Алгебраические алгебры Ли с конечной градуировкой

А. Ю. ГОЛУБКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: artgolub@hotmail.com

УДК 512.554.36+512.554.7

Ключевые слова: примитивная алгебра Ли, сильно первичная алгебра Ли, алгебра Ли с алгебраическим присоединённым представлением, алгебра Мальцева с алгебраическим регулярным представлением, алгебраическая алгебра Мальцева, йорданова алгебра алгебры Ли, йорданова пара, локально конечный радикал, локально разрешимый радикал.

Аннотация

В работе приводится вариант доказательства локальной конечномерности PI-алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением над полями нулевой характеристики без использования экстремальных элементов, ряд сходных выводов для таких алгебр над полями характеристики $p > 7$ и обобщается описание локально конечного радикала алгебраических локально PI-алгебр Мальцева на любое основное поле нулевой характеристики.

Abstract

A. Yu. Golubkov, Algebraic Lie algebras with finite grading, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 87—102.

The paper presents a variant of the proof of local finite-dimensionality of Lie PI-algebras with an algebraic adjoint representation over fields of characteristic zero without the use of extremal elements, a number of similar conclusions for such algebras over fields of characteristic $p > 7$, and generalizes the description of the locally finite radical of algebraic Mal'tsev locally PI-algebras to any base field of characteristic zero.

1. Введение

Существенную роль в доказательстве Е. И. Зельманова (см. [14, теорема 1]) локальной конечномерности PI-алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением над полями характеристики 0 играет лемма JP3 о наличии в ненулевой примитивной PI-алгебре Ли с конечной градуировкой над достаточно большим полем характеристики 0 или больше 3 ненулевых экстремальных элементов (лемма JP3 — лемма 10 из [17]). Реализованный в [35] подход

Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 1, с. 87—102.

с использованием экстремальных элементов без обращения к лемме JP3 позволяет получить ограниченные версии теоремы Е. И. Зельманова для алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением ограниченной степени и PI-алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением над алгебраически замкнутыми полями и расширениями поля действительных чисел (см. [8, теорема 1.1]). Данная работа посвящена построению переработанной версии доказательства теоремы 1 из [14] в исходной формулировке без применения экстремальных элементов на базе классификации простых алгебр Ли с конечной градуировкой из [16] и идей [35] и [36]. Это позволяет перенести результаты [8] на все поля характеристики 0 и получить конструктивный вариант теоремы 3.11 из [5] для алгебраически замкнутых полей.

Все рассматриваемые алгебры, кроме квадратичных йордановых алгебр, являются линейными алгебрами и определены над произвольным ассоциативным коммутативным кольцом с единицей F (полем $\mathbb{F}$), если не оговариваются дополнительные условия (как правило, условия вида $1/n! \in F$ для $n > 1$). Все алгебры и модули над F являются одновременно левыми и правыми унитарными F-модулями с идентичным левым и правым действием, все классы алгебр над F содержат нулевую алгебру и изоморфные копии своих алгебр. Действие гомоморфизмов F-модулей на их элементы будет записываться слева: $\varphi x = \varphi(x)$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(M,N)$, $x \in M$. Если R — алгебра над F и $A \subseteq R$, то $\langle A\rangle$ и $(A)_R$ — подалгебра и идеал R, порождённые A, $M^R(A)$ — подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(R)$ F-модуля R, порождённая операторами левого и правого умножения l_x и r_x на элементы $x \in A$, $l_x\colon y \mapsto xy$ и $r_x\colon y \mapsto yx$, $x,y \in R$, $M(R) = M^R(R)$ — алгебра умножений R, $M(R)' = M(R) + F\,\mathrm{Id}_R$, где Id_R — тождественный изоморфизм R, $R^{(-)}$ — алгебра, полученная из R заменой операции умножения на коммутатор $[\,,\,]$, $[x,y] = xy - yx$, $x,y \in R$, $Z(R)$ — центр R,

$$Z(R) = \{x \in R \mid [x,y] = (x,y,z) = (y,x,z) = (y,z,x) = 0 \text{ для всех } y,z \in R\},$$

где $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$, $\mathrm{Der}(R)$ — подалгебра алгебры Ли $\mathrm{End}_F(R)^{(-)}$, состоящая из всех дифференцирований R (алгебра дифференцирований R). Если L — алгебра Ли над F, то мы будем использовать следующие обозначения: $[\,,\,]$ — операция умножения L, $\mathrm{ad}_x = l_x$, $x \in L$, $\mathrm{Ad}(L) = M(L)$ и $\mathrm{ad}(L) = \{\mathrm{ad}_x \mid x \in L\}$ — присоединённые ассоциативная и лиева алгебры L, $C(L,A) = \big\{x \in L \mid [x,A] = \{0\}\big\}$ — централизатор множества $A \subseteq L$, $C(L) = C(L,L)$ — центр L. По умолчанию все линейные йордановы алгебры и алгебры Мальцева рассматриваются над кольцами с $1/2$, алгебры и модули без n-кручения, $n \geqslant 1$, не имеют n-кручения как аддитивные группы ($nx \neq 0$ для всех их $x \neq 0$).

Элемент с ассоциативными степенями x алгебры R над F называется *целым* (*степени не выше* $n \geqslant 1$), если найдётся многочлен

$${}_xf(t) = t^n + {}_xf_{n-1}t^{n-1} + \ldots + {}_xf_1 t \in F[t],$$

такой что ${}_xf(x) = 0$. Если алгебра R антикоммутативна, элемент x называется *сильно алгебраическим* (*степени не выше* $n \geqslant 1$), если r_x — целый элемент (степени не выше n) алгебры умножений $M(R)$, *алгебраическим*, если для любого $y \in R$ можно подобрать

$$ {}_{y,x}f(t) = t^{n_{y,x}} + {}_{y,x}f_{n_{y,x}-1}t^{n_{y,x}-1} + \ldots + {}_{y,x}f_1 t \in F[t], \quad n_{y,x} \geqslant 1, $$

такой что ${}_{y,x}f(r_x)y = 0$, и *энгелевым* (*n-энгелевым*), если $r_x^n = 0$.

Алгебры Мальцева, состоящие из сильно алгебраических элементов (степени не выше $n \geqslant 1$), называются *алгебрами с алгебраическим регулярным* (*присоединённым* в случае алгебр Ли) *представлением* (*степени не выше n*). Алгебры Мальцева (линейные йордановы, альтернативные алгебры), состоящие из алгебраических (целых) элементов, называются *алгебраическими* (подробнее об условиях алгебраичности алгебр см. [3]).

Алгебры, не содержащие ненулевых идеалов с нулевым умножением (идеалов $I \neq \{0\}$, $U(I)I = \{0\}$, для квадратичных йордановых алгебр (тройных систем)), называются *полупервичными*. Полупервичные алгебры, любые два ненулевых идеала которых имеют ненулевое пересечение, называются *первичными*. Центральное замыкание и центроид Мартиндейла (расширенный центроид) ненулевой полупервичной алгебры R мы будем обозначать через $P(R)$ и $\mathrm{CM}(R)$. $P(R)$ — квазиинъективная оболочка $M(R)'$-модуля R, рассматриваемая как алгебра над $\mathrm{CM}(R)$, $P(R) = \mathrm{CM}(R)R$,

$$ \mathrm{CM}(R) = \mathrm{End}_{M(R)'}\big(P(R)\big) = \mathrm{End}_{M(P(R))'}\big(P(R)\big) = Z\big(M\big(P(R)\big)'\big) $$

(см. [23, 28, 29, 32, 41]). Если R первична, $\mathrm{CM}(R)$ — поле, $P(R)$ — первичная алгебра над $\mathrm{CM}(R)$. Если R проста, $R = P(R)$. Если $P(R)$ проста и $\dim_{\mathrm{CM}(R)} P(R) < \infty$, $\mathrm{CM}(R)$ — поле частных $Z(M(R))$ в $\mathrm{CM}(R)$ (см. [30, теорема 1.7]).

Используемые ниже понятия PI-алгебры для ассоциативных, линейных йордановых алгебр, алгебр Ли и Мальцева соответствуют [5, 6, 8, 11]. Локальные PI-алгебры — алгебры, конечно порождённые подалгебры которых являются PI-алгебрами.

Алгебра Ли L называется *специальной*, если L вкладывается в алгебру Ли $R^{(-)}$ для подходящей ассоциативной PI-алгебры R, и *обобщённо специальной*, если $\mathrm{Ad}(L)$ — PI-алгебра. Класс обобщённо специальных алгебр Ли содержит класс специальных алгебр Ли и замкнут относительно взятия подалгебр и гомоморфных образов. Полупервичная алгебра Ли специальна, если и только если размерности центральных замыканий её ненулевых первичных фактор-алгебр над их центроидами Мартиндейла не превосходят некоторого $n > 1$ (см. [2; 5, наблюдения перед замечанием 3.3]).

Абсолютные делители нуля йордановых алгебр (тройных систем, пар) — это их элементы, операторы квадратичного умножения на которые равны нулю, абсолютные делители нуля алгебр Мальцева — их 2-энгелевы элементы. 2-энгелев элемент x алгебры Ли L называется *оболочкой сэндвича*, если

$\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}(L)\,\mathrm{ad}_x = \{0\}$ (если L не имеет 2-кручения, последнее следует из 2-энгелевости). Йордановы алгебры и алгебры Мальцева (Ли), не содержащие ненулевых абсолютных делителей нуля (оболочек сэндвичей), называются *невырожденными*, первичные невырожденные алгебры из этих классов называются *сильно первичными*.

Пары $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ и $(R^\pm, U^\pm)$, где $R^\pm$ — F-модули, $\{\ ,\ ,\ \}^\pm\colon R^\pm \times R^\mp \times R^\pm \to$ $\to R^\pm$ — трилинейные композиции, $U^\pm\colon R^\pm \to \mathrm{Hom}_F(R^\mp, R^\pm)$ — квадратичные отображения, $U^\pm\colon fx^\pm \mapsto U^\pm_{fx^\pm} = f^2 U^\pm_{x^\pm}$, $x^\pm \in R^\pm$, $f \in F$, называются *линейной* и *квадратичной парами*. Линейная пара $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ называется *линейной йордановой парой*, если она удовлетворет тождествам

$$\begin{aligned}&\{x^\pm, y^\mp, z^\pm\}^\pm = \{z^\pm, y^\mp, x^\pm\}^\pm,\\ &\{x^\pm, y^\mp, \{a^\pm, b^\mp, c^\pm\}^\pm\}^\pm - \{a^\pm, b^\mp, \{x^\pm, y^\mp, c^\pm\}^\pm\}^\pm =\\ &\quad = \{\{x^\pm, y^\mp, a^\pm\}^\pm, b^\mp, c^\pm\}^\pm - \{a^\pm, \{y^\mp, x^\pm, b^\mp\}^\mp, c^\pm\}^\pm.\end{aligned}$$

Квадратичная пара $(R^\pm, U^\pm)$ называется *йордановой* (*квадратичной йордановой*) *парой*, если она удовлетворяет тождествам

$$V^\pm_{x^\pm, y^\mp} U^\pm_{x^\pm} = U^\pm_{x^\pm} V^\mp_{y^\mp, x^\pm}, \quad V^\pm_{U^\pm_{x^\pm} y^\mp, y^\mp} = V^\pm_{x^\pm, U^\mp_{y^\mp} x^\pm}, \quad U^\pm_{U^\pm_{x^\pm} y^\mp} = U^\pm_{x^\pm} U^\mp_{y^\mp} U^\pm_{x^\pm}$$

и всем их линеаризациям, где

$$V^\pm_{x^\pm, y^\mp} z^\pm = \{x^\pm, y^\mp, z^\pm\}^\pm = (U^\pm_{x^\pm + z^\pm} - U^\pm_{x^\pm} - U^\pm_{z^\pm}) y^\mp. \tag{1}$$

Любой йордановой паре $(R^\pm, U^\pm)$ отвечает линейная йорданова пара $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ с композициями (1), каждой линейной йордановой паре $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ с модулями без 6-кручения $R^\pm$ — йорданова пара $(R^\pm, \tilde{U}^\pm)$, $\tilde{U}^\pm_{x^\pm} =$ $= \{x^\pm, \ , x^\pm\}^\pm$ (если $1/2 \in F$, $(R^\pm, \{\ ,\ ,\ \}^\pm)$ соответствует йорданова пара $(R^\pm, (1/2)\tilde{U}^\pm)$) (см. [37, п. 2.1, 2.2]).

Напомним, что квадратичные йордановы алгебры над кольцами с $1/2$ — это линейные йордановы алгебры, рассматриваемые как квадратичные с отображениями ${}^2\colon x \mapsto x^2$ и $U\colon x \mapsto U_x = 2r_x^2 - r_{x^2}$ (квадратичные представления линейных йордановых алгебр). Каждому элементу $a^\mp \in R^\mp$ йордановой пары $(R^\pm, U^\pm)$ отвечают её $a^\mp$*-гомотоп* — квадратичная йорданова алгебра $R^{\pm(a^\mp)} =$ $= \big(R^\pm, U^{\pm(a^\mp)}, {}^{2,a^\mp}\big)$, $U^{\pm(a^\mp)}_{x^\pm} = U^\pm_{x^\pm} U^\mp_{a^\mp}$, $x^{\pm 2, a^\mp} = U^\pm_{x^\pm} a^\mp$,

$$x^\pm \circ_{a^\mp} y^\pm = (x^\pm + y^\pm)^{2,a^\mp} - x^{\pm 2,a^\mp} - y^{\pm 2,a^\mp} = \{x^\pm, a^\mp, y^\pm\}^\pm \quad (x^\pm, y^\pm \in R^\pm)$$

(см. (1)), и $\pm$*-локальная алгебра по* $a^\mp$ — $R^\pm_{a^\mp} = R^{\pm(a^\mp)}/K_{a^\mp}$,

$$K_{a^\mp} = \{x^\pm \in R^\pm \mid U^\mp_{a^\mp} x^\pm = U^\mp_{a^\mp} U^\pm_{x^\pm} a^\mp = 0\} \lhd R^{\pm(a^\mp)}.$$

Если $1/2 \in F$, $R^{\pm(a^\mp)}$ — квадратичное представление линейной йордановой алгебры $R^{\pm(a^\mp)}$ с умножением $x^\pm \cdot_{a^\mp} y^\pm = (1/2)\{x^\pm, a^\mp, y^\pm\}^\pm$, $x^\pm, y^\pm \in R^\pm$, и $K_{a^\mp} = \mathrm{Ker}\, U^\mp_{a^\mp}$ (см. [37, п. 4.19, 4.20; 25, предложение 1.2]). Если $R^\pm$ —

F-модули без 3-кручения, $1/2 \in F$, $(R^{\pm}, \{\,,\,,\,\}^{\pm})$ — линейная йорданова пара, то $a^{\mp}$-гомотоп йордановой пары $(R^{\pm}, \tilde{U}^{\pm})$ — квадратичное представление линейной йордановой алгебры $R^{\pm(a^{\mp})}$ с умножением $x^{\pm} \cdot_{a^{\mp}} y^{\pm} = \{x^{\pm}, a^{\mp}, y^{\pm}\}^{\pm}$, $x^{\pm}, y^{\pm} \in R^{\pm}$.

Подмодуль I квадратичной йордановой алгебры $(R, U, {}^2)$ называется *внутренним идеалом*, если $U(I)R \subseteq M$, и *строго внутренним идеалом*, если I — внутренний идеал расширения $(R, U, {}^2)$ до квадратичной йордановой алгебры $(R^1, U^1, 1)$ с единицей 1 (I — внутренний идеал $(R, U, {}^2)$ и $x^2 \in I$, $x \in I$). Строго внутренний идеал I называется *x-модулярным*, $x \in R$, если $U^1_{1-x}(R) \subseteq I$, $U^1_{1-x,y}(R^1) \subseteq I$, $y \in I$, и $x - x^2 \in I$, где

$$U^1_{f+x}(g+y) = f^2 g + 2fgx + gx^2 + f^2 y + fV_x y + U_x y \quad (f, g \in F,\ x, y \in R),$$

$U^1_{1-x,y} = U^1_{1-x+y} - U^1_{1-x} - U^1_y$. Внутренние (строго внутренние, x-модулярные) идеалы линейных йордановых алгебр определяются как соответствующие внутренние идеалы их квадратичных представлений.

Пара $(I^{\pm})$ подмодулей $I^{\pm} \subseteq R^{\pm}$ йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$ называется *внутренним идеалом*, если $U^{\pm}(I^{\pm})R^{\mp} \subseteq I^{\pm}$. Внутренний идеал $(I^{\pm})$ называется *$(x^{\pm}, a^{\mp})$-модулярным*, $x^{\pm}, a^{\pm} \in R^{\pm}$, если $I^{\mp} = R^{\mp}$, $I^{\pm}$ — $x^{\pm}$-модулярный идеал $a^{\mp}$-гомотопа $R^{\pm(a^{\mp})}$.

Квадратичная йорданова алгебра $(R, U, {}^2)$ (йорданова пара $(R^{\pm}, U^{\pm})$) называется *примитивной*, если она содержит *примитивизатор* — собственный x-модулярный ($(x^{\pm}, a^{\mp})$-модулярный) идеал I ($(I^{\pm})$), такой что $I + J = R$ для всех $\{0\} \neq J \lhd R$ ($I^{\pm} + J^{\pm} = R^{\pm}$ для всех $\{0\} \neq (J^{\pm}) \lhd (R^{\pm}, U^{\pm})$).

Далее, L — алгебра Ли над кольцом F. Подмодуль $M \subseteq L$ называется *внутренним* (*абелевым внутренним*) *идеалом*, если $[M, [M, L]] \subseteq M$ (и $[M, M] = \{0\}$). Любым двум абелевым внутренним идеалам $M^{\pm} \subseteq L$ отвечает линейная йорданова пара (йорданова пара, если $M^{\pm}$ не имеют 6-кручения) $(M^{\pm}) = (M^{\pm}, \{\,,\,,\,\}^{\pm})$, $\{\,,\,,\,\}^{\pm} = \big[[\,,\,],\,\big]$. 3-энгелевы элементы L называются *йордановыми элементами*. Если L без 6-кручения, каждому такому элементу $a \in L$ соответствует линейная йорданова алгебра L_a (*йорданова алгебра L по a*) — F-модуль $\bar{L} = L/\operatorname{Ker}\operatorname{ad}_a^2$ с умножением $\bar{x} \cdot_a \bar{y} = \overline{[x, [a, y]]} = \overline{[[x, a], y]}$, $\bar{z} = z + \operatorname{Ker}\operatorname{ad}_a^2$, $z \in L$ (см. [6, теорема 1.2; 34, теорема 2.4]). Йорданов элемент $a \in L$ называется *экстремальным*, если $\operatorname{ad}_a^2(L) \subseteq Fa$, и *регулярным*, если $a \in \operatorname{ad}_a^2(L)$.

Мы приведём понятие преградуированной алгебры, ограничившись необходимым нам случаем алгебры Ли и абелевой группы без кручения $(\Lambda, +)$ в аддитивной записи. Система подмодулей $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ алгебры Ли L называется её *Λ-преградуировкой*, если $L = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ и $[L_\mu, L_\nu] \subseteq L_{\mu+\nu}$, $\mu, \nu \in \Lambda$, и *Λ-градуировкой*, если также $L = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$. Если $|\operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})| < \infty$, $\operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}) = \big\{\lambda \in \Lambda \mid L_\lambda \neq \{0\}\big\}$, Λ-преградуировка $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *конечна*, и если $\operatorname{supp}\big(\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\big) \neq \varnothing$ — *нетривиальна*. Пара $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ называется *Λ-преградуированной алгеброй Ли*, при выборе множества S, $\{0\} \cup \operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}) \subseteq$

$\subseteq S \subseteq \Lambda$, — S-*преградуированной алгеброй Ли*, в этом случае она обозначается через $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in S})$. Если $\Lambda = (\mathbb{Z}, +)$ — аддитивная группа кольца целых чисел $\mathbb{Z}$, $S = \{i\}_{|i|\leqslant n}$ для некоторого $n \geqslant 1$, $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in S})$ называется также $(2n+1)$-*преградуированной алгеброй Ли*. Подмодуль M алгебры $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ называется *однородным подмодулем*, если $M = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, $M_\lambda = M \cap L_\lambda$, гомоморфизм $\varphi\colon L \to L'$ алгебр $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ и $(L', \{L'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ называется *однородным гомоморфизмом*, если он имеет однородное ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\varphi(L_\lambda) = \varphi(L) \cap L'_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Однородный идеал $I \lhd L$ называется *сильным*, если

$$I = (I_\lambda \mid 0 \neq \lambda \in \Lambda)_L = \sum_{0\neq\lambda\in\Lambda} ([I_\lambda, L_{-\lambda}] + I_\lambda).$$

Наибольший из таких идеалов $L - L_s = \langle L_\lambda \mid 0 \neq \lambda \in \Lambda\rangle$. В случае $|\operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})| < \infty$ мы будем регулярно использовать параметр

$$n(L) = \max_{\substack{\lambda,\alpha\in\operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})\\ \alpha\neq 0}} \max\{k \geqslant 1 \mid \{\lambda, \lambda+\alpha, \ldots, \lambda+(k-1)\alpha\} \subseteq \operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})\},$$

$\operatorname{ad}_x^{n(L)} = 0$ для всех $x \in L_\lambda$, $0 \neq \lambda \in \Lambda$.

Элемент $0 \neq \alpha \in \operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, такой что $\varphi(\alpha) > |\varphi(\beta)|$, $\pm\alpha \neq \beta \in \operatorname{supp}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, для некоторого гомоморфизма групп $\varphi\colon \Lambda \to (\mathbb{Z}, +)$, называется *крайним*. Множество крайних элементов мы будем обозначать через $\operatorname{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$. Каждому $\alpha \in \operatorname{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ отвечает пара абелевых внутренних идеалов $L_{\pm\alpha}$ алгебры L и линейная йорданова пара $(L_{\pm\alpha})$ (*крайняя линейная йорданова пара* L). Если $\alpha \in \operatorname{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, $a^\pm \in L^\pm = L_{\pm\alpha}$, L $((L^\pm))$ не имеет 6-кручения, то йорданова алгебра $L_{a^\mp}$ равна образу в ней $L^\pm$, $L_{a^\mp} = \overline{L^\pm}$, и если $1/2 \in F$, квадратичное представление $L_{a^\pm}$ — $\pm$-локальная алгебра $L^\pm_{a^\mp}$ йордановой пары $(L^\pm, \tilde{U}^\pm)$, $\tilde{U}^\pm_{x^\pm} = -(1/2)\operatorname{ad}^2_{x^\pm}$.

Назовём алгебру без 6-кручения $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ α-*примитивной*, $\alpha \in \operatorname{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, если йорданова пара $(L_{\pm\alpha})$ примитивна с $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярным примитивизатором, $x_{\pm\alpha} \in L_\alpha$, $I_\alpha \neq \{0\}$ для всех однородных идеалов $\{0\} \neq I \lhd L$.

2. Основные результаты

Выводы [21, 22] позволяют записать лемму 16 из [14] в следующем виде.

Замечание 2.1. Если конечномерная простая невырожденная алгебра Ли L над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2, 3$, удовлетворяет тождеству степени $d > 1$, то

$$\dim_{\mathbb{F}} L \leqslant m(d) = \max\Big\{248, \Big[\frac{d}{2}\Big]\Big(2\Big[\frac{d}{2}\Big] + 1\Big)\Big\},$$

где $[d/2]$ — целая часть $d/2$.

Для любой PI-алгебры Ли L над полем $\mathbb{F}$ положим $m(L) = m(\hat{d})$, где $\hat{d}$ — наименьшая из степеней нетривиальных тождеств L. Обозначим через $d(n)$ максимальное значение модуля определителя формы Киллинга простой комплексной алгебры Ли размерности не выше $n \geqslant 3$ в её базисе Шевалле.

Ключевым результатом работы является следующий аналог для алгебр Ли теоремы Капланского о примитивных ассоциативных PI-алгебрах.

Теорема 2.2. *Пусть* $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — *невырожденная α-примитивная PI-алгебра Ли без* $(7!)$*-кручения с конечной Λ-градуировкой над кольцом F, $\alpha \in$ $\in \operatorname{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$. Тогда L содержит простой как алгебра однородный идеал $I \subseteq$ $\subseteq L_s$, $\dim_{\mathrm{CM}(I)} I \leqslant m(L)$, её идеал L_s — сильно первичная алгебра Ли, которая вкладывается в алгебру Ли $\mathrm{Der}_{\mathrm{CM}(I)}(I)$ дифференцирований I над полем $\mathrm{CM}(I)$, $\dim_{\mathrm{CM}(L_s)} P(L_s) \leqslant m(L)^2$, при отсутствии у L $((4n(L)-4)!)$-кручения. Если L не имеет $(\max\{4n(L)-4, d(m(L))\}!)$-кручения, $I = L_s$.*

Доказательство. По условию крайняя йорданова пара $(L^\pm = L_{\pm\alpha})$ примитивна и имеет (x^+, x^-)-модулярный примитивизатор для некоторых $x^\pm \in L^\pm$. Линейная йорданова алгебра L_{x^-} (+-локальная йорданова алгебра $L^+_{x^-}$) является примитивной PI-алгеброй и потому простой центральной локально конечномерной алгеброй над полем $Z(L_{x^-})$ с единицей и минимальными внутренними идеалами (см. [17, лемма 9; 25, теоремы 2.1, 6.1] с учётом [15, теоремы 7, 8; 26, следствие 3.9; 27, теорема 5.2; 35, предложение 4.2 (или [5, замечание 2.2])]). Последние являются также минимальными внутренними идеалами L_{x^-} как F-алгебры, им соответствуют минимальные внутренние идеалы L, входящие в её абелев внутренний идеал $\mathrm{ad}^2_{x^-} L$ (см. [25, теорема 6.1, 34, п. 2.14, предложение 2.15]). Если A — один из таких минимальных абелевых внутренних идеалов L, $A \subseteq \mathrm{ad}^2_{x^-} L$, и $0 \neq x \in A$, то $A = \mathrm{ad}^2_x L$, x — регулярный элемент L, L имеет 5-градуировку $\{L_i\}_{|i|\leqslant 2}$, $I = (A)_L = (x)_L$ — её однородный, простой как алгебра идеал (см. [31, предложения 2.9, 1.15]). Кроме того, $\bigl(I = P(I),\ \{I_i\}_{|i|\leqslant 2}\bigr)$ — простая 5-градуированная алгебра Ли над полем $\mathrm{CM}(I)$, $\operatorname{char} \mathrm{CM}(I) \neq 2, 3, 5$, и, значит, изоморфна одной из следующих алгебр:

1) $\bigl[R^{(-)}, R^{(-)}\bigr]/C\bigl(\bigl[R^{(-)}, R^{(-)}\bigr]\bigr)$, $\bigl(R, \{R_i\}_{|i|\leqslant 2}\bigr)$ — простая ассоциативная 5-градуированная алгебра над $\mathrm{CM}(I)$;
2) $[\mathrm{Skew}(R,*), \mathrm{Skew}(R,*)]/C([\mathrm{Skew}(R,*), \mathrm{Skew}(R,*)])$, $(R, \{R_i\}_{|i|\leqslant 5})$ — простая ассоциативная 5-градуированная алгебра над $\mathrm{CM}(I)$ с инволюцией $*$;
3) алгебре Титса—Кантора—Кёхера йордановой алгебры невырожденной симметрической билинейной формы над $\mathrm{CM}(I)$, т. е. $\mathrm{Skew}(R,*)$ для некоторой простой ассоциативной алгебры R над $\mathrm{CM}(I)$ с инволюцией $*$;
4) алгебре с центральным замыканием одного из типов G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 или D_4

(см. [16, теорема 1, 36, доказательство теоремы 1]; $\mathrm{Skew}(R,*) = \{r \in R \mid r^* = -r\}$ — подалгебра кососимметрических элементов алгебры Ли $R^{(-)}$). Так как $R^{(-)}$ и $\mathrm{Skew}(R,*)$ в 1)—3) — PI-алгебры Ли, R — PI-алгебра (см. [24, теорема 1]). В любом случае простая алгебра $I \cong \mathrm{ad}(I)$ специальна, $\dim_{\mathrm{CM}(I)} I \leqslant$

$\leqslant m(L)$, $\mathrm{CM}(I)=Z\bigl(\mathrm{Ad}(I)\bigr)$ (см. введение с учётом обобщённой специальности алгебры Ли $R^{(-)}$ и замечания 2.1).

Каждый идеал $H\lhd L_s$ порождает идеал

$$(H)_L=H+\mathrm{Ad}^L(L_0)(H)=\\ =\{\varphi_1h_1+\ldots+\varphi_kh_k\mid h_i\in H,\ \varphi_i\in \mathrm{Ad}^L(L_0)+F\,\mathrm{Id}_L,\ k\geqslant 1\}\lhd L,$$

$(H)_{L\lambda}=H_\lambda+\mathrm{Ad}^L(L_0)(H_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$. Если $H=\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}H_\alpha\neq\{0\}$, $(H)_L=\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}(H)_{L\lambda}$, $H_\alpha\neq\{0\}$. Ввиду ниль-полупростоты йордановой пары $(L^\pm)$ (см. [37, п. 4.15]), алгебра $(L_s,\{L_{s\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda})$ не имеет ненулевых сильных нильпотентных идеалов. Поскольку она невырожденна, для любого $H\lhd L_s$ либо $\{0\}\neq\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda\lhd L_s$, $\{0\}\neq(H_{\pm\alpha})\lhd(L^\pm)$, либо $H\subseteq C(L_s)_0=C(L_s)=\{0\}$ (см. [14, леммы 4, 10]). Отсюда и из сильной первичности $(L^\pm)$ (см. [26, предложение 3.7]) следует, что L_s сильно первична.

Заметим, что $[\mathrm{ad}(L)|_I,\mathrm{CM}(I)]\subseteq\mathrm{CM}(I)$, так как

$$\bigl[\mathrm{ad}_y,[\psi,\mathrm{ad}_z]\bigr]z'=\bigl[[\mathrm{ad}_y,\psi],\mathrm{ad}_z\bigr]z'=0,\\ y\in L,\quad z,z'\in I,\quad \psi\in\mathrm{Ad}^L(I),\quad \psi|_I\in\mathrm{CM}(I),$$

где ψ_I — ограничение ψ на I, $\mathrm{ad}(L)|_I=\{\mathrm{ad}_x|_I\mid x\in L\}$. Если $y\in L_\lambda$, $0\neq\lambda\in$ $\in\Lambda$, то $\mathrm{ad}_y^{n(L)}=0$, $D=[\mathrm{ad}_y|_I,\,]\colon\psi\mapsto[\mathrm{ad}_y|_I,\psi]=\mathrm{ad}_y|_I\psi-\psi|_I\,\mathrm{ad}_y$, $\psi\in$ $\in\mathrm{CM}(I)$, — дифференцирование поля $\mathrm{CM}(I)$, $D^{2n(L)-1}=0$. Если у алгебры L нет $((4n(L)-4)!)$-кручения,

$$D^{2(2n(L)-1)-2}(\varphi\psi)=\binom{4n(L)-4}{2n(L)-1}(D^{2n(L)-2}\varphi)(D^{2n(L)-2}\psi)=0,\quad \varphi,\psi\in\mathrm{CM}(I),$$

$D^{2n(L)-2}=0$, и по тем же причинам $D^{2n(L)-k}=0$, $k=1,\ldots,2n(L)-1$. Таким образом, при этом условии $\psi\colon y\mapsto\mathrm{ad}_y|_I$, $y\in L_s$, — гомоморфизм алгебр Ли L_s и $\mathrm{Der}_{\mathrm{CM}(I)}(I)$. Идеал I и его централизатор $C=C(L,I)$ — однородные идеалы алгебры $(L,\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$. Из примитивности и сильной первичности йордановой пары $(L^\pm)$ следует, что в случае если $C\neq\{0\}$, $\{0\}\neq(C_{\pm\alpha}),(I_{\pm\alpha}),(J_{\pm\alpha}=I_{\pm\alpha}\cap C_{\pm\alpha})\lhd(L^\pm)$, $U^\pm|_{J_{\pm\alpha}}=0$, $(J_{\pm\alpha})\subseteq\mathcal{J}\bigl((L^\pm)\bigr)=$ $=(\{0\}^\pm)$, где $\mathcal{J}$ — радикал Джекобсона йордановой пары?! Поэтому при отсутствии у L $((4n(L)-4)!)$-кручения $\psi\colon L_s\hookrightarrow\mathrm{Der}_{\mathrm{CM}(I)}(I)$, $\dim_{\mathrm{CM}(L_s)}P(L_s)\leqslant$ $\leqslant\dim_{\mathrm{CM}(I)}\mathrm{Der}_{\mathrm{CM}(I)}(I)\leqslant m(L)^2$ (см. [23, теорема 4.1, с. 47]).

Скалярное расширение $\bar I$ алгебры I над алгебраическим замыканием $\overline{\mathrm{CM}(I)}$ поля $\mathrm{CM}(I)$ является конечномерной простой невырожденной алгеброй Ли классического типа (см. [21, теорема 3, 32, теорема 3.9]). Для алгебры L без $(d(m(L))!)$-кручения $\bar I$ — алгебра Шевалле над полем $\overline{\mathrm{CM}(I)}$, $\mathrm{char}\,\overline{\mathrm{CM}(I)}=0$ или $\mathrm{char}\,\overline{\mathrm{CM}(L)}>\max\bigl\{7,d\bigl(m(L)\bigr)\bigr\}$, для подходящей конечномерной простой комплексной алгебры Ли (см. [40, п. 3.1] с учётом того, что определитель формы Киллинга простой комплексной алгебры Ли типа A_l в её базисе Шевалле равен $(-1)^{l(l+1)/2}2^{(l+1)^2-1}(l+1)^{(l+1)^2}$) $\bar{I}$ и I имеют невырожденные формы Киллинга, $\mathrm{Der}_{\mathrm{CM}(I)}(I) = \mathrm{ad}(I)$ (см. [10, теорема 6, с. 87]), и значит, если у L нет $(\max\{4n(L)-4, d(m(L))\}!)$-кручения, $L_s = I$ $(C(L, I) = \{0\})$. $\square$

Доказательство теоремы 2.2 позволяет переформулировать её следующим образом.

Теорема 2.3. *Пусть* $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — *такая однородно сильно первичная PI-алгебра Ли без* $(7!)$*-кручения с конечной* Λ*-градуировкой над кольцом* F*, что йорданова алгебра* L_{x_α} *примитивна для некоторых* $\alpha \in \mathrm{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, $0 \neq x_\alpha \in \in L_\alpha$. *Тогда* L *содержит простой как алгебра однородный идеал* $I \subseteq L_s$, $\dim_{\mathrm{CM}(I)} I \leqslant m(L)$, *её идеал* L_s *вкладывается в алгебру Ли* $\mathrm{Der}_{\mathrm{CM}(I)}(I)$, $\dim_{\mathrm{CM}(L_s)} P(L_s) \leqslant m(L)^2$, *если у* L *нет* $((4n(L)-4)!)$*-кручения, и равен* I*, если у* L *нет* $(\max\{4n(L)-4, d(m(L))\}!)$*-кручения.*

Однородная сильная первичность алгебры Ли L означает, что она невырожденна и любые два её ненулевых однородных идеала имеют ненулевое пересечение. Применяя к теореме 2.2 замечание 4.25 из [7], мы сразу получаем следующее утверждение.

Следствие 2.4. *Пусть* $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ — α*-примитивная PI-алгебра Ли с конечной* Λ*-градуировкой над полем* $\mathbb{F}$, $\alpha \in \mathrm{ex}(\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, *и* $L = L_s$. *Тогда* L — *простая алгебра Ли,* $\dim_{\mathrm{CM}(L)} L \leqslant m(L)$*, если* $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$ *или* $\mathrm{char}\,\mathbb{F} > q$, L *сильно первична и специальна,* $\dim_{\mathrm{CM}(L)} P(L) \leqslant m(L)^2$*, если* $p < \mathrm{char}\,\mathbb{F} \leqslant q$, $p = \max\{7, 4n(L)-4\}$, $q = \max\{p, d(m(L))\}$.

Мы будем называть алгебру над кольцом F *конечной*, если она конечно порождена как F-модуль, и *локально конечной*, если её конечно порождённые подалгебры конечны. Если F — поле, будем называть такую алгебру конечномерной и локально конечномерной соответственно.

Следствие 2.5. *Если в теореме* 2.2 F — *алгебра над алгебраически замкнутым полем* $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$, $\mathbb{F}'$ — *подполе* $\mathbb{F}$*, алгебра Ли* L *порождается* $\mathbb{F}'$*-подалгеброй с алгебраическим присоединённым представлением* L'*, то* L *и* L' *просты, специальны, локально конечны над* F *и* $\mathbb{F}'$, $\dim_{\mathrm{CM}(L)} L = \dim_{\mathrm{CM}(L')} L' \leqslant m(L)$, $\mathrm{CM}(L')$ — *алгебраическое расширение* $\mathbb{F}'$.

Доказательство. Алгебра Ли L' порождает алгебру Ли L как F-модуль, $L = FL'$. Каждый элемент $x \in L'$ — сильно алгебраический над полем $\mathbb{F}'$ элемент алгебры L, дифференцирование $D = [\mathrm{ad}_x|_I, \,]$ поля $\mathrm{CM}(I)$ из доказательства теоремы 2.2 — целый элемент алгебры $\mathrm{End}_{\mathbb{F}'}\big(\mathrm{CM}(I)\big)$ (см. [6, доказательство замечания 1.9]). Поскольку поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $\mathbb{F}\,\mathrm{Id}_I \subseteq \subseteq \mathrm{CM}(I)$, $\mathrm{CM}(I)$ раскладывается в конечную прямую сумму ненулевых весовых подпространств D, $\mathrm{CM}(I) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathrm{CM}(I)_{\mu_i}$, где $\mu_i \in \mathbb{F}$,

$$\mathrm{CM}(I)_{\mu_i} = \{\varphi \in \mathrm{CM}(I) \mid (D-\mu_i\,\mathrm{Id}_I)^{k_i}\varphi = 0\}, \quad \prod_{i=1}^{n}(D-\mu_i\,\mathrm{Id}_I)^{k_i} = 0,$$

$k_i \geqslant 1$. Если $\mu_i \neq 0$, то $D\varphi = \mu_i\varphi$ для некоторого $0 \neq \varphi \in \mathrm{CM}(I)_{\mu_i}$, $D\varphi^k = k\mu_i\varphi^k \neq 0$, $\mathrm{CM}(I)_{k\mu_i} \neq \{0\}$ при любом $k > 1$?! Поэтому $\mathrm{CM}(I) = \mathrm{CM}(I)_0$, $D^m = 0$ для некоторого $m \geqslant 1$, и значит, $D = 0$ (см. доказательство теоремы 2.2). Так как $C(L, I) = \{0\}$, отсюда следует, что $L \hookrightarrow \mathrm{Der}_{\mathrm{CM}(I)}(I) = \mathrm{ad}(I)$, $L = I$, $\dim_{\mathrm{CM}(L)} L \leqslant m(L)$, алгебра L' локально конечномерна над полем $\mathbb{F}'$ (см. [14, лемма 7]) и ввиду локальной конечности конечных алгебр (см. [11, лемма 7, с. 131]) алгебра $L = FL'$ локально конечна над алгеброй F. Кроме того, L' — простая алгебра Ли, $\dim_{\mathrm{CM}(L')} L' = \dim_{\mathrm{CM}(L)} L$, её центроид $\mathrm{CM}(L')$ — алгебраическое расширение поля $\mathbb{F}'$ (см. [35, предложение 5.3] с переходом к скалярному расширению $\bar{L}$ алгебры L над алгебраическим замыканием $\overline{\mathrm{CM}(L)}$ поля $\mathrm{CM}(L)$ (данное предложение обобщается на все простые конечномерные над центроидами алгебры, порождённые локально конечномерными подалгебрами над подполями их центроидов) [23, предложение 4.1, с. 49]). $\square$

Следствие 2.6. *Простая PI-алгебра Ли с нетривиальной конечной преградуировкой* $(L, \{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ *над кольцом* F *с* $1/\max\{7, 2n(L) - 2\}!$ *специальна,* $\dim_{\mathrm{CM}(L)} L \leqslant m(L)$.

Доказательство. Так как в этом случае $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — градуировка алгебры Ли $L = L_s$, $\{\mathrm{CM}(L)L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — её градуировка как $\mathrm{CM}(L)$-алгебры (см. [14, лемма 10]; $\mathrm{CM}(L)L_\lambda$ — $\mathrm{CM}(L)$-пространство, порождённое L_λ), $L_\lambda = \mathrm{CM}(L)L_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Крайние йордановы пары L просты и примитивны (см. [33, теорема 11.3.5, с. 200] (для $\mathrm{CM}(L)$-алгебры L)). Поэтому по теореме 2.2 $L = I$ — специальная алгебра Ли, $\dim_{\mathrm{CM}(L)} L \leqslant m(L)$. $\square$

На замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F определён локально конечный (локально конечный и разрешимый, локально разрешимый) радикал LF (LSF, LS), если класс локально конечных (локально конечных и разрешимых, локально разрешимых) алгебр из $\mathfrak{M}$ — радикальный подкласс $\mathfrak{M}$. При этом радикал LF (LSF, LS) — нижний радикал на $\mathfrak{M}$, определяемый данным подклассом. В нашем случае такими классами являются классы алгебраических алгебр Ли (Мальцева) над кольцами (с 1/2), на которых радикалы LS и LSF совпадают (см. [3, 12, 19, 20]).

Радикал в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ на классе $\mathfrak{M}$ называется *специальным*, если $\mathcal{T}$-полупростые алгебры из $\mathfrak{M}$ являются подпрямыми произведениями своих первичных $\mathcal{T}$-полупростых фактор-алгебр. Радикалы LF и LSF специальны на любом замкнутом относительно взятия идеалов, конечно порождённых подалгебр и гомоморфных образов классе алгебр своего определения (см. [12, теорема 7, 4, теорема 3.4]).

Теорема 2.7. *Обобщённо специальная алгебра Ли* L *над полем* $\mathbb{F}$ *локально конечномерна, если и только если* L *— алгебраическая алгебра.*

Доказательство. Поскольку центральное замыкание первичной специальной алгебры Ли конечномерно над её центроидом Мартиндейла, она алгебраична, если и только если имеет алгебраическое присоединённое представление (см. [3, замечание 1.5]). Остаётся применить теорему 3.6 и лемму 3.4 из [5] и специальность локально конечного радикала LF на классах алгебраических алгебр Ли над кольцами. □

Радикал Маккриммона $\mathrm{Mc}(R)$ йордановой алгебры R — наименьший из её идеалов, фактор-алгебры по которым невырожденны, радикал Джекобсона $\mathcal{J}(R)$ — пересечение всех её идеалов, фактор-алгебры по которым примитивны. Радикалы Маккриммона и Джекобсона $\mathrm{Mc}\big((R^{\pm})\big)$ и $\mathcal{J}\big((R^{\pm})\big)$ йордановой пары $(R^{\pm}, U^{\pm})$ определяются аналогичным образом. Нам потребуется следующий вариант леммы JP3 из [14], основанный на резольвентном приёме Амицура.

Лемма 2.8. *Если $(R^{\pm}, U^{\pm})$ — йорданова пара над бесконечным полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, такая что её $\pm$-локальные алгебры $R^{\pm}_{x^{\mp}}$ являются PI-алгебрами и $\dim_{\mathbb{F}} R^{\pm}_{x^{\mp}} < |\mathbb{F}|$, $x^{\pm} \in R^{\pm}$, то $\mathrm{Mc}\big((R^{\pm})\big) = \mathcal{J}\big((R^{\pm})\big)$.*

Доказательство. В данном случае квадратичные йордановы алгебры $R^{\pm}_{x^{\mp}}$, $x^{\pm} \in R^{\pm}$, — квадратичные представления линейных йордановых алгебр, $R^{\pm}_{x^{\pm}}$ — PI-алгебры как линейные йордановы алгебры. Условия, наложенные на йорданову пару $(R^{\pm}, U^{\pm})$, наследуют все её гомоморфные образы, поскольку для любых $(I^{\pm}) \lhd (R^{\pm}, U^{\pm})$, $x^{\pm} \in R^{\pm}$,

$$\bar{R}^{\pm(\bar{x}^{\mp})} \cong R^{\pm(x^{\mp})}/I^{\pm}, \quad \bar{R}^{\pm}{}_{\bar{x}^{\mp}} \cong R^{\pm(x^{\mp})}/K_{x^{\mp}}(I^{\mp}) \cong R^{\pm}_{x^{\mp}}/(K_{x^{\mp}}(I^{\mp})/K_{x^{\mp}}),$$
$$K_{x^{\mp}}(I^{\mp}) = \{y^{\pm} \in R^{\pm} \mid U^{\mp}_{x^{\mp}} y^{\pm}, U^{\mp}_{x^{\mp}} U^{\pm}_{y^{\pm}} x^{\mp} \in I^{\mp}\},$$

где $\bar{R}^{\pm} = R^{\pm}/I^{\pm}$, $\overline{x^{\pm}} = x^{\pm} + I^{\pm}$ (см. [37, п. 1.9]; при этом $K_{x^{\mp}}(I^{\mp}) = U^{\mp}_{x^{\mp}}{}^{-1}(I^{\mp})$, так как $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$). Если $\mathrm{Mc}\big((R^{\pm})\big) = (\{0\}^{\pm})$, то $\mathrm{Mc}\big(R^{\pm}_{x^{\mp}}\big) = \mathcal{J}\big(R^{\pm}_{x^{\mp}}\big) = \{0\}$ для всех $x^{\pm} \in R^{\pm}$ (см. [13, теорема 4; 25, теорема 2.1; 38, теорема 3.2.2, с. 391) и, следовательно,

$$\mathcal{J}\big((R^{\pm})\big) = \Bigg(J^{\pm} = \bigcap_{x^{\mp} \in R^{\mp}} K_{x^{\mp}} = \bigcap_{x^{\mp} \in R^{\mp}} \operatorname{Ker} U^{\mp}_{x^{\mp}}\Bigg) = \\ = \mathrm{Mc}\big((J^{\pm})\big) \subseteq \mathrm{Mc}\big((R^{\pm})\big) = (\{0\}^{\pm})$$

(см. [37, п. 4.18, 4.19, 4.13] с учётом $U^{\pm}_{z^{\pm}} J^{\mp} = \{0\}$, $z^{\pm} \in J^{\pm}$). Поэтому в любом случае $\mathcal{J}\big((R^{\pm})\big) \subseteq \mathrm{Mc}\big((R^{\pm})\big)$. Обратное включение выполняется во всех йордановых парах (см. [37, п. 4.15]). □

Теорема 2.9. *Если сильно первичная алгебраическая PI-алгебра Ли L над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, содержит ненулевой сильно алгебраический элемент x, то $\mathrm{LF}(L) \neq \{0\}$.*

Доказательство. Если элемент x энгелев, без ограничения общности можно считать его йордановым (см. [18, лемма 2.1.1, с. 40]). Обозначим через $\bar{L}$ фактор-алгебру скалярного расширения алгебры Ли L над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{F}}$ поля $\mathbb{F}$ по максимальному среди его идеалов, имеющих нулевое пересечение с L, и отождествим L с её образом в $\bar{L}$. Поскольку L порождает $\bar{L} = \bar{\mathbb{F}}L$, ненулевые идеалы $\bar{L}$ пересекаются с L по ненулевым идеалам, $\bar{L}$ —

сильно первичная PI-алгебра (см. [14, предложение 2 и его следствие 1]; L и $\bar{L}$ удовлетворяют одним тождествам над $\mathbb{F}$ (см. [11, теоремы 3, 6, с. 16, 24; 1, теорема 4.2.3 на с. 142])). Йорданова алгебра $\bar{L}_x$ — сильно первичная PI-алгебра, элементы $\bar{L}_x$ — $\bar{\mathbb{F}}$-линейные комбинации её целых над $\mathbb{F}$ элементов и, значит, их суммы. Поэтому $\bar{L}_x$ проста, центральна, локально конечномерна над $\bar{\mathbb{F}}$ и содержит минимальные внутренние идеалы (см. [8, теорема 2.16; 15, теоремы 4, 5]; $\bar{L}_x$ локально конечномерна над $\mathbb{F}$ (см. [8, лемма 3.4])). Отсюда следует, что $\bar{L}$ обладает простым как алгебра специальным идеалом I, $\dim_{\mathrm{CM}(I)} I \leqslant m(L)$, $\{0\} \neq I \cap L \subseteq \mathrm{LF}(L)$, $I = \bar{\mathbb{F}}(I \cap L)$ локально конечномерен над $\mathbb{F}$ и $\bar{\mathbb{F}}$, $\mathrm{CM}(I) = \bar{\mathbb{F}}$ (см. доказательство теоремы 2.2, теорему 2.7, [8, следствие 2.2]) и ввиду первичности $\bar{L}$ $\bar{L} \hookrightarrow \mathrm{Der}(I) = \mathrm{ad}(I)$, $\bar{L} = I$, $L = \mathrm{LF}(L)$.

Если элемент x не является энгелевым, то по аналогии с предыдущим алгебру L можно вложить в сильно первичную PI-алгебру $L' = \mathbb{F}'L$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}'$, $|\mathbb{F}'| > \dim_{\mathbb{F}} L$, ненулевые идеалы которой пересекаются с L по ненулевым идеалам. Алгебра L' раскладывается в конечную прямую сумму ненулевых весовых подпространств $L' = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathbb{F}'} L'_\lambda$ дифференцирования ad_x, формирующих её нетривиальную конечную $\mathbb{F}'$-градуировку. Крайние йордановы пары $(L', \{L'\}_{\lambda \in \mathbb{F}'})$ невырожденны и $\mathcal{J}$-полупросты, так как их абсолютные делителей нуля — оболочки сэндвичей L' и $|\mathbb{F}'| > \dim_{\mathbb{F}} L \geqslant \dim_{\mathbb{F}'} L'$ (см. лемму 2.8). Зафиксируем $\alpha \in \mathrm{ex}(\{L'_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{F}'})$, гомоморфизм групп $\varphi\colon (\mathbb{F}', +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $\varphi(\alpha) > |\varphi(\beta)|$, $\pm\alpha \neq \beta \in \mathrm{supp}(\{L'_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{F}'})$, и положим $I = (L'_\alpha)_{L'}$. Так как каждый оператор $\psi \in \mathrm{Ad}(L')$ представи́м в виде конечной суммы

$$\psi = \sum_{i \geqslant 1} \psi'_i \psi''_i, \quad \psi'_i \in \mathrm{Ad}^{L'}(\langle L'_\lambda \mid \varphi(\lambda) < 0\rangle), \quad \psi''_i \in \mathrm{Ad}^{L'}(\langle L'_\lambda \mid \varphi(\lambda) \geqslant 0\rangle)$$

(индукция по $k \geqslant 1$ для $\psi = \mathrm{ad}_{x_{\lambda_1}} \cdots \mathrm{ad}_{x_{\lambda_k}}$, $x_{\lambda_i} \in L'_{\lambda_i}$, с применением тождества Якоби) и $\alpha + \lambda \notin \mathrm{supp}(\{L'_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{F}'})$ для всех $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}'$, $\varphi(\lambda) \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} I = (L'_\alpha)_{L'_s} = (L'_\alpha)_{L''} \subseteq L'' = L'(\alpha, \varphi) = \langle L'_\alpha,\ L'_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{F}',\ \varphi(\lambda) < 0\rangle = \\ = L''(\alpha, \varphi) = \langle L''_\alpha = L'_\alpha,\ L''_\lambda = L'_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{F}',\ \varphi(\lambda) < 0\rangle. \end{aligned}$$

Ввиду [7, предложение 4.23] и того, что $\mathcal{J}\big((L'_{\pm\alpha})\big) = (\{0\}^{\pm})$, $H_\alpha = \{0\}$, $H = I \cap \hat{\mathcal{J}}_{\alpha,\varphi}(L'')$, $\hat{\mathcal{J}}_{\alpha,\varphi}(L'') = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{M}_{L''}(\alpha,\varphi)} \hat{M}$, $\mathcal{M}_{L''}(\alpha, \varphi)$ — множество всех $(x_\alpha, x_{-\alpha})$-модулярных (α, φ)-внутренних идеалов алгебры L'', $\hat{M}$ — наибольший из однородных идеалов L'', входящих в $M \in \mathcal{M}_{L''}(\alpha, \varphi)$ (см. определения [7]). Следовательно, $\big[[H, L'_\alpha], L'_\alpha\big] = \{0\}$, $[H, L'_\alpha] = \{0\}$, $[H, I] = \{0\}$, $H = \{0\}$ (см. [14], следствия предложения 2 с учётом сильной первичности L' и леммы 17), идеал I вкладывается в подпрямое произведение $L''/\hat{\mathcal{J}}_{\alpha,\varphi}(L'')$ простых специальных α-примитивных алгебр $L''/\hat{M}$, $\dim_{\mathrm{CM}(L''/\hat{M})} L''/\hat{M} \leqslant m(L')$, $M \in \mathcal{M}_{L''}(\alpha, \varphi)$ (см. следствие 2.4, [7, предложение 4.23]), и потому специален, $\{0\} \neq I \cap L \subseteq \mathrm{LF}(L)$ (см. теорему 2.7, [5, наблюдения перед замечанием 3.3]). $\square$

Отметим, что вторая часть доказательства теоремы 2.9 построена по аналогии с доказательством теоремы 1 из [14].

Специальность радикала LF на классах алгебраических алгебр Ли (Мальцева) над кольцами (с 1/2), невырожденность LF-полупростых алгебр Ли над полями нулевой характеристики (см. [9]), лемма 2.2 из [6] и теорема 2.9 позволяют сразу получить следующее утверждение.

Следствие 2.10. *Если R — алгебраическая алгебра Мальцева над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F}=0$, ненулевые сильно первичные фактор-алгебры которой (при их наличии) — PI-алгебры с ненулевыми сильно алгебраическими элементами, то R локально конечномерна. В частности, PI-алгебры Мальцева с алгебраическим регулярным представлением над $\mathbb{F}$ локально конечномерны.*

Элемент x антикоммутативной алгебры R называется *локально сильно алгебраическим* (*локально разрешимым*), если для любых конечно порождённых подалгебр $A\subseteq R$, $x\in A$, и $B\subseteq (x)_A$, $x\in B$, x — сильно алгебраический элемент B (xy — энгелев элемент B для всех $y\in B$). Из доказательства теоремы 2.9, теоремы 1.1 и её следствия 3.8 из [8] можно вывести следующее утверждение.

Следствие 2.11. *Если R — алгебраическая локально PI-алгебра Мальцева над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F}=0$, то $\operatorname{LF}(R)$ — множество всех локально сильно алгебраических элементов R, $\operatorname{LS}(R)$ — множество всех локально разрешимых элементов R.*

Замечание 2.12. Если сильно первичная алгебраическая PI-алгебра Ли L над кольцом F без (7!)-кручения с ненулевым йордановым элементом x является F'-подалгеброй сильно первичной алгебры Ли $\bar{L}$ над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{F}}$ поля частных $\mathbb{F}$ области целостности $F'=F/\operatorname{Ann}_F L$, $\operatorname{Ann}_F L = \big\{f\in F \mid fL=\{0\}\big\}$, и $\bar{L}=\bar{\mathbb{F}}L$, то алгебра L локально конечна, специальна, $\dim_{\mathrm{CM}(L)}P(L)\leqslant m(L)^2$, её центроид Мартиндейла $\mathrm{CM}(L)$ — алгебраическое расширение $\mathbb{F}$. Если также L не имеет $\big(d\big(m(L)\big)!\big)$-кручения, $P(L)\cong\mathbb{F}\otimes_{F'}L$ — простая алгебра Ли, $\dim_{\mathrm{CM}(L)}P(L)\leqslant m(L)$.

Доказательство. Поле $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2,3,5$, можно отождествить с полем частных области $F\operatorname{Id}_{P(L)}$ в поле $\mathrm{CM}(L)$, $F\operatorname{Id}_{P(L)}\cong F'\cong F/\operatorname{Ann}_F P(L)$, $\mathbb{F}$-подалгебру $\mathbb{F}L$ алгебры Ли $\bar{L}$ — с $\mathbb{F}$-подалгеброй центрального замыкания $P(L)$ алгебры Ли L, порождённой L,

$$\mathbb{F}L\cong\{(f\operatorname{Id}_{P(L)})^{-1}x \mid x\in L,\ f\in F\setminus\operatorname{Ann}_F L\}\cong\mathbb{F}\otimes_{F'}L$$

(L — F'-модуль без кручения). Алгебра $\mathbb{F}L$ является сильно первичной, $P(\mathbb{F}L)\cong P(L)$, $\mathrm{CM}(\mathbb{F}L)\cong\mathrm{CM}(L)$. По первой части доказательства теоремы 2.9 алгебра $\bar{L}$ содержит простой как алгебра, локально конечномерный над $\mathbb{F}$ идеал I, $\dim_{\bar{\mathbb{F}}}I\leqslant m(L)$, $\mathrm{CM}(I)=\bar{\mathbb{F}}$ ($\mathrm{CM}(I)=\bar{\mathbb{F}}\operatorname{Id}_I$), $\dim_{\bar{\mathbb{F}}}\bar{L}\leqslant m(L)^2$, и потому $\mathrm{CM}(\bar{L})=\bar{\mathbb{F}}$, $P(\bar{L})=\bar{L}$ (см. [8, замечание 2.1]). Так как поле $\mathrm{CM}(\mathbb{F}L)$ вкладывается над $\mathbb{F}$ в поле $\mathrm{CM}(\bar{L})$, $\mathrm{CM}(\mathbb{F}L)$ — алгебраическое расширение $\mathbb{F}$ (см. [23, предложение 4.1, с. 49]). Следовательно, $\dim_{\mathrm{CM}(L)}P(L)\leqslant m(L)^2$,

L имеет алгебраическое присоединённое представление и локально конечна, $\mathrm{CM}(L)$ — алгебраическое расширение $\mathbb{F}$ ($\mathrm{CM}(L) \cong \mathrm{CM}(\mathbb{F}L)$ над $\mathbb{F}$) (см. [23, теорема 4.1, с. 47; 3, замечание 1.9; [14], лемма 7 (лемма 7 обобщается на все обобщённо специальные алгебры Ли над кольцами; [5], теорема 3.6]). Если $\bar{L}$ проста, $\bar{L} = I$, то $\mathbb{F}L$ проста, $\mathbb{F}L = P(\mathbb{F}L)$ (см. [35, предложение 5.3]). В частности, последнее верно, если L не имеет $(d(m(L))!)$-кручения ($\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ или $\operatorname{char}\mathbb{F} > \max\{7, d(m(L))\}$). □

Если в замечании 2.12 $F = \mathbb{F} = \bar{\mathbb{F}}$ — алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ или $\operatorname{char}\mathbb{F} > \max\{7, d(m(L))\}$, то L — простая алгебра Ли, $\mathrm{CM}(L) = \mathbb{F}$, $\dim_{\mathbb{F}} L \leqslant m(L)$ ($L = P(L)$, $\mathrm{CM}(L) = \mathbb{F}$, $\dim_{\mathbb{F}} L < m(L)^2$, если $7 < \operatorname{char}\mathbb{F} < \max\{7, d(m(L))\}$). Этот вывод в случае $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ соответствует предложению 5.1 из [35].

Лемма 2.13. *Если алгебра Ли L над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ или $\operatorname{char}\mathbb{F} > n \geqslant 1$, содержит ненулевой сильно алгебраический элемент x степени не выше n, то L обладает ненулевыми йордановыми элементами.*

Доказательство. Ввиду [35, следствие 2.3] можно считать, что $\operatorname{char}\mathbb{F} = p > n > 1$. Алгебра Ли L раскладывается в конечную прямую сумму ненулевых весовых подпространств $L = \bigoplus_{\alpha \in S} L_\alpha$ дифференцирования ad_x, $0 \in S \subseteq \mathbb{F}$, $|S| \leqslant n$. Если $S = \{0\}$, $\mathrm{ad}_x^n = 0$, то наличие в алгебре L ненулевых йордановых элементов следует из [18, лемма 2.1.1, с. 40]. Если $S \neq \{0\}$, то для любых $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \neq 0$,

$$S_{\beta,\alpha} = \{\beta + k\alpha \in S \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\beta + l_i\alpha \mid l_1 = 0 < l_2 < \ldots < l_{n_{\beta,\alpha}} < p\},$$

$n_{\beta,\alpha} = |S_{\beta,\alpha}| \leqslant n$, и либо $l_{i+1} = l_i + 1 = i$, $i = 1, \ldots, n_{\beta,\alpha} - 1$, $n_{\beta,\alpha} \leqslant p - 1$, $\beta + n_{\beta,\alpha}\alpha \notin S$, либо $l_{i+1} > l_i + 1$ для некоторого i, $\beta + (l_i + 1)\alpha \notin S$, в любом случае $\mathrm{ad}_y^{n_{\beta,\alpha}}(L_\beta) = \{0\}$, $y \in L_\alpha$, $\beta \in S$. Поэтому элементы L_α — n-энгелевы элементы L, $0 \neq \alpha \in S$, L содержит ненулевые йордановы элементы (см. [18, лемма 2.1.1, с. 40]). □

Используя специальность радикала LF на классах алгебраических алгебр Мальцева над кольцами с 1/2, замечание 2.12, лемму 2.13, [6, лемма 2.2, предложение 2.9], можно получить следующий вариант теоремы 3.11 из [5] (теоремы 2.4 из [6]).

Следствие 2.14. *Любая алгебра Мальцева L с алгебраическим регулярным представлением степени не выше $n \geqslant 1$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ или $\operatorname{char}\mathbb{F} > \max\{7, n+2\}$, локально конечномерна, её ненулевые первичные фактор-алгебры (при их наличии) центрально замкнуты и имеют размерности не выше $m(L)^2$ над $\mathbb{F}$.*

Центральная замкнутость ненулевой первичной алгебры над полем — совпадение её со своим центральным замыканием и её центроида Мартиндейла с основным полем. В следствии 2.14 параметр $m(L)$ определяется как для PI-алгебр

Ли (см. [5, замечание 1.5, следствие 1.3] с учётом бинарной лиевости алгебр Мальцева).

Исследование выполнено за счёт гранта МЦФПМ в МГУ им. М. В. Ломоносова «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем».

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. О первичном радикале специальных алгебр Ли // УМН. — 1994. — Т. 49, № 1. — С. 233.

[3] Голубков А. Ю. Локальная конечность алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 6. — С. 25—75.

[4] Голубков А. Ю. Конструкции специальных радикалов алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 1. — С. 57—133.

[5] Голубков А. Ю. Алгебраические алгебры Ли ограниченной степени // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 5. — С. 209—242.

[6] Голубков А. Ю. Йорданова алгебра алгебры Мальцева // Фундамент. и прикл. матем. — 2020. — Т. 23, вып. 3. — С. 49—74.

[7] Голубков А. Ю. Квазирегулярные радикалы неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2023. — Т. 24, вып. 4. — С. 75—128.

[8] Голубков А. Ю. Локально конечный радикал алгебраических алгебр Мальцева. — В печати.

[9] Гришков А. Н. О локальной нильпотентности идеала алгебры Ли, порождённого элементами 2-го порядка // Сиб. матем. журн. — 1982. — Т. 23, № 1. — С. 181—182.

[10] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

[11] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[12] Жевлаков К. А., Шестаков И. П. О локальной конечности в смысле Ширшова // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 43—73.

[13] Зельманов Е. И. Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. матем. журн. — 1980. — Т. 23, № 6. — С. 100—116.

[14] Зельманов Е. И. Алгебры Ли с алгебраическим присоединённым представлением // Матем. сб. — 1983. — Т. 121 (163), № 4 (8). — С. 545—561.

[15] Зельманов Е. И. Первичные йордановы алгебры. II // Сиб. матем. журн. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 89—104.

[16] Зельманов Е. И. Алгебры Ли с конечной градуировкой // Матем. сб. — 1984. — Т. 124 (166), № 3 (7). — С. 353—392.

[17] Зельманов Е. И. О первичных йордановых тройных системах. III // Сиб. матем. журн. — 1985. — Т. 26, № 1. — С. 71—82.

[18] Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986.

[19] Кузьмин Е. Н. Алгебраические множества в алгебрах Мальцева // Алгебра и логика. — 1968. — Т. 7, № 2. — С. 42—47.

[20] Плоткин Б. И. Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли // УМН. — 1958. — Т. 13, № 6 (84). — С. 133—138.

[21] Премет А. А. Алгебры Ли без сильного вырождения // Матем. сб. — 1983. — Т. 129 (171), № 1. — С. 140—153.

[22] Премет А. А. Внутренние идеалы модулярных алгебр Ли // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. — 1986. — № 5. — С. 11—15.

[23] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

[24] Amitsur S. A. Identities in rings with involutions // Israel J. Math. — 1969. — Vol. 7, no. 1. — P. 63—68.

[25] D'Amour A., McCrimmon K. The local algebras of Jordan systems // J. Algebra. — 1995. — Vol. 177. — P. 199—239.

[26] Anquela J. A., Cortés T. Primitive Jordan pairs and triple systems // J. Algebra. — 1996. — Vol. 184. — P. 632—678.

[27] Anquela J. A., Cortés T., Montaner F. The structure of primitive quadratic Jordan algebras // J. Algebra. — 1995. — Vol. 172. — P. 530—553.

[28] Baxter W. E., Martindale W. S., 3rd. Central closure of semiprime non-associative rings // Commun. Algebra. — 1979. — Vol. 7, no. 11. — P. 1103—1132.

[29] Beidar K. I., Martindale W. S., 3rd, Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[30] Cabrera M., Fernández López A., Golubkov A. Yu., Moreno A. Algebras whose multiplication algebra is PI or GPI // J. Algebra. — 2016. — No. 459. — P. 213—237.

[31] Draper Fontanals C., Fernández López A., García E., Gómez Lozano M. The socle of a nondegenerate Lie algebra // J. Algebra. — 2008. — Vol. 319. — P. 2372—2394.

[32] Erickson T. S., Martindale W. S., 3rd, Osborn J. M. Prime non-associative algebras // Pacific J. Math. — 1975. — Vol. 60, no. 1. — P. 49—63.

[33] Fernández López A. Jordan Structures in Lie Algebras. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2019. — (Math. Surv. Monogr. Amer. Math. Soc.; Vol. 240).

[34] Fernández López A., García E., Gómez Lozano M. The Jordan algebras of a Lie algebra // J. Algebra. — 2007. — Vol. 308. — P. 164—177.

[35] Fernández López A., Golubkov A. Yu. Lie algebras with an algebraic adjoint representation revisited // Manuscripta Math. — 2013. — Vol. 140, no. 3-4. — P. 363—376.

[36] Henning J. Simple, locally finite dimensional Lie algebras in positive characteristic // J. Algebra. — 2014. — Vol. 413. — P. 270—288.

[37] Loos O. Jordan Pairs. — New York: Springer, 1975. — (Lect. Notes Math.; Vol. 460).

[38] McCrimmon K. A Taste of Jordan Algebras. — New York: Springer, 2004.

[39] Meyberg K. Lectures on Algebras and Triple Systems. — Charlottesville: Univ. of Virginia, 1972.

[40] Premet A., Strade H. Classification of finite dimensional Lie algebras in prime characteristics // Representations of Algebraic Groups, Quantum Groups and Lie Algebras. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. — (Contemp. Math.; Vol. 413). — P. 185—214.

[41] Wisbauer R. Modules and Algebras: Bimodule Structure and Group Actions on Algebras. — CRC Press, 1996. — (Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math.; Vol. 81).