Вычисление группы компонент произвольной вещественной алгебраической группы

Д. А. ТИМАШЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: timashev@mccme.ru

УДК 512.74+512.752+512.812

Ключевые слова: вещественная алгебраическая группа, группа компонент, расщепимый тор, вещественные когомологии Галуа.

Аннотация

Мы вычисляем в явном виде группу компонент связности $\pi_0 G(\mathbb{R})$ вещественной группы Ли $G(\mathbb{R})$ для произвольной (не обязательно линейной) связной алгебраической группы G, определённой над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. В частности, оказывается, что $\pi_0 G(\mathbb{R})$ всегда является элементарной абелевой 2-группой. Ответ выглядит особенно наглядно в случаях, когда G — линейная алгебраическая группа или абелево многообразие. Вычисление основано на структурных результатах об алгебраических группах и методах теории когомологий Галуа.

Abstract

D. A. Timashev, Computation of the component group of an arbitrary real algebraic group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 4, pp. 199—211.

We compute explicitly the group of connected components $\pi_0 G(\mathbb{R})$ of the real Lie group $G(\mathbb{R})$ for an arbitrary (not necessarily linear) connected algebraic group G defined over the field $\mathbb{R}$ of real numbers. In particular, it turns out that $\pi_0 G(\mathbb{R})$ is always an elementary Abelian 2-group. The result looks most transparent in the cases where G is a linear algebraic group or an Abelian variety. The computation is based on structure results on algebraic groups and Galois cohomology methods.

Памяти Александра Васильевича Михалёва

Введение

Пусть G — произвольная алгебраическая группа, определённая над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Если группа G связна (в топологии Зариского), то группа Ли её комплексных точек $G(\mathbb{C})$ также связна (в классической хаусдорфовой топологии), в то время как группа Ли вещественных точек $G(\mathbb{R})$ уже не обязательно связна: примером может служить группа $G = \mathrm{GL}_n$. Естественно поставить вопрос о структуре группы компонент связности $\pi_0 G(\mathbb{R}) = G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})^\circ$, где $G(\mathbb{R})^\circ$ — связная компонента единицы группы $G(\mathbb{R})$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2023, том 24, № 4, с. 199—211.

Первые результаты в этом направлении получены Э. Картаном: если группа G полупроста и односвязна, то группа $G(\mathbb{R})$ связна, т. е. группа компонент тривиальна (см., например, [4, следствие 4.7]). В 1964 г. Х. Мацумото доказал, что для произвольной линейной алгебраической группы G группа $\pi_0 G(\mathbb{R})$ является элементарной абелевой 2-группой (см. [9, теорема 1.2]). Недавно М. Боровой и автор данной статьи получили для линейной алгебраической группы G комбинаторное описание группы компонент в виде стабилизатора точки для явно заданного действия некоторой конечной группы на конечном множестве, позволяющее явно вычислить группу $\pi_0 G(\mathbb{R})$ в каждом конкретном случае (см. [6, теорема 9.2]). Недостатком этого описания является то, что оно предоставляет способ вычисления группы компонент, но не даёт ответ в виде явной формулы. Этот недостаток был исправлен автором в статье [3], где была получена явная формула для группы $\pi_0 G(\mathbb{R})$ в виде фактора решётки кохарактеров максимального расщепимого тора в G (см. также [5]). В настоящей работе аналогичная формула получена для произвольной (не обязательно линейной) связной алгебраической группы, что даёт окончательный ответ на вопрос о группе компонент.

Статья имеет следующую структуру. Вначале мы приводим необходимые сведения об алгебраических группах (в разделе 1) и когомологиях Галуа (в разделе 2). В разделе 3 мы доказываем основной результат работы — теорему 3. В разделе 4 мы иллюстрируем формулу для группы компонент на примере множества вещественных точек эллиптической кривой.

1. Структура связных алгебраических групп

1.1.

Фиксируем квадратный корень из -1 в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ и обозначим его через $\boldsymbol{i}$.

Мы будем рассматривать алгебраические группы, определённые над полем $\mathbb{R}$. Мы отождествляем такую алгебраическую группу G с её группой комплексных точек $G(\mathbb{C})$, снабжённой антирегулярным инволютивным групповым автоморфизмом σ (*вещественной структурой*), задающим действие группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ на $G(\mathbb{C})$. (Термин «антирегулярный» означает, что σ переводит регулярные функции на открытых по Зарискому подмножествах группы G в функции, комплексно сопряжённые регулярным.) При этом группа вещественных точек $G(\mathbb{R}) = G^\sigma$ есть подгруппа неподвижных точек автоморфизма σ.

Для произвольной алгебраической группы или группы Ли H обозначим через H° её связную компоненту единицы, а через $\mathfrak{h}$ (той же строчной буквой в готическом шрифте) её алгебру Ли.

Будем говорить, что алгебраическая группа или группа Ли H разлагается в *почти прямое произведение* своих подгрупп H_1 и H_2, если $H = H_1 \cdot H_2$, подгруппы H_1 и H_2 коммутируют друг с другом и пересечение $H_1 \cap H_2$ конечно (но не обязательно тривиально). Для почти прямого произведения будем использовать обозначение

$$H = H_1 \underset{\cdot}{\times} H_2.$$

1.2.

Нам понадобятся некоторые общие сведения о структуре связных алгебраических групп. В качестве источника мы используем обзорную статью М. Бриона [7].

Наиболее широко известны *аффинные* алгебраические группы — те, которые с точки зрения алгебраической геометрии являются аффинными многообразиями. Всякая аффинная алгебраическая группа является *линейной*, т. е. допускает точное линейное представление. Верное и обратное: линейная алгебраическая группа изоморфна замкнутой (в топологии Зариского) подгруппе в GL_n (при некотором n) и, следовательно, является аффинным многообразием, координатная алгебра которого порождена матричными элементами точного линейного представления.

Противоположный класс алгебраических групп образуют *антиаффинные* группы — те, на которых нет непостоянных регулярных функций. Очевидно, антиаффинные алгебраические группы связны. Примерами антиаффинных групп являются абелевы многообразия — алгебраические группы, являющиеся неприводимыми проективными многообразиями, но класс антиаффинных групп шире [7, 5.5].

Для произвольных связных алгебраических групп имеет место *разложение Розенлихта*.

Теорема 1 [7, 5.1.1]. *Пусть G — связная алгебраическая группа. В группе G имеются наибольшая связная аффинная подгруппа G_{aff} и наибольшая* (*связная*) *антиаффинная подгруппа G_{ant}. Подгруппа G_{aff} нормальна, а G_{ant} центральна в G, и*

$$G = G_{\mathrm{aff}} \cdot G_{\mathrm{ant}}. \tag{1}$$

Структура аффинных (т. е. линейных) алгебраических групп хорошо известна. Имеет место *разложение Леви* [8, теорема VIII.4.3]:

$$G_{\mathrm{aff}} = G_{\mathrm{uni}} \rtimes G_{\mathrm{red}}, \tag{2}$$

где G_{uni} — наибольшая нормальная унипотентная подгруппа (*унипотентный радикал*) группы G, а G_{red} — максимальная связная редуктивная подгруппа (*подгруппа Леви*). Подгруппа Леви не единственна, но все подгруппы Леви сопряжены друг другу. Имеет место разложение в почти прямое произведение

$$G_{\mathrm{red}} = G_{\mathrm{ss}} \underset{\cdot}{\times} S, \tag{3}$$

где $G_{\mathrm{ss}} = [G_{\mathrm{red}}, G_{\mathrm{red}}]$ — связная полупростая группа, а $S = Z(G_{\mathrm{red}})^{\circ}$ — алгебраический тор.

Структура антиаффинных алгебраических групп описана в [7, 5.5]. Имеет место точная последовательность

$$1 \longrightarrow (G_{\mathrm{ant}})_{\mathrm{aff}} = (G_{\mathrm{ant}} \cap G_{\mathrm{aff}})^{\circ} \longrightarrow G_{\mathrm{ant}} \longrightarrow A \longrightarrow 1,$$

где A — абелево многообразие, а $(G_{\mathrm{ant}})_{\mathrm{aff}}$ — связная коммутативная линейная алгебраическая группа. Имеет место разложение

$$(G_{\mathrm{ant}})_{\mathrm{aff}} = S_0 \times V,$$

где S_0 — алгебраический тор, а V — коммутативная унипотентная группа, т. е. аддитивная группа векторного пространства (*векторная группа*). Из теоремы 1 и разложений (2) и (3) вытекают включения $S_0 \subseteq S$ и $V \subseteq G_{\mathrm{uni}}$.

Из разложений (1)—(3) следует, что $Z = S \cdot G_{\mathrm{ant}}$ — связная коммутативная алгебраическая подгруппа в G и

$$G = G_{\mathrm{uni}} \cdot (G_{\mathrm{ss}} \mathbin{\dot{\times}} Z). \tag{4}$$

1.3.

Пусть T — алгебраический тор размерности n, определённый над $\mathbb{R}$. Тор T называется *расщепимым*, если на нём можно выбрать систему координат (т. е. изоморфизм $T(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{\times} \times \dots \times \mathbb{C}^{\times}$), в которой вещественная структура задаётся формулой

$$\sigma(t_1, \dots, t_n) = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n),$$

и *анизотропным*, если в некоторой системе координат

$$\sigma(t_1, \dots, t_n) = (\bar{t}_1^{-1}, \dots, \bar{t}_n^{-1})$$

(черта сверху обозначает комплексное сопряжение). Если T расщепим, то $T(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}^{\times})^n$. Если T анизотропен, то $T(\mathbb{R}) \simeq (U_1)^n$ — компактный вещественный тор; здесь U_1 обозначает единичную окружность на комплексной плоскости. В общем случае существуют наибольший расщепимый подтор $T_{\mathrm{s}} \subseteq T$ и наибольший анизотропный подтор $T_{\mathrm{c}} \subseteq T$, причём имеет место разложение в почти прямое произведение $T = T_{\mathrm{s}} \mathbin{\dot{\times}} T_{\mathrm{c}}$.

Пусть $\mathsf{X}^{\vee} = \mathsf{X}^{\vee}(T) = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\times}, T)$ — решётка кохарактеров тора T. Отождествляя кохарактеры с их дифференциалами в единице, мы можем (и будем) рассматривать $\mathsf{X}^{\vee}$ как решётку в $\mathfrak{t}$. Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{i}\mathsf{X}^{\vee} \longrightarrow \mathfrak{t} \xrightarrow{\mathcal{E}} T \longrightarrow 1,$$

где $\mathcal{E}$ — нормированное экспоненциальное отображение, задаваемое формулой $\mathcal{E}(x) = \exp(2\pi x)$. Его можно рассматривать как универсальное накрытие комплексной группы Ли $T(\mathbb{C})$.

Инволюция σ действует на $\mathfrak{t}$, сохраняя решётку $\mathsf{X}^{\vee}$. При этом подрешётки $\mathsf{X}^{\vee}_{+}$ и $\mathsf{X}^{\vee}_{-}$, состоящие из кохарактеров, на которых σ действует тождественно и умножением на -1, суть решётки кохарактеров торов T_{s} и T_{c} соответственно.

2. Когомологии Галуа

Как и в предыдущей статье [3], для вычисления группы компонент мы будем использовать технику когомологий Галуа над полем вещественных чисел. Для удобства читателя кратко напомним здесь необходимые нам сведения о когомологиях Галуа, следуя [3, § 2]. За подробностями мы отсылаем читателя к классической книге Ж.-П. Серра [2].

Пусть A — произвольная группа, на которой группа Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ действует групповыми автоморфизмами. Такого рода действие задаётся инволютивным автоморфизмом σ группы A.

Элемент $z \in A$ называется 1-*коциклом* с коэффициентами в A, если $\sigma(z) = z^{-1}$. На множестве $\mathrm{Z}^1(\mathbb{R}, A)$ всех 1-коциклов группа A действует скрученными сопряжениями:

$$z \overset{a}{\longmapsto} a \cdot z \cdot \sigma(a)^{-1}.$$

Орбита $[z]$ коцикла z называется его *классом когомологий*, а множество орбит

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, A) = \mathrm{Z}^1(\mathbb{R}, A)/A$$

называется *множеством первых когомологий* группы $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ с коэффициентами в A или, для краткости, множеством первых когомологий Галуа группы A. В этом множестве есть отмеченная точка — класс тривиального коцикла [1], обозначаемый также через $\mathrm{B}^1(\mathbb{R}, A)$ и называемый множеством 1-*кограниц*. В случае абелевой группы A множества $\mathrm{Z}^1(\mathbb{R}, A)$, $\mathrm{B}^1(\mathbb{R}, A)$ и $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, A) = \mathrm{Z}^1(\mathbb{R}, A)/\,\mathrm{B}^1(\mathbb{R}, A)$ являются абелевыми группами.

С каждой короткой точной последовательностью групп

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 1, \tag{5}$$

на которых согласованно действует группа $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, связана длинная точная последовательность когомологий

$$1 \longrightarrow A^\sigma \longrightarrow B^\sigma \longrightarrow C^\sigma \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, A) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, B) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, C). \tag{6}$$

Отображения в последовательности (6) устроены очевидным образом, кроме четвёртого по счёту, которое задаётся формулой

$$c \longmapsto [b^{-1}\sigma(b)] \quad \text{для каждого} \quad c \in C^\sigma,$$

где $b \in B$ — произвольный прообраз элемента c, так что $b^{-1}\sigma(b) \in A$. Точность понимается в смысле отображений множеств с отмеченной точкой.

В случае когда точная последовательность (5) расщепляется, т. е. $B = A \times C$, ситуация упрощается: легко видеть, что

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, B) \simeq \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, A) \times \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, C).$$

Если U — унипотентная линейная алгебраическая группа, определённая над $\mathbb{R}$, то $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, U) = \{[1]\}$. Элементарное доказательство этого хорошо известного факта (см. [6, лемма 6.2 (ii)]) основано на том, что из любого элемента унипотентной группы можно извлечь единственный квадратный корень (это следует из биективности экспоненциального отображения для унипотентных групп): всякий коцикл $z \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, U)$ представляется в виде $z = z^{1/2} \cdot \sigma(z^{-1/2})$ (поскольку $z^{1/2}$ тоже коцикл), т. е. является когранициeй.

3. Группа компонент

Пусть G — связная алгебраическая группа, определённая над $\mathbb{R}$. Наша цель — вычислить группу компонент связности $\pi_0 G(\mathbb{R}) = G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})^\circ$ группы вещественных точек $G(\mathbb{R})$. Будем использовать обозначения из раздела 1.

3.1.

Разложение (4) переносится на группы вещественных точек.

Лемма 2. $G(\mathbb{R}) = G_{\mathrm{uni}}(\mathbb{R}) \cdot (G_{\mathrm{ss}} \mathbin{\dot\times} Z)(\mathbb{R})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G(\mathbb{R})$. Имеет место разложение $g = u \cdot h$, где $u \in G_{\mathrm{uni}}(\mathbb{C})$, $h \in (G_{\mathrm{ss}} \mathbin{\dot\times} Z)(\mathbb{C})$, причём $g = \sigma(g) = \sigma(u) \cdot \sigma(h)$. Отсюда следует, что $v := u^{-1} \cdot \sigma(u) = h \cdot \sigma(h)^{-1} \in V(\mathbb{C})$ и $\sigma(v) = v^{-1}$, т. е. v является 1-коциклом Галуа. Поскольку V — векторная группа, однозначно определён квадратный корень $v^{1/2} \in V(\mathbb{C})$, который также является 1-коциклом, т. е. $\sigma(v^{1/2}) = v^{-1/2}$. Заменив u на $u \cdot v^{1/2}$ и h на $v^{-1/2} \cdot h$, получим $u \in G_{\mathrm{uni}}(\mathbb{R})$, $h \in (G_{\mathrm{ss}} \mathbin{\dot\times} Z)(\mathbb{R})$. □

Экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g}_{\mathrm{uni}} \to G_{\mathrm{uni}}$ является изоморфизмом алгебраических многообразий над $\mathbb{R}$ и, следовательно, осуществляет диффеоморфизм между $\mathfrak{g}_{\mathrm{uni}}(\mathbb{R})$ и $G_{\mathrm{uni}}(\mathbb{R})$. Следовательно, группа Ли $G_{\mathrm{uni}}(\mathbb{R})$ связна, и из леммы 2 вытекает канонический изоморфизм

$$\pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \pi_0 (G_{\mathrm{ss}} \mathbin{\dot\times} Z)(\mathbb{R}).$$

Поэтому в дальнейшем мы можем (и будем) предполагать без ограничения общности, что $G = G_{\mathrm{ss}} \mathbin{\dot\times} Z$, где группа $G_{\mathrm{ss}} = [G, G]$ полупроста, а $Z = Z(G)^\circ$ — связный центр группы G.

3.2.

Мы следуем тем же идеям, что и в [3]. Пусть G_{sc} — односвязная полупростая группа, накрывающая группу G_{ss}. Рассмотрим группу $\tilde{G} = G_{\mathrm{sc}} \times \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{z}$ рассматривается как векторная группа. Группа Ли $\tilde{G}(\mathbb{C})$ односвязна, и имеется точная последовательность

$$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \tilde{G} = G_{\mathrm{sc}} \times \mathfrak{z} \xrightarrow{\tau} G = G_{\mathrm{ss}} \mathbin{\dot\times} Z \longrightarrow 1. \tag{7}$$

Отображение универсального накрытия τ задаётся формулой

$$\tau(\tilde{g}) = \tau_{\mathrm{sc}}(g_{\mathrm{sc}}) \cdot \mathcal{E}(z) \quad \text{для каждого} \quad \tilde{g} = (g_{\mathrm{sc}}, z),\ g_{\mathrm{sc}} \in G_{\mathrm{sc}},\ z \in \mathfrak{z},$$

где $\tau_{\mathrm{sc}}\colon G_{\mathrm{sc}} \to G_{\mathrm{ss}}$ — универсальное накрытие коммутанта группы G, а $\mathcal{E}\colon \mathfrak{z} \to Z$ — нормированное экспоненциальное отображение, задаваемое формулой

$$\mathcal{E}(z) = \exp(2\pi z). \tag{8}$$

Группа $\Gamma = \mathrm{Ker}(\tau)$ — дискретная центральная подгруппа в $\tilde{G}(\mathbb{C})$, изоморфная фундаментальной группе группы Ли $G(\mathbb{C})$. Следует отметить, что τ, вообще говоря, является гомоморфизмом лишь комплексных групп Ли, но не алгебраических групп.

Пусть T_{ss} — максимальный тор в G_{ss}, определённый над $\mathbb{R}$. Тогда $T_{\mathrm{sc}} = \tau_{\mathrm{sc}}^{-1}(T_{\mathrm{ss}})$ — максимальный тор в G_{sc} и $\mathsf{X}^\vee(T_{\mathrm{sc}}) = \mathsf{Q}^\vee$ — решётка кокорней группы G_{ss}. Имеется коммутативная диаграмма с точными строками и столбцами:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
1 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & T_{\mathrm{sc}} \times \mathfrak{z} \arrow[r, "\tau"] \arrow[u] & T_{\mathrm{ss}} \mathbin{\underset{\cdot}{\times}} Z \arrow[r] \arrow[u] & 1 \\
 & 0 \arrow[r] & \mathfrak{t}_{\mathrm{sc}} \oplus \mathfrak{z} \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\tilde{\mathcal{E}}"] & \mathfrak{t}_{\mathrm{ss}} \oplus \mathfrak{z} \arrow[r] \arrow[u, "\mathcal{E}"] & 0\,. \\
 & 0 \arrow[r] & \boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee \arrow[r] \arrow[u] & \boldsymbol{i}\Lambda \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Здесь $\mathcal{E}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ — нормированные экспоненциальные отображения для соответствующих связных коммутативных групп Ли, заданные формулами, аналогичными (8), причём $\tilde{\mathcal{E}}(x, z) = (\mathcal{E}_{\mathrm{sc}}(x), z)$ для любых $x \in \mathfrak{t}_{\mathrm{sc}}$, $z \in \mathfrak{z}$, где $\mathcal{E}_{\mathrm{sc}}\colon \mathfrak{t}_{\mathrm{sc}} \to T_{\mathrm{sc}}$ также нормированное экспоненциальное отображение. Решётка $\Lambda = \boldsymbol{i} \cdot \mathrm{Ker}(\mathcal{E})$ инвариантна относительно σ, и

$$\Gamma = \tilde{\mathcal{E}}(\boldsymbol{i}\Lambda) \simeq \boldsymbol{i}\Lambda / \boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee.$$

3.3.

Как и в [3, 3.2], выпишем фрагмент точной последовательности когомологий Галуа (6), соответствующей точной последовательности групп (7):

$$\ldots \longrightarrow \tilde{G}(\mathbb{R}) \longrightarrow G(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \Gamma) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \tilde{G}) \longrightarrow \ldots .$$

Группа Ли $\tilde{G}(\mathbb{R}) = G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{z}(\mathbb{R})$ связна, поскольку связны оба сомножителя. Следовательно, накрытие τ отображает $\tilde{G}(\mathbb{R})$ на $G(\mathbb{R})^\circ$. Имеем также

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \tilde{G}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G_{\mathrm{sc}}) \times \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{z}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G_{\mathrm{sc}})$$

ввиду тривиальности когомологий Галуа векторной группы $\mathfrak{z}$. В итоге получается точная последовательность

$$1 \longrightarrow \pi_0 G(\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \boldsymbol{i}\Lambda/\boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee) \xrightarrow{\iota} \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G_{\mathrm{sc}}). \tag{9}$$

Отображение δ переводит связную компоненту $gG(\mathbb{R})^\circ$ группы $G(\mathbb{R})$ в класс когомологий $[\boldsymbol{i}\lambda + \boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee]$, для которого $\tilde{\mathcal{E}}(\boldsymbol{i}\lambda) = \tilde{g}^{-1}\sigma(\tilde{g}) \in \mathrm{Z}^1(\mathbb{R}, \Gamma)$, где $\tilde{g} \in \tilde{G}$ таков, что $\tau(\tilde{g}) = g$. Отображение ι переводит класс когомологий $[\boldsymbol{i}\lambda + \boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee]$ в класс когомологий $[\mathcal{E}_{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{i}\lambda_{\mathrm{sc}})]$, где λ_{sc} — проекция вектора $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathrm{sc}} \oplus \mathfrak{z}$ на $\mathfrak{t}_{\mathrm{sc}}$.

Остаётся вычислить $\mathrm{Ker}(\iota)$.

3.4.

Максимальный тор T_{ss} в G_{ss} разлагается в почти прямое произведение расщепимого и анизотропного торов: $T_{\mathrm{ss}} = T_{\mathrm{s}} \mathbin{\dot\times} T_{\mathrm{c}}$. Выберем T_{ss} так, чтобы его расщепимая часть T_{s} была максимальным расщепимым тором в G_{ss}.

Инволюция σ линейно действует на решётке Λ, и натянутое на решётку вещественное векторное пространство $\Lambda_{\mathbb{R}}$ разлагается в прямую сумму собственных подпространств $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\pm\sigma}$, на которых σ действует умножением на ± 1 соответственно. Рассмотрим решётки $\Lambda_\pm = \Lambda \cap \Lambda_{\mathbb{R}}^{\pm\sigma}$, а также $\tilde{\Lambda}_\pm$ — образы решётки Λ при проекциях на $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\pm\sigma}$, задаваемых формулами

$$\lambda \mapsto \lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\big(\lambda \pm \sigma(\lambda)\big)$$

соответственно. Имеются очевидные включения

$$\Lambda_\pm \subseteq \tilde{\Lambda}_\pm \subseteq \tfrac{1}{2}\Lambda_\pm.$$

Аналогичные обозначения будем использовать для любой σ-инвариантной решётки в $\Lambda_{\mathbb{R}}$, в частности для $\mathsf{Q}^\vee$.

3.5.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть G — связная алгебраическая группа, определённая над $\mathbb{R}$, $G_{\mathrm{ant}} \subseteq G$ — наибольшая антиаффинная подгруппа, $G_{\mathrm{red}} \subseteq G$ — максимальная связная редуктивная подгруппа, $S = Z(G_{\mathrm{red}})^\circ$ — её связный центр, $G_{\mathrm{ss}} = [G_{\mathrm{red}}, G_{\mathrm{red}}]$ — её коммутант, $T_{\mathrm{ss}} \subseteq G_{\mathrm{ss}}$ — максимальный тор, содержащий максимальный расщепимый тор $T_{\mathrm{s}} \subseteq G_{\mathrm{ss}}$, и $Z = S \cdot G_{\mathrm{ant}}$. Тогда группа компонент связности группы вещественных точек $G(\mathbb{R})$ вычисляется по формуле (в обозначениях пункта 3.4)*

$$\pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \Lambda_+/(2\tilde{\Lambda}_+ + \mathsf{Q}^\vee_+).$$

Здесь Λ — решётка в алгебре Ли $\mathfrak{t}_{\mathrm{ss}} \oplus \mathfrak{z}$ алгебраической группы $T_{\mathrm{ss}} \mathbin{\dot\times} Z$, для которой $\boldsymbol{i}\Lambda$ — ядро универсального накрытия $\mathcal{E}\colon \mathfrak{t}_{\mathrm{ss}} \oplus \mathfrak{z} \to T_{\mathrm{ss}} \mathbin{\dot\times} Z$, $\mathcal{E}(y) = \exp(2\pi y)$, $\mathsf{Q}^\vee$ — решётка кокорней группы G_{ss} относительно тора T_{ss}. Связная компонента *группы* $G(\mathbb{R})$, *соответствующая смежному классу элемента* $\lambda \in \Lambda_+$, *представлена элементом*

$$\exp(\pi \boldsymbol{i}\lambda) = \mathcal{E}(\boldsymbol{i}\lambda/2).$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6 из [3]. Поэтому мы опустим некоторые технические детали.

Будем использовать точную последовательность (9). Аналогично [3, лемма 2] имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Z}^1(\mathbb{R}, \boldsymbol{i}\Lambda/\boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee) = \boldsymbol{i}\Lambda \cap (\boldsymbol{i}\tilde{\Lambda}_+ + \tfrac{\boldsymbol{i}}{2}\mathsf{Q}^\vee_-)/\boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee,\\
&\mathrm{B}^1(\mathbb{R}, \boldsymbol{i}\Lambda/\boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee) = (2\boldsymbol{i}\tilde{\Lambda}_+ + \boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee)/\boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee,\\
&\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \boldsymbol{i}\Lambda/\boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee) \simeq \Lambda \cap (\tilde{\Lambda}_+ + \tfrac{1}{2}\mathsf{Q}^\vee_-)/(2\tilde{\Lambda}_+ + \mathsf{Q}^\vee).
\end{aligned}$$

Образом класса когомологий $[\boldsymbol{i}\lambda + \boldsymbol{i}\mathsf{Q}^\vee]$ при отображении ι является коцикл $\mathcal{E}_{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{i}\lambda_{\mathrm{sc}}) \in Z(G_{\mathrm{sc}})$. Поскольку $Z(G_{\mathrm{sc}})$ имеет конечный порядок N, имеем $N\lambda_{\mathrm{sc}} \in \mathsf{Q}^\vee \subseteq \mathsf{X}^\vee(T_{\mathrm{ss}}) \subseteq \Lambda$, откуда следует, что $\lambda_{\mathrm{sc}} \in \mathsf{X}^\vee(T_{\mathrm{ss}})_{\mathbb{R}} \subseteq \Lambda_{\mathbb{R}}$ и $(\lambda_{\mathrm{sc}})_+ \in \mathsf{X}^\vee(T_{\mathrm{ss}})^\sigma_{\mathbb{R}} = \mathsf{X}^\vee(T_{\mathrm{s}})_{\mathbb{R}}$.

Аналогично [3, лемма 4] $\mathcal{E}_{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{i}\lambda_{\mathrm{sc}})$ является кограницей в G_{sc} тогда и только тогда, когда он принадлежит $(T_{\mathrm{sc}})_{\mathrm{s}}$, т. е. $\lambda_{\mathrm{sc}} \in \mathsf{X}^\vee(T_{\mathrm{s}})_{\mathbb{R}} + \mathsf{Q}^\vee$. Поскольку $(\lambda_{\mathrm{sc}})_- = \lambda_- \in \frac{1}{2}\mathsf{Q}^\vee_-$, условие кограничности равносильно $\lambda_- \in \tilde{\mathsf{Q}}^\vee_-$. Поскольку λ определён с точностью до сдвигов на векторы из $\mathsf{Q}^\vee$, без ограничения общности можно считать, что $\lambda_- = 0$, т. е. $\lambda \in \Lambda_+$. Следовательно,

$$\pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Ker}(\iota) \simeq \Lambda_+/(2\tilde{\Lambda}_+ + \mathsf{Q}^\vee).$$

При $\lambda \in \Lambda_+$ элемент $\tilde{g} = \tilde{\mathcal{E}}(-\boldsymbol{i}\lambda/2)$ является коциклом в $\tilde{G}$, откуда следует, что

$$\tilde{g}^{-1}\sigma(\tilde{g}) = \tilde{g}^{-2} = \tilde{\mathcal{E}}(\boldsymbol{i}\lambda),$$

и элемент

$$g = \tau(\tilde{g}) = \mathcal{E}(-\boldsymbol{i}\lambda/2) = \mathcal{E}(\boldsymbol{i}\lambda/2)$$

представляет компоненту связности в $G(\mathbb{R})$, соответствующую смежному классу вектора λ. □

Непосредственное следствие теоремы 3 обобщает теорему Мацумото [9, теорема 1.2].

Следствие 4. $\pi_0 G(\mathbb{R})$ — *элементарная абелева* 2*-группа конечного порядка.*

3.6.

Теорема 3 принимает особенно наглядный вид в случаях, когда G — линейная алгебраическая группа или абелево многообразие.

Случай линейных алгебраических групп подробно рассмотрен в [3]. В этом случае $Z = S$ — алгебраический тор, $\Lambda = \mathsf{X}^\vee(T)$ — решётка кохарактеров максимального тора $T = S \mathbin{\dot\times} T_{\mathrm{ss}}$ в группе G, содержащего максимальный расщепимый тор T_{s} (здесь T_{s} обозначает максимальный расщепимый тор в G, а не в G_{ss}!), и $\Lambda_+ = \mathsf{X}^\vee(T_{\mathrm{s}})$.

В случае когда G — абелево многообразие, группы G_{aff}, G_{red}, G_{ss}, G_{sc}, T_{ss}, T_{sc}, T_{s} и S тривиальны, а $Z = G$, и точная последовательность (7) приобретает вид

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\mathcal{E}} G \longrightarrow 1,$$

т. е. Λ — (нормированная) решётка периодов абелева многообразия G. В этом случае $\mathsf{Q}^\vee = 0$ и $\pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \Lambda_+/2\tilde{\Lambda}_+$.

4. Пример

Примеры вычисления группы компонент для линейных алгебраических групп рассмотрены в [3, § 4]. Здесь мы рассмотрим «противоположный» случай абелевых многообразий. В качестве примера возьмём одномерные абелевы многообразия, т. е. эллиптические кривые.

4.1.

Пусть G — эллиптическая кривая, определённая над $\mathbb{R}$. В этом случае $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$ — комплексная плоскость, решётка $\Lambda \subset \mathbb{C}$ имеет ранг 2 и $G \simeq \mathbb{C}/\boldsymbol{i}\Lambda$. Поскольку кривая G определена над $\mathbb{R}$, решётки Λ и $\boldsymbol{i}\Lambda$ инвариантны относительно комплексного сопряжения и, в частности, $\boldsymbol{i}\Lambda$ пересекает действительную ось. Выбрав подходящий масштаб на комплексной плоскости, мы можем без ограничения общности считать, что $\boldsymbol{i}\Lambda = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega$, где $-\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}(\omega) < \frac{1}{2}$. С учётом инвариантности относительно комплексного сопряжения для фундаментального периода ω имеется всего две возможности: $\omega \in \boldsymbol{i}\mathbb{R}$ или $\omega \in -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\mathbb{R}$.

В первом случае $\boldsymbol{i}\Lambda_+ = \boldsymbol{i}\tilde{\Lambda}_+ = \mathbb{Z}\omega$, и поэтому $\pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, т. е. $G(\mathbb{R})$ имеет две компоненты связности.

Во втором случае $\boldsymbol{i}\Lambda_+ = \mathbb{Z}(\omega - \bar{\omega})$, $\boldsymbol{i}\tilde{\Lambda}_+ = \mathbb{Z}(\omega - \bar{\omega})/2$. Поэтому $\pi_0 G(\mathbb{R}) = 0$, т. е. $G(\mathbb{R})$ связна.

4.2.

Можно увидеть это другим способом. Зададим кривую G в нормальной форме Вейерштрасса уравнением

$$y^2 z = x^3 + pxz^2 + qz^3$$

(здесь x, y, z — однородные координаты на проективной плоскости). Как известно (см., например, [1, гл. I, § 6]), коэффициенты p, q задаются рядами Эйзенштейна:

$$p = -15 \sum_{\lambda \in \boldsymbol{i}\Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^4}, \qquad q = -35 \sum_{\lambda \in \boldsymbol{i}\Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^6}.$$

Рассмотрим кубический трёхчлен $f(x) = x^3 + px + q$ и его дискриминант $D(f) = -4p^3 - 27q^2$.

Если $\omega \in \boldsymbol{i}\mathbb{R}$, то без ограничения общности $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ и $D(f) > 0$.

В самом деле, поскольку кривая G гладкая, $D(f) \neq 0$ и, следовательно, имеет постоянный знак на луче $\boldsymbol{i}\mathbb{R}_{>0}$. Поэтому достаточно рассмотреть конкретное $\omega \in \boldsymbol{i}\mathbb{R}_{>0}$, например $\omega = \boldsymbol{i}$.

В этом случае кривая G обладает комплексным умножением: решётка периодов инвариантна относительно умножения на $\boldsymbol{i}$. С другой стороны, при умножении решётки периодов на $\boldsymbol{i}$ ряд q умножается на -1. Следовательно, $q = 0$.

Решётка $\boldsymbol{i}\Lambda$ в этом случае есть кольцо гауссовых чисел $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$, являющееся евклидовым кольцом. Поэтому ряд p можно записать в виде эйлерова произведения:

$$p = -15 \cdot (1^4 + (-1)^4 + \boldsymbol{i}^4 + (-\boldsymbol{i})^4) \cdot \prod_{\rho} \frac{1}{1 - 1/\rho^4},$$

где произведение берётся по всем простым гауссовым числам ρ с точностью до умножения на обратимые элементы ± 1, $\pm\boldsymbol{i}$ кольца $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$. Простые гауссовы числа, не являющиеся целыми, группируются по парам сопряжённых друг другу, и поэтому

$$p = -60 \cdot \prod_{\mathrm{Im}(\rho)>0} \frac{1}{|1 - 1/\rho^4|^2} \cdot \prod_{\mathrm{Im}(\rho)=0} \frac{1}{1 - 1/\rho^4} < 0.$$

Следовательно, $D(f) = -4p^3 > 0$.

Исключив бесконечно удалённую точку $g_\infty = (0 : 1 : 0)$, мы можем задать $G(\mathbb{R}) \setminus \{g_\infty\}$ на вещественной координатной плоскости уравнением $y^2 = f(x)$. Поскольку f имеет три различных вещественных корня, ясно, что $G(\mathbb{R})$ имеет две компоненты связности (см. рис. 1).

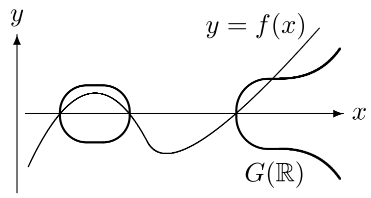

Рис. 1

Если же $\omega \in -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\mathbb{R}$, то $D(f) < 0$. Доказательство аналогично предыдущему случаю. Ввиду постоянства знака $D(f)$ на луче $-\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\mathbb{R}_{>0}$, мы можем считать без ограничения общности, что $\omega = -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ — кубический корень из 1.

В этом случае на G также имеется комплексное умножение: решётка периодов инвариантна относительно умножения на ω. При умножении решётки периодов на ω ряд p умножается на $\omega^{-1} = \bar{\omega}$, и следовательно, $p = 0$.

При этом $\boldsymbol{i}\Lambda = \mathbb{Z}[\omega]$ — кольцо чисел Эйзенштейна, которое также евклидово. Поэтому, как и в предыдущем случае, ряд q записывается в виде эйлерова произведения:

$$q = -35 \cdot (1^6 + \omega^6 + \bar{\omega}^6 + (-1)^6 + (-\omega)^6 + (-\bar{\omega})^6) \cdot \prod_{\rho} \frac{1}{1 - 1/\rho^6} =$$

(произведение по всем простым числам Эйзенштейна с точностью до умножения на обратимые элементы ± 1, $\pm\omega$, $\pm\bar{\omega}$ кольца $\mathbb{Z}[\omega]$)

$$= -210 \prod_{\mathrm{Im}(\rho)>0} \frac{1}{|1 - 1/\rho^6|^2} \cdot \prod_{\mathrm{Im}(\rho)=0} \frac{1}{1 - 1/\rho^6} < 0.$$

Следовательно, $D(f) = -27q^2 < 0$.

В этом случае трёхчлен f имеет единственный вещественный корень и поэтому $G(\mathbb{R})$ связно (см. рис. 2).

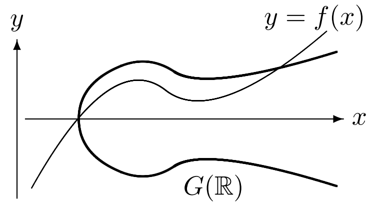

Рис. 2

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению 075-15-2022-284.

Литература

[1] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. — М.: Мир, 1988.

[2] Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. — М.: Мир, 1988.

[3] Тимашев Д. А. О группе компонент вещественной алгебраической группы // Тр. МИАН. — 2022. — Т. 318. — С. 193—203.

[4] Borel A., Tits J. Compléments à l'article: «Groupes réductifs // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. — 1972. — Vol. 41. — P. 253—276.

[5] Borovoi M., Gabber O. A short proof of Timashev's theorem on the real component group of a real reductive group // Arch. Math. — 2023. — Vol. 120, no. 1. — P. 9—13.

[6] Borovoi M., Timashev D. A. Galois cohomology and component group of a real reductive group // Israel J. Math. — 2023.

[7] Brion M. Some structure theorems for algebraic groups // Algebraic Groups: Structure and Actions / M. B. Can, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2017. — (Proc. Sympos. Pure Math.; Vol. 94). — P. 53—126.

[8] Hochschild G. P. Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras. — New York: Springer, 1981. — (Grad. Texts Math.; Vol. 75).

[9] Matsumoto H. Quelques remarques sur les groupes de Lie algébriques réels // J. Math. Soc. Japan. — 1964. — Vol. 16, no. 4. — P. 419—446.