.3.1. Дифференцирования супералгебры $\mathrm{B}_{2n|2n+1}$

Теорема 5.6. *Супералгебра дифференцирований $\mathfrak{D} = \operatorname{Der} \mathrm{B}_{2n|2n+1}$ как супералгебра Ли относительно операции суперкоммутирования $[a, b]_s = ab - (-1)^{|a|\,|b|} ba$ имеет вид*
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_1,$$
где $\mathfrak{D}_0 = \{\bar{S} \mid S \in \mathrm{S}_{2n} \cap C(J)\}$, $\mathfrak{D}_1 = \{\bar{S} \mid S \in \mathrm{S}_{2n} \cap C(J)\}$; $C(J)$ — централизатор матрицы J в алгебре $\mathrm{M}_{2n}(\Phi)$; $\mathrm{S}_{2n} = \{S \in \mathrm{M}_{2n}(\Phi) \mid S^t = -S\}$ — пространство кососимметрических матриц. Действия стандартных дифференцирований производятся по формулам
$$J = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$
$\bar{S}_0 \in \mathfrak{D}_0$, $p^{\bar{S}_0} = 0$, $[E]^{\bar{S}_0} = S[E]$, $[Ep]^{\bar{S}_0} = S[Ep]$, $\bar{S}_1 \in \mathfrak{D}_1$, $p^{\bar{S}_1} = 0$, $[E]^{\bar{S}_1} = S[E]$, $[Ep]^{\bar{S}_1} = SJ[Ep]$.

Супералгебра $\mathfrak{D}$ имеет одномерный суперцентр; фактор по суперцентру является простой супералгеброй Ли типа (A) в классификации Каца [42].

5.3.2. Автоморфизмы супералгебры $\mathrm{B}_{2n|2n+1}$

Теорема 5.7. *Группы* $\mathrm{Aut}\,\mathrm{B}_{2n|2n+1}$ *и* $\Phi^{\times} \times Sp_{2n}(\Phi)$ *изоморфны.*

Строение симплектических групп $Sp_{2n}(\Phi)$ описано в [38]. В частности, фактор-группа $G/Z(G)$, где $G = \mathrm{Aut}\,\mathrm{B}_{2n|2n+1}$, по центру $Z(G)$ является простой.

6. Открытые вопросы и задачи

1. Выяснить, существует ли унитальная простая правоальтернативная супералгебра, чётная часть которой совпадает с алгеброй верхнетреугольных матриц порядка 2.
2. Выяснить, является ли полупростой чётная часть простой унитальной правоальтернативной супералгебры.
3. Выяснить, верно ли, что простая правоальтернативная супералгебра либо унитальна, либо сингулярна.
4. Классифицировать сингулярные супералгебры размерности 10.
5. Описать дифференцирования и автоморфизмы сингулярных супералгебр размерности 10, 19 и 31.
6. Изучить бипредставления унитальных супералгебр, в частности асимметричных дублей.
7. Изучить бипредставления пятимерных сингулярных супералгебр.

Литература

[1] Гришин А. В., Пчелинцев С. В. Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6 // Матем. сб. — 2016. — Т. 207. — С. 54—72.

[2] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — Мир, 1964.

[3] Желябин В. Н. Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой чётной частью // Алгебра и логика. — 2002. — Т. 41. — С. 276—310.

[4] Желябин В. Н. Простые йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой чётной частью // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57. — С. 1262—1279.

[5] Желябин В. Н., Шестаков И. П. Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной чётной частью // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45. — С. 1046—1072.

[6] Зельманов Е. И. О разрешимости йордановых ниль-алгебр // Исследования по теории колец и алгебр. Т. 16. — Тр. Ин-та матем. СО АН СССР, 1989. — С. 37—54.

[7] Зельманов Е. И., Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54. — С. 676—693.

[8] Кантор И. Л. Йордановы и лиевы супералгебры, определённые алгеброй Пуассона. — Изд-во Томск. ун-та, 1989. — С. 55—80.

[9] Кемер А. Р. Многообразия и Z_2-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — Т. 48. — С. 1042—1059.

[10] Кемер А. Р. Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26. — С. 597—641.

[11] Кузьмин Е. Н. Алгебры Мальцева и их представления // Алгебра и логика. — 1968. — Т. 7. — С. 48—69.

[12] Михеев И. М. О простых правоальтернативных кольцах // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16. — С. 682—710.

[13] Писаренко Н. А. Веддерберново разложение в конечномерных альтернативных супералгебрах // Алгебра и логика. — 1993. — Т. 32. — С. 428—440.

[14] Пожидаев А. П., Шестаков И. П. Некоммутативные йордановы супералгебры степени $n > 2$ // Алгебра и логика. — 2010. — Т. 49. — С. 26—59.

[15] Пожидаев А. П., Шестаков И. П. Простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры характеристики 0 // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54. — С. 389—406.

[16] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015. — Т. 79. — С. 131—158.

[17] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с унитарной чётной частью над полем характеристики 0 // Мат. заметки. — 2016. — Т. 100. — С. 577—585.

[18] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые правоальтернативные супералгебры абелева типа, чётная часть которых является полем // Изв. РАН. Сер. матем. — 2016. — Т. 80. — С. 247—257.

[19] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые 5-мерные правоальтернативные супералгебры с тривиальной чётной частью // Сиб. матем. журн. — 2017. — Т. 58. — С. 1387—1400.

[20] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с полупростой сильно ассоциативной чётной частью // Матем. сб. — 2017. — Т. 208. — С. 55—69.

[21] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные унитальные супералгебры с сильно ассоциативной чётной частью // Матем. сб. — 2017. — Т. 208. — С. 73—86.

[22] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные унитальные супералгебры с ассоциативно-коммутативной чётной частью над полем характеристики нуль // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82. — С. 136—153.

[23] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Сингулярные 6-мерные супералгебры // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 92—105.

[24] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые асимметричные дубли, их автоморфизмы и дифференцирования // Алгебра и логика. — 2019. — Т. 58, № 11. — С. 627—649.

[25] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые унитальные правоальтернативные супералгебры над алгеброй матриц порядка 2 // Алгебра и логика. — 2019. — Т. 58. — С. 108—131.

[26] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые правоальтернативные супералгебры с полупростой чётной частью // Сиб. матем. журн. — 2020. — Т. 61, № 2. — С. 385—407.

[27] Скосырский В. Г. Правоальтернативные алгебры // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23. — С. 185—192.

[28] Скосырский В. Г. Первичные йордановы алгебры и конструкции Кантора // Алгебра и логика. — 1994. — Т. 33. — С. 301—316.

[29] Слинько А. М., Шестаков И. П. Правые представления алгебр // Алгебра и логика. — 1974. — Т. 13. — С. 544—588.

[30] Филиппов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П. Днестровская тетрадь. Нерешённые проблемы теории колец и модулей. — Ин-т математики СО РАН, 1993.

[31] Шашков О. В. Конечномерные правоальтернативные унитальные супералгебры с сильно альтернативной чётной частью // Сиб. матем. журн. — 2020. — Т. 61, № 8. — С. 1159—1176.

[32] Шашков О. В. Правоальтернативные супералгебры ёмкости 1 с сильно альтернативной чётной частью // Алгебра и логика. — 2020. — Т. 59. — С. 260—281.

[33] Шестаков И. П. Супералгебры и контрпримеры // Сиб. матем. журн. — 1991. — Т. 32. — С. 187—196.

[34] Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. — 1997. — Т. 36. — С. 675—716.

[35] Шестаков И. П. Простые $(-1,1)$-супералгебры // Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37. — С. 721—739.

[36] Albert A. A. On right alternative algebras // Ann. Math. — 1949. — Vol. 50. — P. 318—328.

[37] Albert A. A. The structure of right alternative algebras // Ann. Math. — 1954. — Vol. 59. — P. 408—417.

[38] Artin E. Geometric algebra. — Dover Publ., 2016.

[39] Carlsson R. Malcev-Moduln // J. Reine Angew. Math. — 1976. — Vol. 281. — P. 199—210.

[40] Eilenberg S. Extensions of General Algebras // Ann. Soc. Polon. Math. — 1948. — Vol. 21. — P. 125—134.

[41] Jacobson N. Structure of alternative and Jordan bimodules // Osaka J. Math. — 1954. — Vol. 6. — P. 1—71.

[42] Kac V. G. Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Commun. Algebra. — 1977. — Vol. 5. — P. 1375—1400.

[43] Kac V. G. Lie superalgebras // Adv. Math. — 1977. — Vol. 26. — P. 8—96.

[44] Martínez C., Zelmanov E. I. Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic // J. Algebra. — 2001. — Vol. 236. — P. 575—629.

[45] McCrimmon K. Speciality and non-speciality of two Jordan superalgebras // J. Algebra. — 1992. — Vol. 149. — P. 326—351.

[46] Medvedev Yu. A., Zelmanov E. I. Some counterexamples in the theory of Jordan algebras // Nonassociative algebraic models (Zaragoza, 1989). — 1992. — P. 1—16.

[47] Murakami L. S. I., Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. Finite-dimensional right alternative superalgebras with semisimple strongly alternative even part // J. Algebra. — 2019. — Vol. 528. — P. 150—176.

[48] Murakami L. S. I., Shestakov I. P. Irreducible unital right alternative bimodules // J. Algebra. — 2001. — Vol. 246, no. 12. — P. 897—914.

[49] Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. Linearly generated singular superalgebras // J. Algebra. — 2020. — Vol. 546. — P. 580—603.

[50] Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. Algebraically Generated Superalgebras // Russ. Math. — 2021. — Vol. 65, no. 6. — P. 57—72.

[51] Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. The structure of singular superalgebras with a 2-dimensional even part and new examples of singular superalgebras // Algebra Logic. — 2023. — Vol. 61, no. 6. — P. 506—523.

[52] Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. A finite-dimensional singular superalgebra is algebraically generated // J. Algebra. — 2024. — Vol. 645. — P. 86—93.

[53] Pchelintsev S. V., Shestakov I. P. Prime $(-1, 1)$ and Jordan monsters and superalgebras of vector type // J. Algebra. — 2015. — Vol. 423. — P. 54—86.

[54] Racine M. L., Zelmanov E. I. Simple Jordan superalgebras // Non-Associative Algebra and Its Applications / González S., ed. — Springer, 1994. — P. 344—349.

[55] Schafer R. D. Representations of alternative algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 72, no. 1. — P. 1—17.

[56] Schafer R. D. An Introduction to Nonassociative Algebras. — Academic Press, 1966. —

[57] Scheunert M. The Theory of Lie Superalgebras: An Introduction. — Berlin: Springer, 2006.

[58] Shashkov O. V. On the Wedderburn's principal theorem in right alternative superalgebras of capacity 1 // Sib. Electron. Math. Rep. — 2020. — Vol. 17. — P. 1571—1579.

[59] Svartholm N. On the algebras of relativistic quantum theories // Proc. Royal Phys. Soc. Lund. — 1942. — Vol. 12. — P. 94—108.

[60] Tits J. Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles. I. Construction // Indag. Math. — 1966. — Vol. 69. — P. 223—237.

[61] Wall C. T. C. Graded Brauer groups // J. Reine Angew. Math. — 1964. — Vol. 213. — P. 187—199.

[62] Da Silva J. P., Murakami L. S. I., Shestakov I. P. On right alternative superalgebras // Commun. Algebra. — 2016. — Vol. 44. — P. 240—252.