Конечно порождённые абелевы n-группы

Н. А. ЩУЧКИН
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

УДК 512.572

Ключевые слова: абелева n-группа, прямое произведение, автоморфизм.

Аннотация

В работе доказан изоморфизм конечно порождённой абелевой n-группы и прямого произведения конечного числа неразложимых абелевых полуциклических n-групп, частью конечных примарных, частью бесконечных. Найдена полная система инвариантов для конечно порождённых абелевых n-групп. Указано необходимое и достаточное условие, при котором прямое произведение бесконечных абелевых полуциклических n-групп является свободной n-группой в классе абелевых n-групп.

Abstract

N. A. Shchuchkin, Finitely generated Abelian n-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2023), no. 4, pp. 217—237.

In this paper, the isomorphism of a finitely generated Abelian n-ary group and of a direct product of a finite number of indecomposable Abelian semi-cyclic n-ary groups, being partly finite primary and partly infinite ones, is proved. A complete system of invariants for finitely generated Abelian n-ary groups is found. We point out a necessary and sufficient condition for a direct product of infinite Abelian semi-cyclic n-ary groups to be a free n-ary group in the class of Abelian n-ary groups.

1. Введение

В работе изучаются абелевы n-группы, которые являются обобщением абелевых групп и весьма близки к абелевым группам, более того, каждую абелеву n-группу можно определить с помощью некоторой абелевой группы. Поэтому теория абелевых групп помогает изучать абелевы n-группы. Так, например, по аналогии с известным разложением конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму циклических групп немецкий математик Ю. Тимм [14] доказал изоморфизм конечно порождённой абелевой n-группы и прямого произведения конечного числа абелевых полуциклических n-групп, причём абелевы полуциклические n-группы являются обобщением циклических групп. В работе изучаются неразложимые абелевы полуциклические n-группы. Наша основная цель — найти разложение конечно порождённой абелевой n-группы в прямое произведение более простых неразложимых n-групп и указать единственность такого разложения с точностью до изоморфизма.

Фундаментальная и прикладная математика, 2023, том 24, № 4, с. 217—237.

2. Некоторые вспомогательные сведения

Алгебру $\langle G, f\rangle$ с n-арной операцией f $(n \geqslant 2)$ называют n-группой [11, 13], если в ней выполняются законы ассоциативности

$$f(f(a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}) = \\ = f(a_1, \ldots, a_i, f(a_{i+1}, \ldots, a_{i+n}), a_{i+n+1}, \ldots, a_{2n-1})$$

для всех $i = 1, \ldots, n-1$ и для любых элементов $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n, b$ из G разрешимо и имеет единственное решение каждое из уравнений

$$f(a_1, \ldots, a_{j-1} x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) = b$$

для всех $j = 1, \ldots, n$. При $n = 2$ имеем обычную (бинарную) группу. Далее полагаем $n > 2$.

Мы будем изучать абелевы n-группы. Если в n-группе верны тождества $f(x_1, \ldots, x_n) = f\big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big)$ для любой подстановки $\sigma \in S_n$, то её называют абелевой.

Для каждой n-группы имеются сопутствующие ей бинарные группы. На любой абелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ определим абелеву группу $\mathrm{ret}_c\langle G, f\rangle$ с операцией $+$ по правилу $a + b = f(a, c, \ldots, c, \bar{c}, b)$, где c — любой элемент из G; её называют ретрактом n-группы [14] (здесь $\bar{c}$ — решение уравнения $f(c, \ldots, c, x) = c$). Тогда

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \ldots + a_n + d, \tag{1}$$

где $d = f(c, \ldots, c)$. Элемент c будет нулём в $\mathrm{ret}_c\langle G, f\rangle$. Если ретракт n-группы является циклической группой, то эта n-группа называется абелевой полуциклической [4].

Верно и обратное: в любой абелевой группе G для выбранного элемента d задаётся абелева n-группа $\langle G, f\rangle = \mathrm{der}_d\, G$, где f действует по правилу (1). В этом случае n-группу $\langle G, f\rangle$ называют d-производной от абелевой группы G. Заметим, что $\langle G, f\rangle = \mathrm{der}_d \,\mathrm{ret}_c\langle G, f\rangle$ и $G = \mathrm{ret}_0 \,\mathrm{der}_d\, G$ (см. [14]). Если $d = 0$ — нуль группы G, то n-группу $\mathrm{der}_0\, G$ называют производной от группы G.

Имеется критерий изоморфизма абелевых n-групп.

Теорема 1 [12, следствие 17]. *Абелевы n-группы $\mathrm{der}_d\, G$ и $\mathrm{der}_{d'}\, G'$ изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся изоморфизм σ из группы G в группу G' и элемент $u \in G'$, такие что $\sigma(d) = (n-1)u + d'$.*

3. Разложение конечно порождённой абелевой n-группы

Назовём n-группу разложимой, если она изоморфна некоторому прямому произведению n-групп, которое содержит более чем один прямой множитель. В противном случае n-группу будем называть неразложимой.

Теорема 2. *Бесконечная абелева полуциклическая n-группа неразложима.*

Доказательство. Докажем теорему от противного. Пусть бесконечная абелева полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ является разложимой, т. е. $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle$ двух абелевых n-групп. Тогда

$$\mathrm{ret}_c\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle = \mathrm{ret}_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle \oplus \mathrm{ret}_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle,$$

где $c = (c_1, c_2)$ (см. [3]). Значит, $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle$ является n-группой, d-производной от прямой суммы $\mathrm{ret}_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle \oplus \mathrm{ret}_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$, где

$$d = \big(f_1(c_1, \ldots, c_1), f_2(c_2, \ldots, c_2)\big).$$

По теореме 1 имеем групповой изоморфизм

$$\mathrm{ret}_g\langle G, f\rangle \cong \mathrm{ret}_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle \oplus \mathrm{ret}_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$$

для некоторого элемента $g \in G$, что противоречит неразложимости бесконечной циклической группы $\mathrm{ret}_g\langle G, f\rangle$. Теорема доказана. □

Любая примарная абелева полуциклическая n-группа, т. е. абелева полуциклическая n-группа порядка p^α, где p — простое число, является неразложимой [6, предложение 13]. С другой стороны, непримарная конечная абелева полуциклическая n-группа изоморфна прямому произведению примарных абелевых полуциклических n-групп [6, предложение 14].

Эти факты позволяют получить следующее усиление теоремы об изоморфизме конечно порождённой абелевой n-группы и прямого произведения абелевых полуциклических n-групп [14, с. 31, теорема 5].

Теорема 3. *Конечно порождённая абелева n-группа изоморфна прямому произведению конечного числа неразложимых абелевых полуциклических n-групп, которые являются бесконечными либо конечными примарными.*

Следствие 1 [2, теорема 10]. *Конечная абелева n-группа изоморфна прямому произведению примарных абелевых полуциклических n-групп.*

Таким образом, мы получим все конечно порождённые абелевы n-группы, если будем брать прямые произведения всевозможных конечных систем абелевых полуциклических n-групп, бесконечных или конечных примарных. Какие же абелевы n-группы среди всех получаемых этим путём будут различными (с точностью до изоморфизма)? На этот вопрос мы ответим ниже.

4. Прямые произведения бесконечных абелевых полуциклических n-групп

В разложение конечно порождённой абелевой n-группы из теоремы 3 входит прямое произведение бесконечных абелевых полуциклических n-групп. Найдем условия однозначности такого вхождения.

Вначале заметим, что любая бесконечная абелева полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна полуциклической n-группе $\operatorname{der}_l Z$, где $0 \leqslant l \leqslant (n-1)/2$, Z — аддитивная группа целых чисел [6, теорема 3]; будем говорить в этом случае, что $\langle G, f\rangle$ имеет тип (∞, l). Бесконечная циклическая n-группа (т. е. n-группа, порождённая одним элементом) также является абелевой полуциклической n-группой, которая имеет тип $(\infty, 1)$.

Для изучения изоморфизма прямых произведений k бесконечных абелевых полуциклических n-групп ($k \geqslant 2$) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Для k абелевых полуциклических n-групп $\operatorname{der}_{l_i} Z$, где $0 \leqslant l_i \leqslant (n-1)/2$, $k \geqslant 2$, верен изоморфизм прямых произведений*

$$\prod_{i=1}^{k} \operatorname{der}_{l_i} Z \cong \operatorname{der}_d Z \times \prod_{i=2}^{k} \operatorname{der}_0 Z,$$

где $d = \text{НОД}(l_1, \ldots, l_k)$.

Доказательство. Доказательство ведём индукцией по k. Докажем лемму для $k = 2$. Из [8, теорема 9] следует, что $\operatorname{der}_{l_1} Z \times \operatorname{der}_{l_2} Z = \operatorname{der}_{(l_1,l_2)} Z \oplus Z$ и $\operatorname{der}_d Z \times \operatorname{der}_0 Z = \operatorname{der}_{(d,0)} Z \oplus Z$, где $d = \text{НОД}(l_1, l_2)$. Для доказательства изоморфизма $\operatorname{der}_{(d,0)} Z \oplus Z \cong \operatorname{der}_{(l_1,l_2)} Z \oplus Z$ согласно теореме 1 надо найти групповой автоморфизм σ и элемент (u_1, u_2) прямой суммы $Z \oplus Z$, такие что

$$\sigma\bigl((d,0)\bigr) = (n-1)(u_1,u_2) + (l_1,l_2). \tag{2}$$

Известно, что любой автоморфизм σ прямой суммы $Z \oplus Z$ задаётся целочисленной квадратной матрицей (a_{ij}) второго порядка с определителем ± 1 по следующему правилу: $\sigma\bigl((x,y)\bigr) = (a_{11}x + a_{21}y, a_{12}x + a_{22}y)$. Решая систему

$$\begin{cases} a_{11}d \equiv l_1 \pmod{n-1}, \\ a_{12}d \equiv l_2 \pmod{n-1} \end{cases}$$

с неизвестными a_{11}, a_{12}, мы найдём автоморфизм σ с матрицей (a_{ij}) и элементы u_1, u_2, для которых верно равенство (2). Тогда согласно теореме 1 имеем $\operatorname{der}_{l_1} Z \times \operatorname{der}_{l_2} Z \cong \operatorname{der}_d Z \times \operatorname{der}_0 Z$.

Далее делаем индуктивное предположение. Допустим, что наша лемма верна для $k-1$. Пусть $d_1 = \text{НОД}(l_1, \ldots, l_{k-1})$. Тогда $d = \text{НОД}(d_1, l_k)$. Согласно предположению

$$\prod_{i=1}^{k-1} \operatorname{der}_{l_i} Z \cong \operatorname{der}_{d_1} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} \operatorname{der}_0 Z. \tag{3}$$

Из верности леммы для $k = 2$ имеем изоморфизм

$$\operatorname{der}_{d_1} Z \times \operatorname{der}_{l_k} Z \cong \operatorname{der}_d Z \times \operatorname{der}_0 Z. \tag{4}$$

Тогда из (3) и (4) получим

$$\prod_{i=1}^{k} \operatorname{der}_{l_i} Z = \prod_{i=1}^{k-1} \operatorname{der}_{l_i} Z \times \operatorname{der}_{l_k} Z \cong \operatorname{der}_{d_1} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} \operatorname{der}_0 Z \times \operatorname{der}_{l_k} Z \cong$$

$$\cong \operatorname{der}_{d_1} Z \times \operatorname{der}_{l_k} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} \operatorname{der}_0 Z \cong \operatorname{der}_d Z \times \operatorname{der}_0 Z \times \prod_{i=2}^{k-1} \operatorname{der}_0 Z = \operatorname{der}_d Z \times \prod_{i=2}^{k} \operatorname{der}_0 Z.$$

Лемма доказана. □

Для прямого произведения k бесконечных абелевых полуциклических n-групп ($k \geqslant 2$) верен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $\langle G_i, f_i\rangle$, $\langle G'_i, f'_i\rangle$, $i = 1, \ldots, k$, — абелевы полуциклические n-группы типов (∞, l_i), (∞, l'_i) соответственно, $k \geqslant 2$. Прямые произведения $\prod\limits_{i=1}^{k} \langle G_i, f_i\rangle$ и $\prod\limits_{i=1}^{k} \langle G'_i, f'_i\rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$\text{НОД}(l_1, \ldots, l_k, n-1) = \text{НОД}(l'_1, \ldots, l'_k, n-1).$$

Доказательство. Необходимость. Из

$$\prod_{i=1}^{k} \langle G_i, f_i\rangle \cong \prod_{i=1}^{k} \langle G'_i, f'_i\rangle$$

следует

$$\prod_{i=1}^{k} \operatorname{der}_{l_i} Z \cong \prod_{i=1}^{k} \operatorname{der}_{l'_i} Z,$$

где $0 \leqslant l_i, l'_i \leqslant (n-1)/2$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Обозначим

$$d = \text{НОД}(l_1, \ldots, l_k, n-1), \quad d' = \text{НОД}(l'_1, \ldots, l'_k, n-1).$$

Из [8, теорема 9] следует

$$\prod_{i=1}^{k} \operatorname{der}_{l_i} Z = \operatorname{der}_{(l_1,\ldots,l_k)} Z^k, \quad \prod_{i=1}^{k} \operatorname{der}_{l'_i} Z = \operatorname{der}_{(l'_1,\ldots,l'_k)} Z^k.$$

Тогда из $\operatorname{der}_{(l_1,\ldots,l_k)} Z^k \cong \operatorname{der}_{(l'_1,\ldots,l'_k)} Z^k$ по теореме 1 имеем групповой автоморфизм σ и элемент $(u_1, \ldots, u_k)$ прямой суммы Z^k, такие что

$$\sigma\big((l_1, \ldots, l_k)\big) = (n-1)(u_1, \ldots, u_k) + (l'_1, \ldots, l'_k). \tag{5}$$

Автоморфизм σ задаётся целочисленной матрицей $(a_{ij})_{k\times k}$ с определителем ± 1:

$$\sigma\big((x_1, \ldots, x_k)\big) = \left(\sum_{i=1}^{k} a_{i1} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{k} a_{ik} x_i\right).$$

Тогда по (5) имеем

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} l_i = (n-1) u_1 + l'_j, \quad j = 1, \ldots, k,$$

откуда следует делимость d' на d. Аналогично имеем делимость d на d', значит, $d = d'$.

Достаточность. Используем индукцию по k. Для $k = 2$ пусть $d = \text{НОД}(l_1, l_2)$, $d' = \text{НОД}(l'_1, l'_2)$ и $\text{НОД}(d, n-1) = \text{НОД}(d', n-1) = q$. Согласно лемме 1 имеем изоморфизмы

$$\mathrm{der}_{l_1} Z \times \mathrm{der}_{l_2} Z \cong \mathrm{der}_d Z \times \mathrm{der}_0 Z, \quad \mathrm{der}_{l'_1} Z \times \mathrm{der}_{l'_2} Z \cong \mathrm{der}_{d'} Z \times \mathrm{der}_0 Z.$$

По аналогии с доказательством леммы 1 доказывается изоморфизм

$$\mathrm{der}_d Z \times \mathrm{der}_0 Z \cong \mathrm{der}_{d'} Z \times \mathrm{der}_0 Z.$$

Значит,

$$\mathrm{der}_{l_1} Z \times \mathrm{der}_{l_2} Z \cong \mathrm{der}_{l'_1} Z \times \mathrm{der}_{l'_2} Z.$$

Тогда $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \cong \langle G'_1, f'_1\rangle \times \langle G'_2, f'_2\rangle$. Достаточность при $k = 2$ доказана.

Пусть достаточность теоремы верна для $k-1$ и $d_1 = \text{НОД}(l_1, \ldots, l_{k-1})$, $d'_1 = \text{НОД}(l'_1, \ldots, l'_{k-1})$. Тогда $\text{НОД}(d_1, l_k, n-1) = \text{НОД}(d'_1, l'_k, n-1)$, откуда по доказанному для $k = 2$ имеем изоморфизм

$$\mathrm{der}_{d_1} Z \times \mathrm{der}_{l_k} Z \cong \mathrm{der}_{d'_1} Z \times \mathrm{der}_{l'_k} Z. \tag{6}$$

Домножаем обе части (6) на $\prod\limits_{i=2}^{k-1} \mathrm{der}_0 Z$, получаем

$$\mathrm{der}_{d_1} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} \mathrm{der}_0 Z \times \mathrm{der}_{l_k} Z \cong \mathrm{der}_{d'_1} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} \mathrm{der}_0 Z \times \mathrm{der}_{l'_k} Z. \tag{7}$$

Согласно лемме 1 имеем

$$\mathrm{der}_{d_1} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} \mathrm{der}_0 Z \cong \prod_{i=1}^{k-1} \mathrm{der}_{l_i} Z, \quad \mathrm{der}_{d'_1} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} \mathrm{der}_0 Z \cong \prod_{i=1}^{k-1} \mathrm{der}_{l'_i} Z.$$

Из (7) имеем

$$\prod_{i=1}^{k} \mathrm{der}_{l_i} Z \cong \prod_{i=1}^{k} \mathrm{der}_{l'_i} Z,$$

а тогда

$$\prod_{i=1}^{k} \langle G_i, f_i\rangle \cong \prod_{i=1}^{k} \langle G'_i, f'_i\rangle.$$

Теорема доказана. □

Следствие 2. *Число неизоморфных прямых произведений k бесконечных абелевых полуциклических n-групп ($k \geqslant 2$) равно $\tau(n-1)$ — количеству делителей $n-1$.*

Известны свободные конечно порождённые абелевы n-группы.

Теорема 5 [7, следствие 1]. *Любая свободная n-группа $\langle F, f\rangle$ в классе абелевых n-групп с конечным порождающим множеством X, $|X| = r$, изоморфна прямому произведению одной бесконечной циклической n-группы $\mathrm{der}_1 Z$ и $r-1$ производных n-групп $\mathrm{der}_0 Z$, т. е.*

$$\langle F, f\rangle \cong \mathrm{der}_1 Z \times \prod_{i=2}^{r} \mathrm{der}_0 Z.$$

В классе абелевых групп любая свободная группа конечного ранга r изоморфна прямой сумме r аддитивных групп целых чисел Z (см., например, [1, предложение 2.2]). Для n-групп ситуация иная. В классе абелевых n-групп прямые произведения бесконечных абелевых полуциклических n-групп (которые являются n-арными аналогами бесконечных циклических групп) не всегда будут свободными n-группами. Из теорем 4 и 5 вытекает следствие.

Следствие 3. *Прямое произведение $\prod\limits_{i=1}^{r}\langle G_i, f_i\rangle$ абелевых полуциклических n-групп $\langle G_i, f_i\rangle$ типов (∞, l_i) является свободной n-группой в классе абелевых n-групп тогда и только тогда, когда $l_1=1$ при $r=1$ или $\text{НОД}(l_1, \ldots, l_r, n-1)=1$ при $r \geqslant 2$.*

5. Инварианты конечно порождённой абелевой n-группы

Любая конечная абелева полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ порядка k изоморфна n-группе $\mathrm{der}_l Z_k$, где $l \mid \text{НОД}(n-1, k)$, Z_k — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k [6, теорема 2]. Будем говорить в этом случае, что $\langle G, f\rangle$ имеет тип (k, l). Конечная циклическая n-группа имеет тип $(k, 1)$.

Из следствия 1 следует, что любая конечная примарная (по простому числу p) n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению

$$\mathrm{der}_{l_1} Z_{p^{m_1}} \times \ldots \times \mathrm{der}_{l_r} Z_{p^{m_r}} \tag{8}$$

абелевых полуциклических n-групп $\mathrm{der}_{l_i} Z_{p^{m_i}}$. Множители с равными порядками в разложении (8) расположим рядом и такие подпрямые произведения расположим в порядке убывания порядков множителей, входящих в эти подпрямые произведения. Получим

$$\prod_{w_1=1}^{r_1} \mathrm{der}_{l_{w_1}} Z_{p^{m_1}} \times \prod_{w_2=1}^{r_2} \mathrm{der}_{l_{r_1+w_2}} Z_{p^{m_2}} \times \ldots \times \prod_{w_t=1}^{r_t} \mathrm{der}_{l_{\sum_{i=1}^{t-1} r_i + w_t}} Z_{p^{m_t}}, \tag{9}$$

где $m_1 > m_2 > \ldots > m_t$. Для разложения (9) назовём определяющим набор $D_1, \ldots, D_t$ наибольших общих делителей, заданных по правилу

$$\begin{cases} D_1 = \text{НОД}(d_1, p^{m_1-m_2}d_2, \dots, p^{m_1-m_t}d_t, p^{m_1}, n-1), \\ D_2 = \text{НОД}(d_1, d_2, p^{m_2-m_3}d_3, \dots, p^{m_2-m_t}d_t, p^{m_2}, n-1), \\ \quad \dots \\ D_{t-1} = \text{НОД}(d_1, \dots, d_{t-1}, p^{m_{t-1}-m_t}d_t, p^{m_{t-1}}, n-1), \\ D_t = \text{НОД}(d_1, \dots, d_{t-1}, d_t, p^{m_t}, n-1), \end{cases} \tag{10}$$

где

$$d_j = \text{НОД}\Big(l_{\sum_{i=0}^{j-1} r_i+1}, \dots, l_{\sum_{i=0}^{j-1} r_i+r_j}\Big)$$

для всех $j = 1, \dots, t$ (здесь и дальше $r_0 = 0$).

Теперь сформулируем основное утверждение о конечных абелевых n-группах.

Теорема 6 [9, теорема 6]. *Всякая конечная абелева n-группа изоморфна прямому произведению примарных абелевых полуциклических n-групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка, и по каждому простому делителю порядка этой n-группы произведения примарных множителей в этих разложениях имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей.*

Следствие 4 [2, теорема 11]. *Всякая конечная абелева n-группа, порядок которой взаимно прост с $n-1$, изоморфна прямому произведению примарных циклических n-групп. Любые два таких изоморфизма в этом случае имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка.*

Заимствуя терминологию из теории групп, порядки $p_s^{m_{sj}}$ примарных абелевых полуциклических множителей в разложении абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ из теоремы 6 вместе с определяющими наборами наибольших общих делителей $D_{s1}, \dots, D_{st_s}$ по каждому простому делителю p_s порядка $|G|$ мы назовём инвариантами абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$.

По теореме 3 любая конечно порождённая абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению

$$\prod_{\varepsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{u_\varepsilon} \operatorname{der}_{l_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \times \prod_{i=1}^{k} \operatorname{der}_{l_i} Z \tag{11}$$

$u_1 + \ldots + u_s$ конечных примарных абелевых полуциклических n-групп $\operatorname{der}_{l_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$, где $l_{\varepsilon j} \mid \text{НОД}(n-1, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}})$, p_ε — различные простые числа, и k бесконечных абелевых полуциклических n-групп $\operatorname{der}_{l_i} Z$, где $0 \leqslant l_i \leqslant \frac{n-1}{2}$. Найдем инварианты разложения (11).

Теорема 7. *Если конечно порождённая абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна двум прямым произведениям (11) и*

$$\prod_{\zeta=1}^{t}\prod_{w=1}^{v_\zeta} \operatorname{der}_{l'_{\zeta w}} Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}} \times \prod_{i=1}^{h} \operatorname{der}_{l'_i} Z, \tag{12}$$

где $\mathrm{der}_{l'_{\zeta w}} Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}}$ — *конечные примарные абелевы полуциклические* n*-группы,* $l'_{\zeta w} \mid \text{НОД}(n-1, q_\zeta^{m'_{\zeta w}})$, q_ζ — *различные простые числа, и* $\mathrm{der}_{l'_i} Z$ — *бесконечные абелевы полуциклические* n*-группы,* $0 \leqslant l'_i \leqslant (n-1)/2$*, то* $k = h$ *и* $p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}} = q_\zeta^{m'_{\zeta w}}$ *при соответствующей нумерации последних.*

Доказательство. Из [8, теорема 9] имеем

$$\prod_{\varepsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{u_\varepsilon} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \times \prod_{i=1}^{k} \mathrm{der}_{l_i} Z = \mathrm{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{u_\varepsilon} l_{\varepsilon j} + \sum\limits_{i=1}^{k} l_i} \sum_{\varepsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{u_\varepsilon} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \oplus Z^k,$$

где $\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{u_\varepsilon} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \oplus Z^k$ — прямая сумма $u_1+\ldots+u_s$ конечных циклических групп $Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ и k бесконечных циклических групп Z. Аналогично

$$\prod_{\zeta=1}^{t}\prod_{w=1}^{v_\zeta} \mathrm{der}_{l'_{\zeta w}} Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}} \times \prod_{i=1}^{h} \mathrm{der}_{l'_i} Z = \mathrm{der}_{\sum\limits_{\zeta=1}^{t}\sum\limits_{w=1}^{v_\zeta} l_{\zeta w} + \sum\limits_{i=1}^{h} l_i} \sum_{\zeta=1}^{t}\sum_{w=1}^{v_\zeta} Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}} \oplus Z^h.$$

Согласно теореме 1, имеем групповой изоморфизм

$$\sum_{\varepsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{u_\varepsilon} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \oplus Z^k \cong \sum_{\zeta=1}^{t}\sum_{w=1}^{v_\zeta} Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}} \oplus Z^h.$$

В силу однозначности разложения конечно порождённой абелевой группы (см., например, [5, с. 133]) имеем $k = h$ и $p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}} = q_\zeta^{m'_{\zeta w}}$ при соответствующей нумерации последних. Теорема доказана. □

Таким образом, количество бесконечных абелевых полуциклических n-групп и совокупности порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (11) являются инвариантами конечно порождённой абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$, но эти инварианты не являются полной системой инвариантов для конечно порождённых абелевых n-групп, т. е. две конечно порождённые абелевы n-группы с этими инвариантами не обязательно изоморфны. Это видно из следующего примера.

Пример 1. Две абелевы полуциклические 3-группы $\mathrm{der}_1 Z_4$ и $\mathrm{der}_2 Z_4$ порядка 4 не изоморфны, так как 1 и 2 являются разными делителями $\text{НОД}(2,4)$, хотя их порядки равны.

Полную систему инвариантов для конечно порождённой абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$, изоморфной разложению (11), будем находить отдельно для $k = 1$ и $k > 1$. Заметим, что для конечной абелевой n-группы (случай $k = 0$) полная система инвариантов уже найдена в [9], это порядки примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (11) вместе с определяющими наборами наибольших общих делителей произведений примарных множителей по каждому простому делителю порядка этой n-группы (см. теорему 6).

В случае $k = 1$ в разложении (11) по каждому простому числу p_ε, $\varepsilon = 1, \ldots, s$, множители с равными порядками в разложении $\prod_{j=1}^{u_\varepsilon} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ расположим рядом и такие подпрямые произведения расположим в порядке убывания порядков множителей. Получим разложение

$$\mathrm{der}_{l_0} Z \times \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}, \tag{13}$$

где $v = \sum_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + w_j$, $w_j = 1, \ldots, r_{\varepsilon j}$ при каждом $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$ (здесь и дальше $r_{\varepsilon 0} = 0$), и $m_{\varepsilon 1} > m_{\varepsilon 2} > \ldots > m_{\varepsilon t_\varepsilon}$, p_ε — различные простые числа.

Теорема 8. *Пусть даны* $\mathrm{der}_{l_0} Z$, $\mathrm{der}_{l'_0} Z$, *где* $0 \leqslant l_0, l'_0 \leqslant (n-1)/2$, *и* $\mathrm{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$, $\mathrm{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$, $v = \sum_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + w_j$, $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$, $w_j = 1, \ldots, r_{\varepsilon j}$, *где* $l_{\varepsilon v}$, $l'_{\varepsilon v}$ *делят* $\text{НОД}\big(n-1, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}\big)$ *и* $m_{\varepsilon 1} > m_{\varepsilon 2} > \ldots > m_{\varepsilon t_\varepsilon}$, p_ε — *различные простые числа*, $\varepsilon = 1, \ldots, s$. *Прямые произведения* (13) *и*

$$\mathrm{der}_{l'_0} Z \times \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \tag{14}$$

изоморфны тогда и только тогда, когда $l_0 = l'_0$ *и для каждого* $\varepsilon = 1, \ldots, s$ *верно* $\text{НОД}(l_0, D_{\varepsilon j}) = \text{НОД}(l'_0, D'_{\varepsilon j})$ *для всех* $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$, *где* $D_{\varepsilon j}$ *и* $D'_{\varepsilon j}$ — *компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений* $\prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ *и* $\prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ *соответственно.*

Доказательство. Необходимость. Фиксируем простое число p_ε ($\varepsilon = 1, \ldots, s$). У произведения $\prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ определяющим набором наибольших общих делителей будет набор

$$\begin{cases} D_{\varepsilon 1} = \text{НОД}(d_{\varepsilon 1}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 1} - m_{\varepsilon 2}} d_{\varepsilon 2}, \ldots, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 1} - m_{\varepsilon t_\varepsilon}} d_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 1}}, n-1), \\ D_{\varepsilon 2} = \text{НОД}(d_{\varepsilon 1}, d_{\varepsilon 2}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 2} - m_{\varepsilon 3}} d_{\varepsilon 3}, \ldots, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 2} - m_{\varepsilon t_\varepsilon}} d_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 2}}, n-1), \\ \quad \ldots \\ D_{\varepsilon t_\varepsilon - 1} = \text{НОД}(d_{\varepsilon 1}, \ldots, d_{\varepsilon t_\varepsilon - 1}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon t_\varepsilon - 1} - m_{\varepsilon t_\varepsilon}} d_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon t_\varepsilon - 1}}, n-1), \\ D_{\varepsilon t_\varepsilon} = \text{НОД}(d_{\varepsilon 1}, \ldots, d_{\varepsilon t_\varepsilon - 1}, d_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon t_\varepsilon}}, n-1), \end{cases} \tag{15}$$

где $d_{\varepsilon j} = \text{НОД}\Big(l_{\varepsilon \sum_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + 1}, \ldots, l_{\varepsilon \sum_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + r_{\varepsilon j}}\Big)$ для всех $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$, а для произведения $\prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ этот определяющий набор имеет вид

$$\begin{cases} D'_{\varepsilon 1} = \text{НОД}(d'_{\varepsilon 1}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 1}-m_{\varepsilon 2}} d'_{\varepsilon 2}, \ldots, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 1}-m_{\varepsilon t_\varepsilon}} d'_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 1}}, n-1), \\ D'_{\varepsilon 2} = \text{НОД}(d'_{\varepsilon 1}, d'_{\varepsilon 2}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 2}-m_{\varepsilon 3}} d'_{\varepsilon 3}, \ldots, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 2}-m_{\varepsilon t_\varepsilon}} d'_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 2}}, n-1), \\ \quad \ldots \\ D'_{\varepsilon t_\varepsilon - 1} = \text{НОД}(d'_{\varepsilon 1}, \ldots, d'_{\varepsilon t_\varepsilon -1}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon t_\varepsilon -1}-m_{\varepsilon t_\varepsilon}} d'_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon t_\varepsilon -1}}, n-1), \\ D'_{\varepsilon t_\varepsilon} = \text{НОД}(d'_{\varepsilon 1}, \ldots, d'_{\varepsilon t_\varepsilon -1}, d'_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon t_\varepsilon}}, n-1), \end{cases} \tag{16}$$

где

$$d'_{\varepsilon j} = \text{НОД}\left(l'_{\varepsilon \sum\limits_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i}+1}, \ldots, l'_{\varepsilon \sum\limits_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i}+r_{\varepsilon j}}\right)$$

для всех $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$.

Из [8, теорема 9] имеем

$$\operatorname{der}_{l_0} Z \times \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} = \operatorname{der}_{l_0 + \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}} Z \oplus \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{j=1}^{t_\varepsilon} \sum_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}},$$

$$\operatorname{der}_{l'_0} Z \times \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} = \operatorname{der}_{l'_0 + \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l'_{\varepsilon v}} Z \oplus \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{j=1}^{t_\varepsilon} \sum_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}.$$

По теореме 1 имеем автоморфизм σ прямой суммы $A = Z \oplus \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \sum\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ и элемент $u_0 + \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}} + \ldots + r_{\varepsilon t_\varepsilon} u_{\varepsilon v}$, $u_0 \in Z$, $u_{\varepsilon v} \in Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$, такие что

$$\sigma\left(l_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum\limits_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} l_{\varepsilon v}\right) = (n-1)\left(u_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum\limits_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} u_{\varepsilon v}\right) + l'_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum\limits_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} l'_{\varepsilon v}. \tag{17}$$

Пусть $A_2 = \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \sum\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$. Ограничение σ_{A_2} автоморфизма σ на подгруппу A_2 является автоморфизмом A_2. Так как $A = Z \oplus A_2$, то $Z \cong A/A_2$ (см., например, [10, с. 50]). Пусть θ_1 — найденный изоморфизм из Z в A/A_2 и этот изоморфизм действует по правилу $\theta_1(z) = z + A_2$. Так как ограничение σ_{A_2} автоморфизма σ на подгруппу A_2 является автоморфизмом A_2, то σ индуцирует автоморфизм σ' фактор-группы A/A_2 по правилу $\sigma'(z + A_2) = \sigma(z) + A_2$ (проверяется непосредственно). Итак, $\tau = \theta_1^{-1} \circ \sigma' \circ \theta_1$ — автоморфизм группы Z.

Для элемента $l_0 \in Z$, используя (17), получаем

$$\begin{aligned} \tau(l_0) &= \theta_1^{-1} \circ \sigma' \circ \theta_1(l_0) = \theta_1^{-1} \circ \sigma'(l_0 + A_2) = \theta_1^{-1}(\sigma(l_0) + A_2) = \\ &= \theta_1^{-1}\Bigg((n-1)\left(u_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u_{\varepsilon v}\right) + l'_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l'_{\varepsilon v} - \\ &\quad - \sigma\left(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\right) + A_2\Bigg) = \theta_1^{-1}\big((n-1)u_0 + l'_0 + A_2\big) = (n-1)u_0 + l'_0. \end{aligned}$$

Таким образом, для элемента u_0 из Z и автоморфизма τ верно равенство

$$\tau(l_0) = (n-1)u_0 + l'_0. \tag{18}$$

По теореме 1 имеем $\mathrm{der}_{l_0} Z \cong \mathrm{der}_{l'_0} Z$, но $0 \leqslant l_0, l'_0 \leqslant (n-1)/2$; тогда $l_0 = l'_0$.

Далее, полагаем $\sigma(1) = e_0 + \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} e_{\varepsilon v}$, где $e_0 \in Z$, $e_{\varepsilon v} \in Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ для $\varepsilon = 1, \ldots, s$ и $v = \sum\limits_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + w_j$, $1 \leqslant w_j \leqslant r_{\varepsilon j}$. Тогда

$$\sigma(l_0) = l_0\biggl(e_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} e_{\varepsilon v}\biggr) = l_0 e_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_0 e_{\varepsilon v}.$$

Из (17) получим

$$\sigma\biggl(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\biggr) = (n-1)\biggl(u_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u_{\varepsilon v}\biggr) + l'_0 +$$
$$+ \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l'_{\varepsilon v} - \sigma(l_0) = (n-1)\biggl(u_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u_{\varepsilon v}\biggr) +$$
$$+ l'_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l'_{\varepsilon v} - l_0 e_0 - \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_0 e_{\varepsilon v},$$

но $\sigma\Bigl(\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\Bigr) \in A_2$, значит, $(n-1)u_0 + l'_0 - l_0 e_0 = 0$ и

$$\sigma_{A_2}\Biggl(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} l_{\varepsilon v}\Biggr) = (n-1)\Biggl(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} u_{\varepsilon v}\Biggr) + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} (l'_{\varepsilon v} - l_0 e_{\varepsilon v}). \tag{19}$$

Таким образом, для элемента $\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u_{\varepsilon v}$ из A_2 и автоморфизма σ_{A_2} верно равенство (19). По теореме 1 имеем изоморфизм n-групп

$$\mathrm{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}} A_2 \cong \mathrm{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} (l'_{\varepsilon v} - l_0 e_{\varepsilon v})} A_2,$$

а по [8, теорема 9] имеем

$$\mathrm{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}} A_2 = \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}, \tag{20}$$

$$\mathrm{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} (l'_{\varepsilon v} - l_0 e_{\varepsilon v})} A_2 = \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{(l'_{\varepsilon v} - l_0 e_{\varepsilon v})} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \cong$$
$$\cong \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l''_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}},$$

где $l''_{\varepsilon v} = \text{НОД}(l'_{\varepsilon v} - l_0 e_{\varepsilon v}, n-1, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}})$. Тогда

$$\prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \cong \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l''_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}. \tag{21}$$

Из этого изоморфизма по теореме 6 следует, что для каждого простого числа p_ε $(\varepsilon = 1, \ldots, s)$ произведения примарных множителей $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ и $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l''_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей. У произведения $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l''_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ определяющим набором наибольших общих делителей будет набор

$$\begin{cases} D''_{\varepsilon 1} = \text{НОД}\big(d''_{\varepsilon 1}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 1} - m_{\varepsilon 2}} d''_{\varepsilon 2}, \ldots, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 1} - m_{\varepsilon t_\varepsilon}} d''_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 1}}, n-1\big), \\ D''_{\varepsilon 2} = \text{НОД}\big(d''_{\varepsilon 1}, d''_{\varepsilon 2}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 2} - m_{\varepsilon 3}} d''_{\varepsilon 3}, \ldots, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 2} - m_{\varepsilon t_\varepsilon}} d''_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon 2}}, n-1\big), \\ \quad \ldots \\ D''_{\varepsilon t_\varepsilon - 1} = \text{НОД}\big(d''_{\varepsilon 1}, \ldots, d''_{\varepsilon t_\varepsilon - 1}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon t_\varepsilon - 1} - m_{\varepsilon t_\varepsilon}} d''_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon t_\varepsilon - 1}}, n-1\big), \\ D''_{\varepsilon t_\varepsilon} = \text{НОД}\big(d''_{\varepsilon 1}, \ldots, d''_{\varepsilon t_\varepsilon - 1}, d''_{\varepsilon t_\varepsilon}, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon t_\varepsilon}}, n-1\big), \end{cases} \tag{22}$$

где

$$d''_{\varepsilon j} = \text{НОД}\Bigg(l''_{\varepsilon \sum\limits_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + 1}, \ldots, l''_{\varepsilon \sum\limits_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + r_{\varepsilon j}}\Bigg)$$

для всех $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$. Тогда $D_{\varepsilon j} = D''_{\varepsilon j}$ для всех $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$.

Фиксируем $\varepsilon = 1, \ldots, s$. Используя свойства делимости, доказываем

$$\text{НОД}(l_0, D_{\varepsilon j}) = \text{НОД}(l'_0, D'_{\varepsilon j}).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Из $l_0 = l'_0$ имеем $\operatorname{der}_{l_0} Z \cong \operatorname{der}_{l'_0} Z$; тогда по теореме 1 имеем автоморфизм τ и элемент u_0 группы Z, такие что верно (18).

Выбираем автоморфизм σ прямой суммы $A_2 = \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \sum\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$, и пусть

$$\sigma\Bigg(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1} + \ldots + r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\Bigg) = \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1} + \ldots + r_{\varepsilon t_\varepsilon}} x_{\varepsilon v}.$$

Согласно теореме 1 имеем изоморфизм n-групп

$$\operatorname{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1} + \ldots + r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}} A_2 \cong \operatorname{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1} + \ldots + r_{\varepsilon t_\varepsilon}} x_{\varepsilon v}} A_2,$$

а по [8, теорема 9] имеем (20) и

$$\operatorname{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1} + \ldots + r_{\varepsilon t_\varepsilon}} x_{\varepsilon v}} A_2 = \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{x_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \cong \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l''_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}},$$

где $l''_{\varepsilon v} = \text{НОД}(x_{\varepsilon v}, n-1, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}})$. Тогда имеем изоморфизм (21). Из этого изоморфизма по теореме 6 получаем, что для каждого простого числа p_ε $(\varepsilon = 1, \ldots, s)$ произведения $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ и $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l''_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей, т. е. $D_{\varepsilon j} = D''_{\varepsilon j}$ для всех $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$, где $D''_{\varepsilon j}$ взяты из системы (22).

Пусть для каждого $\varepsilon = 1, \ldots, s$ верно $\text{НОД}(l_0, D_{\varepsilon j}) = \text{НОД}(l'_0, D'_{\varepsilon j})$ для всех $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$. Если для каждого $\varepsilon = 1, \ldots, s$ верно $D_{\varepsilon j} = D'_{\varepsilon j}$ для всех $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$, то согласно [9, теорема 5] прямые произведения $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ и $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ изоморфны, а тогда прямые произведения (13) и (14) изоморфны.

Пусть для некоторого ε $(\varepsilon = 1, \ldots, s)$ верно $D_{\varepsilon j} \neq D'_{\varepsilon j}$ для некоторых j из целочисленного интервала $[1, t_\varepsilon]$. В этом случае для каждого $\varepsilon = 1, \ldots, s$ будем искать целые числа $e_{\varepsilon v}$, $v = 1, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}$, для которых разрешимы линейные сравнения

$$(n-1)x \equiv l''_{\varepsilon v} - l'_{\varepsilon v} + l_0 e_{\varepsilon v} \pmod{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}, \quad j = 1, \ldots, t_\varepsilon. \tag{23}$$

Для тех j из целочисленного интервала $[1, t_\varepsilon]$, для которых $D_{\varepsilon j} \neq D'_{\varepsilon j}$, пусть $D_{\varepsilon j} < D'_{\varepsilon j}$ (аналогично $D_{\varepsilon j} > D'_{\varepsilon j}$). Полагаем, что $l_0 = p_\varepsilon^{m_0} q_0$, q_0 не делится на p_ε, $D_{\varepsilon j} = p_\varepsilon^{n_{\varepsilon j}}$, $D'_{\varepsilon j} = p_\varepsilon^{n'_{\varepsilon j}}$. Тогда $\text{НОД}(l_0, D_{\varepsilon j}) = p_\varepsilon^{\min\{m_0, n_{\varepsilon j}\}}$. Заметим, что $\min\{m_0, n_{\varepsilon j}\} = m_0$, иначе не было бы верно равенство $\text{НОД}(l_0, D_{\varepsilon j}) = \text{НОД}(l'_0, D'_{\varepsilon j})$. Находим, что $\text{НОД}(l_0, n-1, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}) = p_\varepsilon^{m_0}$. Тогда для каждого $v = \sum\limits_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + w_j$, $w_j = 1, \ldots, r_{\varepsilon j}$, сравнение

$$l_0 x \equiv l'_{\varepsilon v} - l''_{\varepsilon v} \pmod{\text{НОД}(n-1, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}})}$$

разрешимо, так как $l'_{\varepsilon v} - l''_{\varepsilon v}$ делится на $\text{НОД}(l_0, n-1, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}})$. Пусть $e_{\varepsilon v}$ — решение этого сравнения. Тогда разрешимо сравнение (23).

Для тех j из целочисленного интервала $[1, t_\varepsilon]$, для которых $D_{\varepsilon j} = D'_{\varepsilon j}$, полагаем $e_{\varepsilon v} = 0$ для каждого $v = \sum\limits_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + w_j$, $w_j = 1, \ldots, r_{\varepsilon j}$.

Итак, мы нашли целые числа $e_{\varepsilon v}$, $v = 1, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}$, для которых разрешимы линейные сравнения (23). Для каждого $\varepsilon = 1, \ldots, s$ пусть $u_{\varepsilon v}$ — решения этих сравнений, $v = 1, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}$, для них верны сравнения

$$l''_{\varepsilon v} \equiv (n-1)u_{\varepsilon v} + l'_{\varepsilon v} - l_0 e_{\varepsilon v} \pmod{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}, \quad j = 1, \ldots, t_\varepsilon. \tag{24}$$

Далее, по [8, теорема 9] имеем

$$\operatorname{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l''_{\varepsilon v}} A_2 = \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l''_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}.$$

Тогда из (21) с учётом (20) согласно теореме 1 находим автоморфизм σ' и элемент $\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u'_{\varepsilon v}$ прямой суммы A_2, такие что верно

$$\sigma'\biggl(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\biggr) = (n-1)\biggl(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u'_{\varepsilon v}\biggr) + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l''_{\varepsilon v}. \quad (25)$$

С помощью найденных целых чисел $e_{\varepsilon v}$, $\varepsilon = 1, \ldots, s$, $v = 1, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}$, автоморфизма τ группы Z, который указан в начале доказательства достаточности, и автоморфизма σ' группы A_2 зададим отображение μ прямой суммы $Z \oplus A_2$ на себя по правилу: если $a \in Z$, $b \in A_2$, то

$$\mu(a+b) = \tau(a) + a\biggl(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} e_{\varepsilon v}\biggr) + \sigma'(b). \quad (26)$$

Непосредственная проверка показывает, что отображение μ будет автоморфизмом группы $Z \oplus A_2$. Для этого автоморфизма, используя (26), (18), (25), (24), получаем

$$\mu\biggl(l_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\biggr) =$$
$$= (n-1)\biggl(u_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} (u'_{\varepsilon v} + u_{\varepsilon v})\biggr) + l'_0 + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l'_{\varepsilon v},$$

значит, согласно теореме 1, имеем изоморфизм прямых произведений (13) и (14). Теорема доказана. □

Теперь можно указать полную систему инвариантов для конечно порождённой абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$, в разложение которой входит одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа. Пусть $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению

$$\mathrm{der}_{l_0} Z \times \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{u_\varepsilon} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \quad (27)$$

бесконечной абелевой полуциклической n-группе $\mathrm{der}_{l_0} Z$, где $0 \leqslant l_0 \leqslant (n-1)/2$, и $u_1 + \ldots + u_s$ конечных примарных абелевых полуциклических n-групп $\mathrm{der}_{l_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$, где $l_{\varepsilon j}$ делит НОД$(n-1, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}})$. Число l_0 и совокупность порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (27) вместе с набором наибольших общих делителей НОД$(l_0, D_{\varepsilon i})$, где $D_{\varepsilon i}$ — компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений $\prod\limits_{j=1}^{u_\varepsilon} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ для каждого $\varepsilon = 1, \ldots, s$, назовём инвариантами n-группы $\langle G, f\rangle$.

Следствие 5. *Своими инвариантами конечно порождённая абелева n-группа, в разложение которой входит одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа, определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Пусть теперь конечно порождённая абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению (11) и $k > 1$. Как и в случае, когда $k = 1$, в разложении (11) по каждому простому числу p_ε, $\varepsilon = 1, \ldots, s$, множители с равными порядками в разложении $\prod\limits_{j=1}^{s_\varepsilon} \operatorname{der}_{l_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ расположим рядом и такие подпрямые произведения расположим в порядке убывания порядков множителей. Получим разложение

$$\prod_{i=1}^{k} \operatorname{der}_{l_i} Z \times \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}, \tag{28}$$

где $0 \leqslant l_i \leqslant (n-1)/2$, $v = \sum\limits_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + w_j$, $w_j = 1, \ldots, r_{\varepsilon j}$ при каждом $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$, и $m_{\varepsilon 1} > m_{\varepsilon 2} > \ldots > m_{\varepsilon t_\varepsilon}$, p_ε — различные простые числа.

Теорема 9. *Пусть даны* $\operatorname{der}_{l_i} Z$, $\operatorname{der}_{l'_i} Z$, *где* $0 \leqslant l_i, l'_i \leqslant (n-1)/2$, $i = 1, \ldots, k$, $k > 1$, *и* $\operatorname{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$, $\operatorname{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$, $v = \sum\limits_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + w_j$, $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$, $w_j = 1, \ldots, r_{\varepsilon j}$, *где* $m_{\varepsilon 1} > m_{\varepsilon 2} > \ldots > m_{\varepsilon t_\varepsilon}$, p_ε — *различные простые числа,* $\varepsilon = 1, \ldots, s$. *Прямые произведения* (28) *и*

$$\prod_{i=1}^{k} \operatorname{der}_{l'_i} Z \times \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \tag{29}$$

изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\text{НОД}(l_1, \ldots, l_k, n-1) = \text{НОД}(l'_1, \ldots, l'_k, n-1) = L$$

и для каждого $\varepsilon = 1, \ldots, s$ *верно* $\text{НОД}(L, D_{\varepsilon j}) = \text{НОД}(L, D'_{\varepsilon j})$ *для всех* $j = 1, \ldots, t_\varepsilon$, *где* $D_{\varepsilon j}$ *и* $D'_{\varepsilon j}$ *взяты из определяющих наборов наибольших общих делителей произведений* $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ *и* $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ *соответственно.*

Доказательство. Необходимость. Для фиксированного простого числа p_ε ($\varepsilon = 1, \ldots, s$) у произведения

$$\prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$$

определяющим набором наибольших общих делителей будет набор (15), а для произведения

$$\prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \operatorname{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$$

этот определяющий набор имеет вид (16).

Согласно [8, теорема 9] имеем

$$\prod_{i=1}^{k}\mathrm{der}_{l_i} Z \times \prod_{\varepsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\varepsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}}\mathrm{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} =$$

$$= \mathrm{der}_{\sum\limits_{i=1}^{k} l_i + \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s}\sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}} Z^k \oplus \sum_{\varepsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\varepsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}},$$

$$\prod_{i=1}^{k}\mathrm{der}_{l'_i} Z \times \prod_{\varepsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\varepsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}}\mathrm{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} =$$

$$= \mathrm{der}_{\sum\limits_{i=1}^{k} l'_i + \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s}\sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l'_{\varepsilon v}} Z^k \oplus \sum_{\varepsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\varepsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}.$$

По теореме 1 имеем автоморфизм σ прямой суммы

$$A = Z^k \oplus \sum_{\varepsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\varepsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$$

и элемент

$$\sum_{i=1}^{k} u_i + \sum_{\varepsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u_{\varepsilon v}, \quad u_i \in Z, \quad u_{\varepsilon v} \in Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}},$$

такие что

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{k} l_i + \sum_{\varepsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\right) =$$

$$= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{k} u_i + \sum_{\varepsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u_{\varepsilon v}\right) + \sum_{i=1}^{k} l'_i + \sum_{\varepsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l'_{\varepsilon v}. \quad (30)$$

Как и раньше в доказательстве необходимости теоремы 8, ограничение σ_{A_2} автоморфизма σ на подгруппу $A_2 = \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{t_\varepsilon}\sum\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ является автоморфизмом A_2.

Так как $A = Z^k \oplus A_2$, то $Z^k \cong A/A_2$. Пусть $\theta_1\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} z_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{k} z_i + A_2$ — изоморфизм из Z^k в A/A_2. Автоморфизм σ индуцирует автоморфизм σ' фактор-группы A/A_2 по правилу $\sigma'\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} z_i + A_2\Big) = \sigma\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} z_i\Big) + A_2$ (проверяется непосредственно). Получили автоморфизм $\tau = \theta_1^{-1}\circ\sigma'\circ\theta_1$ группы Z^k.

Для элемента $\sum\limits_{i=1}^{k} l_i \in Z^k$, используя (30), получаем

$$\tau\left(\sum_{i=1}^{k} l_i\right) = \theta_1^{-1}\circ\sigma'\circ\theta_1\left(\sum_{i=1}^{k} l_i\right) = \theta_1^{-1}\circ\sigma'\left(\sum_{i=1}^{k} l_i + A_2\right) =$$

$$= \theta_2^{-1}\Big(\sigma\Big(\sum_{i=1}^{k} l_i\Big) + A_2\Big) = \theta_2^{-1}\Big((n-1)\Big(\sum_{i=1}^{k} u_i + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u_{\varepsilon v}\Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} l'_i + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l'_{\varepsilon v} - \sigma\Big(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\Big) + A_2\Big) =$$

$$= \theta_2^{-1}\Big((n-1)\Big(\sum_{i=1}^{k} u_i\Big) + \sum_{i=1}^{k} l'_i + A_2\Big) = (n-1)\Big(\sum_{i=1}^{k} u_i\Big) + \sum_{i=1}^{k} l'_i.$$

Таким образом, для элемента $\sum\limits_{i=1}^{k} u_i$ из Z^k и автоморфизма τ верно

$$\tau\Big(\sum_{i=1}^{k} l_i\Big) = (n-1)\Big(\sum_{i=1}^{k} u_i\Big) + \sum_{i=1}^{k} l'_i. \qquad (31)$$

По теореме 1 имеем изоморфизм n-групп

$$\mathrm{der}_{\sum\limits_{i=1}^{k} l_i} Z^k \cong \mathrm{der}_{\sum\limits_{i=1}^{k} l'_i} Z^k,$$

откуда по [8, теорема 9] имеем изоморфизм

$$\prod_{i=1}^{k} \mathrm{der}_{l_i} Z \cong \prod_{i=1}^{k} \mathrm{der}_{l'_i}.$$

Тогда по теореме 4 имеем $\text{НОД}(l_1, \ldots, l_k, n-1) = \text{НОД}(l'_1, \ldots, l'_k, n-1)$.

Далее, пусть образ $\sigma(1)$ образующего элемента 1 каждой бесконечной циклической группы Z из прямой суммы Z^k имеет вид

$$\sigma(1) = \sum_{i=1}^{k} e_{\rho i} + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} e_{\rho\varepsilon v},$$

где $\rho = 1, \ldots, k$, $e_{\rho i} \in Z$, $e_{\rho\varepsilon v} \in Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ для $\varepsilon = 1, \ldots, s$ и $v = \sum\limits_{i=0}^{j-1} r_{\varepsilon i} + w_j$, $1 \leqslant w_j \leqslant r_{\varepsilon j}$. Тогда

$$\sigma\Big(\sum_{i=1}^{k} l_i\Big) = \sum_{\rho=1}^{k} l_\rho \Big(\sum_{i=1}^{k} e_{\rho i} + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} e_{\rho\varepsilon v}\Big) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho i} + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} \sum_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho\varepsilon v}.$$

Из (30) получим

$$\sigma\Big(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} l_{\varepsilon v}\Big) = (n-1)\Big(\sum_{i=1}^{k} u_i + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} u_{\varepsilon v}\Big) + \sum_{i=1}^{k} l'_i + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} l'_{\varepsilon v} -$$

$$- \sigma\left(\sum_{i=1}^{k} l_i\right) = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{k} u_i + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} u_{\varepsilon v}\right) + \sum_{i=1}^{k} l'_i + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} l'_{\varepsilon v} -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \sum_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho i} - \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\varepsilon} r_{\varepsilon i}} \sum_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho\varepsilon v},$$

но $\sigma\Big(\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\Big) \in A_2$, значит,

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{k} u_i\right) + \sum_{i=1}^{k} l'_i - \sum_{i=1}^{k} \sum_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho i} = 0$$

и

$$\sigma_{A_2}\left(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\right) =$$

$$= (n-1)\left(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u_{\varepsilon v}\right) + \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} \left(l'_{\varepsilon v} - \sum_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho\varepsilon v}\right). \quad (32)$$

Таким образом, для элемента $\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} u_{\varepsilon v}$ из A_2 и автоморфизма σ_{A_2} верно равенство (19). По теореме 1 имеем изоморфизм n-групп

$$\mathrm{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}} A_2 \cong \mathrm{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} (l'_{\varepsilon v} - \sum\limits_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho\varepsilon v})} A_2,$$

а по [8, теорема 9] имеем (20) и

$$\mathrm{der}_{\sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} (l'_{\varepsilon v} - \sum\limits_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho\varepsilon v})} A_2 = \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{(l'_{\varepsilon v} - \sum\limits_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho\varepsilon v})} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}} \cong$$

$$\cong \prod_{\varepsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l''_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}},$$

где

$$l''_{\varepsilon v} = \text{НОД}\left(l'_{\varepsilon v} - \sum_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho\varepsilon v}, n-1, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}\right).$$

Тогда верно (21). Из изоморфизма (21) по теореме 6 для каждого простого числа p_ε $(\varepsilon = 1, \ldots, s)$ произведения $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ и $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l''_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$

имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей, т. е. $D_{\varepsilon j} = D''_{\varepsilon j}$ для всех $j = 1, \dots, t_\varepsilon$, где $D''_{\varepsilon j}$ взяты из системы (22).

Фиксируем $\varepsilon = 1, \dots, s$. Используя свойства делимости, доказываем, что НОД$(L, D_{\varepsilon j}) =$ НОД$(L, D'_{\varepsilon j})$. Необходимость доказана.

Достаточность. Из НОД$(l_1, \dots, l_k, n-1) =$ НОД$(l'_1, \dots, l'_k, n-1)$ по теореме 4 имеем $\prod\limits_{i=1}^{k} \mathrm{der}_{l_i} Z \cong \prod\limits_{i=1}^{k} \mathrm{der}_{l'_i} Z$. Тогда согласно [8, теорема 9] имеем изоморфизм n-групп $\mathrm{der}_{\sum\limits_{i=1}^{k} l_i} Z^k \cong \mathrm{der}_{\sum\limits_{i=1}^{k} l'_i} Z^k$, из этого изоморфизма по теореме 1 имеем автоморфизм τ и элемент $\sum\limits_{i=1}^{k} u_i$ группы Z^k, такие что верно (31).

Так же как в начале доказательства достаточности теоремы 8, выбираем автоморфизм σ прямой суммы $A_2 = \sum\limits_{\varepsilon=1}^{s} \sum\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \sum\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$, и пусть

$$\sigma\Bigg(\sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} l_{\varepsilon v}\Bigg) = \sum_{\varepsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\varepsilon 1}+\ldots+r_{\varepsilon t_\varepsilon}} x_{\varepsilon v}.$$

Тогда получим изоморфизм (21), где $l''_{\varepsilon v} =$ НОД$(x_{\varepsilon v}, n-1, p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}})$. Из этого изоморфизма по теореме 6 вытекает, что для каждого простого числа p_ε $(\varepsilon = 1, \dots, s)$ произведения $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ и $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l''_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей, т. е. $D_{\varepsilon j} = D''_{\varepsilon j}$ для всех $j = 1, \dots, t_\varepsilon$, где $D''_{\varepsilon j}$ взяты из системы (22).

Пусть для каждого $\varepsilon = 1, \dots, s$ верно НОД$(L, D_{\varepsilon j}) =$ НОД$(L, D'_{\varepsilon j})$ для всех $j = 1, \dots, t_\varepsilon$. Если для каждого $\varepsilon = 1, \dots, s$ верно $D_{\varepsilon j} = D'_{\varepsilon j}$ для всех $j = 1, \dots, t_\varepsilon$, то согласно [9, теорема 5] прямые произведения $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ и $\prod\limits_{j=1}^{t_\varepsilon} \prod\limits_{w_j=1}^{r_{\varepsilon j}} \mathrm{der}_{l'_{\varepsilon v}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ изоморфны, а тогда прямые произведения (28) и (29) изоморфны.

Пусть для некоторого ε $(\varepsilon = 1, \dots, s)$ верно $D_{\varepsilon j} \neq D'_{\varepsilon j}$ для некоторых j из целочисленного интервала $[1, t_\varepsilon]$. В этом случае, так же как в доказательстве теоремы 8 аналогичного случая, доказывается изоморфизм прямых произведений (28) и (29). Теорема доказана. □

Теперь можно указать полную систему инвариантов для конечно порождённой абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$, в разложение которой входит больше чем одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа. Пусть $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению (11), где $k > 1$. Количество бесконечных абелевых полуциклических n-групп k в разложении (11) вместе с $L =$ НОД$(l_1, \dots, l_k, n-1)$ и совокупность порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (11) вместе с набором наибольших общих делителей НОД$(L, D_{\varepsilon i})$, где $D_{\varepsilon i}$ — компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений $\prod\limits_{j=1}^{u_\varepsilon} \mathrm{der}_{l_{\varepsilon j}} Z_{p_\varepsilon^{m_{\varepsilon j}}}$ для каждого $\varepsilon = 1, \ldots, s$, назовём инвариантами n-группы $\langle G, f\rangle$.

Следствие 6. *Своими инвариантами конечно порождённая абелева n-группа, в разложение которой входит больше чем одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа, определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Литература

[1] Артамонов В. А. Лекции по алгебре, III семестр, мех-мат МГУ. — М., 2000.

[2] Бощенко А. П., Щучкин Н. А. Конечные абелевы n-арные группы // Чебышёвский сб. — 2011. — Т. 12, вып. 2 (38). — С. 5—14.

[3] Гальмак А. М. Полуабелевы n-арные группы с идемпотентами // Весник ВДУ ім. П. М. Машэрава. — 1999. — Т. 2 (12). — С. 56—60.

[4] Гальмак А. М. n-арные группы. Ч. I. — Гомель: Гомельский гос. унив. им. Ф. Скорины, 2003.

[5] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[6] Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. — 2009. — Т. 3 (54). — С. 186—194.

[7] Щучкин Н. А. Свободные абелевы n-арные группы // Чебышёвский сб. — 2011. — Т. 12, вып. 2 (38). — С. 163—170.

[8] Щучкин Н. А. Прямое произведение n-арных групп // Чебышёвский сб. — 2014. — Т. 15, вып. 2. — С. 101—121.

[9] Щучкин Н. А. Строение конечных абелевых n-арных групп // Дискрет. матем. — 2014. — Т. 26, № 3. — С. 144—159.

[10] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[11] Dörnte W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff // Math. Z. — 1928. — Bd. 29. — S. 1—19.

[12] Dudek W. A., Michalski J. On retrakts of polyadic groups // Demonstratio Math. — 1984. — Vol. 17. — P. 281—301.

[13] Post E. L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 48 — P. 208—350.

[14] Timm J. Kommutative n-Gruppen: Diss. — Hamburg, 1967.