Критерии непрерывности локально ограниченных гомоморфизмов некоторых групп Ли

А. И. ШТЕРН
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт системного анализа РАН
e-mail: aishtern@mtu-net.ru, rroww@mail.ru

УДК 517.986.4

Ключевые слова: локально ограниченный гомоморфизм, непрерывность, коммутант, дополнительная подгруппа.

Аннотация

Доказано, что каждый локально ограниченный гомоморфизм связной группы Ли G, коммутант которой G' замкнут и допускает замкнутую дополнительную подгруппу Z, такую что $G = G'Z$, в группу Ли, непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен на Z.

Abstract

A. I. Shtern, Continuity criteria for locally bounded homomorphisms of certain Lie groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 4, pp. 213—216.

We prove that every locally bounded homomorphism of a connected Lie group G whose commutator subgroup G' admits a closed supplementary subgroup Z such that $G = G'Z$ into a Lie group is continuous if and only if it is continuous on Z.

Светлой памяти Александра Васильевича Михалёва

1. Введение

Как было доказано в [3], всякий локально ограниченный эндоморфизм центрального расширения совершенной связной линейной группы Ли непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен на центре группы. В этой статье, расширяя это утверждение, мы доказываем, что каждый локально ограниченный гомоморфизм связной группы Ли G, коммутант которой G' замкнут и допускает такую дополнительную подгруппу Z, что $G = G'Z$, в группу Ли непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен на Z, что уточняет результаты [2,3,5].

Фундаментальная и прикладная математика, 2023, том 24, № 4, с. 213—216.

2. Предварительные сведения

Напомним некоторую информацию, необходимую ниже.

Гомоморфизм (не обязательно непрерывный) π топологической группы G в топологическую группу H называется *относительно компактным*, если существует окрестность $U = U_{e_G}$ единичного элемента e_G в G, образ которой $\pi(U)$ имеет компактное замыкание в H.

Очевидно, гомоморфизм в локально компактную группу относительно компактен, если и только если он *локально ограничен*, т. е. существует окрестность U_e, образ которой содержится в некотором элементе фильтра $\mathfrak{V}$ окрестностей e_V, имеющих компактное замыкание.

Напомним также понятие группы разрывов гомоморфизма π топологической группы G в топологическую группу H (см. [7, 8]). Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ — фильтр окрестностей e_G в G. Для любого (не обязательно непрерывного) локально относительно компактного гомоморфизма π группы G в H множество

$$\mathrm{DG}(\pi) = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \overline{\pi(U)}$$

называется группой разрывов π. Здесь и далее стоит черта для замыкания в соответствующей топологии (в рассматриваемом случае замыкание берётся в топологии H) (см. [7, определение 1.1.1]).

Группа разрывов гомоморфизма обладает некоторыми важными свойствами. При выполнении вышеуказанных условий множество $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной подгруппой топологической группы H и компактной нормальной подгруппой замыкания подгруппы $\overline{\pi(G)}$ группы H. Кроме того, базис фильтра $\{\overline{\pi(U)} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ сходится к $\mathrm{DG}(\pi)$, а гомоморфизм π непрерывен тогда и только тогда, когда $\mathrm{DG}(\pi) = \{e_H\}$ (см. [7, теорема 1.1.2]).

Если G — связная группа Ли, то $\mathrm{DG}(\pi)$ — компактная связная подгруппа в H (см. [7, лемма 1.1.6]).

Пусть G — связная группа Ли, N — замкнутая нормальная подгруппа в G, π — локально ограниченный гомоморфизм группы G в локально компактную группу H. Пусть M — группа разрывов ограничения $\mathrm{DG}(\pi|_N)$. Тогда M — замкнутая нормальная подгруппа компактной группы разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$, и соответствующая фактор-группа $\mathrm{DG}(\pi)/M$ изоморфна группе разрывов $\mathrm{DG}(\psi)$ гомоморфизма ψ группы G, получаемой как композиция гомоморфизма π и канонического гомоморфизма $\overline{\pi(G)} \to \overline{\pi(G)}/M$ (см. [7, лемма 1.1.7]).

3. Основной результат

Теорема. *Любой локально ограниченный гомоморфизм связной группы Ли G, коммутант которой G' замкнут и допускает такую замкнутую дополнительную подгруппу Z, что $G = G'Z$, в группу Ли непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен на Z.*

Доказательство. Очевидно, что если гомоморфизм группы непрерывен, то он непрерывен на каждой подгруппе группы, поэтому достаточно доказать часть «если».

Пусть G — связная группа Ли G, коммутаторная подгруппа которой G' замкнута и допускает замкнутую дополнительную подгруппу Z, такую что $G = G'Z$.

Пусть H — группа Ли.

Пусть π — локально ограниченный гомоморфизм G в H, непрерывный на Z.

Как известно, группа разрывов гомоморфизма π коммутативна (см. [4, теорема]). Таким образом, группа разрывов ограничения π на коммутаторную подгруппу G' является единичной группой (см. [7, теорема 1.3.2]) и, следовательно, ограничение π на коммутант G' непрерывно относительно внутренней топологии Ли (см. [7, теорема 1.1.2] и исправление в [6]).

Следовательно, представление π раздельно непрерывно относительно подгрупп Z и G'.

По теореме Намиоки [8] представление π имеет точку совместной непрерывности и, следовательно, является непрерывным. Это завершает доказательство теоремы. □

Исследование выполнено при частичной поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература

[1] Namioka I. Separate continuity and joint continuity // Pacific J. Math. — 1974. — Vol. 51. — P. 515—531.

[2] Shtern A. I. Continuity criteria for locally bounded endomorphisms of central extensions of perfect Lie groups // Proc. Jangjeon Math. Soc. — 2023. — Vol. 26, no. 2. — P. 221—225.

[3] Shtern A. I. Continuity criterion for locally bounded endomorphisms of connected reductive Lie groups // Russ. J. Math. Phys. — 2023. — Vol. 30, no. 1. — P. 125—126.

[4] Shtern A. I. The discontinuity group of a locally bounded homomorphism of a connected Lie group into a connected Lie group is commutative // Russ. J. Math. Phys. — 2023. — Vol. 30, no. 3. — P. 397—398.

[5] Shtern A. I. Locally bounded automorphisms of connected Lie groups without nontrivial compact connected subgroups // Adv. Stud. Contemp. Math., Kyungshang. — 2021. — Vol. 31, no. 4. — P. 501—504.

[6] Shtern A. I. A criterion for the continuity with respect to the original group topology of the restriction to the commutator subgroup for a locally bounded finite-dimensional representation of a connected Lie group // Proc. Jangjeon Math. Soc. — 2019. — Vol. 22, no. 1. — P. 201—204.

[7] Shtern A. I. Finite-dimensional quasirepresentations of connected Lie groups and Mishchenko's conjecture // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 159, no. 5. — P. 653—751.

[8] Shtern A. I. A version of van der Waerden's theorem and a proof of Mishchenko's conjecture on homomorphisms of locally compact groups // Izv. Math. — 2008. — Vol. 72, no. 1. — P. 169—205.