

Разложения в композиции для функции Белого икосаэдра рода 4

Н. Я. АМБУРГ

НИИ «Курчатовский институт»,

НИУ «Высшая школа экономики»

e-mail: amburg@mcsme.ru

М. А. КОВАЛЁВА

НИУ «Высшая школа экономики»

e-mail: makovaleva_2@edu.hse.ru

УДК 512.627.44

Ключевые слова: детские рисунки, функции Белого, функциональная композиция, икосаэдр рода 4, кривая Бринга.

Аннотация

Икосаэдр I_4 рода 4 является детским рисунком, вложенным в кривую Бринга \mathcal{B} . Рисунок I_4 в некотором смысле родственен обыкновенному икосаэдру I_0 , вложенному в комплексную сферу Римана. В частности, разложения функций Белого $\beta_{I_0}: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ и $\beta_{I_4}: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ для I_0 и I_4 имеют одинаковые решётки. Диаграмма разложений β_{I_0} известна. В этой работе мы находим разложения β_{I_4} . Заметим, что β_{I_0} раскладывается в композиции рациональных функций на \mathbb{CP}^1 , тогда как в случае β_{I_4} мы имеем дело с отображениями между разными алгебраическими кривыми.

Abstract

N. Ya. Amburg, M. A. Kovaleva, Belyi function decompositions for the icosahedron of genus 4, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 3–30.

The icosahedron I_4 of genus 4 is a dessin d'enfant embedded in Bring's curve \mathcal{B} . The dessin I_4 is related in some sense to a regular icosahedron I_0 embedded in the complex Riemann sphere. In particular, decompositions of Belyi functions $\beta_{I_0}: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ and $\beta_{I_4}: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ for I_0 and I_4 have the same lattice. The diagram of β_{I_0} decompositions is already known. In the present paper we find β_{I_4} decompositions. Note that β_{I_0} decomposes into rational functions on \mathbb{CP}^1 , while in case of β_{I_4} we deal with maps between different algebraic curves.

*Посвящается памяти
Александра Васильевича Михалёва*

1. Введение

В начале XX века Джозеф Ритт доказал теорему о разложении многочленов в композиции. Рассмотрим два разложения многочлена f в композиции

Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 1, с. 3–30.

© 2024 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

неразложимых многочленов, степень которых больше 1:

$$f = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_m = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_n \quad g_i \neq h_i \text{ для некоторого } i.$$

Тогда $m = n$ и степени многочленов, входящих в разложения слева и справа, одинаковы с точностью до перестановки [12]. Однако аналогичная задача для рациональных функций является более сложной. Например, функция Белого $\beta_{I_0}: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ для обыкновенного икосаэдра I_0 имеет разложения в композиции с разными количествами неразложимых функций (рис. 1).

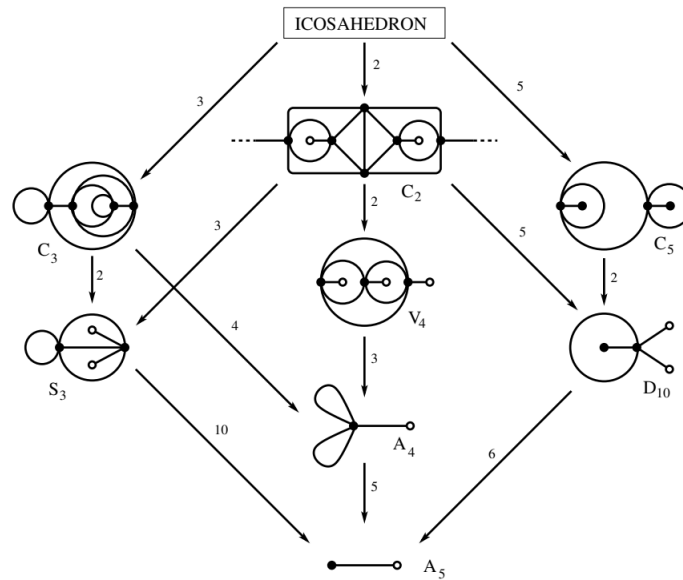


Рис. 1. Разложения функции Белого для планарного икосаэдра

Понятие функции Белого связано с «детскими рисунками». Этот термин (по-французски *dessins d'enfants*) ввёл Александр Гротендик в 1980-х годах. Современная теория детских рисунков связывает между собой топологические, комбинаторные и алгеброгеометрические объекты. Детский рисунок представляет собой граф, нарисованный на топологической поверхности без отрыва карандаша. Примечательно, что эти графы дают нам точную характеристику алгебраических кривых. В этой работе мы рассматриваем икосаэдр I_4 рода 4, имеющий группу автоморфизмов A_5 , такую же, как и у обыкновенного икосаэдра I_0 . Икосаэдр I_4 рода 4 — это детский рисунок, вложенный в поверхность рода 4, на которой он индуцирует комплексную структуру кривой Бринга $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}P^4$ с помощью своей функции Белого $\beta_{I_4}: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ (см. теорему 2.1). Разложения функций Белого $\beta_{I_0}: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ и $\beta_{I_4}: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ для I_0 и I_4 имеют одинаковые решётки. Для того чтобы разложить β_{I_4} в композиции, мы рассматриваем факторы икосаэдра I_4 по подгруппам его группы автоморфизмов. Также

мы находим уравнения соответствующих алгебраических кривых. Диаграмма разложений β_{I_4} показана на рис. 2.

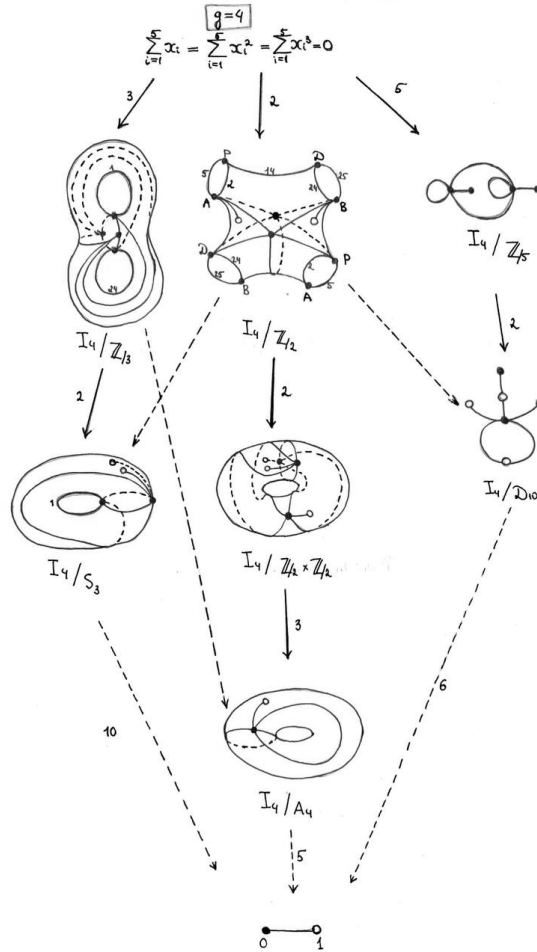


Рис. 2. Полная диаграмма разложений функции Белого для икосаэдра рода 4

2. Детские рисунки

Определение 1 (детский рисунок). Детским рисунком называется двукрашенный граф, вложенный в компактную ориентированную двумерную поверхность таким образом, что:

- рёбра графа не пересекаются;

- дополнение к графу на поверхности является несвязным объединением открытых дисков с точностью до гомеоморфизма;
- вершины графа окрашены в чёрный и белый таким образом, что вершины, соединённые ребром, имеют разные цвета.

Родом детского рисунка будем называть род поверхности, в которую он вложен.

Замечание 2.1. Если белая вершина детского рисунка имеет степень 2, мы «стираем» её, чтобы не загромождать рисунок.

Детский рисунок может быть закодирован парой перестановок. Пусть M — детский рисунок с m рёбрами. Пронумеруем рёбра M от 1 до m . Поставим в соответствие M пару перестановок (σ, α) на множестве m номеров:

- цикл в $\sigma \in S_m$ соответствует номерам рёбер, инцидентных чёрной вершине, взятым при обходе вокруг этой вершины против часовой стрелки;
- циклы $\alpha \in S_m$ соответствуют аналогичным образом белым вершинам.

Замечание 2.2. Перестановка $(\sigma\alpha)^{-1}$ представляет грани детского рисунка. Она содержит столько же циклов, сколько имеется граней. Также степень грани равна длине соответствующего цикла.

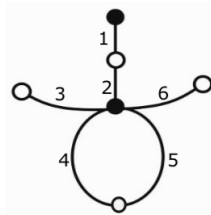


Рис. 3. Детский рисунок

Пример 1. Для графа, показанного на рис. 3, получаем следующие перестановки:

$$\sigma = (1)(23456), \quad \alpha = (12)(3)(45)(6), \quad (\sigma\alpha)^{-1} = (12643)(5). \quad (1)$$

Предложение 2.1 [17]. Пара перестановок $\sigma, \alpha \in S_m$ связана с детским рисунком тогда и только тогда, когда группа, порождённая σ и α , транзитивна.

Определение 2 (пара Белого). Пара (X, β) , где X — риманова поверхность, $\beta: X \rightarrow \mathbb{C}$ — мероморфная функция, называется парой Белого, если критические значения β принадлежат множеству $\{0, 1, \infty\}$.

Теорема 2.1 (теорема Римана о существовании [17]). Для любого детского рисунка M существует пара Белого (X, β) , такая что M вложен в X как $M = \beta^{-1}([0, 1])$ следующим образом:

- 1) чёрные вершины — это прообразы нуля $\beta^{-1}(0)$, кратность корня $\beta(x) = 0$ равна степени соответствующей чёрной вершины;

- 2) белые вершины — это прообразы единицы $\beta^{-1}(1)$, кратность корня $\beta(x) = 1$ равна степени соответствующей белой вершины;
- 3) центры граней — это полюса $\beta^{-1}(\infty)$, порядок полюса равен степени соответствующей грани.

Пара (X, β) единственна с точностью до изоморфизма римановой поверхности X .

Определение 3 (автоморфизмы детского рисунка). Пусть детскому рисунку M соответствует пара Белого (X, β) . Автоморфизмом детского рисунка M будем называть автоморфизм φ римановой поверхности X , такой что $\beta = \beta \circ \varphi$.

3. Икосаэдр рода 4

Возьмём обыкновенный икосаэдр I_0 , вложенный в сферу, и запишем соответствующие перестановки (σ, α) . Затем сделаем следующие замены:

$$\sigma' = \sigma^2, \quad \alpha' = \alpha.$$

Согласно предложению 2.1 пара (σ', α') задаёт некоторый детский рисунок, который мы будем обозначать I_4 и называть *икосаэдром рода 4*. Несложно проверить, что

- σ^2 имеет 12 циклов длины 5, следовательно, у I_4 12 (чёрных) вершин степени 5;
- α имеет 30 циклов длины 2, следовательно, у I_4 30 рёбер (т. е. 30 белых вершин степени 2);
- $(\sigma^2\alpha)^{-1}$ имеет 12 циклов длины 5, следовательно, у I_4 12 пятиугольных граней.

По формуле Эйлера I_4 вложен в поверхность рода 4.



Рис. 4. Большой додекаэдр

Есть красивый способ визуализировать I_4 как большой додекаэдр (рис. 4), являющийся одним из четырёх невыпуклых правильных многогранников. Заметим, что рёбра и вершины большого додекаэдра и обыкновенного икосаэдра совпадают. Перестановка $(\sigma\alpha)^{-1}$ отправляет ребро, инцидентное вершине,

в ребро, следующее за ним в циклическом порядке, и мы получаем треугольные грани обыкновенного икосаэдра. Перестановка $(\sigma^2\alpha)^{-1}$ переводит ребро, инцидентное вершине, в ребро, находящееся через одно, и мы получаем пятиугольные грани I_4 . Таким образом, мы можем рассматривать большой додекаэдр как погружение поверхности рода 4 в \mathbb{R}^3 .

3.1. Функция Белого для I_4

В 1786 году Эрланд Бринг доказал, что уравнение пятой степени заменой переменных можно привести к виду

$$p(x) = x^5 + ax + b. \quad (2)$$

Заметим, что корни x_i уравнения $p(x) = 0$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В 1884 году Феликс Клейн показал, что однородные уравнения (3) задают кривую \mathcal{B} рода 4 в $\mathbb{C}P^4$, и назвал её *кривой Бринга*. Также Клейн доказал, что I_4 вложен в \mathcal{B} [8].

Предложение 3.1 [17]. *Группа автоморфизмов кривой Бринга \mathcal{B} — симметрическая группа S_5 , действующая на кривой Бринга \mathcal{B} перестановками пяти проективных координат.*

Пример 2.

$$(12345) \in \text{Aut}(\mathcal{B}), \quad (12345)(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) = (x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_1).$$

Пять корней уравнения $p(x) = 0$ дают не более 120 точек на кривой Бринга: количество возможных перестановок пяти корней $p(x)$ равно $5! = 120$.

Предложение 3.2. *Функция Белого для икосаэдра рода 4 имеет вид*

$$\beta_{I_4}(x) = 1 + \frac{25b^2}{128a^5} \cdot \left(125b^2 + \sqrt{5} \prod_{1 \leq i < j \leq 5} (x_i - x_j) \right), \quad (4)$$

где

$$a = \sum_{1 \leq i < j < k < s \leq 5}^5 x_i x_j x_k x_s, \quad b = -x_1 x_2 x_3 x_4 x_5.$$

Нарисуем I_4 и двойственный I_4 детский рисунок I_4^* на кривой Бринга \mathcal{B} . Полученный вложенный граф будем обозначать $H = I_4 \cup I_4^*$. Чтобы доказать предложение 3.2, мы воспользуемся предложением 3.3 и замечанием 3.1.

Предложение 3.3 [17]. *Функция Белого для H равна*

$$\beta_H(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) = \frac{256a^5}{256a^5 + 3125b^4},$$

где

$$a = \sum_{1 \leq i < j < k < s \leq 5} x_i x_j x_k x_s, \quad b = -x_1 x_2 x_3 x_4 x_5.$$

Замечание 3.1 [17]. Пусть M — детский рисунок, а β — соответствующая функция Белого. Тогда функция Белого для $M \cup M^*$ является композицией $g \circ \beta$ функции β с функцией $g(y) = (4y)/(y+1)^2$.

Доказательство. Функция Белого для детского рисунка, объединённого с двойственным к нему, должна переводить 0 и ∞ в 0, а 1 — в себя. Функция $g(y) = (4y)/(y+1)^2$ удовлетворяет этим требованиям. \square

Доказательство предложения 3.2. Согласно замечанию 3.1 $\beta_H = g \circ \beta_{I_4}$, где β_{I_4} — искомая функция Белого для икосаэдра рода 4. Имеем

$$\beta_H = \frac{4\beta}{(\beta+1)^2},$$

следовательно,

$$\beta_{1,2}(x) = 2 \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 - \beta_H(x)}}{\beta_H(x)} - 1.$$

Подставляя β_H в $\beta_{1,2}$, находим, что

$$\beta_{1,2}(x) = 1 + \frac{25b^2}{128a^5} \cdot (125b^2 \pm \sqrt{5(256a^5 + 3125b^4)}).$$

Выражение $256a^5 + 3125b^2$ является дискриминантом многочлена $p(x)$ вида (2). Следовательно,

$$\beta_{1,2}(x) = 1 + \frac{25b^2}{128a^5} \cdot \left(125b^2 \pm \sqrt{5} \prod_{i < j} (x_i - x_j) \right).$$

Заметим, что пары Белого (\mathcal{B}, β_1) и (\mathcal{B}, β_2) соответствуют одному и тому же детскому рисунку, поскольку существует автоморфизм φ кривой Бринга \mathcal{B} , такой что

$$\beta_1 = \beta_2 \circ \varphi.$$

В качестве φ можно взять, например, транспозицию $(12) \in \text{Aut}(\mathcal{B})$. Значит, нам подойдёт любая из функций β_1, β_2 . \square

Следствие 3.1. Детские рисунки I_4 и I_4^* изоморфны.

Доказательство. В доказательстве предложения 3.2 мы показали, что обе пары Белого, (\mathcal{B}, β_1) и (\mathcal{B}, β_2) , соответствуют детскому рисунку I_4 .

Заметим, что если β — функция Белого для детского рисунка M , то $1/\beta$ — функция Белого для двойственного детского рисунка M^* . Прямым вычислением проверим, что для β_1, β_2 справедливо соотношение

$$\frac{1}{\beta_1} = \beta_2.$$

Действительно,

$$\beta_{1,2} = 2 \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{256a^5}{256a^5 + 3125b^4}}}{\frac{256a^5}{256a^5 + 3125b^4}} - 1 = 2 \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4^4 a^5}{4^4 a^5 + 5^5 b^4}}}{\frac{4^4 a^5}{4^4 a^5 + 5^5 b^4}} - 1,$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{256a^5}{256a^5 + 3125b^4}}}{\frac{256a^5}{256a^5 + 3125b^4}} = \frac{4^4 a^5 + 5^5 b^4 \pm \sqrt{5^5 b^4 (4^4 a^5 + 5^5 b^4)}}{4^4 a^5} = 1 + t \pm \sqrt{t(1+t)},$$

где

$$t = \left(\frac{5}{a}\right)^5 \left(\frac{b}{4}\right)^4.$$

Следовательно,

$$\beta_1 = 2 + 2t + 2\sqrt{t(1+t)} - 1 = 1 + 2t + 2\sqrt{t(1+t)},$$

$$\frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{1 + 2t + 2\sqrt{t(1+t)}} = \frac{1 + 2t - 2\sqrt{t(1+t)}}{(1 + 2t)^2 - 4(t + t^2)} = 1 + 2t - 2\sqrt{t(1+t)} = \beta_2. \quad \square$$

3.2. Группа автоморфизмов I_4

Предложение 3.4. *Группа автоморфизмов икосаэдра рода четыре I_4 — это знакопеременная группа A_5 , действующая на кривой Бринга \mathcal{B} чётными перестановками проективных координат.*

Доказательство. Рассмотрим функцию Белого для I_4

$$\beta_{I_4}(x) = 1 + \frac{25b^2}{128a^5} \cdot \left(125b^2 + \sqrt{5} \prod_{1 \leq i < j \leq 5} (x_i - x_j)\right).$$

Многочлены a и b симметрические, т. е. переходят в себя при всех перестановках проективных координат. Произведение $\prod_{1 \leq i < j \leq 5} (x_i - x_j)$ инвариантно относительно чётных перестановок, а при действии нечётных меняет знак. Таким образом, β_{I_4} инвариантна только относительно чётных перестановок проективных координат. \square

Замечание 3.2. Рассматривая большой додекаэдр как погружение поверхности рода 4 в \mathbb{R}^3 (см. рис. 4), можно автоморфизмы I_4 представлять как автоморфизмы обыкновенного икосаэдра I_0 .

3.3. Вершины и центры граней I_4

Предложение 3.5 [17].

1. Чёрные вершины I_4 — это точки, которые получаются при действии чётных перестановок на проективные координаты точки

$$\left(1 : e^{\frac{2\pi i}{5}} : e^{\frac{4\pi i}{5}} : e^{\frac{6\pi i}{5}} : e^{\frac{8\pi i}{5}}\right).$$

2. Белые вершины I_4 — это точки, которые получаются при действии всевозможных перестановок на проективные координаты точки

$$(0 : 1 : -1 : i : -i).$$

3. Центры граней I_4 — это точки, которые получаются при действии чётных перестановок на проективные координаты точки

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{5}} : 1 : e^{\frac{4\pi i}{5}} : e^{\frac{6\pi i}{5}} : e^{\frac{8\pi i}{5}} \right).$$

4. Диаграмма разложений функции Белого для I_4

Пусть M — детский рисунок, X — риманова поверхность, в которую он вложен, G — подгруппа группы $\text{Aut}(M)$ автоморфизмов M . отождествим точки, которые могут быть переведены друг в друга автоморфизмами из G . Будем обозначать через M/G полученный фактор детского рисунка M , а через X/G — полученный фактор кривой X .

Как рисунки связаны между собой? Рассмотрим вращательную симметрию \mathbb{Z}_n икосаэдра I_4 . Если \mathbb{Z}_n и $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_m$ — подгруппы $\text{Aut}(I_4)$, то следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} I_4 & \xrightarrow{n} & I_4/\mathbb{Z}_n \\ & \searrow & \downarrow m \\ & \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_m & I_4/\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_m \end{array} .$$

Перечислим нетривиальные подгруппы группы A_5 :

- \mathbb{Z}_2 ,
- $V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
- $A_4 = V_4 \rtimes \mathbb{Z}_3$,
- $A_3 = \mathbb{Z}_3$,
- $S_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$,
- \mathbb{Z}_5 ,
- $D_{10} = \mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

На рис. 5 показаны факторы икосаэдра рода 4 $\{I_4/G \mid G \subset \text{Aut}(I_4)\}$ по подгруппам группы автоморфизмов. Стрелка в этой схеме, идущая от I_4/G_1 к I_4/G_2 , означает, что I_4/G_2 получается факторизацией I_4/G_1 по подгруппе вращений $\mathbb{Z}_n \subset \text{Aut}(I_4/G_1)$ некоторого порядка n . Порядок подгруппы, равный степени отображения $I_4/G_1 \rightarrow I_4/G_2$, написан около соответствующей стрелки. Заметим, что полная диаграмма разложений функции Белого для I_4 (см. рис. 2) имеет больше стрелок, чем диаграмма на рис. 5. Если у детского рисунка нет вращательных симметрий, это не означает, что соответствующая функция Белого неразложима. Существуют так называемые скрытые симметрии детских рисунков [17].

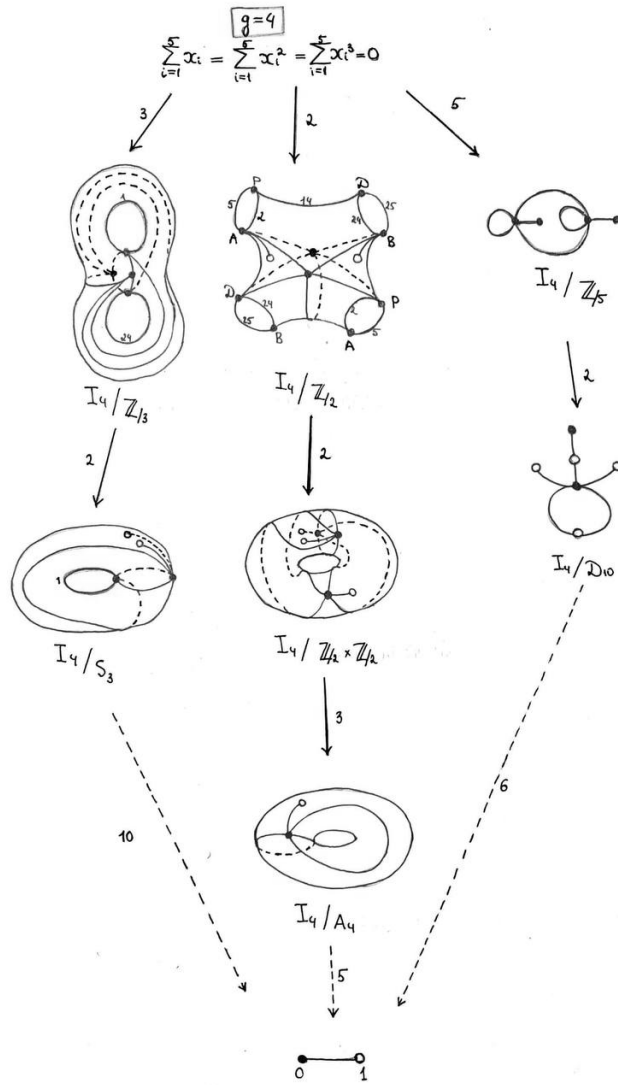


Рис. 5. Разложения функции Белого икосаэдра рода 4 в композиции

Диаграмма разложений для функции Белого планарного икосаэдра, показанная на рис. 1, была предоставлена нам А. К. Звонкиным. В этой работе мы получили похожую диаграмму для I_4 (см. рис. 2). В отличие от обычного икосаэдра, где все рисунки сферические, для I_4 есть ещё рисунки родов 1 и 2, поэтому в цепочках композиций нужно предъявлять уравнения конкретных алгебраических кривых.

5. Пары Белого для I_4/\mathbb{Z}_5 и I_4/D_{10}

5.1. Функция Белого для I_4/\mathbb{Z}_5

Группа вращений \mathbb{Z}_5 обыкновенного икосаэдра I_0 вокруг оси на рис. 6 справа соответствует группе $\mathbb{Z}_5 \subset \text{Aut}(I_4)$, действие которой на склейке поверхности I_4

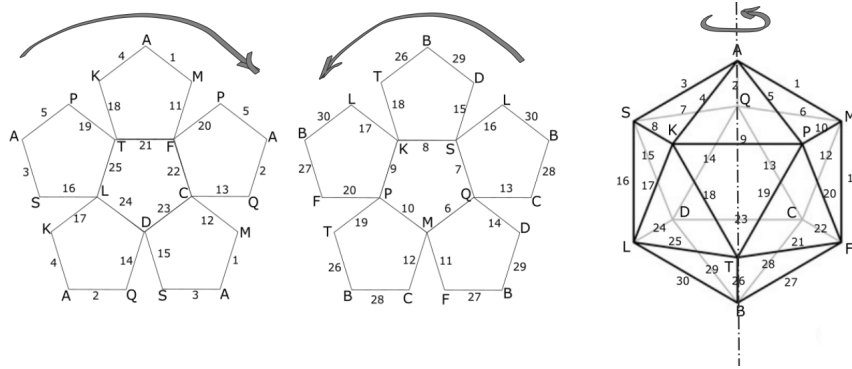


Рис. 6. Склейка поверхности для I_4 с действием \mathbb{Z}_5

показано на рис. 6 слева (см. замечание 3.2). Рассмотрим рис. 7. Поверхность рода 4, показанная слева, — это наша кривая Бринга. Группа вращений этой поверхности вокруг показанной на рисунке оси изоморфна группе \mathbb{Z}_5 . Фактор I_4/\mathbb{Z}_5 в центре рис. 7 вложен в сферу. Справа показана часть поверхности рода 4 — «ножка» рода 0, — на которой нарисован I_4/\mathbb{Z}_5 . Если на всех пяти «ножках» поверхности рода 4, изображённой слева, нарисовать I_4/\mathbb{Z}_5 , как показано справа, то получим вложение I_4 в кривую Бринга \mathcal{B} .

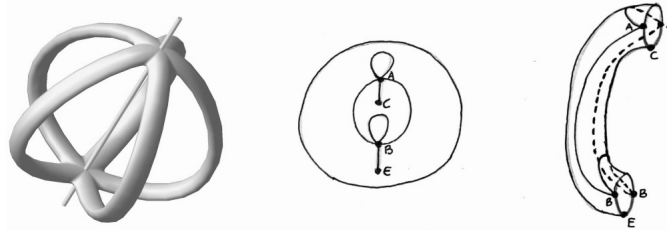


Рис. 7. $I_4 \rightarrow I_4/\mathbb{Z}_5$

Предложение 5.1 [13]. Функция Белого для I_4/\mathbb{Z}_5 имеет вид

$$\beta_{I_4/\mathbb{Z}_5}(x) = -\frac{1}{64} \frac{(x-1)^5(x+1)^5(x^2-4x-1)}{x^5(x^2+x-1)}.$$

5.2. Функция Белого для I_4/D_{10}

При факторизации I_4/\mathbb{Z}_5 по \mathbb{Z}_2 получается детский рисунок I_4/D_{10} на сфере. Автоморфизмы рисунка I_4/\mathbb{Z}_5 из группы \mathbb{Z}_2 можно представлять, как показано на рис. 8.

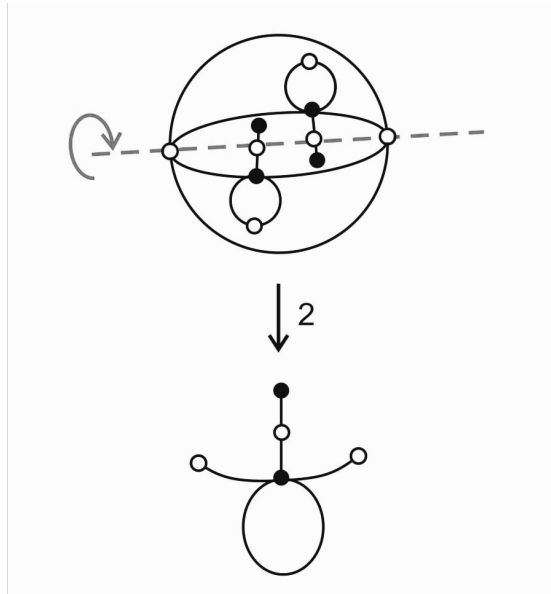


Рис. 8. $I_4/\mathbb{Z}_5 \rightarrow I_4/D_{10}$

Предложение 5.2. Функция Белого для I_4/D_{10} (см. рис. 8) имеет вид

$$\beta_{I_4/D_{10}}(x) = \frac{(x-1)^5((2+i)x + (2-i))}{(x+1)^5((2+i)x - (2-i))}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \text{Aut}(I_4/\mathbb{Z}_5)$ — инволюция, такая что I_4/D_{10} — это фактор I_4/\mathbb{Z}_5 по действию f . Рисунок 8 наглядно показывает, что при действии f одна чёрная вершина $x = 1$ валентности 5 переходит в другую чёрную вершину $x = -1$ валентности 5, т. е.

$$f(1) = -1, \quad f(-1) = 1,$$

а также что центр грани степени 5 $x = 0$ переходит во второй центр грани степени 5 $x = \infty$:

$$f(0) = \infty, \quad f(\infty) = 0.$$

Этим требованиям удовлетворяет дробно-линейное преобразование

$$f(x) = -\frac{1}{x} \in \text{Aut}(I_4/\mathbb{Z}_5),$$

неподвижными точками которого являются $x = \pm i$. На рис. 8 точки i и $-i$ — это белые вершины, через которые проходит ось вращения.

Рассмотрим детский рисунок $\widetilde{I_4/\mathbb{Z}_5}$, изоморфный исходному I_4/\mathbb{Z}_5 , который соответствует паре Белого $(\mathbb{CP}^1, \beta_{I_4/\mathbb{Z}_5} \circ g)$, где

$$x = g(y) = \frac{y - i}{iy - 1} \in \text{Aut}(\mathbb{CP}^1),$$

т. е. функция Белого для $\widetilde{I_4/\mathbb{Z}_5}$ имеет вид

$$\beta_{I_4/\mathbb{Z}_5}(g(y)) = \frac{(y^2 - 1)^5((2 + i)y^2 + (2 - i))}{(y^2 + 1)^5((2 + i)y^2 - (2 - i))}.$$

Рассмотрим $\tilde{f} \in \text{Aut}(\widetilde{I_4/\mathbb{Z}_5})$:

$$\tilde{f}: y \mapsto -y.$$

Отображение g подобрано таким образом, что

$$g(\tilde{f}(y)) = g(-y) = -\frac{1}{g(y)} = f(g(y)),$$

т. е. $\tilde{f} = g^{-1} \circ f \circ g$. Отображение $\widetilde{I_4/\mathbb{Z}_5} \rightarrow I_4/D_{10}$ является факторизацией по действию $\tilde{f} \in \text{Aut}(\widetilde{I_4/\mathbb{Z}_5})$ и задаётся следующим образом:

$$y^2 \mapsto z.$$

Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{I_4/\mathbb{Z}_5} & \xrightarrow{g} & I_4/\mathbb{Z}_5 \\ \downarrow x^2 \mapsto z & & \downarrow \beta_{I_4/\mathbb{Z}_5} \\ I_4/D_{10} & \xrightarrow{\beta_{I_4/D_{10}}} & \mathbb{CP}^1 \end{array} \quad (5)$$

следует, что функция Белого для I_4/D_{10} имеет вид

$$\beta_{I_4/D_{10}}(z) = \frac{(z - 1)^5((2 + i)z + (2 - i))}{(z + 1)^5((2 + i)z - (2 - i))}. \quad \square$$

6. Алгебраические кривые для I_4/\mathbb{Z}_3 и I_4/S_3

6.1. Гиперэллиптическая кривая для I_4/\mathbb{Z}_3

Группа вращений \mathbb{Z}_3 обыкновенного икосаэдра I_0 вокруг оси на рис. 9 справа соответствует группе $\mathbb{Z}_3 \subset \text{Aut}(I_4)$, действие которой на склейке поверхности I_4 показано на рис. 9 слева (см. замечание 3.2). Рассмотрим рис. 10. Поверхность

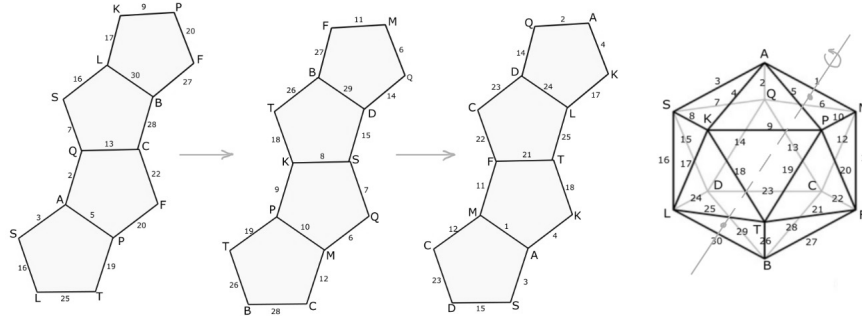


Рис. 9. Склейка поверхности для I_4 с действием \mathbb{Z}_3

рода 4, показанная слева, — это кривая Бринга. Группа вращений этой поверхности вокруг показанной оси изоморфна группе \mathbb{Z}_3 . Фактор I_4/\mathbb{Z}_3 в центре рис. 10 вложен в поверхность рода 2. Справа показана часть поверхности рода 4: «ножка» рода 2, на которой нарисован I_4/\mathbb{Z}_3 . Если на всех трёх «ножках» поверхности рода 4, изображённой слева, нарисовать I_4/\mathbb{Z}_3 , как показано справа, то получим вложение I_4 в кривую Бринга \mathcal{B} .

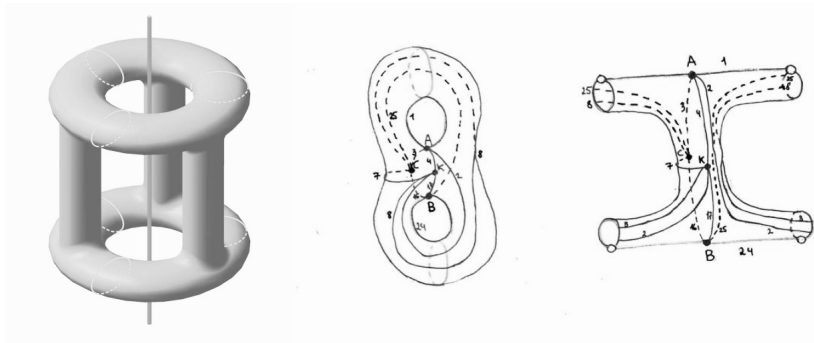


Рис. 10. $I_4 \rightarrow I_4/\mathbb{Z}_3$

Предложение 6.1 (уравнение для \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3). Кривую \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 , в которую вложен детский рисунок I_4/\mathbb{Z}_3 , можно задать уравнением

$$y^2 = 432x^6 + 648x^5 + 945x^4 + 1350x^3 + 945x^2 + 648x + 432. \quad (6)$$

Доказательство. Кривая \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 является гиперэллиптической, поскольку её род равен 2. А значит, \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 задаётся уравнением вида

$$y^2 = P(x),$$

где $P(x)$ — многочлен, корнями которого являются точки ветвления гиперэллиптического накрытия.

Рассмотрим разветвлённое накрытие проективной прямой

$$\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1, \quad \pi: (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \mapsto (x_4 : x_5).$$

Найдём количество прообразов регулярной точки $(x_4 : x_5) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Пусть (x_1, x_2, x_3) — решение системы уравнений (3), задающей кривую Бринга, при некоторых фиксированных x_4 и x_5 . Тогда для всех $\sigma \in \mathbb{S}_3$ $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ тоже является решением. Следовательно, регулярная точка $(x_4 : x_5)$ имеет шесть прообразов на кривой Бринга \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} &(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5), \quad (x_2 : x_3 : x_1 : x_4 : x_5), \quad (x_3 : x_1 : x_2 : x_4 : x_5), \\ &(x_2 : x_1 : x_3 : x_4 : x_5), \quad (x_1 : x_3 : x_2 : x_4 : x_5), \quad (x_3 : x_2 : x_1 : x_4 : x_5). \end{aligned}$$

Факторизовать кривую Бринга \mathcal{B} будем по подгруппе

$$\mathbb{Z}_3 = \langle (123) \rangle \subset \text{Aut}(I_4).$$

Шесть прообразов на кривой Бринга \mathcal{B} склеиваются в два прообраза на \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 :

$$\begin{aligned} [(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)]_{\langle (123) \rangle} &= [(x_2 : x_3 : x_1 : x_4 : x_5)]_{\langle (123) \rangle} = \\ &= [(x_3 : x_1 : x_2 : x_4 : x_5)]_{\langle (123) \rangle}, \\ [(x_2 : x_1 : x_3 : x_4 : x_5)]_{\langle (123) \rangle} &= [(x_1 : x_3 : x_2 : x_4 : x_5)]_{\langle (123) \rangle} = \\ &= [(x_3 : x_2 : x_1 : x_4 : x_5)]_{\langle (123) \rangle}. \end{aligned}$$

Получаем, что π индуцирует разветвлённое накрытие проективной прямой степени 2, т. е. гиперэллиптическое накрытие.

Точка $(x_4 : x_5)$ является точкой ветвления, если и только если среди решений системы (3) при заданных x_4 и x_5 есть решение (x_1, x_2, x_3) , такое что $x_1 = x_2$. При $x_1 = x_2$ система уравнений (3) записывается следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \\ 2x_1^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Нам нужно найти x_4/x_5 из системы (7). Выразим x_3 из первого уравнения системы (7):

$$x_3 = -2x_1 - x_4 - x_5.$$

Подставим полученное выражение во второе и третье уравнения системы (7):

$$\begin{cases} 6x_1^2 + 4x_1(x_4 + x_5) + x_4^2 + x_5^2 + (x_4 + x_5)^2 = 0, \\ 2x_1^3 - (x_4 + x_5 + 2x_1)^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Положим

$$t = \frac{x_1}{x_5}, \quad x = \frac{x_4}{x_5}.$$

Система (8) в переменных t, x имеет вид

$$\begin{cases} 6t^2 + 4tx + 4t + 2x^2 + 2x + 2 = 0, \\ 6t^3 + 12t^2x + 12t^2 + 6tx^2 + 12tx + 6t + 3x^2 + 3x = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Домножаем первое уравнение системы (9) на $1/2 - 3t$ и складываем со вторым уравнением. Система (9) эквивалентна

$$\begin{cases} 3t^2 + 2t(x+1) + x^2 + x + 1 = 0, \\ 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Первое уравнение системы (10) квадратное по t , корни квадратного уравнения следующие:

$$t_{1,2} = \frac{-x-1 \pm \sqrt{(x+1)^2 - 3(x^2+x+1)}}{3}.$$

Подставляя $t_{1,2}$ во второе уравнение системы (10), получаем уравнения

$$20x^3 + 15x^2 + 15x + 20 + (4x^2 + 2x + 4)\sqrt{-2x^2 - x - 2} = 0, \quad (11)$$

$$20x^3 + 15x^2 + 15x + 20 - (4x^2 + 2x + 4)\sqrt{-2x^2 - x - 2} = 0. \quad (12)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P(x) &= (20x^3 + 15x^2 + 15x + 20 + (4x^2 + 2x + 4)\sqrt{-2x^2 - x - 2}) \times \\ &\times (20x^3 + 15x^2 + 15x + 20 - (4x^2 + 2x + 4)\sqrt{-2x^2 - x - 2}) = \\ &= 432x^6 + 648x^5 + 945x^4 + 1350x^3 + 945x^2 + 648x + 432. \quad \square \end{aligned}$$

6.2. Эллиптическая кривая для I_4/S_3

Предложение 6.2 (уравнение для \mathcal{B}/S_3). Кривую \mathcal{B}/S_3 , в которую вложен детский рисунок I_4/S_3 , можно задать уравнением

$$y^2 = x^4 + 80x^3 + 125x^2 + 50x. \quad (13)$$

Обозначим через $(12)(45)^{\mathbb{Z}_3}$ автоморфизм кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 , такой что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{(12)(45)} & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}/\langle(123)\rangle & \xrightarrow{(12)(45)^{\mathbb{Z}_3}} & \mathcal{B}/\langle(123)\rangle \end{array} . \quad (14)$$

Идея доказательства предложения 6.2. Хотим найти уравнение кривой Бринга, факторизованной по действию группы автоморфизмов

$$S_3 = \langle(123), (12)(45)\rangle \subset \text{Aut}(I_4).$$

Для этого факторизуем кривую $\mathcal{B}/\langle(123)\rangle$, заданную уравнением (6), по действию автоморфизма

$$(12)(45)^{\mathbb{Z}_3} \in \text{Aut}(\mathcal{B}/\mathbb{Z}_3).$$

Предложение 6.3. Автоморфизм $(12)(45)^{\mathbb{Z}_3} \in \text{Aut}(\mathcal{B}/\mathbb{Z}_3)$ действует на кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 , заданной уравнением (6), следующим образом:

$$(12)(45)^{\mathbb{Z}_3} : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3} \right).$$

Рисунок 11 изображает действие $(12)(45)^{\mathbb{Z}_3}$ на \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 .

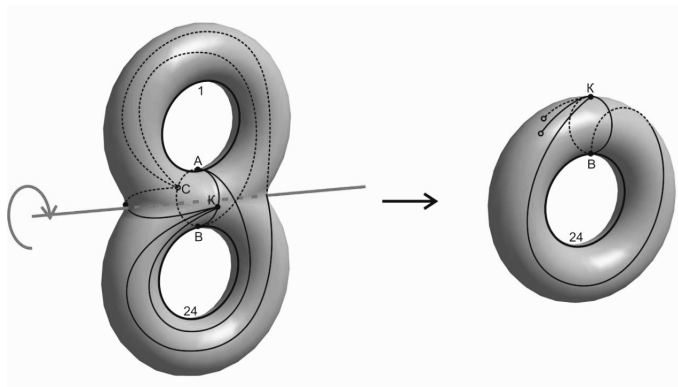


Рис. 11. $I_4/\mathbb{Z}_3 \rightarrow I_4/S_3$

Доказательство. В доказательстве предложения 6.1 кривая \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 , заданная уравнением (6),

$$y^2 = 432x^6 + 648x^5 + 945x^4 + 1350x^3 + 945x^2 + 648x + 432,$$

найдена как гиперэллиптическое накрытие

$$\mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{CP}^1,$$

индуцированное накрытием

$$\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{CP}^1, \quad \pi : (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \mapsto (x_4 : x_5).$$

Поскольку автоморфизм $(12)(45) \in \text{Aut}(\mathcal{B})$ меняет местами четвёртую и пятую проективные координаты, то $(12)(45)^{\mathbb{Z}_3} \in \text{Aut}(\mathcal{B}/\mathbb{Z}_3)$ переводит $x = x_4/x_5$ в $1/x = x_5/x_4$. Значит, $(12)(45)^{\mathbb{Z}_3}(x, y)$ может равняться либо $(1/x, y/x^3)$, либо $(1/x, -y/x^3)$.

Предположим, что

$$(12)(45)^{\mathbb{Z}_3} : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^3} \right).$$

Покажем, что такого быть не может. Неподвижными точками $(12)(45)^{\mathbb{Z}_3}$ являются точки вида $(1, y)$:

$$(12)(45)^{\mathbb{Z}_3}(1, y) = \left(\frac{1}{1}, \frac{y}{1^3} \right) = (1, y).$$

Заметим, что $x = x_4/x_5 = 1$, если и только если $x_4 = x_5$. Как можно проверить, при $x_4 = x_5$

$$\beta_{I_4}(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_4) = -1. \quad (15)$$

Пусть β_{I_4/\mathbb{Z}_3} и β_{I_4/S_3} — функции Белого для I_4/\mathbb{Z}_3 и I_4/S_3 соответственно, полученные при разложении функции Белого β_{I_4} по левой ветке диаграммы на рис. 5. Рассмотрим разложение функции β_{I_4/\mathbb{Z}_3} в композицию

$$\beta_{I_4/\mathbb{Z}_3} = \beta_{I_4/S_3} \circ \varphi, \quad (16)$$

где φ — отображение $I_4/\mathbb{Z}_3 \rightarrow I_4/S_3$ на рис. 5, т. е. факторизация по (12)(45) $^{\mathbb{Z}_3}$. Точки ветвления φ — неподвижные точки инволюции (12)(45) $^{\mathbb{Z}_3}$. Они являются точками ветвления функции Белого β_{I_4/\mathbb{Z}_3} согласно разложению (16). При этом из (15) следует, что в неподвижных точках $(1, y) \in \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3$ автоморфизма (12)(45) $^{\mathbb{Z}_3}$ значение функции Белого β_{I_4/\mathbb{Z}_3} равно -1 . Но критические значения функции Белого принадлежат множеству $\{0, 1, \infty\}$. Противоречие. Значит,

$$(12)(45)^{\mathbb{Z}_3} : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3} \right). \quad \square$$

Замечание 6.1. Автоморфизм $(45)^{\mathbb{Z}_3} \in \text{Aut}(\mathcal{B}/\mathbb{Z}_3)$ действует на кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 , заданной уравнением (6), следующим образом:

$$(45)^{\mathbb{Z}_3} : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^3} \right).$$

Доказательство предложения 6.2. Факторизуем кривую \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 , заданную уравнением (6),

$$y^2 = 432x^6 + 648x^5 + 945x^4 + 1350x^3 + 945x^2 + 648x + 432,$$

по действию автоморфизма

$$(12)(45)^{\mathbb{Z}_3} : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3} \right).$$

Положим

$$z(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad w = \frac{4y}{3\sqrt{3}(x+1)^3} \quad (17)$$

Уравнение (6) в новых обозначениях имеет вид

$$w^2 = z^6 + 80z^4 + 125z^2 + 50. \quad (18)$$

Заметим, что $z(1/x) = -z(x)$. Пусть $\pm c_i$ — корни многочлена в левой части уравнения (18). Тогда уравнение (18) можно записать в виде

$$w^2 = \prod_{i=1}^3 (z^2 - c_i^2).$$

Аutomорфизм (12)(45) $^{\mathbb{Z}_3}$ действует следующим образом:

$$(z, w) \mapsto (-z, -w).$$

Рассмотрим разветвлённое накрытие проективной прямой

$$\mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{CP}^1, \quad (z, w) \mapsto z^2.$$

Регулярная точка $\tilde{z} = z^2 \in \mathbb{CP}^1$ имеет четыре прообраза на кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_3 :

$$(z, w), \quad (-z, -w), \quad (-z, w), \quad (z, -w).$$

Эти четыре прообраза склеиваются в две точки на кривой \mathcal{B}/S_3 :

$$[(z, w)]_{(z, w) \mapsto (-z, -w)}, \quad [(z, -w)]_{(z, w) \mapsto (-z, -w)}.$$

Мы получили разветвлённое накрытие $\mathcal{B}/S_3 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ степени 2. Точки ветвления этого накрытия — это $\{0, c_1^2, c_2^2, c_3^2\}$. Значит, кривую \mathcal{B}/S_3 можно задать уравнением

$$y^2 = x \prod_{i=1}^3 (x - c_i^2) = x(x^3 + 80x^2 + 125x + 50). \quad \square$$

7. Алгебраические кривые

для I_4/\mathbb{Z}_2 , $I_4/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и I_4/A_4

Следуя [11], введём новые проективные координаты на \mathbb{CP}^4 :

$$u_1 = \frac{x_1}{2}, \quad u_2 = \frac{x_2 + x_4}{2}, \quad u_3 = \frac{x_3 + x_5}{2}, \quad u_4 = \frac{x_2 - x_4}{2}, \quad u_5 = \frac{x_3 - x_5}{2}.$$

Кривая Бринга \mathcal{B} в новых координатах задаётся следующими уравнениями:

$$\begin{cases} u_1 = -u_2 - u_3, \\ 3u_2^2 + 3u_3^2 + 4u_2u_3 + u_4^2 + u_5^2 = 0, \\ u_2^3 + u_3^3 + 4u_2^2u_3 + 4u_2u_3^2 - u_2u_4^2 - u_3u_5^2 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Далее в этом разделе мы будем рассматривать автоморфизмы кривой Бринга \mathcal{B}

$$(24)(35): (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \mapsto (x_1 : x_4 : x_5 : x_2 : x_3),$$

$$(23)(45): (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \mapsto (x_1 : x_3 : x_2 : x_5 : x_4).$$

Автоморфизм (24)(35) в новых координатах действует как φ_1 :

$$\varphi_1: (u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5) \mapsto (u_1 : u_2 : u_3 : -u_4 : -u_5),$$

а автоморфизм (23)(45) — как φ_2 :

$$\varphi_2: (u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5) \mapsto (u_1 : u_3 : u_2 : u_5 : u_4).$$

Замечание 7.1. Заметим, что

$$\begin{aligned} x_3x_5 = u_3^2 - u_5^2 &= \frac{(x_3 + x_5)^2}{4} - \frac{(x_3 - x_5)^2}{4}, \\ x_2x_4 = u_2^2 - u_4^2 &= \frac{(x_2 + x_4)^2}{4} - \frac{(x_2 - x_4)^2}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$b = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = -(2u_1) \cdot (u_3^2 - u_5^2) \cdot (u_2^2 - u_4^2),$$

$$a = \sum_{1 \leq i < j < k < s \leq 5}^5 x_i x_j x_k x_s =$$

$$= 4u_1 u_3 (u_2^2 - u_4^2) + 4u_1 u_2 (u_3^2 - u_5^2) + (u_3^2 - u_5^2)(u_2^2 - u_4^2).$$

Функция Белого β_H из предложения (3.3) в новых координатах имеет вид

$$\beta_H = \frac{256a^5}{256a^5 + 3125b^4},$$

где

$$a = 4u_1 u_3 (u_2^2 - u_4^2) + 4u_1 u_2 (u_3^2 - u_5^2) + (u_3^2 - u_5^2)(u_2^2 - u_4^2),$$

$$b = -(2u_1) \cdot (u_3^2 - u_5^2) \cdot (u_2^2 - u_4^2).$$

В этом разделе мы будем работать в координатах $(u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5)$.

7.1. Гиперэллиптическая кривая для I_4/\mathbb{Z}_2

Группа вращений \mathbb{Z}_2 обыкновенного икосаэдра I_0 на рис. 12 справа соответствует группе $\mathbb{Z}_2 \subset \text{Aut}(I_4)$, действие которой на склейке поверхности I_4 показано на рис. 12 слева (см. замечание 3.2). При факторизации I_4 по подгруппе \mathbb{Z}_2 получается детский рисунок I_4/\mathbb{Z}_2 на поверхности рода 2. Склейка поверхности для I_4/\mathbb{Z}_2 показана на рис. 13 справа. На рис. 13 слева изображено действие автоморфизмов группы $\mathbb{Z}_2 \subset \text{Aut}(I_4)$ как вращения поверхности рода 4.

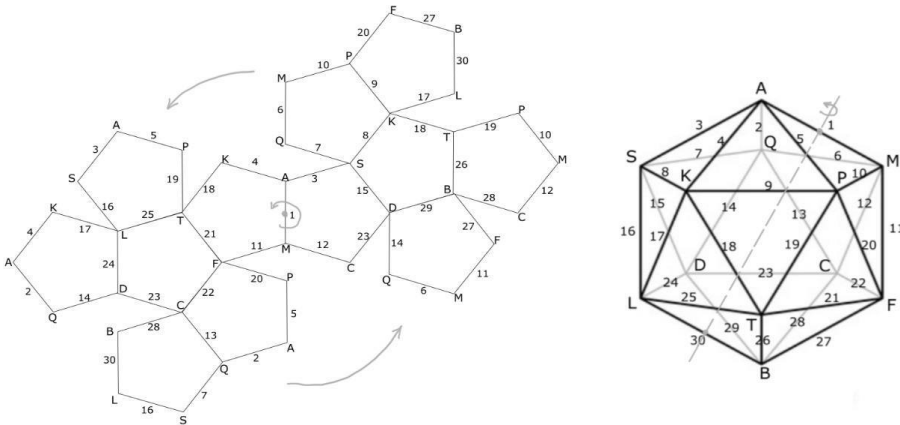
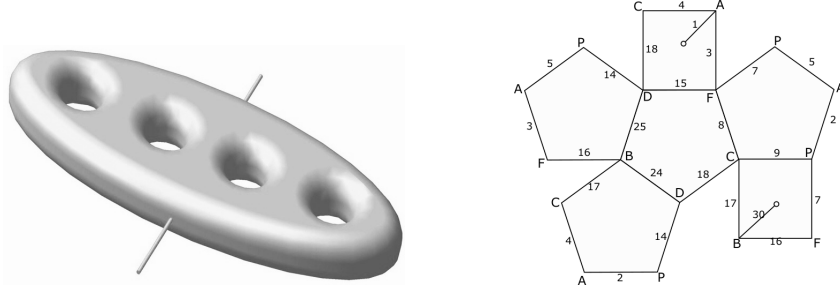


Рис. 12. Склейка поверхности для I_4 с действием \mathbb{Z}_2


 Рис. 13. $I_4 \rightarrow I_4/\mathbb{Z}_2$

Предложение 7.1 (уравнение для \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2). Кривую \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 , в которую вложен детский рисунок I_4/\mathbb{Z}_2 , можно задать уравнением

$$y^2 = 4x^6 + 36x^5 + 95x^4 + 130x^3 + 95x^2 + 36x + 4. \quad (20)$$

Доказательство. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2 = \langle \varphi_1 \rangle$, где

$$\varphi_1: (u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5) \mapsto (u_1 : u_2 : u_3 : -u_4 : -u_5).$$

Кривая \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 является гиперэллиптической, поскольку её род равен 2. Значит, она задаётся уравнением вида $y^2 = Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен, корнями которого являются точки ветвления гиперэллиптического накрытия.

Рассмотрим разветвлённое накрытие проективной прямой

$$\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{CP}^1, \quad (u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5) \mapsto (u_2 : u_3).$$

Найдём количество прообразов регулярной точки $(u_2 : u_3)$. Второе и третье уравнения системы (19), задающей кривую Бринга в u -координатах,

$$\begin{cases} 3u_2^2 + 3u_3^2 + 4u_2u_3 + u_4^2 + u_5^2 = 0, \\ u_2^3 + u_3^3 + 4u_2^2u_3 + 4u_2u_3^2 - u_2u_4^2 - u_3u_5^2 = 0, \end{cases} \quad (21)$$

являются линейными по u_4^2 и u_5^2 . Пусть u_4^2, u_5^2 — решения линейной системы на u_4^2, u_5^2 при данных u_2, u_3 . Значит, точка $(u_2 : u_3) \in \mathbb{CP}^1$ имеет четыре прообраза на кривой Бринга \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} (u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5), & \quad (u_1 : u_2 : u_3 : -u_4 : -u_5), \\ (u_1 : u_2 : u_3 : -u_4 : u_5), & \quad (u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : -u_5). \end{aligned}$$

Эти четыре прообраза склеиваются в две точки на кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 :

$$\begin{aligned} [(u_1 : u_2 : u_3 : -u_4 : u_5)]_{(u_4 \leftrightarrow -u_4, u_5 \leftrightarrow -u_5)} &= \\ &= [(u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : -u_5)]_{(u_4 \leftrightarrow -u_4, u_5 \leftrightarrow -u_5)}, \\ [(u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5)]_{(u_4 \leftrightarrow -u_4, u_5 \leftrightarrow -u_5)} &= \\ &= [(u_1 : u_2 : u_3 : -u_4 : -u_5)]_{(u_4 \leftrightarrow -u_4, u_5 \leftrightarrow -u_5)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $(u_2 : u_3) \in \mathbb{CP}^1$ имеет два прообраза на кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 . Получаем гиперэллиптическое накрытие

$$\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{CP}^1.$$

Точка $(u_2 : u_3)$ является точкой ветвления, если и только если, решая систему (21) при заданных u_2 и u_3 , получаем, что $u_4 = 0$ или $u_5 = 0$.

При $u_4 = 0$ система (21) имеет вид

$$\begin{cases} 3u_2^2 + 3u_3^2 + 4u_2u_3 + u_5^2 = 0, \\ u_2^3 + u_3^3 + 4u_2^2u_3 + 4u_2u_3^2 - u_3u_5^2 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Выразим u_5^2 из первого уравнения системы (22) и подставим во второе уравнение этой же системы. Получим

$$u_2^3 + 4u_3^3 + 7u_2^2u_3 + 8u_2u_3^2 = 0. \quad (23)$$

Значит, если u_2/u_3 — корень уравнения

$$x^3 + 7x^2 + 8x + 4 = 0,$$

то $(u_2 : u_3)$ — точка ветвления.

При $u_5 = 0$ система (21) имеет вид

$$\begin{cases} 3u_2^2 + 3u_3^2 + 4u_2u_3 + u_4^2 = 0, \\ u_2^3 + u_3^3 + 4u_2^2u_3 + 4u_2u_3^2 - u_2u_4^2 = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Выразим u_4^2 из первого уравнения системы (24) и подставим во второе уравнение этой же системы. Получим

$$4u_2^3 + u_3^3 + 8u_2^2u_3 + 7u_2u_3^2 = 0. \quad (25)$$

Тогда если u_2/u_3 — корень уравнения

$$4x^3 + 8x^2 + 7x + 1 = 0,$$

то $(u_2 : u_3)$ — точка ветвления.

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q(x) &= (4x^3 + 8x^2 + 7x + 1)(x^3 + 7x^2 + 8x + 4) = \\ &= 4x^6 + 36x^5 + 95x^4 + 130x^3 + 95x^2 + 36x + 4. \end{aligned}$$

Таким образом, \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 задаётся уравнением

$$\begin{aligned} y^2 &= (4x^3 + 8x^2 + 7x + 1)(x^3 + 7x^2 + 8x + 4) = \\ &= 4x^6 + 36x^5 + 95x^4 + 130x^3 + 95x^2 + 36x + 4. \quad \square \end{aligned}$$

7.2. Эллиптическая кривая для $I_4/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Предложение 7.2 (уравнение для $\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). Кривую $\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, в которую вложен детский рисунок $I_4/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, можно задать уравнением

$$y^2 = x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 100x. \quad (26)$$

Обозначим через $\varphi_2^{\mathbb{Z}_2}$ автоморфизм кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 , такой что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}/\langle \varphi_1 \rangle & \xrightarrow{\varphi_2^{\mathbb{Z}_2}} & \mathcal{B}/\langle \varphi_1 \rangle \end{array} . \quad (27)$$

Замечание 7.2. В исходных координатах $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)$ диаграмма (27) имеет вид

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{(23)(45)} & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}/\langle (24)(35) \rangle & \xrightarrow{(23)(45)^{\mathbb{Z}_2}} & \mathcal{B}/\langle (24)(35) \rangle \end{array} . \quad (28)$$

Идея доказательства предложения 7.2. Хотим найти уравнение кривой Бринга, факторизованной по действию группы автоморфизмов

$$V_4 = \{(), (24)(35), (23)(45), (25)(34)\} = \{\text{id}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1\varphi_2\} \subset \text{Aut}(I_4).$$

Для этого факторизуем кривую $\mathcal{B}/\langle \varphi_1 \rangle$, заданную уравнением (20), по действию автоморфизма $\varphi_2^{\mathbb{Z}_2} \in \text{Aut}(\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2)$.

Предложение 7.3. Автоморфизм $\varphi_2^{\mathbb{Z}_2} \in \text{Aut}(\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2)$ действует на кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 , заданной уравнением (20), следующим образом:

$$\varphi_2^{\mathbb{Z}_2}: (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3} \right).$$

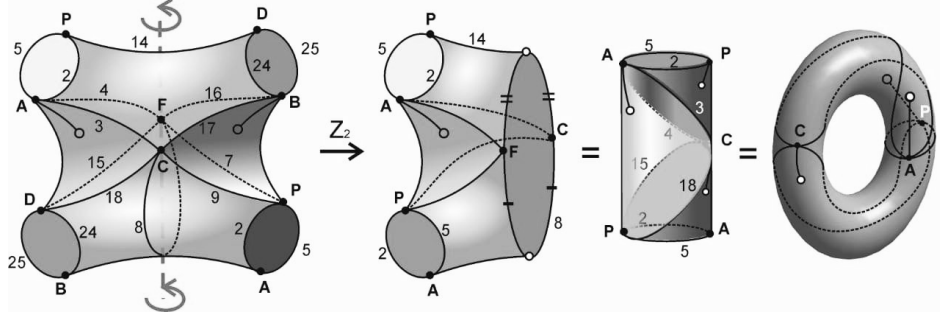
Рисунок 14 показывает действие $\varphi_2^{\mathbb{Z}_2}$ на \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 .

Доказательство. В доказательстве предложения 7.1 фактор \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 кривой Бринга по действию $\langle \varphi_1 \rangle$, где $\varphi_1: (u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5) \mapsto (u_1 : u_2 : u_3 : -u_4 : -u_5)$, задаётся уравнением (20):

$$y^2 = 4x^6 + 36x^5 + 95x^4 + 130x^3 + 95x^2 + 36x + 4,$$

и находится как гиперэллиптическое накрытие

$$\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{CP}^1,$$

Рис. 14. $I_4/\mathbb{Z}_2 \rightarrow I_4/V_4$

индуцированное накрытием

$$\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1, \quad (u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5) \mapsto (u_2 : u_3).$$

Поскольку автоморфизм кривой Бринга

$$\varphi_2 : (u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5) \mapsto (u_1 : u_3 : u_2 : u_5 : u_4)$$

меняет местами вторую и третью проективные координаты, то $\varphi_2^{\mathbb{Z}_2} \in \text{Aut}(\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2)$ переводит $x = u_2/u_3$ в $1/x = u_3/u_2$. Следовательно, $\varphi_2^{\mathbb{Z}_2}(x, y)$ может равняться либо $(1/x, y/x^3)$, либо $(1/x, -y/x^3)$. Предположим,

$$\varphi_2^{\mathbb{Z}_2} : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^3} \right).$$

Покажем, что такого быть не может. В уравнении (20) подставим $x = -1$, получим $y^2 = -4$. Заметим, что точка $(-1, 2i) \in \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2$ не является неподвижной точкой автоморфизма $\varphi_2^{\mathbb{Z}_2} \in \text{Aut}(\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2)$:

$$\varphi_2^{\mathbb{Z}_2}(-1, 2i) = \left(\frac{1}{-1}, \frac{2i}{-1} \right) = (-1, -2i).$$

С другой стороны, при накрытии $\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ точка $(1 : -1)$ имеет четыре прообраза:

$$\begin{aligned} p_1 &= (0 : 1 : -1 : i : i), & p_2 &= (0 : 1 : -1 : -i : -i), \\ q_1 &= (0 : 1 : -1 : i : -i), & q_2 &= (0 : 1 : -1 : -i : i), \end{aligned}$$

которые при действии \mathbb{Z}_2 склеиваются в две точки $p = (-1, 2i)$ и $q = (-1, -2i)$ на кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 . Применим $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathcal{B})$ к точкам $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \varphi_2(p_1) &= p_2, & \varphi_2(p_2) &= p_1, \\ \varphi_2(q_1) &= q_1, & \varphi_2(q_2) &= q_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi_2^{\mathbb{Z}_2} \in \text{Aut}(\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2)$ оставляет точки p и q на месте:

$$p = \varphi_2^{\mathbb{Z}_2}(p), \quad q = \varphi_2^{\mathbb{Z}_2}(q).$$

Значит, $(-1, 2i)$ — неподвижная точка $\varphi_2^{\mathbb{Z}_2}$. Противоречие. Значит,

$$\varphi_2^{\mathbb{Z}_2}: (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3} \right). \quad \square$$

Замечание 7.3. Автоморфизм кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^3} \right)$$

соответствует автоморфизму (2345) кривой Бринга в исходных координатах.

Доказательство предложения 7.2. Факторизуем кривую \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 , заданную уравнением (20),

$$y^2 = 4x^6 + 36x^5 + 95x^4 + 130x^3 + 95x^2 + 36x + 4,$$

по действию автоморфизма

$$\varphi_2^{\mathbb{Z}_2}: (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3} \right).$$

Положим

$$z(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad w = \frac{4iy}{(x+1)^3}.$$

Уравнение (20) в новых обозначениях имеет вид

$$w^2 = z^6 + 10z^4 + 25z^2 - 100. \quad (29)$$

Заметим, что $z(1/x) = -z(x)$. Пусть $\pm d_i$ — корни многочлена в правой части уравнения (29). Тогда уравнение (29) можно записать в виде

$$w^2 = \prod_{i=1}^3 (z^2 - d_i^2).$$

Аutomорфизм $\varphi_2^{\mathbb{Z}_2}$ действует следующим образом:

$$(z, w) \mapsto (-z, -w).$$

Рассмотрим разветвлённое накрытие проективной прямой

$$\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{CP}^1, \quad (z, w) \mapsto z^2.$$

Регулярная точка $\tilde{z} = z^2 \in \mathbb{CP}^1$ имеет четыре прообраза на кривой \mathcal{B}/\mathbb{Z}_2

$$(z, w), \quad (-z, -w), \quad (-z, w), \quad (z, -w).$$

Эти четыре прообраза склеиваются в две точки на кривой $\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$$[(z, w)]_{(z,w) \mapsto (-z,-w)}, \quad [(z, -w)]_{(z,w) \mapsto (-z,-w)}.$$

Мы получили разветвлённое накрытие $\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ степени 2. Точки ветвления этого накрытия — это $\{0, d_1^2, d_2^2, d_3^2\}$. А значит, кривую $\mathcal{B}/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ можно задать уравнением

$$y^2 = x \prod_{i=1}^3 (x - d_i^2) = x(x^3 + 10x^2 + 25x - 100). \quad \square$$

Замечание 7.4. Интересный факт заключается в том, что

$$j_{\mathcal{B}/V_4} = j_{\mathcal{B}/S_3} = -\frac{121945}{32}.$$

Следовательно, мы имеем изоморфизм эллиптических кривых

$$\mathcal{B}/V_4 \simeq \mathcal{B}/S_3.$$

7.3. Эллиптическая кривая для I_4/A_4

Предложение 7.4. \mathcal{B}/A_4 задаётся уравнением

$$y^2 + xy + y = x^3 + 549x - 2202.$$

Доказательство. Кривая рода 1 — эллиптическая кривая — является фактором комплексной прямой \mathbb{C} по решётке. На \mathbb{C} есть структура аддитивной абелевой группы, следовательно, на каждом торе с выделенной точкой тоже есть структура аддитивной абелевой группы. Таким образом, всякий тор является абелевой группой относительно сложения векторов, которое индуцировано сложением векторов на накрывающей комплексной прямой \mathbb{C} .

Пусть E — эллиптическая кривая. Возьмём ненулевую точку $p \in E$ третьего порядка. Сдвиг τ_p ,

$$\tau_p: E \rightarrow E, \quad \tau_p: x \mapsto x + p,$$

является автоморфизмом порядка 3 эллиптической кривой E . Этот автоморфизм порождает группу $\mathbb{Z}_3 = \langle \tau_p \rangle$, действующую без неподвижных точек на E .

Отображение $I_4/V_4 \rightarrow I_4/A_4$ на рис. 5 является неразветвлённым накрытием степени 3, что наглядно показано на рис. 15. Значит, \mathcal{B}/A_4 — фактор эллиптической кривой \mathcal{B}/V_4 по $\langle \tau_p \rangle$, где $p \in \mathcal{B}/V_4$ — некоторая точка третьего порядка. Заметим, что форма Вейерштрасса эллиптической кривой \mathcal{B}/V_4 такова:

$$y^2 + xy + y = x^3 - 76x + 298.$$

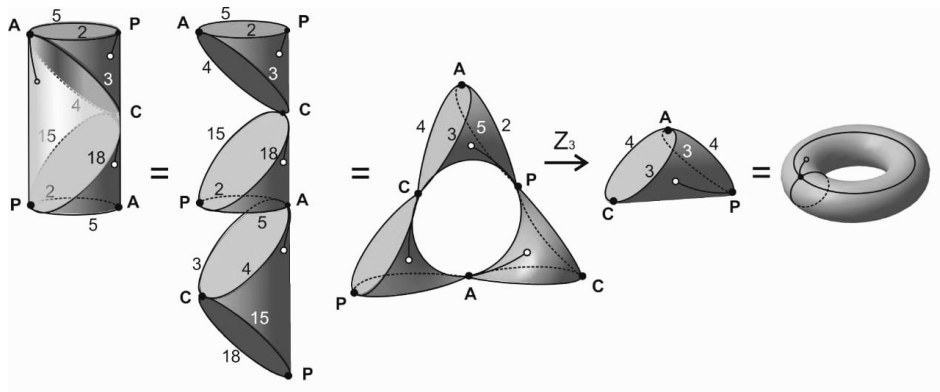


Рис. 15. $I_4/V_4 \rightarrow I_4/A_4$

В базе данных LMFDB [15] находим, что форма Вейерштрасса эллиптической кривой $(\mathcal{B}/V_4)/\mathbb{Z}_3$ имеет вид

$$y^2 + xy + y = x^3 + 549x - 2202. \quad \square$$

Мы выражаем глубокую благодарность А. К. Звонкину за то, что он обратил наше внимание на такую интересную задачу, и участникам семинара «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями» за их активный интерес к теории детских рисунков. Также благодарим факультет математики НИУ ВШЭ за возможность работать вместе. Работа Н. Я. Амбурга выполнена за счёт гранта РФФИ 24-12-00178.

Литература

- [1] Казарян М., Ландо С., Прасолов В. Алгебраические кривые. По направлению к пространствам модулей. — М.: МЦНМО, 2019.
- [2] Ландо С. К., Звонкин А. К. Графы на поверхностях и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010.
- [3] Amburg N. Ya., Kreines E. M. Belyi pairs of the cell decomposition of $\mathcal{L}(\overline{M_{0,5}^{\mathbb{R}}})$. — 2023. — [arXiv:2306.06282](https://arxiv.org/abs/2306.06282).
- [4] Braden H. W., Disney-Hogg L. Bring’s curve: Old and New. — 2022. — [arXiv:2208.13692](https://arxiv.org/abs/2208.13692).
- [5] Farkas H., Kra I. Riemann Surfaces. — Berlin: Springer, 1980.
- [6] Gallier J., Xu D. A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces. — Berlin: Springer, 2013.
- [7] Grothendieck A. Sketch of a programme (Esquisse d’un programme) // Geometric Galois Actions. 1. Around Grothendieck’s «Esquisse d’un programme» / Schneps L., ed. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — (Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 242). — P. 243–283.
- [8] Klein F. Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree. — New York: Dover, 2003.
- [9] Magot N., Zvonkin A. K. Belyi functions for Archimedean solids // Discrete Math. — 2000. — Vol. 217, no. 1-3. — P. 249–271.
- [10] Miranda R. Algebraic Curves and Riemann Surfaces. — Amer. Math. Soc., 1995.
- [11] Riera G., Rodríguez R. E. The period matrix of Bring’s curve // Pacific J. Math. — 1992. — Vol. 154, no. 1. — P. 179–200.
- [12] Ritt J. F. Prime and composite polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. — 1922. — Vol. 23, no. 1. — P. 51–66.
- [13] Shabat G. B. Calculating and drawing Belyi pairs // J. Math. Sci. — 2017. — Vol. 226. — P. 667–693.
- [14] Sijslin J. Dessins d’enfants: Master’s Thesis. — Univ. of Groningen.
- [15] The L-functions and modular forms database. — <https://www.lmfdb.org/EllipticCurve/Q/50/a/>.

- [16] Weber M. Kepler's small stellated dodecahedron as a Riemann surface // *Pacific J. Math.* — 2005. — Vol. 220. — P. 167–182.
- [17] Zvonkin A. K. Functional composition is a generalized symmetry // *Symmetry: Culture and Science.* — 2010. — P. 333–368.