Матричные структуры, представимые в виде конечных прямых сумм и цепей

Е. А. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
e-mail: blagoveschenskaya@pgups.ru, kblag2002@yahoo.com

О. В. МАРКОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ov_markova@mail.ru

УДК 512.552

Ключевые слова: блочно-диагональные матрицы, конечномерные алгебры над полями, функция длины алгебры, прямые суммы, цепи, абелевы группы без кручения, кольца эндоморфизмов.

Аннотация

Рассматриваются бесконечные матричные алгебры блочно-диагонального вида над различными полями с полными матричными алгебрами на диагонали и их матричные подкольца над $\mathbb{Q}$. Описываются различные существующие представления в виде конечных прямых сумм и цепей, анализируются числовые характеристики и особенности построения этих структур.

Abstract

E. A. Blagoveshchenskaya, O. V. Markova, Matrix structures in the form of finite direct sums and chains, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 31—51.

Infinite matrix algebras of block-diagonal form over different fields with full matrix algebras on the diagonal and their matrix subrings over $\mathbb{Q}$ are considered. Various existing representations as finite direct sums and chains are described, and numerical characteristics and special construction features of these structures are analyzed.

1. Введение

Матричные структуры, являющиеся бесконечными как абелевы группы, но имеющие конечные характеристики, представляют особый интерес. В данной работе рассматриваются ассоциативные конечномерные алгебры с единицей над произвольными полями и почти вполне разложимые кольца, реализуемые как кольца эндоморфизмов соответствующих бесконечных абелевых групп без кручения. Эти классы, связанные определённым набором общих характеристик, не имеют пересечений, так как последние можно рассматривать лишь как модули

Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 1, с. 31—51.

над некоторыми кольцами, например над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Они не имеют конечной системы образующих элементов, при их изучении возможен переход к конечно порождённым фактор-кольцам, что при наличии не совпадающих единицы и нуля в рассматриваемых структурах создаёт базис для совместного рассмотрения этих колец и алгебр из данного класса.

В теории этих классов важное значение имеют блочно-диагональные структуры. При изучении матричных представлений конечномерных алгебр бывает одинаково удобно рассматривать прямые суммы подалгебр и в смысле внутренней операции как блочно-диагональные матрицы, и с использованием внешней операции прямой суммы. В данной работе в центре внимания будут такие алгебры, диагональные блоки которых являются полными матричными алгебрами. Отметим, что в силу теоремы Молина—Веддербёрна—Артина для алгебр (см. [13, раздел 3.5]) над алгебраически замкнутыми полями это в точности все полупростые алгебры, а над другими полями это большой подкласс класса полупростых алгебр.

При изучении произведений образующих конечномерной алгебры важным инструментом является такой числовой инвариант, как длина (см. определение 2.2). Эта характеристика в некотором смысле измеряет сложность выполнения операции умножения в алгебре. Вычисление этой величины само по себе является интересной и трудной задачей. Например, длина полной матричной алгебры $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ до сих пор неизвестна, хотя проблема её вычисления была поставлена А. Пазом [39] в 1984 г. В данной работе будет сформулирован аналог гипотезы Паза для прямых сумм матричных алгебр и алгебр блочно-диагональных матриц. Вычисление длины алгебр этого семейства тесно связано с вопросами нахождения длин групповых алгебр конечных групп (подробнее см. [4, 25, 27, 30]).

Статья носит обзорный характер. В разделе 2 вводится система обозначений, представлены основные определения, относящиеся к функции длины алгебр. В разделе 3 приводится обзор известных результатов о длине конечных прямых сумм полных матричных алгебр над заданным полем. Также представлено обобщение некоторых методов работы с образующими модулей над матричной алгеброй из [26] на случай прямой суммы матричных алгебр. Описанными методами получены верхние оценки длин систем порождающих прямых сумм матричных алгебр, содержащих циклические матрицы, над большими полями. В разделе 4 рассматриваются абелевы группы без кручения специального вида и сообщаются некоторые сведения об их кольцах эндоморфизмов. В разделах 5 и 6 дан структурный анализ соответствующих им матричных колец, допускающих представления в виде конечных цепей.

2. Основные сведения о конечномерных алгебрах

Понятия теории колец и алгебр, использованные в статье, можно найти, например, в [13]. Все рассматриваемые в работе алгебры — ассоциативные конечномерные алгебры с единицей над полями.

Важную роль в изучении конечномерных алгебр играет такой инвариант алгебры, как *длина*, определим её согласно [38]. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над произвольным полем $\mathbb{F}$ и $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — конечная система образующих этой алгебры.

Определение 2.1. *Словом* от $\mathcal{S}$ будем называть произведение элементов множества $\mathcal{S}$. *Длина* слова $a_{i_1} \ldots a_{i_t}$, где $a_{i_j} \in \mathcal{S}$, равна t. Будем считать единицу 1 алгебры $\mathcal{A}$ словом длины 0 (пустым словом).

Для любого $i \geqslant 0$ через $\mathcal{S}^i$ обозначим множество всех слов длины, не большей i, над алфавитом $\mathcal{S}$ и будем использовать обозначение $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$, где $\langle M \rangle$ — линейная оболочка подмножества M некоторого векторного пространства над $\mathbb{F}$.

Обозначим через

$$\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$$

линейную оболочку всех слов в алфавите $\mathcal{S}$. Заметим, что в общем случае произвольного подмножества $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ — это подалгебра с единицей в $\mathcal{A}$, порождённая множеством $\mathcal{S}$, а в случае системы порождающих $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$.

Согласно определению пространств $\mathcal{L}_k(\mathcal{S})$ получаем, что для $0 \leqslant i \leqslant j$ выполнены включения $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_j(\mathcal{S})$. Более того, поскольку алгебра $\mathcal{A}$ конечномерна, то существует такое число h, что $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$. В то же время

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}) \rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \mathcal{L}_h(\mathcal{S}) \rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}).$$

Тогда по индукции получаем, что $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geqslant h$.

Определение 2.2. *Длиной системы порождающих* $\mathcal{S}$ конечномерной алгебры $\mathcal{A}$ называется число

$$l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ \colon \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\},$$

а *длиной алгебры* $\mathcal{A}$ называется число

$$l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) \colon \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

Из определения пространств $\mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ следует, что для длины произвольной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ выполнена тривиальная верхняя оценка $\dim \mathcal{A} - 1$ (см. [38, первый абзац на с. 536]).

Исследования функции длины для полной алгебры матриц над полем начались в 1950-х годах в контексте механики сплошных сред [41, 42]. В общем случае задача вычисления длины матричной алгебры $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ как функции порядка матриц была поставлена в 1984 году А. Пазом [39] и до сих пор является открытой. Известные нетривиальные верхние оценки принадлежат А. Пазу, К. Паппачене и Я. Шитову.

Теорема 2.3 [39, теорема 1, замечание 2]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда*

$$l\bigl(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\bigr) \leqslant \left\lceil \frac{n^2+2}{3} \right\rceil.$$

Теорема 2.4 [38, следствие 3.2]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда*

$$l\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big) < n\sqrt{\frac{2n^2}{n-1}+\frac{1}{4}}+\frac{n}{2}-2.$$

Теорема 2.5 [40, теорема 3]. *Для всех множеств $\mathcal{S} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ выполнена оценка*

$$l(\mathcal{S}) \leqslant 2n\log_2 n + 4n - 4.$$

Отметим, что эти оценки нелинейны. В то же время А. Паз предположил, что должна существовать линейная верхняя оценка длины матричной алгебры.

Гипотеза 2.6 (гипотеза Паза [39]). Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{S} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Тогда

$$l(\mathcal{S}) \leqslant 2n-2.$$

Учитывая существование систем порождающих длины $2n-2$ (см., например, [31, с. 131]), можно сформулировать гипотезу Паза иначе.

Гипотеза 2.7 [39]. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда

$$l\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big) = 2n-2.$$

Сложность вычисления функции длины даже для классических алгебр можно объяснить тем, что необходимо осуществить перебор всех порождающих систем. Для конкретных систем образующих это стандартная задача линейной алгебры нахождения базиса специального вида в заданном линейном пространстве. Для матричной алгебры в общем виде гипотеза Паза всё ещё остаётся открытой, но некоторые линейные оценки были доказаны при дополнительных ограничениях на системы порождающих, например условиях на ранги или жорданову форму (см. [9, 12, 26, 28, 31—33, 35, 36, 38] и их библиографию). В частности, А. Э. Гутерманом, Т. Лаффи, О. В. Марковой и Х. Шмигоц [26] было установлено, что гипотеза Паза верна для следующего широкого класса порождающих множеств.

Определение 2.8. Матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если её минимальный многочлен совпадает с характеристическим.

Известно множество других содержательных эквивалентных определений и интересных свойств циклических матриц (см., например, [24, 29]). Наличие циклических матриц в системах порождающих матричных подалгебр является сильным условием, которое позволяет решить те или иные вопросы, связанные с системами порождающих и алгебрами [9,10,12,26,28,34,38]. Например, в [12] Д. Ю. Новочадов установил, что в точности для этого класса систем порождающих вопрос о совпадении алгебры, порождённой данным множеством, с полной матричной алгеброй можно решить в терминах графа Бернсайда. В [10] для указанных систем порождающих матричной алгебры решены некоторые алгоритмические вопросы теории матриц.

Теорема 2.9 [26, теорема 2.4]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Если система порождающих $\mathcal{S}$ матричной алгебры $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ содержит циклическую матрицу, то*

$$l(\mathcal{S}) \leqslant 2n-2.$$

В следующем разделе будут приведены аналоги данного результата для алгебр блочно-диагональных матриц. Также будет представлен обзор известных результатов о длине конечных прямых сумм полных матричных алгебр над заданным полем и сформулирован аналог гипотезы Паза для алгебр данного класса.

3. Длина прямой суммы полных матричных алгебр

Напомним сначала общие результаты о длине прямых сумм алгебр.

Теорема 3.1 [7, теорема 1]. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{F}$ длин $l_{\mathcal{A}}$ и $l_{\mathcal{B}}$ соответственно. Тогда выполнены следующие неравенства*:

$$\max\{l_{\mathcal{A}}, l_{\mathcal{B}}\} \leqslant l(\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}) \leqslant l_{\mathcal{A}} + l_{\mathcal{B}} + 1. \tag{3.1}$$

Следствие 3.2 [7, следствие 2]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, и пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ — конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{F}$ длин $l_1, \ldots, l_k$ соответственно. Пусть*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{A}_j.$$

Тогда выполнены следующие неравенства:

$$\max\{l_1, \ldots, l_k\} \leqslant l(\mathcal{A}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} l_j + k - 1.$$

Обозначение 3.3. Пусть $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ обозначает линейное пространство матриц размера $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ обозначает алгебру матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$ — алгебру диагональных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, E, E_n — единичную матрицу в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, O, O_n, $O_{m\times n}$ — нулевые матрицы в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ и $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ соответственно, $E_{i,j}$ — (i,j)-ю матричную единицу, т. е. матрицу с 1 на (i,j)-м месте и 0 на остальных, $J_k(\lambda)$ — жорданову клетку порядка k с собственным числом λ.

Обозначение 3.4. Для упрощения записи введём также следующее обозначение: для $k, n \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F}) = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{M}_n(\mathbb{F}).$$

В частности, $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{F}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ и $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{F}) = \mathrm{D}_k(\mathbb{F})$.

Сформулируем общую задачу вычисления длины прямой суммы матричных алгебр в этих обозначениях.

Задача 3.5. Для фиксированных чисел $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_m$, $n_1, \ldots, n_m$, $n_1 < \ldots < n_m$, вычислить длину алгебры $\mathcal{M}_{k_1,n_1}(\mathbb{F}) \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_{k_m,n_m}(\mathbb{F})$ как функцию от заданных числовых параметров и поля коэффициентов $\mathbb{F}$.

Некоторые границы значений длины этой алгебры можно получить из общей оценки длины прямой суммы.

Следствие 3.6. *Для фиксированных чисел* $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_m$, $n_1, \ldots, n_m$, $n_1 < \ldots < n_m$, *алгебр*

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_{k_1,n_1}(\mathbb{F}) \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_{k_m,n_m}(\mathbb{F})$$

и

$$\mathcal{A}_j = \mathcal{M}_{k_1,n_1}(\mathbb{F}) \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_{k_{j-1},n_{j-1}}(\mathbb{F}) \oplus \mathcal{M}_{k_j-1,n_j}(\mathbb{F}) \oplus \\ \oplus \mathcal{M}_{k_{j+1},n_{j+1}}(\mathbb{F}) \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_{k_m,n_m}(\mathbb{F}), \quad j = 1, \ldots, m,$$

выполнены следующие неравенства:

$$\max_{j=1,\ldots,m} \bigl\{ l\bigl(\mathcal{M}_{k_j,n_j}(\mathbb{F})\bigr) \bigr\} \leqslant \max\{l(\mathcal{A}_1), \ldots, l(\mathcal{A}_m)\} \leqslant l(\mathcal{A}) \leqslant \\ \leqslant \sum_{j=1}^{m} l\bigl(\mathcal{M}_{k_j,n_j}(\mathbb{F})\bigr) + m - 1, \tag{3.2}$$

$$l\bigl(M_{n_j}(\mathbb{F})\bigr) \leqslant l\bigl(\mathcal{M}_{k_j-1,n_j}(\mathbb{F})\bigr) \leqslant l\bigl(\mathcal{M}_{k_j,n_j}(\mathbb{F})\bigr) \leqslant k_j \cdot l\bigl(M_{n_j}(\mathbb{F})\bigr) + k_j - 1. \tag{3.3}$$

Ввиду приведённых оценок отдельно выделяется задача вычисления длины каждой компоненты $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F})$. Несмотря на то что при выполнении гипотезы Паза длина самой матричной алгебры от поля коэффициентов не зависит, для прямых сумм такая зависимость видна уже на примере матриц порядка 1.

Теорема 3.7 [8, теорема 5.4]. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле.*

1. *Если* $\mathbb{F}$ *бесконечно, то* $l\bigl(\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{F})\bigr) = k - 1$.
2. *Если* $|\mathbb{F}| = q$, *то*

$$l\bigl(\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{F})\bigr) = \begin{cases} k - 1 & \text{при } q \geqslant k, \\ (q-1)[\log_q k] + [q^{\{\log_q k\}}] - 1 & \text{при } q < k. \end{cases}$$

Позже аналогичный результат для больших полей был получен М. А. Хрыстиком [30] для сумм матричных алгебр порядка 2.

Лемма 3.8 [30, лемма 3.7]. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле мощности* $|\mathbb{F}| > k$. *Тогда* $l(\mathcal{M}_{k,2}(\mathbb{F})) = 2k$.

На основании результатов теоремы 3.7 и леммы 3.8 выдвинем общую гипотезу о значении длины алгебры $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F})$ над большими полями.

Гипотеза 3.9. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| > k$. Тогда $l\bigl(\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F})\bigr) = (k+1)n - 2$.

В общем виде доказательство данной гипотезы скорее всего будет опираться на доказательство гипотезы Паза. Приведём частичное решение данного вопроса для систем порождающих, содержащих циклические матрицы, для которых гипотеза Паза доказана. Поскольку мы будем использовать технику доказательства, близкую к методам [26], то для удобства приведём здесь формулировки некоторых вспомогательных утверждений.

Лемма 3.10 [26, лемма 2.1]. *Пусть $\mathcal{S}$ — система порождающих алгебры $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{F})$ — конечное множество и $\mathcal{I} = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})\mathcal{X}$ — левый $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$-модуль, порождённый $\mathcal{X}$. Тогда $\mathcal{L}_k(\mathcal{S})\mathcal{X} = \mathcal{I}$ для всех $k \geqslant k_0 = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{I} - \dim_{\mathbb{F}}\langle\mathcal{X}\rangle$.*

Лемма 3.11 [26, лемма 2.2]. *Пусть $\mathcal{S}$ — система порождающих алгебры $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, пусть $m \in \mathbb{N}$ и $m_1, m_2, \dots m_k$ — различные элементы множества $\{1, 2, \dots, m\}$. Рассмотрим множество матриц $\mathcal{X} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\} \subseteq \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{F})$, такое что в матрице C_i ненулевые элементы расположены только в столбцах с номерами $m_1, m_2, \dots, m_i$, причём её столбец с номером m_i ненулевой. Обозначим через $\mathcal{I}$ левый $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$-модуль $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\mathcal{X}$. Тогда $\mathcal{I} = \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})\langle C_1, C_2, \dots, C_k\rangle$ и $\mathcal{I}$ содержит все матричные единицы с 1 в столбцах $m_1, m_2, \dots, m_k$. (Аналогичное утверждение выполнено для строк и правых модулей.)*

Теорема 3.12. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Если система порождающих $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F})$ содержит циклическую матрицу (здесь мы понимаем прямую сумму как подалгебру блочно-диагональных матриц в алгебре $\mathrm{M}_{nk}(\mathbb{F})$), то $l(\mathcal{S}) \leqslant (k+1)n - 2$.*

Доказательство. Поскольку множество векторов над $\mathbb{F}$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда оно линейно зависимо над любым расширением $\mathbb{K}$ поля $\mathbb{F}$, то длина множества $\mathcal{S}$, рассматриваемого как подмножество в $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, равна длине $l(\mathcal{S})$ над $\mathbb{F}$. В частности, длина над алгебраическим замыканием поля совпадает с длиной над исходным полем. Поэтому достаточно доказать утверждение теоремы в предположении, что поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Пусть $A \in \mathcal{S}$ — заданная циклическая матрица. Тогда по условию $A = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$, где $A_j \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $j = 1, \dots, k$, также являются циклическими и их множества собственных чисел попарно не пересекаются. Для любой обратимой матрицы $T \in \mathrm{M}_{nk}(\mathbb{F})$ очевидно верно, что $l(\mathcal{S}) = l(T^{-1}\mathcal{S}T)$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что матрица A приведена к жордановой нормальной форме таким образом, что $A = \mathrm{diag}(J_1, \dots, J_k)$, где J_i — жорданова нормальная форма матрицы A_i.

Для каждого $i = 1, \dots, k$ предположим, что матрица J_i имеет k_i различных собственных чисел $\lambda_{1,i}, \dots, \lambda_{k_i,i}$ кратностей $n_{r,i}$, $r = 1, 2, \dots, k_i$. Поскольку матрица A_i циклическая, в J_i есть ровно одна жорданова клетка $J_{n_{r,i}}(\lambda_{r,i})$, соответствующая собственному числу $\lambda_{r,i}$, $r = 1, \dots, k_i$, поэтому

$$J_i = \mathrm{diag}\big(J_{n_{1,i}}(\lambda_{1,i}), J_{n_{2,i}}(\lambda_{2,i}), \dots, J_{n_{k_i,i}}(\lambda_{k_i,i})\big).$$

Заметим, что $J_{n_{r,i}}(\lambda_{r,i}) = \lambda_{r,i}E_{n_{r,i}} + J_{n_{r,i}}(0)$. Второе слагаемое обозначим для краткости $N_{r,i}$.

Ввиду условия цикличности множество многочленов от матрицы A_i содержит множество

$$\mathcal{X}_i = \{N_{r,i}^{n_{r,i}-1}, N_{r,i}^{n_{r,i}-2}, \ldots, N_{r,i}, E_{n_{r,i}} \mid r = 1, \ldots, k_i\}.$$

С учётом цикличности матрицы A получаем, что множество многочленов от матрицы A содержит множество

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{k} \varepsilon_i(\mathcal{X}_i),$$

где

$$\varepsilon_i \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_{kn}(\mathbb{F}), \quad \varepsilon_i(B) = \mathrm{diag}(O_n, \ldots, O_n, B, O_n, \ldots, O_n) -$$

естественное вложение на i-ю координату, $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, по теореме Гамильтона—Кэли получаем, что

$$\mathcal{X} \subseteq \langle E, A, \ldots, A^{kn-1} \rangle \subseteq \mathcal{L}_{kn-1}(\mathcal{S}).$$

Каждое из множеств $\mathcal{X}_i$ удовлетворяет условиям леммы 3.11: перечисленные степени $N_{1,i}^{n_{r,i}-j}$ можно брать в качестве C_j с $m_j = n_{r,i} - j + 1$ для столбцов, $j = 1, 2, \ldots, n_{r,i}$ (здесь для простоты обозначений приводится нумерация внутри r-го блока), $r = 1, \ldots, k_i$.

Теперь рассмотрим естественную проекцию

$$\pi_i \colon \mathrm{M}_{nk}(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \quad \pi_i\big(\mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_k)\big) = B_i$$

на i-ю координату, $i = 1, \ldots, k$. Поскольку множество $\mathcal{S}$ является системой порождающих алгебры $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F})$, то для каждого $i = 1, \ldots, k$ множество $\mathcal{S}_i = \pi(\mathcal{S})$ является системой порождающих для алгебры $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Используя лемму 3.11 для системы порождающих $\mathcal{S}_i$ и множества $\mathcal{X}_i$, получаем, что левый модуль $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\mathcal{X}_i$ равен $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ и совпадает с

$$\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}_i)\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}_i)\pi_i\big(\mathcal{L}_{kn-1}(\mathcal{S})\big) = \mathcal{L}_{(k+1)n-2}(\mathcal{S}_i) = \pi_i\big(\mathcal{L}_{(k+1)n-2}(\mathcal{S})\big).$$

Таким образом, $\pi_i\big(\mathcal{L}_{(k+1)n-2}(\mathcal{S})\big) = M_n(\mathbb{F})$ для каждого $i = 1, \ldots, k$. Тогда левый $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F})$-модуль $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})\varepsilon_i(\mathcal{X}_i)$ совпадает с $\varepsilon_i\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big)$ и по условию содержится в $\mathcal{L}_{(k+1)n-2}(\mathcal{S})$. Следовательно, $\mathcal{L}_{(k+1)n-2}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F})$ и $l(\mathcal{S}) \leqslant (k+1)n - 2$. $\square$

Замечание 3.13. Условие наличия циклической матрицы в прямой сумме накладывает ограничения на мощность поля. При этом если $|\mathbb{F}| \geqslant k$, то такая матрица заведомо найдётся.

Для полей малой мощности вопрос о логарифмической зависимости функции длины алгебры $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F})$ от мощности поля остаётся открытым.

Замечание 3.14. Полученная в теореме 3.12 оценка порядка $(k+1)n$ сильнее общей оценки из следствия 3.6. Действительно, неравенство (3.3) при наличии циклической матрицы в системе порождающих $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F})$ позволяет с использованием теоремы 2.9 получить лишь оценку $l(\mathcal{S}) \leqslant k(2n-2) + k - 1$ порядка $2kn$.

В общем случае прямых сумм матричных алгебр разных размеров на данный момент исследование проводилось только при ограничении, что порядки слагаемых не превосходят 3. При этом для слагаемого порядка 3 результаты получены только в одном частном случае суммы с алгеброй порядка 1. В то же время для алгебр $\mathcal{M}_{k_1,1}(\mathbb{F})\oplus\mathcal{M}_{k_2,2}(\mathbb{F})$ получены общие результаты, но в ограничениях, что одно из чисел k_1, k_2 — фиксированное малое число, при этом второй параметр может быть произвольным.

Лемма 3.15 [9, лемма 3.17]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $l(\mathrm{M}_2(\mathbb{F})\oplus\mathbb{F}) = l\big(\mathrm{M}_2(\mathbb{F})\big) = 2$.*

Теорема 3.16 [5, теорема 5.4]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $l(\mathrm{M}_3(\mathbb{F})\oplus\mathbb{F}) = l(\mathrm{M}_3(\mathbb{F})) = 4$.*

Гипотеза 3.17 [5, гипотеза 5.6]. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $l(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\oplus\mathbb{F}) = l\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big)$.

Лемма 3.18 [9, лемма 3.18]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $l\big(\mathrm{M}_2(\mathbb{F})\oplus\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{F})\big) = 3$.*

Лемма 3.19 [27, леммы 3.1, 3.2]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда*

1) $l\big(\mathrm{M}_2(\mathbb{F})\oplus\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{F})\big) \leqslant \max\big\{4, l\big(\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{F})\big)\big\}$;
2) *если* $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$ *и* $k\geqslant 4$, *то* $l\big(\mathrm{M}_2(\mathbb{F})\oplus\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{F})\big) = \max\big\{4, l\big(\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{F})\big)\big\}$.

Лемма 3.20 [30, лемма 4.2]. *Пусть $k\in\mathbb{N}$ и $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики, не делящей $4k+2$. Тогда $l\big(\mathcal{M}_{k,2}(\mathbb{F})\oplus\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{F})\big) = 2k+1$.*

Лемма 3.21 [30, лемма 4.3]. *Пусть $k\in\mathbb{N}$ и $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики, не делящей $4k+4$. Тогда $l\big(\mathcal{M}_{k,2}(\mathbb{F})\oplus\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{F})\big) = 2k+2$.*

Объединяя эти утверждения с гипотезой 3.9 и теоремой 3.12, естественно предположить следующую оценку.

Гипотеза 3.22. Пусть $m\in\mathbb{N}$, $k_1,\ldots,k_m$, $n_1,\ldots,n_m$, $n_1<\ldots<n_m$, $N = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i n_i$. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}|\geqslant k_1+\ldots+k_m$. Тогда

$$l\big(\mathcal{M}_{k_1,n_1}(\mathbb{F})\oplus\ldots\oplus\mathcal{M}_{k_m,n_m}(\mathbb{F})\big) \leqslant N+n_m-2 = \sum_{i=1}^{m-1} k_i n_i + (k_m+1)n_m - 2.$$

Теорема 3.23. *Пусть $m\in\mathbb{N}$, $k_1,\ldots,k_m$, $n_1,\ldots,n_m$, $n_1<\ldots<n_m$, $N = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i n_i$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Если система порождающих $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{A} =$
$rM_{k_1,n_1}(\mathbb{F})\oplus\ldots\oplus\mathcal{M}_{k_m,n_m}(\mathbb{F})$ содержит циклическую матрицу (здесь мы опять понимаем прямую сумму как подалгебру блочно-диагональных матриц в алгебре $\mathrm{M}_N(\mathbb{F})$), то $l(\mathcal{S})\leqslant N+n_m-2$.*

Доказательство. Используем рассуждения из доказательства теоремы 3.12. Множество $\mathcal{X}$ строим так же, с тем лишь отличием, что $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{L}_{N-1}(\mathcal{S})$.

Для естественных проекций

$$\pi_i\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}_{k_i,n_i}(\mathbb{F})$$

и вложений

$$\varepsilon_i\colon \mathcal{M}_{k_i,n_i}(\mathbb{F}) \to \mathcal{A}$$

на i-ю компоненту, $i = 1, \ldots, m$, из доказанного в теореме 3.12 получаем, что левый модуль $\mathcal{M}_{k_i,n_i}(\mathbb{F})\pi_i(\mathcal{X})$ равен $\mathcal{M}_{k_i,n_i}(\mathbb{F})$ и совпадает с $\mathcal{L}_{n_i-1}\big(\pi_i(\mathcal{S})\big)\pi_i(\mathcal{X}) \subseteq \subseteq \pi_i\big(\mathcal{L}_{N+n_i-2}(\mathcal{S})\big)$. Таким образом, $\pi_i\big(\mathcal{L}_{N+n_i-2}(\mathcal{S})\big) = \mathcal{M}_{k_i,n_i}(\mathbb{F})$ для каждого $i = 1, \ldots, m$, причём $\mathcal{L}_{N+n_i-2}(\mathcal{S}) \supseteq \varepsilon_i\big(\mathcal{M}_{k_i,n_i}(\mathbb{F})\big)$. Из условия $n_1 < \ldots < n_m$ получаем, что $N + n_m - 2 = \max\limits_{i=1,\ldots,m}\{N + n_i - 2\}$ и $\mathcal{L}_{N+n_i-2}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_{N+n_m-2}(\mathcal{S})$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Следовательно, $\mathcal{L}_{N+n_m-2}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}) \leqslant N+n_m-2$. $\square$

Все результаты и открытые вопросы данного раздела справедливы и для внутренних прямых сумм, т. е. для алгебр блочно-диагональных матриц, где блоки являются полными матричными алгебрами.

Далее, в продолжение исследования матричных структур, ассоциированных с блочно-диагональными формой, будут рассмотрены конкретные классы матричных колец, которые содержатся в кольце блочно-диагональных матриц специального вида и являются представлениями колец эндоморфизмов для некоторых классов абелевых групп без кручения.

4. Общие сведения о кольцах эндоморфизмов блочно-жёстких почти вполне разложимых абелевых групп

В фокусе нашего внимания находятся кольца эндоморфизмов специального класса абелевых групп без кручения конечного ранга, который отражает многие важные свойства таких групп в целом (см. [1, 2, 17, 18, 20, 23]). При этом формулировки многих общих результатов при ограничении к этому классу приобретают более лаконичный вид. Это даёт возможность для совместного рассмотрения этих групп X с их кольцами эндоморфизмов $\operatorname{End} X$, тем более что аддитивные структуры последних $\operatorname{End} X^+$ относятся к тому же самому классу.

Речь идёт о классе так называемых почти вполне разложимых абелевых групп (англ. almost completely decomposable groups). Для краткости будем называть эти группы *acd-группами*. Монографии [3, 37] содержат все необходимые определения и обозначения.

Мы рассматриваем специальный класс $\mathcal{A}$ блочно-жёстких почти вполне разложимых групп кольцевого типа с регулятором

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau \cong \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} n_\tau \tau$$

и регуляторным показателем $e = \exp X/A$, являющимся наименьшим натуральным числом со свойством $e(X/A) = 0$. Это означает, что acd-группа X содержит особую однозначно определённую вполне разложимую подгруппу A конечного индекса, которая является её вполне характеристической подгруппой и называется *регулятором* $R(X)$ группы X, при этом фактор-группа $X/R(X)$ называется *регуляторным фактором* [37]. Введём также для каждого критического типа τ понятие τ-ранга для групп A и X: τ-ранг равняется числу n_τ, рангу соответствующей τ-однородной компоненты A_τ в каноническом разложении группы A. Очевидно,

$$\operatorname{rk} X = \operatorname{rk} A = \sum_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} n_\tau.$$

Обозначим $n = \operatorname{rk} X$.

Если $X/R(X)$ является циклической группой, то X называется acd-группой с *циклическим регуляторным фактором* (*crq-группой*). Заметим, что для такой группы индекс подгруппы $R(X)$ в X равен порядку регуляторного фактора, т. е. $e = |X/R(X)|$.

Если, в другом частном случае, $X/R(X)$ — примарная группа, то X называется почти вполне разложимой группой с *примарным регуляторным фактором*, для которой $p^l = \exp X/A$ для простого числа p и натурального $l > 1$.

Особое внимание будет уделено группам с циклическим примарным регуляторным фактором.

В данной работе рассматриваются группы X *кольцевого* типа, для которых множество $T_{\mathrm{cr}}(X)$ состоит из *идемпотентных типов* τ, т. е. являющихся типами групп ранга 1, содержащих $\mathbb{Z}$, причём для любого простого p число 1 либо делится на любую его степень, либо вообще не делится на p (это записывается в виде $\tau(p) = \infty$ или $p\tau = \tau$ и соответственно $\tau(p) = 0$), см. [14, раздел 85; 37, с. 13].

Поскольку $e(X/A) = 0$ означает, что $eX \subset A$, и сужение любого эндоморфизма группы X к регулятору A является эндоморфизмом на A, имеем цепь

$$e \operatorname{End} A \subseteq \operatorname{End} X \subseteq \operatorname{End} A. \tag{4.1}$$

Обозначим $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$ и $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$. Для обсуждаемого здесь класса блочно-жёстких групп множество критических типов $T_{\mathrm{cr}}(X) = T_{\mathrm{cr}}(A)$ состоит из попарно несравнимых типов. Отождествляя каждый критический тип $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$ с соответствующей однозначно определённой группой τ-ранга 1 данного типа, такой что $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$, мы имеем, что $\operatorname{Hom}(\tau, \sigma) = 0$, если $\tau \neq \sigma$. Поэтому

$$\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A = \bigoplus_{\tau \in T} \mathcal{E}_\tau$$

является разложением в прямую сумму τ-однородных компонент $\mathcal{E}_\tau \cong \operatorname{End} A_\tau$, где $\mathcal{E}_\tau$ изоморфно кольцу $\mathrm{M}_{n_\tau}(\tau)$ всех $(n_\tau \times n_\tau)$-матриц с элементами из соответствующего кольца $\tau \subset \mathbb{Q}$. Более того, в [37, 15.2; 18] показано, что если X является acd-группой, то $\operatorname{End} X$ тоже acd-группа по отношению к операции сложения.

Предложение 4.1. *Пусть X — блочно-жёсткая acd-группа кольцевого типа с регулятором $A = \bigoplus_{\tau \in T} A_\tau$, регуляторным показателем e, множеством критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(X)$ и $n_\tau = \operatorname{rk} A_\tau$. Тогда $\operatorname{End}(X)^+$ является acd-группой со множеством критических типов T, регулятором $R(\operatorname{End}(X)^+) \cong \operatorname{End}(A)^+$, регуляторным показателем e и τ-рангом n_τ^2 для всех $\tau \in T$.* □

Перечисляя все критические типы τ группы X, мы имеем $T = T_{\mathrm{cr}}(A) = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$. Тогда из разложения регулятора $A = \bigoplus_{i=1}^{k} A_{\tau_i}$ на τ_i-однородные компоненты A_{τ_i} рангов $n_i = n_{\tau_i}$ и попарно несравнимых типов следует, что кольцо $\operatorname{End} A$ изоморфно кольцу M, состоящему из всех блочно-диагональных $(n \times n)$-матриц F:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & F_k \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad F_i \in \mathrm{M}_{n_i}(\tau_i). \tag{4.2}$$

Пусть $\mathcal{E}_{\tau_i} = \operatorname{End} A_{\tau_i}$. Тогда $\mathcal{E}_{\tau_i} \cong \mathrm{M}_{n_i}(\tau_i)$.

Мы используем специальную запись $F = (F_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ или, в более удобном виде, $F = (F_\tau)_{\tau \in T}$, имея в виду, что $(n_\tau \times n_\tau)$-матрица F_τ — это элемент из матричного кольца $\mathrm{M}_{n_\tau}(\tau)$, $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$, которое изоморфно соответствующему кольцу $\mathcal{E}_\tau = \operatorname{End} A_\tau$, $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$. Поскольку $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_A$ и $\mathcal{E}_A \cong M$, любой элемент $\mathcal{F}$ из $\mathcal{E}$ может быть представлен матрицей данного вида $F = (F_\tau)_{\tau \in T}$.

5. Кольца эндоморфизмов блочно-жёстких почти вполне разложимых абелевых групп с примарным регуляторным фактором

Мы рассматриваем блочно-жёсткую acd-группу $X \in \mathcal{A}$ с примарным регуляторным фактором, т. е. $e = \exp X/A = p^l$ для некоторого простого числа p и натурального l.

Являясь подгруппой делимой оболочки своего регулятора A, группа X также является подгруппой группы $\frac{X}{q}$, причём $q\left(\frac{X}{q}\right) = X$ для любого натурального числа q. Из $eX \subset A$ заключаем, что $A \subset X \subset \frac{A}{p^l}$ и $X = X \cap \frac{A}{p^l}$.

Для всех натуральных $k \in [0, l]$ введём в рассмотрение группы $X_k \subset X$ с регуляторными экспонентами p^k, определённые следующим образом.

Определение 5.1. $X_k = X \cap \frac{A}{p^k}$ для любого $k = 0, 1, \ldots, l$.

Легко видеть, что X_k — вполне характеристическая подгруппа группы $X = X_l$, так как любой элемент $\varphi \in \mathcal{E}$ принадлежит $\mathcal{E}_A$ и, значит, отображает $\frac{A}{p^k}$ в себя.

Имеется цепь вполне характеристических подгрупп группы X, являющихся acd-группами с регулятором A:

$$X = X_l \supset X_{l-1} \supset X_{l-2} \supset X_{l-3} \supset \ldots \supset X_2 \supset X_1 \supset X_0 = A. \tag{5.1}$$

Подход, состоящий в совместном рассмотрении acd-групп и их колец эндоморфизмов, мы демонстрируем в серии следующих утверждений, частично снабжённых доказательствами.

Лемма 5.2 [2, лемма 3.4]. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant s \leqslant l$. Тогда группа X_k является вполне характеристической подгруппой группы X_s.*

Доказательство. Имеем

$$X_k = X_l \cap \frac{A}{p^k} = X_l \cap \left(\frac{A}{p^k} \cap \frac{A}{p^s}\right) = \left(X_l \cap \frac{A}{p^s}\right) \cap \frac{A}{p^k} = X_s \cap \frac{A}{p^k}.$$

Поскольку A является регулятором в X_s, мы заключаем, что любой элемент $\varphi \in \operatorname{End} X_s$ принадлежит также $\mathcal{E}_A$ и отображает $\frac{A}{p^k}$ в себя. Отсюда следует, что $X_k\varphi \subset X_k$, как и требуется. □

Обозначим

$$E_k = \operatorname{End} X_k$$

и построим следующую цепь подколец в $\mathcal{E}_A$:

$$\mathcal{E} = E_l \subset E_{l-1} \subset E_{l-2} \subset E_{l-3} \subset \ldots \subset E_2 \subset E_1 \subset E_0 = \mathcal{E}_A. \tag{5.2}$$

Лемма 5.3 [2, лемма 3.5]. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant l-1$. Тогда $pX_{k+1} \subset X_k$.*

Доказательство. Это немедленно следует из определения 5.1 групп X_k,

$$pX_{k+1} = p\left(X_l \cap \frac{A}{p^{k+1}}\right) = \left(pX_l \cap \frac{A}{p^k}\right) \subset X_l \cap \frac{A}{p^k} = X_k. \qquad \square$$

Мы получаем другую цепь из групп, возрастающую цепь подгрупп в A:

$$p^l X_l \subset p^{l-1}X_{l-1} \subset p^{l-2}X_{l-2} \subset p^{l-3}X_{l-3} \subset \ldots \subset p^2X_2 \subset pX_1 \subset X_0 = A. \tag{5.3}$$

Лемма 5.4 [2, лемма 3.6]. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant s \leqslant l$. Тогда $p^{s-k}\operatorname{End} X_k \subset$ $\subset \operatorname{End} X_s$.* □

На основании этой леммы и (5.2) мы строим убывающую цепь двусторонних идеалов кольца $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = E_l \supset pE_{l-1} \supset p^2E_{l-2} \supset p^3E_{l-3} \supset \ldots \supset p^{l-1}E_1 \supset p^lE_0 = p^l\mathcal{E}_A. \tag{5.4}$$

Введём ещё одну цепь из групп. Для этого определим

$$\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, l. \tag{5.5}$$

Мы видим, что $\widetilde{X_l} = X_l = X$, $\widetilde{X_0} = \frac{A}{p^l}$ и $\widetilde{X_{k+1}} \subset \widetilde{X_k}$ по лемме 5.3. Имеем состоящую из групп цепь

$$X = \widetilde{X_l} \subset \widetilde{X_{l-1}} \subset \widetilde{X_{l-2}} \subset \widetilde{X_{l-2}} \subset \ldots \subset \widetilde{X_1} \subset \widetilde{X_0} = \frac{A}{p^l}, \tag{5.6}$$

для которой цепь (5.2) служит цепью соответствующих колец эндоморфизмов, также как и для групп (5.1), поскольку $\widetilde{X_k} \cong X_k$.

Введём подгруппы X'_k вполне разложимой группы $\frac{A}{p^l}$, которые сами являются acd-группами с регуляторными экспонентами p^k.

Определение 5.5. $X'_k = X + \frac{A}{p^{l-k}}$ для любого $k = 0, 1, \ldots, l$.

Получаем цепь

$$X = X'_l \subset X'_{l-1} \subset X'_{l-2} \subset X'_{l-3} \subset \ldots \subset X'_2 \subset X'_1 \subset X'_0 = \frac{A}{p^l}, \tag{5.7}$$

для которой $\frac{A}{p^k}$ является регулятором в X'_{l-k}.

Поскольку $\frac{A}{p^k} \subset \mathbb{Q}A$, любой эндоморфизм группы A может рассматриваться как эндоморфизм группы $\frac{A}{p^k}$. Примем, что

$$\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A = \operatorname{End} \frac{A}{p^k}$$

и $\operatorname{End} X'_{l-k} \subset \mathcal{E}_A$, так как $A \cong \frac{A}{p^k}$, где $0 \leqslant k \leqslant l$.

Обозначим

$$E'_{l-k} = \operatorname{End} X'_{l-k}$$

для любого натурального $k \in [0, l]$. Имеется цепь

$$\mathcal{E} = E'_l \subset E'_{l-1} \subset E'_{l-2} \subset E'_{l-3} \subset \ldots \subset E'_2 \subset E'_1 \subset E'_0 = \mathcal{E}_A. \tag{5.8}$$

Мы строим убывающую цепь подгрупп в X, содержащих A:

$$X = X'_l \supset pX'_{l-1} \supset p^2 X'_{l-2} \supset \ldots \supset p^{l-2} X'_2 \supset p^{l-1} X'_1 \supset p^l X'_0 = A. \tag{5.9}$$

Отсюда получается ещё одно включение.

Лемма 5.6 [2, лемма 3.12]. *Пусть* $0 \leqslant k \leqslant l-1$. *Тогда* $pE'_{l-(k+1)} \subset E'_{l-k}$. □

Эта лемма и цепь (5.8) приводят нас к следующей убывающей цепи двусторонних идеалов кольца $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = E'_l \supset pE'_{l-1} \supset p^2 E'_{l-2} \supset p^3 E'_{l-3} \supset \ldots \supset p^{l-1} E'_1 \supset p^l E'_0 = p^l \mathcal{E}_A. \tag{5.10}$$

Установим связь между членами цепей (5.6) и (5.7).

Предложение 5.7 [2, предложение 3.13]. *Пусть* $X \in \mathcal{A}$ *и* $p^l = \exp(X/A)$ *для некоторого простого числа* p, *и пусть натуральное число* k *находится в интервале* $[0, l]$. *Предположим, что группы* X'_k *и* $\widetilde{X_k}$ *определяются соответственно как* $X'_k = \frac{A}{p^{l-k}} + X$ *и* $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$, *где* $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$. *Тогда* $X'_k \subset \widetilde{X_k}$ *и группы* X'_k *и* $\widetilde{X_k}$ *имеют один и тот же регулятор* $\frac{A}{p^{l-k}}$ *и одну и ту же регуляторную экспоненту* p^k *для любого* $k = 0, \ldots, l$. □

Замечание 5.8. В частности, $X = X'_l = \widetilde{X_l}$ и $\frac{A}{p^l} = X'_0 = \widetilde{X_0}$ (см. (5.6) и (5.7)).

Из предложения 4.1 и (4.1) следует, что $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$ является подкольцом кольца $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$, в то время как $p^l\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}$. Используя предыдущие построения, мы получаем цепь

$$\mathcal{E} = {\mathcal{E}_A}^{(l)} \subset {\mathcal{E}_A}^{(l-1)} \subset {\mathcal{E}_A}^{(l-2)} \subset \ldots \subset {\mathcal{E}_A}^{(1)} \subset {\mathcal{E}_A}^{(0)} = \mathcal{E}_A, \qquad (5.11)$$

члены которой удовлетворяют условию, что $p^{l-k}\varphi \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in {\mathcal{E}_A}^{(k)}$ для любого $\varphi \in \mathcal{E}_A$.

Теорема 5.9 [2, теорема 4.4]. *Пусть X — блочно-жёсткая acd-группа кольцевого типа с регулятором A и $p^l = \exp(X/A)$ для некоторого простого числа p, и пусть $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$, $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$. Предположим, что для каждого k из интервала $[0, l]$ группы X'_k и $\widetilde{X_k}$ определяются соответственно как $X'_k = \frac{A}{p^{l-k}} + X$ и $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$, где $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$. Тогда существует цепь*

$$\mathcal{E} = {\mathcal{E}_A}^{(l)} \subset {\mathcal{E}_A}^{(l-1)} \subset {\mathcal{E}_A}^{(l-2)} \subset \ldots \subset {\mathcal{E}_A}^{(1)} \subset {\mathcal{E}_A}^{(0)} = \mathcal{E}_A$$

двусторонних идеалов кольца $\mathcal{E}$, члены которой удовлетворяют следующим условиям: ${\mathcal{E}_A}^{(k)} = \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$ и для $\varphi \in \mathcal{E}_A$ верно, что $p^{l-k}\varphi \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in {\mathcal{E}_A}^{(k)}$. □

6. Структура кольца эндоморфизмов блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы с примарным циклическим регуляторным фактором

Чтобы проиллюстрировать рассмотренные кольца матричными структурами, мы перейдём к кольцам эндоморфизмов почти вполне разложимых групп $X \in \mathcal{A}$ специального класса (crq-групп), имеющих циклический и по-прежнему примарный регуляторный фактор X/A порядка $e = p^l = |X/A|$.

Определим естественный эпиморфизм

$$\overline{}\colon A \mapsto A/eA = \overline{A}. \qquad (6.1)$$

Выберем порождающий элемент $b + A$ в X/A. Тогда

$$eb = \sum_{\tau \in T} v_\tau, \quad v_\tau \in A_\tau.$$

Пусть

$$m_\tau = m_\tau(X) = |\overline{v_\tau}| = |v_\tau + eA|. \qquad (6.2)$$

Очевидно, что $m_\tau \mid e$ для каждого $\tau \in T$, поскольку $p^l = \operatorname{lcm}_{\tau \in T} m_\tau$ по построению. Естественно полагаем

$$m_\tau = 1, \quad \text{если} \quad \tau(p) = \infty \quad \text{или} \quad \tau \notin T_{\mathrm{cr}}(X), \qquad (6.3)$$

так как в этих случаях $\overline{A_\tau} = A_\tau/eA_\tau = 0$.

Важным понятием в теории абелевых групп без кручения конечного ранга является понятие почти изоморфизма.

Теорема 6.1 (критерий почти изоморфизма [19, теорема 2.4]). *Блочно-жёсткие crq-группы X и X' являются почти изоморфными тогда и только тогда, когда $R(X) \cong R(X')$ и $m_\tau(X) = m_\tau(X')$ для любых типов τ.* $\square$

Мы видим, что числа $m_\tau(X)$ являются инвариантами почти изоморфизма.

Среди различных прямых разложений группы X (см. [15, 16, 21, 22]) выделим специальное разложение (в [19, теорема 3.5] и [37, теорема 13.1.6] оно называется *главным разложением*).

Теорема 6.2 (о главном разложении). *Пусть X — блочно-жёсткая почти вполне разложимая группа с циклическим регуляторным фактором. Тогда существует такое разложение $X = Y \oplus A'$, что группа A' вполне разложима, Y — жёсткая почти вполне разложимая группа с циклическим регуляторным фактором и $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(Y)$ тогда и только тогда, когда $m_\tau(Y) = m_\tau(X) > 1$. При этом группа Y единственна с точностью до почти изоморфизма, A' единственна с точностью до изоморфизма.* $\square$

Следуя теореме 6.2 и [19, теорема 3.2, A.1], мы можем так выбрать элементы в A_τ, что
$$A_\tau = \tau a_1^\tau \oplus \ldots \oplus \tau a_{n_\tau}^\tau \tag{6.4}$$
и элемент b, удовлетворяющий соотношению $\langle b + A\rangle = X/A$, может быть взят из делимой оболочки группы $\bigoplus\limits_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau\neq 1} \tau a_1^\tau$ следующим образом:
$$p^l b = \sum_{\tau\in T, m_\tau\neq 1} \frac{p^l}{m_\tau} s_\tau a_1^\tau, \tag{6.5}$$
где $s_\tau \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

1) $\gcd(s_\tau, p) = 1$ для всех $\tau \in T$;
2) $\gcd(p, q) = 1$ и $\gcd(s_\tau, q) = 1$ для любого простого q, удовлетворяющего условию $\tau(q) = \infty$.

Положим
$$Y = \Bigg(\bigoplus_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau\neq 1} \tau a_1^\tau\Bigg)_*,$$
$A'_\tau = \tau a_2^\tau \oplus \ldots \oplus \tau a_{n_\tau}^\tau \cong (n_\tau - 1)\tau$, где $m_\tau \neq 1$, и
$$A' = \Bigg(\bigoplus_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau\neq 1} A'_\tau\Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau = 1} A_\tau\Bigg).$$
Тогда $X = Y \oplus A'$ — главное разложение.

Матричное представление кольца эндоморфизмов такой группы, ассоциированное с её главным разложением, имеет следующий вид.

Теорема 6.3 [1, теорема 4.5]. *Кольцо эндоморфизмов $\mathcal{E}$ блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X кольцевого типа, имеющей регулятор $A \cong \bigoplus_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(X)} n_\tau\tau$ и p-примарный циклический регуляторный фактор X/A, изоморфно кольцу E блочно-диагональных матриц $F=(F_\tau)_{\tau\in T}$ вида*

$$F_\tau \in \begin{bmatrix} q+m_\tau\tau & \tau & \dots & \tau & \tau \\ m_\tau\tau & \tau & \dots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & \tau & \dots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & \tau & \dots & \tau & \tau \end{bmatrix} \subset \mathrm{M}_{n_\tau}(\tau), \tag{6.6}$$

где $T=T_{\mathrm{cr}}(X)$, $m_\tau=m_\tau(X)$ и $q=q(F)$ — некоторое целое число, не зависящее от τ. □

Замечание 6.4. Если $n_\tau=1$, то F_τ рассматривается как одноэлементная матрица $[q+m_\tau\tau]$.

Если $m_\tau=1$, то соответствующая матрица F_τ является любым элементом из кольца $\mathrm{M}_{n_\tau}(\tau)$ и может быть записана в той же самой форме (6.6), содержащей $q=q(F)$.

Как и раньше, мы вводим в рассмотрение группы $X_k = X\cap\frac{A}{p^k}$, $X'_k = X+\frac{A}{p^{l-k}}$ и $\widetilde{X_k}=\frac{X_k}{p^{l-k}}$ при всех k, $0\leqslant k\leqslant l$ (см. определения 5.1, 5.5 и (5.5)). Обозначим $m_{\tau k}=m_\tau(X_k)$.

Лемма 6.5 [2, лемма 5.4]. *Пусть группа $X\in\mathcal{A}$ имеет циклический регуляторный фактор, для которого $p^l=|X/A|$ и $m_\tau=m_\tau(X)$, $\tau\in T_{\mathrm{cr}}(X)$. Тогда для любого натурального $k\in[0,l]$ верно следующее:*

1) $\widetilde{X_k}=X'_k$;
2) $m_\tau(X_k)=\frac{m_\tau}{p^{l-k}}$, *если* $p^{l-k}\mid m_\tau$; *в другом случае* $m_\tau(X_k)=1$. □

Для критических типов τ, которые удовлетворяют условию $m_\tau(X)=p^l$, выполняется $m_\tau(X_k)=\frac{m_\tau}{p^{l-k}}$ для каждого $k=0,1,\dots,l$.

Продолжая $\varphi\in\mathcal{E}_A$ на всю делимую оболочку $\mathbb{Q}A$ и помня, что $\mathrm{End}\,X_k\subset\mathcal{E}_A$, мы выводим следующее.

Следствие 6.6 [2, следствие 5.5]. *Пусть $X\in\mathcal{A}$ — группа с циклическим регуляторным фактором, для которого $p^l=|X/A|$, и пусть натуральное число k находится в интервале $[0,l]$. Тогда*

$$\mathrm{Hom}(X'_k,\widetilde{X_k})=\mathrm{End}\,X_k.$$

Доказательство. Имеем $X'_k=\widetilde{X_k}$ по предыдущей лемме и $X_k\cong\widetilde{X_k}$ по определению. □

Все группы X_k, X'_k и $\widetilde{X_k}$ являются acd-группами с циклическим регуляторным фактором, их регуляторы изоморфны A, а регуляторные экспоненты равны p^k. Основываясь на этом, мы формулируем следующую теорему.

Теорема 6.7 [2, теорема 5.6]. *Пусть группа $X \in \mathcal{A}$ является acd-группой с циклическим p-примарным регуляторным фактором, для которого $p^l = |X/A|$, и пусть $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$, $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$. Предположим, что $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$ — подгруппы группы X, определённые для всех натуральных k из интервала $[0, l]$. Тогда*

$$\mathcal{E} = \operatorname{End} X_l \subset \operatorname{End} X_{l-1} \subset \operatorname{End} X_{l-2} \subset \ldots\ldots \subset \operatorname{End} X_1 \subset \operatorname{End} X_0 = \mathcal{E}_A,$$

и $\varphi \in \mathcal{E}_A$ удовлетворяет условию $p^{l-k}\varphi \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in$ $\in \operatorname{End} X_k$.

Эта теорема не нуждается в доказательстве, поскольку её утверждение прямо следует из теоремы 5.9 и может быть подтверждено матричным представлением кольца эндоморфизмов acd-группы $X \in \mathcal{A}$ с примарным циклическим регуляторным фактором.

Заменяя m_τ на $m_{\tau k}$ в (6.6), мы получаем матричное представление $E_k \cong$ $\cong \operatorname{End} X_k$ для групп X_k из того же класса.

Лемма 6.5 утверждает, что $m_{\tau k} = \frac{m_{\tau k+1}}{p}$ или $m_{\tau k} = 1$, что влечёт $E_{k+1} \subset E_k$ и согласуется с включением $\operatorname{End} X_{k+1} \subset \operatorname{End} X_k$ из теоремы 6.7.

Для любой блочно-диагональной матрицы $F_k = (F_\tau^k)_{\tau \in T} \in E_k$ мы имеем, что $p^{l-k}F_k = (p^{l-k}F_\tau^k)_{\tau \in T}$ состоит из блоков

$$p^{l-k}F_\tau^k \in \begin{bmatrix} qp^{l-k} + m_{\tau k}p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau & \ldots & p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau \\ m_{\tau k}p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau & \ldots & p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{\tau k}p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau & \ldots & p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{\tau k}p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau & \ldots & p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau \end{bmatrix}, \tag{6.7}$$

содержащих целое число $q = q(F_k)$, одно и то же для всех τ.

Лемма 6.5 гарантирует, что $m_\tau \mid m_{\tau k}p^{l-k}$ (в частности, $m_{\tau k}p^{l-k} = m_\tau$, если $m_{\tau k} \neq 1$), т. е.

$$p^{l-k}E_k \subset E,$$

что согласуется с теоремой 6.7. Поскольку $m_{\tau k} \mid m_\tau$, мы видим, что $p^{l-k}E_k$ — двусторонние идеалы кольца E в соответствии с матричными структурами (6.6), (6.7). Из

$$\frac{p^{l-k}}{p^{l-(k+1)}} = p \quad \text{и} \quad \frac{m_{\tau\, k+1}}{m_{\tau k}} = p \text{ или } 1$$

мы заключаем, что $m_{\tau\, k+1}p^{l-(k+1)} \mid m_{\tau k}p^{l-k}$, и следовательно,

$$p^{l-k}E_k \subset p^{l-(k+1)}E_{k+1},$$

как было показано для acd-групп общего вида в (5.4).

Замечание 6.8. Мы использовали один и тот же символ E_k для обозначения колец $\mathrm{End}\,X_k$, $k = 0, 1, \ldots, l$, в (5.2) и (5.4), а также для соответствующих матричных колец при обсуждении групп с циклическим регуляторным фактором.

Замечание 6.9. Интересно было бы получить подобные матричные представления и описание соответствующих цепей для колец эндоморфизмов acd-групп, регуляторный фактор которых не является примарным.

7. Заключение

В этом обзоре бесконечных матричных алгебр блочно-диагональной формы и подколец в них конечного индекса отражены присущие им различные представления с конечными характеристиками. Наше внимание сосредоточено на алгебрах, диагональные блоки которых являются полными матричными алгебрами над полями, а также на их подкольцах при условии, что диагональные блоки допускают только тривиальные гомоморфизмы. Обе эти структуры имеют конечные представления в виде прямых сумм или цепей, числовые характеристики которых проанализированы в разделах 2 и 3, а специальные конструктивные особенности описаны в разделах 5 и 6.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00267).

Литература

[1] Благовещенская Е. Автоморфизмы колец эндоморфизмов блочно-жёстких почти вполне разложимых групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 23—50.

[2] Благовещенская Е. Почти вполне разложимые группы с примарным регуляторным фактором и их кольца эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 17—38.

[3] Благовещенская Е. Почти вполне разложимые группы и их кольца эндоморфизмов. — СПб., 2009. — (Математика в политехническом университете).

[4] Гутерман А. Э., Маркова О. В. Длина групповых алгебр групп небольшого размера // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2018. — Т. 472. — С. 76—87.

[5] Гутерман А. Э., Маркова О. В., Сочнев С. Д. Алгебра полумагических матриц и её длина // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2013. — Т. 419. — С. 52—76.

[6] Крылов П., Михалёв А., Туганбаев А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. — Томск: Томский гос. ун-т, 2002.

[7] Маркова О. В. О длине алгебры верхнетреугольных матриц // УМН. — 2005. — Т. 60, № 5 (365). — С. 177—178.

[8] Маркова О. В. Верхняя оценка длины коммутативных алгебр // Мат. сб. — 2009. — Т. 200б № 12. — С. 41—62.

[9] Маркова О. В. Функция длины и матричные алгебры // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 6. — С. 65—173.

[10] Маркова О. В. Функция длины и одновременная триангулизуемость пар матриц // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2022. — Т. 514. — С. 126—137.

[11] Маркова О. В. Коммутативные матричные алгебры, порождённые циклическими матрицами // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2023. — Т. 524. — С. 112—124.

[12] Маркова О. В., Новочадов Д. Ю. Системы порождающих полной матричной алгебры, содержащие циклические матрицы // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2021. — Т. 504. — С. 157—171.

[13] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[14] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.

[15] Blagoveshchenskaya E. Direct decompositions of almost completely decomposable Abelian groups // Abelian Groups and Modules. — 1996. — (Lect. Notes Pure Appl. Math. Ser.; Vol. 182). — P. 163—179.

[16] Blagoveshchenskaya E. Classification of a class of almost completely decomposable groups // Rings, Modules, Algebras and Abelian Groups. — 2002. — (Lect. Notes Pure Appl. Math. Ser.; Vol. 236). — P. 45—54.

[17] Blagoveshchenskaya E. Dualities between almost completely decomposable groups and their endomorphism rings // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 131, no. 5. — P. 5948—5961.

[18] Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P. The Baer—Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups // Contemp. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 85—93.

[19] Blagoveshchenskaya E., Mader A. Decompositions of almost completely decomposable Abelian groups // Contemp. Math. — 1994. — Vol. 171. — P. 21—36.

[20] Blagoveshchenskaya E., Mikhalev A. Matrix representations of endomorphism rings for torsion-free Abelian groups // Vestn. St. Petersburg Univ.: Math. — 2023. — Vol. 56, no. 3. — P. 341—349.

[21] Blagoveshchenskaya E., Mikulik I. Butler group direct decomposition classification with applications to parallel algorithms // Adv. Syst. Sci. Appl. — 2023. — Vol. 23, no. 3. — P. 153—163.

[22] Blagoveshchenskaya E., Strüngmann L. Algorithms in direct decompositions of torsion-free Abelian groups // J. Math. Sci. — 2023. — Vol. 275, no. 5. — P. 541—547.

[23] Blagoveshchenskaya E., Mikhalev A. Influence of the Baer-Kaplansky theorem on the development of the theory of groups, rings, and modules // J. Math. Sci. — 2023. — Vol. 269, no. 5. — P. 632—696.

[24] Dolinar G., Guterman A., Kuzma B., Oblak P. Extremal matrix centralizers // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 438, no. 7. — P. 2904—2910.

[25] Guterman A. E., Khrystik M. A., Markova O. V. On the lengths of group algebras of finite Abelian groups in the semi-simple case // J. Algebra Appl. — 2022. — P. 2250140—2250153.

[26] Guterman A. E., Laffey T., Markova O. V., Šmigoc H. A resolution of Paz's conjecture in the presence of a nonderogatory matrix // Linear Algebra Appl. — 2018. — Vol. 543. — P. 234—250.

[27] Guterman A. E., Markova O. V. The length of the group algebra of the group Q_8 // New Trends in Algebras and Combinatorics. — World Scientific, 2020. — P. 105—133.

[28] Guterman A. E., Markova O. V., Mehrmann V. Lengths of quasi-commutative pairs of matrices // Linear Algebra Appl. — 2016. — Vol. 498. — P. 450—470.

[29] Horn R., Johnson C. Matrix Analysis. — Cambridge Univ. Press, 2013.

[30] Khrystik M. A., Markova O. V. On the length of the group algebra of the dihedral group in the semi-simple case // Commun. Algebra. — 2022. — Vol. 50, no. 5. — P. 2223—2232.

[31] Laffey T. J. Simultaneous reduction of sets of matrices under similarity // Linear Algebra Appl. — 1986. — Vol. 84. — P. 123—138.

[32] Lambrou M. S., Longstaff W. E. On the lengths of pairs of complex matrices of size six // Bull. Aust. Math. Soc. — 2009. — Vol. 80. — P. 177—201.

[33] Longstaff W. E. Irreducible families of complex matrices containing a rank-one matrix // Bull. Aust. Math. Soc. — 2020. — Vol. 102, no. 2. — P. 226—236.

[34] Longstaff W. E. Burnside's theorem: irreducible pairs of transformations // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 382. — P. 247—269.

[35] Longstaff W. E., Niemeyer A. C., Panaia O. On the lengths of pairs of complex matrices of size at most five // Bull. Aust. Math. Soc. — 2006. — Vol. 73, no. 3. — P. 461—472.

[36] Longstaff W. E., Rosenthal P. On the lengths of irreducible pairs of complex matrices // Proc. Amer. Math. Soc. — 2011. — Vol. 139, no. 11. — P. 3769—3777.

[37] Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. — (Algebra, Logic and Applications; Vol. 13).

[38] Pappacena C. J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 535—545.

[39] Paz A. An application of the Cayley—Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables // Linear Multilinear Algebra. — 1984. — Vol. 15. — P. 161—170.

[40] Shitov Ya. An improved bound for the lengths of matrix algebras // Algebra Number Theory. — 2019. — Vol. 13, no. 6. — P. 1501—1507.

[41] Spencer A. J. M., Rivlin R. S. The theory of matrix polynomials and its applications to the mechanics of isotropic continua // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1959. — Vol. 2. — P. 309—336.

[42] Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Further results in the theory of matrix polynomials // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1960. — Vol. 4. — P. 214—230.