Взвешенные частично упорядоченные множества и обогащённый мономиальный базис QSym

Е. А. ВАСИЛЬЕВА
Политехническая школа, Франция
e-mail: katya@lix.polytechnique.fr

Д. ГРИНБЕРГ
Университет Дрекселя, США
e-mail: darijgrinberg@gmail.com

УДК 512.542.74

Ключевые слова: обогащённые P-разбиения, квазисимметрические функции, множества десантов, множества пиков, перестановки.

Аннотация

Фундаментальные функции Гесселя и функции пиков Стембриджа являются производящими функциями для (обогащённых) P-разбиений на помеченных цепочках. Они также являются базами двух важных подалгебр алгебры формальных степенных рядов: кольца квазисимметрических функций (QSym) и алгебры пиков соответственно. Сяо ввёл мономиальные функции пиков — базис алгебры пиков, индексированный нечётными целочисленными композициями. Мономиальные функции пиков связаны с функциями пиков наподобие того, как связаны друг с другом мономиальный и фундаментальный базисы QSym. Мы показываем, что расширение множества мономиальных пиков до множества мономиальных пиков, индексированных произвольными композициями, является новым базисом QSym. Мы также обобщаем результаты Сяо, включая формулу произведения. Для этого мы вводим взвешенный вариант частично упорядоченных множеств и изучаем их производящие функции.

Abstract

E. A. Vassilieva, D. Grinberg, Weighted posets and the enriched monomial basis of QSym, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 53—65.

Gessel's fundamental and Stembridge's peak functions are the generating functions for (enriched) P-partitions on labelled chains. They are also the bases of two significant subalgebras of formal power series, respectively, the ring of quasisymmetric functions (QSym) and the algebra of peaks. Hsiao introduced the monomial peak functions, a basis of the algebra of peaks indexed by odd integer compositions whose relation to peak functions mimics the one between the monomial and fundamental bases of QSym. We show that the extension of monomial peaks to any composition is a new basis of QSym and generalise Hsiao's results including the product rule. To this end, we introduce a weighted variant of posets and study their generating functions.

Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 1, с. 53—65.

1. Введение

1.1. Композиции и статистики на перестановках

Пусть $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Назовём *композицией* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ целого числа n конечную последовательность из $\ell(\alpha) := p$ положительных целых чисел, таких что $|\alpha| := \sum\limits_i \alpha_i = n$. Композиция называется *нечётной*, если она состоит только из нечётных частей. Обозначим $\mathrm{Comp}(n)$ и $\mathrm{Odd}(n)$ множества композиций и нечётных композиций n соответственно.

Пусть S_n — симметрическая группа на множестве $[n]$. Для произвольной перестановки $\pi \in \mathrm{S}_n$ рассмотрим две важные статистики. *Множество десантов* $\mathrm{Des}(\pi)$ и *множество пиков* $\mathrm{Peak}(\pi)$ перестановки π — это подмножества $[n-1]$, заданные следующим образом:

$$\mathrm{Des}(\pi) = \{1 \leqslant i \leqslant n-1 \mid \pi(i) > \pi(i+1)\},$$
$$\mathrm{Peak}(\pi) = \{2 \leqslant i \leqslant n-1 \mid \pi(i-1) < \pi(i) > \pi(i+1)\}.$$

Назовём подмножество $[n-1]$, которое не содержит ни 1, ни двух последовательных чисел, *пик-лакунарным*. Множество пиков перестановки является пик-лакунарным.

Имеется естественная биекция между композициями n и подмножествами $[n-1]$. А именно, для композиции $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathrm{Comp}(n)$ обозначим $\mathrm{Des}(\alpha)$ подмножество $[n-1]$, которое определим следующим образом:

$$\mathrm{Des}(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{p-1}\}.$$

Мы видим, что $|\mathrm{Comp}(n)| = 2^{n-1}$. С другой стороны, нечётные композиции n находятся во взаимно-однозначном соответствии с пик-лакунарными подмножествами $[n-1]$. Эта биекция строится следующим образом (см. [7]). Для произвольной $\alpha = (2i_1 + 1, 2i_2 + 1, \ldots, 2i_p + 1) \in \mathrm{Odd}(n)$ обозначим

$$\hat{\alpha} = (\overbrace{2, \ldots, 2}^{i_1}, 1, \overbrace{2, \ldots, 2}^{i_2}, 1, \ldots, \overbrace{2, \ldots, 2}^{i_p}, 1).$$

Если

$$\hat{\alpha} = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{j_1}, 2, \overbrace{1, \ldots, 1}^{j_2}, 2, \ldots, \overbrace{1, \ldots, 1}^{j_l}, 2, 1, \ldots, 1),$$

то определим

$$\mathrm{Peak}(\alpha) = \Big\{ \sum_{m=1}^{s} (j_m + 2) \mid 1 \leqslant s \leqslant l \Big\}.$$

Пример 1. Пусть $\alpha = (1, 1, 3, 3, 1) \in \mathrm{Odd}(9)$. Тогда $\mathrm{Des}(\alpha) = \{1, 2, 5, 8\}$. Далее, имеем $\hat{\alpha} = (1, 1, 2, 1, 2, 1, 1)$ и $\mathrm{Peak}(\alpha) = \{4, 7\}$.

Перестановка $\pi \in \mathrm{S}_n$ может быть записана в виде слова $\pi = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_n$, где $\pi_i = \pi(i)$. Это *однострочечная запись* перестановки π. Для двух произвольных перестановок $\pi \in \mathrm{S}_n$ и $\sigma \in \mathrm{S}_m$ обозначим $\pi \sqcup\!\sqcup\, \sigma$ подмножество S_{n+m}, состоящее из всех перестановок $\pi = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_n$ и $n+\sigma = (n+\sigma_1)(n+\sigma_2)\ldots(n+\sigma_m)$ (т. е. из всех перестановок S_{n+m}, содержащих π и $n+\sigma$ в качестве подслов в их однострочной записи).

1.2. Квазисимметрические функции

Для данного коммутативного кольца $\mathbf{k}$ рассмотрим кольцо $\mathbf{k}[[X]]$ формальных степенных рядов с исчислимым множеством коммутирующих переменных $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. В [2] И. Гессель вводит *квазисимметрические функции*, т. е. такие степенноограниченные формальные степенные ряды из $\mathbf{k}[[X]]$, что для любых неотрицательных целых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ и для любой строго возрастающей последовательности отличных друг от друга индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ коэффициент при $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_p^{\alpha_p}$ равен коэффициенту при $x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\cdots x_{i_p}^{\alpha_p}$. Множество всех квазисимметрических функций образует $\mathbf{k}$-подалгебру $\mathbf{k}[[X]]$, обычно обозначаемую QSym и называемую *кольцом квазисимметрических функций*. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и произвольной композиции $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathrm{Comp}(n)$ определим *мономиальную квазисимметрическую функцию* M_α и *фундаментальную квазисимметрическую функцию* L_α следующим образом:

$$M_\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_p} x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\cdots x_{i_p}^{\alpha_p}, \quad L_\alpha = \sum_{\substack{i_1\leqslant\cdots\leqslant i_n;\\ j\in\mathrm{Des}(\alpha)\Rightarrow i_j<i_{j+1}}} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}.$$

Пример 2. В качестве примера для $n=3$ получаем

$$M_{(2,1)} = \sum_{i<j} x_i^2x_j = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_3^2x_4 + \ldots,$$

$$L_{(2,1)} = \sum_{i\leqslant j<k} x_ix_jx_k =$$

$$= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_1^2x_4 + x_1x_2x_4 + x_2^2x_4 + \ldots .$$

Множества $\{M_\alpha\}_{n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathrm{Comp}(n)}$ и $\{L_\alpha\}_{n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathrm{Comp}(n)}$ являются базисами $\mathbf{k}$-модуля QSym. Они связаны друг с другом соотношением

$$L_\alpha = \sum_{\substack{\beta\in\mathrm{Comp}(n);\\ \mathrm{Des}(\alpha)\subseteq\mathrm{Des}(\beta)}} M_\beta. \tag{1}$$

1.3. Функции пиков и мономиальные функции пиков

В [10] Дж. Стембридж изучает другое важное семейство квазисимметрических функций. Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathrm{Odd}(n)$ обозначим

$$K_\alpha = \sum_{\substack{i_1\leqslant\ldots\leqslant i_n;\\ j\in\mathrm{Peak}(\alpha)\Rightarrow i_{j-1}<i_{j+1}}} 2^{|\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}|}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}.$$

На самом деле K_α являются квазисимметрическими функциями, которые называют *функциями пиков* по причине их связи со статистикой пиков на перестановках (см. раздел 1.4). Множество $\{K_\alpha\}_{n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathrm{Odd}(n)}$ является базисом подалгебры QSym, называемой *алгеброй пиков* (**Π** в [10]). Сяо вводит в [7] другой базис алгебры пиков, называемый *мономиальными функциями пиков*. Для произвольной нечётной композиции $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)\in\mathrm{Odd}(n)$ обозначим

$$\eta_\alpha=(-1)^{(n-\ell(\alpha))/2}\sum_{i_1\leqslant\ldots\leqslant i_p}2^{|\{i_1,i_2,\ldots,i_p\}|}x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\cdots x_{i_p}^{\alpha_p}. \tag{2}$$

Выражение, похожее на уравнение (1), связывает функции пиков и мономиальные функции пиков:

$$K_\alpha=\sum_{\substack{\beta\in\mathrm{Odd}(n);\\ \mathrm{Peak}(\beta)\subseteq\mathrm{Peak}(\alpha)}}\eta_\beta. \tag{3}$$

Сяо показал, что мономиальные функции пиков η_α образуют базис алгебры пиков, и предъявил замкнутые формулы, выражающие их через классические базисы QSym, а также их антипода, произведение и копроизведение. Его доказательство основано на формуле (3) и использует тот факт, что композиции являются нечётными.

Однако формула (2) обобщается на *произвольные* целочисленные композиции (за исключением множителя $(-1)^{(n-\ell(\alpha))/2}$, который не является корректно определённым, если n и $\ell(\alpha)$ не имеют одинаковой чётности). При этом возникает естественный вопрос о сохранении хороших свойств мономиальных функций пиков. Мы даём на него *положительный* ответ, показывая, что расширенные мономиальные функции пиков образуют базис QSym, и обобщая результаты Сяо. Мы называем этот новый базис QSym *обогащённым мономиальным базисом*. Мы пользуемся методами, использующими различные алгебраические и комбинаторные приёмы, включая введение нового вида частично упорядоченных множеств и P-разбиений, порождающие функции которых обобщают мономиальные и фундаментальные функции, функции пиков и обогащённые мономиальные функции, а также другие варианты квазисимметрических функций. Перед тем как перейти к формулировке этих результатов, напомним некоторые классические результаты об (обогащённых) P-разбиениях. Часть этого материала появится в [4] (работа продолжается).

Заметим, что базис K_α алгебры пиков также может быть расширен до большего семейства в QSym, хотя это расширенное семейство уже не является базисом QSym; это сделано в недавней работе А. Б. Хесина и А. Л. Чжана [8] (в ней также QSym расширяется далее путём введения двух новых дополнительных переменных x_0 и x_∞).

1.4. Частично упорядоченные множества и P-разбиения

Одной из главных причин для изучения степенных рядов L_α и K_α является их связь со статистиками десантов и пиков на перестановках. Эти связи доказываются путём изучения (обогащённых) P-разбиений. В этом разделе мы напомним определение и основные результаты без доказательств и отошлём читателя к [2, 9, 10] для дальнейших деталей.

Определение 1 (размеченные, частично упорядоченные множества). *Размеченное, частично упорядоченное множество* $P = ([n], <_P)$ — это произвольный частичный порядок $<_P$ на множестве $[n]$.

Определение 2 (P-разбиение). Пусть $P = ([n], <_P)$ — размеченное, частично упорядоченное множество. Назовём *P-разбиением* отображение $f\colon [n] \to \mathbb{P}$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) если $i <_P j$, то $f(i) \leqslant f(j)$;
2) если $i <_P j$ и $i > j$, то $f(i) < f(j)$.

(Отношения $<$ и $>$ без нижнего индекса обозначают классический полный порядок на $\mathbb{P}$.)

Определение 3. Пусть $\mathbb{P}^{\pm}$ — множество $\{-,+\} \times \mathbb{P}$, состоящее из всех пар знака и натурального числа. Обозначим $\pm n$ пару $(\pm, n) \in \mathbb{P}^{\pm}$; *абсолютное значение* $|\pm n|$ определим равным n. Снабдим множество $\mathbb{P}^{\pm}$ полным порядком, заданным отношениями $-1 < 1 < -2 < 2 < -3 < \ldots$. Вложим $\mathbb{P}$ в $\mathbb{P}^{\pm}$, отождествив n с $+n$; обозначим также $-\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}^{\pm}$ множество всех $-n$, где $n \in \mathbb{P}$.

Определение 4 (обогащённые P-разбиения). Пусть $P = ([n], <_P)$ — размеченное, частично упорядоченное множество. Назовём *обогащённым P-разбиением* отображение $f\colon [n] \to \mathbb{P}^{\pm}$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) если $i <_P j$ и $i < j$, то $f(i) < f(j)$ или $f(i) = f(j) \in \mathbb{P}$;
2) если $i <_P j$ и $i > j$, то $f(i) < f(j)$ или $f(i) = f(j) \in -\mathbb{P}$.

Заметим, что P-разбиения совпадают с обогащёнными P-разбиениями без отрицательных значений (т. е. без значений вида $-n$). Более общий случай рассматривается в [3].

Определение 5 ($\mathcal{Z}$-обогащённые P-разбиения). Пусть $\mathcal{Z}$ — подмножество вполне упорядоченного множества $\mathbb{P}^{\pm}$. Пусть $P = ([n], <_P)$ — размеченное частично упорядоченное множество. Назовём *$\mathcal{Z}$-обогащённым P-разбиением* обогащённое P-разбиение $f\colon [n] \to \mathbb{P}^{\pm}$, где $f([n]) \subseteq \mathcal{Z}$. Обозначим $\mathcal{L}_{\mathcal{Z}}(P)$ множество $\mathcal{Z}$-обогащённых P-разбиений.

Пусть теперь $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ — алфавит (т. е. множество перемеых), $P = ([n], <_P)$ — размеченное частично упорядоченное множество и $\mathcal{Z}$ — подмножество $\mathbb{P}^{\pm}$. Тогда назовём *$\mathcal{Z}$-производящей функцией P* формальный степенной ряд

$$\Gamma_{\mathcal{Z}}([n], <_P) = \sum_{f \in \mathcal{L}_{\mathcal{Z}}([n], <_P)} \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_{|f(i)|}. \tag{4}$$

Пусть $\pi \in \mathrm{S}_n$ — перестановка, обозначим через $P_\pi = ([n], <_\pi)$ размеченное, частично упорядоченное множество на множестве $[n]$, где отношение порядка $<_\pi$ таково, что $\pi_i <_\pi \pi_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$ (рис. 1).

$$\pi_1 \longrightarrow \pi_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \pi_n$$

Рис. 1. Размеченное, частично упорядоченное множество, соответствующее перестановке. Стрелка от π_i к π_{i+1} означает, что π_{i+1} покрывает π_i в частично упорядоченном множестве

Предложение 1 [2, 10]. *Обозначим* $L_\pi = \Gamma_{\mathbb{P}}([n], <_\pi)$ *и* $K_\pi = \Gamma_{\mathbb{P}^\pm}([n], <_\pi)$. *Функция* L_π *есть фундаментальная квазисимметрическая функция* L_α, *индексированная единственной композицией* α, *такой что* $\mathrm{Des}(\alpha) = \mathrm{Des}(\pi)$. *Аналогично* K_π — *функция пиков* K_α, *индексированная единственной нечётной композицией* α, *такой что* $\mathrm{Peak}(\alpha) = \mathrm{Peak}(\pi)$.

Это описание приводит к простым формулам произведения как для фундаментальных квазисимметрических функций, так и для квазисимметрических функций пиков. Действительно, имеет место следующее предложение.

Предложение 2 [2, 10]. *Для двух данных перестановок* $\pi \in \mathrm{S}_n$ *и* $\sigma \in S_m$ *произведение производящих функций* $\Gamma_{\mathcal{Z}}([n], <_\pi)$ *и* $\Gamma_{\mathcal{Z}}([m], <_\sigma)$ *удовлетворяет равенствуы*

$$\Gamma_{\mathcal{Z}}([n], <_\pi)\Gamma_{\mathcal{Z}}([m], <_\sigma) = \sum_{\gamma \in \pi ш \sigma} \Gamma_{\mathcal{Z}}([n+m], <_\gamma). \tag{5}$$

В обозначениях предложения 1 специализации уравнения (5) на $\mathcal{Z} \in \{\mathbb{P}, \mathbb{P}^\pm\}$ дают следующие классические результаты:

$$L_\pi L_\sigma = \sum_{\gamma \in \pi ш \sigma} L_\gamma, \quad K_\pi K_\sigma = \sum_{\gamma \in \pi ш \sigma} K_\gamma.$$

2. Обогащённый мономиальный базис QSym

2.1. Обогащённые мономиальные функции

Приступим к определению нашего расширения мономиальных пиковых функций Сяо η_α на α — произвольные композиции n. В случае когда $\alpha \in \mathrm{Odd}(n)$, наше определение η_α совпадает с определением в [1, (6.1)] и отличается лишь знаком от определения в [7] и уравнения (2). Действительно, мы убираем множитель $(-1)^{(n-\ell(\alpha))/2}$, который не является корректно определённым, если композиция α не является нечётной.

Определение 6 (обогащённые мономы). Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и произвольной композиции $\alpha \in \mathrm{Comp}(n)$ введём квазисимметрическую функцию $\eta_\alpha \in \mathrm{QSym}$ следующим образом:

$$\eta_\alpha = \sum_{\substack{\beta \in \mathrm{Comp}(n); \\ \mathrm{Des}(\beta) \subseteq \mathrm{Des}(\alpha)}} 2^{\ell(\beta)} M_\beta. \tag{6}$$

Пример 3.

1. Положив в нашем определении $n = 5$ и $\alpha = (1, 3, 1)$, получим

$$\eta_{(1,3,1)} = \sum_{\substack{\beta\in\mathrm{Comp}(5);\\ \mathrm{Des}(\beta)\subseteq\mathrm{Des}(1,3,1)}} 2^{\ell(\beta)} M_\beta \overset{\substack{\text{поскольку}\\ \mathrm{Des}(1,3,1)=\{1,4\}}}{=} \sum_{\substack{\beta\in\mathrm{Comp}(5);\\ \mathrm{Des}(\beta)\subseteq\{1,4\}}} 2^{\ell(\beta)} M_\beta =$$
$$= 2^{\ell(5)} M_{(5)} + 2^{\ell(1,4)} M_{(1,4)} + 2^{\ell(4,1)} M_{(4,1)} + 2^{\ell(1,3,1)} M_{(1,3,1)} =$$
$$= 2M_{(5)} + 4M_{(1,4)} + 4M_{(4,1)} + 8M_{(1,3,1)}.$$

2. Для произнольного положительного целого n имеем $\eta_{(n)} = 2M_{(n)}$ (поскольку композиция (n) удовлетворяет $\mathrm{Des}(n) = \varnothing$). Аналогично для пустой композиции $\varnothing = ()$ выполняется $\eta_\varnothing = M_\varnothing$.

Из нашего определения η_α вытекают следующие формулы.

Предложение 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathrm{Comp}(n)$. Тогда*

$$\eta_\alpha = \sum_{\substack{i_1\leqslant i_2\leqslant\ldots\leqslant i_n;\\ i_j=i_{j+1} \text{ для каждого } j\in[n-1]\setminus\mathrm{Des}(\alpha)}} 2^{|\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}|} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}.$$

Предложение 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathrm{Comp}(n)$. Тогда*

$$\eta_\alpha = \sum_{i_1\leqslant i_2\leqslant\ldots\leqslant i_p} 2^{|\{i_1,i_2,\ldots,i_p\}|} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_p}^{\alpha_p}.$$

Мы также можем разложить η_α по фундаментальному базису (обобщая [7, утверждение 2.2]).

Предложение 5. *Пусть n — положительное целое число и $\alpha \in \mathrm{Comp}(n)$. Тогда*

$$\eta_\alpha = 2 \sum_{\gamma\in\mathrm{Comp}(n)} (-1)^{|\,\mathrm{Des}(\gamma)\setminus\mathrm{Des}(\alpha)|} L_\gamma.$$

Это предложение доказывается с использованием следующей простой формулы.

Лемма 1. *Пусть S и T — конечные множества. Тогда*

$$\sum_{I\subseteq S} (-1)^{|I\setminus T|} = \begin{cases} 2^{|S|}, & \text{если } S\subseteq T,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

2.2. Базис η_α

Теорема 1. *Пусть 2 — обратимый элемент в $\mathbf{k}$. Тогда $(\eta_\alpha)_{n\in\mathbb{N},\alpha\in\mathrm{Comp}(n)}$ — базис $\mathbf{k}$-модуля QSym.*

Утверждение легко следует из определения η_α с применением триангуляции. Используя инверсию Мёбиуса, мы можем «обратить» (6), тем самым получая явное разложение мономиальных квазисимметрических функций M_β по базису $(\eta_\alpha)_{n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathrm{Comp}(n)}$.

Предложение 6. *Для* $n \in \mathbb{N}$ *и композиции* $\beta \in \operatorname{Comp}(n)$ *имеем*

$$2^{\ell(\beta)} M_\beta = \sum_{\substack{\alpha \in \operatorname{Comp}(n); \\ \operatorname{Des}(\alpha) \subseteq \operatorname{Des}(\beta)}} (-1)^{\ell(\beta)-\ell(\alpha)} \eta_\alpha.$$

2.3. Антипод η_α

Антиподом QSym называется определённое $\mathbf{k}$-линейное отображение $S\colon \operatorname{QSym} \to \operatorname{QSym}$, которое является частью структуры алгебры Хопфа QSym (см. [5, гл. 5]), но которое можно определить и напрямую. А именно, $S\colon \operatorname{QSym} \to \operatorname{QSym}$ — единственное $\mathbf{k}$-линейное отображение, для которого выполняется

$$S(M_\alpha) = (-1)^\ell \sum_{\substack{\gamma \in \operatorname{Comp}(n); \\ \operatorname{Des}(\gamma) \subseteq \operatorname{Des}(\alpha_\ell, \alpha_{\ell-1}, \ldots, \alpha_1)}} M_\gamma$$

для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и произвольной композиции

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell) \in \operatorname{Comp}(n).$$

Также для произвольной композиции α имеем $S(L_\alpha) = (-1)^{|\alpha|} L_{\omega(\alpha)}$, где $\omega(\alpha)$ — композиция, известная как *дополнение* α. За подробностями и доказательствами мы отсылаем к [5, теорема 5.1.11, утверждение 5.2.15]. Заметим, что S является гомоморфизмом $\mathbf{k}$-алгебр и инволюцией (т. е. $S^2 = \operatorname{id}$).

Определение 7. Для композиции $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell)$ *обратной* к α назовём композицию $(\alpha_\ell, \alpha_{\ell-1}, \ldots, \alpha_1)$ и обозначим её $\operatorname{rev} \alpha$.

Предложение 7. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\alpha \in \operatorname{Comp}(n)$. *Тогда антипод* QSym S *удовлетворяет*

$$S(\eta_\alpha) = (-1)^{\ell(\alpha)} \eta_{\operatorname{rev} \alpha}.$$

Предложение 7 естественно вытекает из предложения 5 и обобщает [7, утверждение 2.9].

2.4. Копроизведение η_α

Рассмотрим копроизведение $\Delta\colon \operatorname{QSym} \to \operatorname{QSym} \otimes \operatorname{QSym}$ алгебры Хопфа QSym (см. [5, § 5.1]). Имеем следующую формулу для $\Delta(\eta_\alpha)$, обобщающую [7, следствие 2.7].

Теорема 2. *Для композиции* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ *выполняется*

$$\Delta(\eta_\alpha) = \sum_{k=0}^{p} \eta_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)} \otimes \eta_{(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_p)}.$$

3. Произведение для обогащённого мономиального базиса

Чтобы получить замкнутую формулу для произведения двух обогащённых мономиальных функций, введём новый вариант обогащённых P-разбиений с дополнительными весами на частично упорядоченном множестве.

3.1. Взвешенные частично упорядоченные множества

Определение 8. Назовём *размеченным взвешенным, частично упорядоченным множеством* тройку $P = ([n], <_P, \varepsilon)$, где $([n], <_P)$ — размеченное, частично упорядоченное множество и $\varepsilon\colon [n] \to \mathbb{P}$ — отображение (называемое *весовой функцией*).

В размеченном взвешенном частично упорядоченном множестве каждый элемент помечен двумя числами: его меткой $i \in [n]$ и его весом $\varepsilon(i)$ (рис. 2).

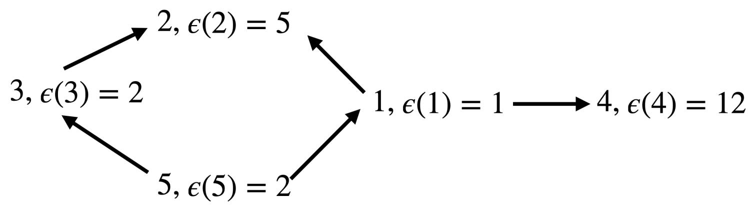

Рис. 2. Размеченное взвешенное пятиэлементное частично упорядоченное множество. Стрелки показывают отношения в частично упорядоченном множестве

Пусть $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{P}^{\pm}$. Порождающая функция $\Gamma_{\mathcal{Z}}([n], <_P, \varepsilon)$ размеченного взвешенного, частично упорядоченного множества $([n], <_P, \varepsilon)$ задаётся соотношением

$$\Gamma_{\mathcal{Z}}([n], <_P, \varepsilon) = \sum_{f \in \mathcal{L}_{\mathcal{Z}}([n], <_P)} \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_{|f(i)|}^{\varepsilon(i)}. \tag{7}$$

Замечание 1. Разница между соотношениями (7) и (4) состоит в степени $\varepsilon(i)$ в $x_{|f(i)|}^{\varepsilon(i)}$.

3.2. Универсальные квазисимметрические функции

Определение 9. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — композиция, $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n$ — перестановка в S_n, $P_{\pi,\alpha} = ([n], <_\pi, \alpha)$ — размеченное взвешенное, частично упорядоченное множество, состоящее из размеченного частично упорядоченного множества $([n], <_\pi)$ и функции веса, связывающей элемент, помеченный π_i, с α_i (рис. 3). Назовём *универсальной квазисимметрической функцией* $U_{\pi,\alpha}^{\mathcal{Z}}$ производящую функцию

$$U_{\pi,\alpha}^{\mathcal{Z}} = \Gamma_{\mathcal{Z}}([n], <_\pi, \alpha). \tag{8}$$

$$\pi_1, \alpha_1 \longrightarrow \pi_2, \alpha_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \pi_n, \alpha_n$$

Рис. 3. Взвешенное, частично упорядоченное множество, связанное с универсальной квазисимметрической функцией $U^{\mathcal{Z}}_{\pi,\alpha}$

Лемма 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Обозначим через* id_n *и* $\overline{\mathrm{id}_n}$ *перестановки в* S_n *вида* $\mathrm{id}_n = 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; \ldots \;\; n$ *и* $\overline{\mathrm{id}_n} = n \;\; n-1 \;\; n-2 \;\; \ldots \;\; 1$ *(в однострочном обозначении). Обозначим через* (1^n) *композицию* n *из* n *частей, равных* 1. *Пусть* $\pi \in \mathrm{S}_n$. *Тогда*

$$U^{\mathbb{P}}_{\pi,(1^n)} = L_\pi, \quad U^{\mathbb{P}^\pm}_{\pi,(1^n)} = K_\pi, \quad U^{\mathbb{P}}_{\overline{\mathrm{id}_n},\alpha} = M_\alpha, \quad U^{\mathbb{P}^\pm}_{\mathrm{id}_n,\alpha} = \eta_\alpha. \tag{9}$$

Можно предположить, что произведение двух универсальных квазисимметрических функций вычисляется по аналогии с произведением двух фундаментальных квазисимметрических функций. Чтобы сформулировать этот результат, нам понадобится *кошаффл* двух пар (π,α) и (σ,β).

Определение 10. Пусть $\pi \in \mathrm{S}_n$ и $\sigma \in S_m$ — перестановки, α и β — композиции из n и m частей соответственно. Назовём *кошаффлом* пар (π,α) и (σ,β) (обозначение $(\pi,\alpha) \sqcup\!\sqcup (\sigma,\beta)$) множество пар (τ,γ), таких что

— $\tau \in \mathrm{S}_{n+m}$ — шаффл π и $n+\sigma$ (т. е. $\tau \in \pi \sqcup\!\sqcup \sigma$);
— γ — композиция из $n+m$ частей, полученная перетасовкой частей α и β, использующей *тот же шаффл*, что и для построения τ из π и $n+\sigma$.

Пример 4. $\big(1\mathbf{3}2, (2, \mathbf{1}, 2)\big)$ — кошаффл $\big(12, (2,2)\big)$ и $\big(1, (1)\big)$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{Z}$ *— подмножество* $\mathbb{P}^\pm$, π *и* σ *— перестановки из* S_n *и* S_m, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *и* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ *— композиции из* n *и* m *частей. Тогда произведение двух универсальных квазисимметрических функций вычисляется следующим образом:*

$$U^{\mathcal{Z}}_{\pi,\alpha} U^{\mathcal{Z}}_{\sigma,\beta} = \sum_{(\tau,\gamma) \in (\pi,\alpha) \sqcup\!\sqcup (\sigma,\beta)} U^{\mathcal{Z}}_{\tau,\gamma}. \tag{10}$$

Доказательство (набросок). В первую очередь заметим, что произведение $U^{\mathcal{Z}}_{\pi,\alpha} U^{\mathcal{Z}}_{\sigma,\beta}$ равно производящей функции размеченных взвешенных, частично упорядоченных множеств $\big([n+m], <_{\pi,\sigma}, (\alpha,\beta)\big)$, изображённых слева на рис. 4. Тогда вычисление $\Gamma_{\mathcal{Z}}\big([n+m], <_{\pi,\sigma}, (\alpha,\beta)\big)$ осуществляется индуктивно, начиная с первой несравнимой пары $\big((\pi_1,\alpha_1), (n+\sigma_1, \beta_1)\big)$ (серые пунктирные стрелки), разбиением суммы в производящей функции согласно следующим взаимно исключающим случаям:

1) $f(\pi_1) < f(n+\sigma_1)$ или $f(\pi_1) = f(n+\sigma_1) \in \mathbb{P}$,
2) $f(n+\sigma_1) < f(\pi_1)$ или $f(n+\sigma_1) = f(\pi_1) \in -\mathbb{P}$.

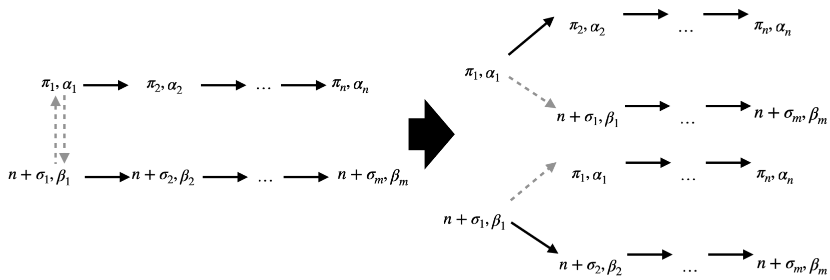

Рис. 4. Разложение двухцепочного взвешенного, частично упорядоченного множества в два частично упорядоченных множества, содержащих на одну несравнимую пару меньше

Таким образом, $\Gamma_{\mathcal{Z}}\big([n+m], <_{\pi,\sigma}, (\alpha,\beta)\big)$ равна сумме производящих функций двух размеченных взвешенных, частично упорядоченных множеств справа на рис. 4. Процесс продолжается до тех пор, пока больше не останется несравнимых пар и не получится (10). □

В заключение заметим, что при использовании последовательности нулей и единиц вместо (1^n) в лемме 2 наша работа тоже покрывает случай слабой композиции квазисимметрических функций (см. [6]).

3.3. Произведение обогащённых мономов

Вычислим произведение двух обогащённых мономов. Пусть α и β — две композиции с n и m частями. Из уравнений (9) и (10) получаем

$$\eta_\alpha \eta_\beta = U^{\mathbb{P}^\pm}_{\mathrm{id}_n,\alpha} U^{\mathbb{P}^\pm}_{\mathrm{id}_m,\beta} = \sum_{(\tau,\gamma)\in(\mathrm{id}_n,\alpha)\sqcup\!\sqcup(\mathrm{id}_m,\beta)} U^{\mathbb{P}^\pm}_{\tau,\gamma}. \tag{11}$$

Нам понадобятся следующие определения.

Определение 11. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — композиция из n частей. Для произвольного целого $2 \leqslant i \leqslant n-1$ обозначим через $\alpha^{\downarrow\downarrow i}$ следующую композицию из $n-2$ частей:

$$\alpha^{\downarrow\downarrow i} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n).$$

Для произвольного пик-лакунарного подмножества $I \subseteq [n-1]$ обозначим $\alpha^{\downarrow\downarrow I} = \alpha$, если $I = \varnothing$ и

$$\alpha^{\downarrow\downarrow I} = \big((\cdots(\alpha^{\downarrow i_k})\cdots)^{\downarrow i_2}\big)^{\downarrow i_1},$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — элементы $I \neq \varnothing$ в возрастающем порядке.

Пример 5. Пусть $\alpha = (2,1,4,3,2)$. Имеем $\alpha^{\downarrow\downarrow 3} = (2,8,2)$ и $\alpha^{\downarrow\downarrow\{2,4\}} = (12)$.

Разложим $U^{\mathbb{P}^\pm}_{\pi,\alpha}$ по обогащённым мономам.

Теорема 4. *Пусть α — композиция из n частей, π — перестановка из S_n. Имеем*

$$U^{\mathbb{P}^\pm}_{\pi,\alpha} = \sum_{I\subseteq \mathrm{Peak}(\pi)} (-1)^{|I|}\eta_{\alpha^{\downarrow\downarrow I}}. \tag{12}$$

Доказательство (набросок). Из определения $U^{\mathbb{P}^\pm}_{\pi,\alpha}$ естественно вытекает, что

$$U^{\mathbb{P}^\pm}_{\pi,\alpha} = \sum_{\substack{i_1\leqslant i_2\leqslant\ldots\leqslant i_n;\\ j\in\mathrm{Peak}(\pi)\Rightarrow\neg(i_{j-1}=i_j=i_{j+1})}} 2^{|\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}|}x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\ldots x_{i_n}^{\alpha_n}.$$

С использованием принципа включения-исключения можно переписать предыдущее следующим образом:

$$U^{\mathbb{P}^\pm}_{\pi,\alpha} = \sum_{I\subseteq \mathrm{Peak}(\pi)} (-1)^{|I|} \underbrace{\sum_{\substack{i_1\leqslant i_2\leqslant\ldots\leqslant i_n;\\ j\in I\Rightarrow i_{j-1}=i_j=i_{j+1}}} 2^{|\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}|}x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\ldots x_{i_n}^{\alpha_n}}_{\substack{=\eta_{\alpha^{\downarrow\downarrow I}}\\ \text{(по предложению 4)}}}. \qquad \square$$

Наконец, мы можем перейти к нашей теореме о произведении обогащённых мономов.

Теорема 5. *Пусть $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_m)$ — две композиции. Пусть γ — композиция, полученная перетасовкой α и β (обозначим $\gamma\in\alpha ш \beta$), и пусть $S_\beta(\gamma)$ — множество позиций частей β внутри γ. Обозначим $S_\beta(\gamma)-1 = \{i-1 \mid i\in S_\beta(\gamma)\}$. Тогда*

$$\eta_\alpha\eta_\beta = \sum_{\substack{\gamma\in\alpha ш\beta;\\ I\subseteq(S_\beta(\gamma)\setminus(S_\beta(\gamma)-1))\setminus\{1\}}} (-1)^{|I|}\eta_{\gamma^{\downarrow\downarrow I}}. \tag{13}$$

Суммирование идёт не по композициям γ, а по способам перетасовки α и β. Таким образом, одна и та же композиция γ иногда появляется сразу в нескольких слагаемых.

Доказательство (набросок). Обратимся к (11) и перепишем правую сторону, используя (12). Пусть (τ,γ) — кошаффл $(\mathrm{id}_n,\alpha) ш (\mathrm{id}_m,\beta)$. Индекс i принадлежит $\mathrm{Peak}(\tau)$ тогда и только тогда, когда τ_i является частью $n+\mathrm{id}_m$, а τ_{i+1} — частью id_n и $i>1$, т. е. тогда и только тогда, когда i является индексом части β внутри γ и $i+1$ — индекс части α. Таким образом, $\mathrm{Peak}(\tau) = \big(S_\beta(\gamma)\setminus(S_\beta(\gamma)-1)\big)\setminus\{1\}$. Поэтому получаем (13). $\square$

Замечание 2. В соответствии с доказательством теоремы 5 j-я часть $\gamma^{\downarrow\downarrow I}$ в (13) — сумма u_j частей α и v_j частей β для некоторых целых u_j, v_j, таких что $|u_j-v_j|=1$. Действительно, поскольку τ в уравнении (11) — шаффл id_n и $n+\mathrm{id}_m$, «последовательные» пики (т. е. находящиеся на расстоянии двух позиций) в τ возникают всякий раз, когда γ содержит череду последовательных частей β и α, которой предшествует либо часть α, либо часть β. Например, для $n=3$, $m=2$, $\alpha=(2,1,2)$ и $\beta=(1,1)$, $\tau=14253$ является шаффлом id_3

и $3 + \mathrm{id}_2$, чей кошаффл — это $\gamma = (2, \mathbf{1}, 1, \mathbf{1}, 2)$. В этом случае $\gamma^{\downarrow\downarrow\{2,4\}} = (7)$, $\gamma^{\downarrow\downarrow 2} = (4, 1, 2)$ and $\gamma^{\downarrow\downarrow 4} = (2, 1, 4)$.

Пример 6. Имеем

$$\eta_{(1,1)}\eta_{(2,3)} = \eta_{(1,1,2,3)} + \eta_{(1,2,1,3)} - \eta_{(4,3)} + \eta_{(2,1,1,3)} + \eta_{(1,2,3,1)} - \\ - \eta_{(1,6)} + \eta_{(2,1,3,1)} - \eta_{(2,5)} + \eta_{(2,3,1,1)} - \eta_{(6,1)},$$
$$\eta_{(1,2)}\eta_{(2)} = \eta_{(2,1,2)} + 2\eta_{(1,2,2)} - \eta_{(5)}.$$

Литература

[1] Aguiar M., Bergeron N., Sottile F. Combinatorial Hopf algebras and generalized Dehn—Sommerville relations // Compositio Math. — 2006. — Vol. 142, no. 1. — P. 1—30.

[2] Gessel I. Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions // Contemp. Math. — 1984. — Vol. 34. — P. 289—317.

[3] Grinberg D. Shuffle-compatible permutation statistics. II. The exterior peak set // Electron. J. Combin. — 2018. — Vol. 25, No. 4. — #P4.17.

[4] Grinberg D. The Eta-Basis of QSym. — 2020. — `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/algebra/etabasis.pdf`.

[5] Grinberg D., Reiner V. Hopf Algebras in Combinatorics. — 2020. — `arXiv:1409.8356v7`. — `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/algebra/HopfComb-sols.pdf`.

[6] Guo L., Yu H., Zhao J. Rota—Baxter algebras and left weak composition quasi-symmetric functions // The Ramanujan J. — 2017. — Vol. 44, no. 3. — P. 567—596.

[7] Hsiao S. K. Structure of the Peak Hopf Algebra of Quasisymmetric Functions. — 2007.

[8] Khesin A. B., Zhang A. L. On Quasisymmetric Functions with Two Bordering Variables. — 2020. — `arXiv:2007.11953v2`.

[9] Stanley R. Enumerative Combinatorics. Vol. 2. — Cambridge Univ. Press, 2001.

[10] Stembridge J. Enriched P-partitions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1997. — Vol. 349, no. 2. — P. 763—788.