Метод базисов Грёбнера—Ширшова для вертексных алгебр

Р. А. КОЗЛОВ
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: KozlovRA.NSU@yandex.ru

П. С. КОЛЕСНИКОВ
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: pavelsk77@gmail.com

УДК 512.553

Ключевые слова: вертексная алгебра, модуль, базис Грёбнера—Ширшова.

Аннотация

В работе мы показываем, как использовать метод базисов Грёбнера—Ширшова для модулей над ассоциативной алгеброй в целях изучения структуры вертексных алгебр, заданных при помощи порождающих элементов и определяющих соотношений. Помимо вычисления базисов Грёбнера—Ширшова для ряда примеров вертексных алгебр, мы исследуем задачу вложения левосимметрической алгебры в вертексную с сохранением нормально упорядоченного произведения.

Abstract

R. A. Kozlov, P. S. Kolesnikov, The Gröbner–Shirshov bases method for vertex algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 103—122.

In the paper, we show how to apply the Gröbner–Shirshov bases method for modules over an associative algebra to the study of vertex algebras defined by generators and relations. We compute Gröbner–Shirshov bases for a series of vertex algebras and study the problem of embedding of a left-symmetric algebra into a vertex one preserving the normally ordered product.

Посвящается памяти
Александра Васильевича Михалёва

Понятие вертексной алгебры в строгой алгебраической форме было предложено в [11], где оно использовалось для построения представления спорадической группы наибольшего порядка («Монстра»). Обычно язык вертексных алгебр представляют как формальный способ описания свойств разложения операторного произведения киральных полей в двумерной конформной теории поля [7] в математической физике. С этим связано громоздкое определение вертексной алгебры, которое распространено в литературе (см., например, [14, 15]). С другой стороны, категорный подход к понятию вертексной алгебры, развитый

Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 1, с. 103—122.

в [6] (см. также [3,4]), показывает, что с алгебраической точки зрения вертексные алгебры близки к привычным алгебрам Ли и Пуассона.

Одним из наиболее распространённых способов задать алгебраическую систему того или иного класса является её копредставление, т. е. определение при помощи порождающих элементов и соотношений между ними. Обычно этот подход применяется к классам алгебр, являющимся многообразиями: группам и полугруппам, ассоциативным алгебрам, алгебрам Ли и т. п., так как в этом случае свободная алгебра заведомо лежит в рассматриваемом классе.

Несмотря на то что вертексные алгебры не образуют многообразия в классическом смысле, в этой категории можно построить универсальный объект для класса вертексных алгебр, порождённых данным множеством элементов при фиксированном мажорирующем условии на взаимную локальность порождающих [18]. Следовательно, имеется возможность задать конкретную вертексную алгебру при помощи определяющих соотношений. При таком подходе первоочередной задачей является решение проблемы равенства, что позволяет найти линейный базис такой вертексной алгебры. Распространённой техникой для исследования проблемы равенства является метод базисов Грёбнера—Ширшова в разнообразных вариациях (см., например, [9, 10]). Этот же метод можно использовать и для вертексных алгебр, как мы покажем в данной работе.

Всюду ниже $\mathbb{Z}_+$ обозначает множество неотрицательных целых чисел, все векторные пространства рассматриваются над полем $\Bbbk$ нулевой характеристики.

1. Конформные и вертексные алгебры

Напомним, что *конформной алгеброй Ли* [16] называется векторное пространство L, снабжённое линейным оператором $T\colon L \to L$ и семейством билинейных n-произведений $(\cdot\,{}_{(n)}\,\cdot)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют определённому набору аксиом. Эти аксиомы можно записать в компактном виде при помощи порождающей функции последовательности элементов $\{(x\,{}_{(n)}\,y)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ для $x, y \in L$. Именно, для любых $x, y \in L$ выражение

$$(x\,{}_{(\lambda)}\,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{n!} \otimes_{\Bbbk[T]} (x\,{}_{(n)}\,y)$$

(называемое *λ-скобкой* элементов x, y) является многочленом от формальной переменной λ, т. е. $(x\,{}_{(\lambda)}\,y) \in \Bbbk[T,\lambda] \otimes_{\Bbbk[T]} L \cong L[\lambda]$. Для данных $x, y \in L$ степень $(x\,{}_{(\lambda)}\,y)$ по переменной λ определяет *функцию локальности* $N_L(x,y) \in \mathbb{Z}_+$:

$$N_L(x,y) = \begin{cases} 0, & (x\,{}_{(\lambda)}\,y) = 0, \\ \deg_\lambda(x\,{}_{(\lambda)}\,y) + 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Другими словами, $N_L(x,y)$ — это наименьшее такое $N \in \mathbb{Z}_+$, что $(x\,{}_{(n)}\,y) = 0$ для всех $n \geqslant N$.

Прочие аксиомы конформной алгебры Ли включают *полуторалинейность*

$$(Tx_{(\lambda)}\, y) = -\lambda(x_{(\lambda)}\, y), \quad (x_{(\lambda)}\, Ty) = (T+\lambda)(x_{(\lambda)}\, y),$$

кососимметричность

$$(x_{(\lambda)}\, y) + (y_{(T+\lambda)}\, x) = 0$$

и конформный вариант *тождества Якоби*

$$\big(x_{(\lambda)}\,(y_{(\mu)}\, z)\big) - \big(y_{(\mu)}\,(x_{(\lambda)}\, z)\big) = \big((x_{(\lambda)}\, y)_{(\lambda+\mu)}\, z\big). \tag{1}$$

Чтобы определить конформную супералгебру Ли, достаточно потребовать, чтобы $L = L_0 \oplus L_1$ было $\mathbb{Z}_2$-градуированным $\Bbbk[T]$-модулем, все n-произведения были согласованы с этой градуировкой, а аксиомы кососимметричности и тождество Якоби нужно изменить в соответствии с правилом Капланского (см., например, [1]). В частности, тождество Якоби превращается в

$$\big(x_{(\lambda)}\,(y_{(\mu)}\, z)\big) - (-1)^{|x||y|}\big(y_{(\mu)}\,(x_{(\lambda)}\, z)\big) = \big((x_{(\lambda)}\, y)_{(\lambda+\mu)}\, z\big).$$

Здесь и ниже $|x| \in \{0,1\}$ обозначает чётность однородного элемента $x \in L_0 \cup L_1$.

Ряд примеров таких систем даёт общая конструкция квадратичной конформной (супер)алгебры Ли [19]. Приведём её в частном случае. Допустим, V — *супералгебра Новикова*, т. е. $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство с билинейной операцией произведения $(\cdot \circ \cdot)$, такой что

$$(u\circ v)\circ w - u\circ(v\circ w) = (-1)^{|u||v|}\big((v\circ u)\circ w - v\circ(u\circ w)\big),$$
$$(u\circ v)\circ w = (-1)^{|v||w|}(u\circ w)\circ v$$

для всех однородных $u, v, w \in V$. Тогда свободный $\Bbbk[T]$-модуль $L(V) = \Bbbk[T]\otimes V$ является конформной супералгеброй Ли относительно операций, заданных при помощи формулы

$$(1\otimes u)_{(\lambda)}\,(1\otimes v) = (-1)^{|u||v|}T\otimes(v\circ u) + \lambda\otimes\big(u\circ v + (-1)^{|u||v|}v\circ u\big), \quad u, v \in V.$$

Пример 1. Если $V = \Bbbk v$ — одномерная алгебра с операцией $v\circ v = v$, то $L(V)$ — *конформная алгебра Вирасоро*, структура которой полностью определяется «конформным квадратом» элемента $1\otimes v = v$:

$$(v_{(\lambda)}\, v) = (T+2\lambda)v.$$

Пример 2. Пусть V — трёхмерная алгебра Новикова $V = \Bbbk v + \Bbbk u + \Bbbk w$ с умножением $v\circ v = v$, $v\circ u = (1/2)u$, $u\circ v = u$, $u\circ u = w$, $w\circ v = w$, прочие произведения базисных элементов равны нулю. Соответствующая квадратичная конформная алгебра Ли $L(V)$ известна как *конформная алгебра Вирасоро—Шрёдингера*.

Векторное пространство V, снабжённое билинейным произведением $x\,.\,y$, $x, y \in V$, называется левосимметрической (прелиевой) алгеброй, если

$$(x\,.\,y)\,.\,z - x\,.\,(y\,.\,z) = (y\,.\,x)\,.\,z - y\,.\,(x\,.\,z)$$

для всех $x, y, z \in V$. Определение левосимметрической супералгебры может быть получено обычным способом. Если 1 — единичный элемент левосимметрической (супер) алгебры с (чётным) дифференцированием T, то

$$x \,.\, 1 = 1 \,.\, x = x, \quad T(x \,.\, y) = T(x) \,.\, y + x \,.\, T(y), \quad T(1) = 0,$$

для всех $x, y \in V$.

Структуру вертексной алгебры можно рассматривать как «сплав» конформной алгебры Ли и левосимметрической алгебры с дифференцированием. Эта структура в некотором смысле схожа с алгеброй Пуассона, которая является «сплавом» коммутативной алгебры и алгебры Ли.

Определение 1 (см. [3]). Векторное пространство V, снабжённое линейным оператором T, бинарной операцией $(x, y) \mapsto x \,.\, y$ и λ-скобкой $(x, y) \mapsto (x_{\,(\lambda)}\, y)$, $x, y \in V$, называется *вертексной алгеброй*, если

(V1) $(V, .)$ — левосимметрическая алгебра с единицей и дифференцированием T;

(V2) V является конформной алгеброй Ли относительно T и $(\cdot_{\,(\lambda)} \cdot)$;

(V3) следующие тождества выполняются для всех $x, y, z \in V$:

$$x \,.\, y - y \,.\, x = \int_{-T}^{0} (x_{\,(\lambda)}\, y)\, d\lambda, \tag{2}$$

$$(x_{\,(\lambda)}\, y \,.\, z) = (x_{\,(\lambda)}\, y) \,.\, z + y \,.\, (x_{\,(\lambda)}\, z) + \int_{0}^{\lambda} \big((x_{\,(\lambda)}\, y)_{\,(\mu)}\, z\big)\, d\mu. \tag{3}$$

Определение вертексной супералгебры может быть легко получено при помощи правила Капланского.

Распространённое в литературе определение вертексной алгебры (см., например, [14, 15]) через свойства вертексных операторов $Y(\cdot, z)$, операторно-значных формальных распределений от переменной z, соответствует следующему представлению:

$$Y(x, z)y = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (x_{\,(n)}\, y) z^{-n-1} + \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{s!} (T^s x \,.\, y) z^s$$

для $x, y \in V$. Выражение в правой части является рядом Лорана от формальной переменной z с коэффициентами из V. Единичный элемент алгебры $(V, .)$ обозначается $\mathbf{1}$ (или $|0\rangle$), он называется *вакуумным вектором* V. Левосимметрическая операция $(\cdot \,.\, \cdot)$ представляется в этом контексте нормально упорядоченным произведением вертексных операторов:

$$Y(x \,.\, y, z) = {:}Y(x, z)Y(y, z){:}, \quad x, y \in V$$

(см., например, [14, 15]).

Пусть X — непустое множество. Класс всех вертексных алгебр, порождённых множеством X, не содержит универсального объекта, поскольку нет верхнего ограничения функции локальности N_V на $X \times X$. Тем не менее если ограничить значения локальности на порождающих, то такой универсальный объект может быть построен [18].

Зафиксируем функцию $N\colon X\times X \to \mathbb{Z}_+$ и определим алгебру Ли $\mathcal{L}(X,N)$ как порождённую множеством $X\times\mathbb{Z}$, представленным в виде $\{x(n)\mid x\in X,\ n\in\mathbb{Z}\}$, со следующими определяющими соотношениями:

$$\sum_{s=0}^{N(x,y)}(-1)^s\binom{N(x,y)}{s}[x(n-s),y(m+s)]=0,\quad x,y\in X,\quad n,m\in\mathbb{Z}. \tag{4}$$

Универсальная обёртывающая ассоциативная алгебра $U\big(\mathcal{L}(X,N)\big)$ также порождается (как ассоциативная алгебра) элементами множества $X\times\mathbb{Z}$ с коммутаторными соотношениями (4). Обозначим через $\mathcal{A}(X,N)$ ассоциативную алгебру $\Bbbk[T]\ltimes U\big(\mathcal{L}(X,N)\big)$, где T действует на универсальной обёртывающей алгебре дифференцированиями $x(n)\mapsto -nx(n-1)$, $x\in X$, $n\in\mathbb{Z}$. Именно, $\mathcal{A}(X,N)$ как ассоциативная алгебра порождается множеством $(X\times\mathbb{Z})\cup\{T\}$ с определяющими соотношениями (4) и

$$Tx(n)-x(n)T=-nx(n-1),\quad x\in X,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Обозначим $\mathrm{Vert}(X,N)$ левый $\mathcal{A}(X,N)$-модуль, порождённый одним элементом $\mathbf{1}$ со следующими соотношениями:

$$T\mathbf{1}=0,\quad x(n)\mathbf{1}=0,\quad x\in X,\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

Тогда $\mathrm{Vert}(X,N)$ и является универсальным объектом в классе вертексных алгебр V, порождённых множеством X и таких, что $N_V(x,y)\leqslant N(x,y)$ для всех $x,y\in X$. Порождающие $x\in X$ соответствуют элементам $x(-1)\mathbf{1}\in\mathrm{Vert}(X,N)$ и, в общем, если $a\in\mathrm{Vert}(X,N)$, $x\in X$, $n\in\mathbb{Z}$, то

$$x(n)a=\begin{cases}(x\,{}_{(n)}\,a), & n\in\mathbb{Z}_+,\\ x\,.\,a, & n=-1,\\ -\dfrac{1}{n+1}(T(x(n+1)a)-x(n+1)Ta), & n\leqslant -2.\end{cases} \tag{6}$$

Например, если $a=x(1)y(-1)\mathbf{1}$ и $b=z(-1)\mathbf{1}$, то $a\,.\,b=(x\,{}_{(1)}\,y)\,.\,z$. Последнее может быть вычислено при помощи (3): сравнив коэффициенты при λ^1 в левой и правой частях (3), получим

$$\big(x\,{}_{(1)}\,(y\,.\,z)\big)=(x\,{}_{(1)}\,y)\,.\,z+y\,.\,(x\,{}_{(1)}\,z)+\big((x\,{}_{(0)}\,y)\,{}_{(0)}\,z\big).$$

Последнее слагаемое в правой части преобразуется при помощи (1), так что

$$(x\,{}_{(1)}\,y)\,.\,z=\big(x\,{}_{(1)}\,(y\,.\,z)\big)-y\,.\,(x\,{}_{(1)}\,z)-\big(x\,{}_{(0)}\,(y\,{}_{(0)}\,z)\big)+\big(y\,{}_{(0)}\,(x\,{}_{(0)}\,z)\big),$$

откуда следует, что

$$a\,.\,b=[x(1),y(-1)]z(-1)\mathbf{1}-[x(0),y(0)]z(-1)\mathbf{1}.$$

В общем случае любое формальное выражение в терминах операций вертексной алгебры от элементов X может быть переписано при помощи аксиом (V1)—(V3) в виде $\Bbbk[T]$-линейной комбинации правонормированных слов от X, которые легко записать в виде элементов $\mathcal{A}(X,N)$-модуля $\mathrm{Vert}(X,N)$.

Действительно, пусть V — какая-то вертексная алгебра, порождённая множеством X. Определим $V(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, как подпространство в V, натянутое на слова от X в вертексной сигнатуре, содержащие не более чем n операций $(\cdot\,.\,\cdot)$. Тогда $V(0) \subseteq V(1) \subseteq \ldots$, $V(n).V(m) \subseteq V(n+m+1)$, $\big(V(n)_{(s)}V(m)\big) \subseteq V(n+m)$, и градуированное пространство $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} V(n)/V(n-1)$ является вертексной алгеброй Пуассона в смысле [5]. (Заметим, что (2) означает коммутативность левосимметрической операции, что влечёт ассоциативность.) Как и для «обычных» алгебр Пуассона, всякое выражение в вертексной алгебре Пуассона может быть записано в правонормированном виде. Следовательно, индукцией по $n \geqslant 0$ легко показать, что всякое выражение из $V(n)$ может быть записано в правонормированном виде с операциями из вертексной алгебры. (Базой индукции является случай $n = 0$, в котором всё следует из (1).)

Эти наблюдения приводят к следующему утверждению.

Предложение 1. *Пусть X — множество, N — фиксированная функция локальности на $X \times X$. Подмножество $I \subseteq \mathrm{Vert}(X, N)$ является идеалом вертексной алгебры тогда и только тогда, когда I — подмодуль $\mathcal{A}(X, N)$-модуля $\mathrm{Vert}(X, N)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна из (6): если I — идеал вертексной алгебры $\mathrm{Vert}(X, N)$, то он замкнут относительно действия $x(n)$, $x \in X$, $n \in \mathbb{Z}$.

Чтобы проверить достаточность, предположим, что I является $\mathcal{A}(X, N)$-подмодулем в $\mathrm{Vert}(X, N)$ и $a \in I$. Пусть $X' = X \cup \{a\}$ означает расширенное множество порождающих, и пусть N' — функция локальности на $X' \times X'$, продолжающая N таким образом, что $N'(x, a)$, $N'(a, x)$, $N'(a, a)$ заданы соответствующими значениями локальности в вертексной алгебре $\mathrm{Vert}(X, N)$ или их оценками по лемме Донга. Исходная вертексная алгебра $\mathrm{Vert}(X, N)$ является гомоморфным образом $V' = \mathrm{Vert}(X', N')$.

Тогда для любого $f \in \mathrm{Vert}(X, N)$ элементы $f\,.\,a$, $a\,.\,f$, $(f\,{}_{(s)}\,a)$, $(a\,{}_{(s)}\,f)$ могут рассматриваться как выражения в V'. Как отмечено выше, любой элемент из V' можно представить как $\Bbbk[T]$-линейную комбинацию правонормированных слов от X'. Рассмотрим такое слово в общем виде:

$$w = x_1(n_1)\ldots x_i(n_i)a(m)x_{i+1}(n_{i+1})\ldots x_k(n_k)\mathbf{1}, \quad m, n_i \in \mathbb{Z}.$$

Если $i = k$, то, очевидно, w получено из a действием $\mathcal{A}(X, N)$. Если $i < k$, то рассмотрим пару $a(m)x_{i+1}(n_{i+1})$, обозначив её $a(m)x(n)$, и пусть w' обозначает «хвост» слова w. В случае когда $m, n \geqslant 0$, применим (1), чтобы получить

$$a(m)x(n)w' = x(n)a(m)w' - \sum_{s\geqslant 0} \binom{n}{s} (x\,{}_{(s)}\,a)(n+m-s)w'.$$

Первое слагаемое содержит $a(m)w'$ с более коротким «хвостом», так что его образ в V принадлежит I из соображений индукции. Вторая группа слагаемых также содержит $(x\,{}_{(s)}\,a) = x(s)a \in I$ с коротким «хвостом» w'. Следовательно,

$w \in I$. В случае когда $m \geqslant 0$ и $n < 0$, можно применить (3) и (2), чтобы выразить $a(m)x(n)w'$ в аналогичном виде — как $\mathcal{A}(X, N)$-линейную комбинацию $a_j(m_j)w'_j$ для $a_j \in I$ с более короткими «хвостами» w'_j. Если $m < 0$ и $n \geqslant 0$, то можно использовать (3) и конформную кососимметричность, чтобы получить $w \in I$. Наконец, если $n, m < 0$, то левосимметричность произведения $(\cdot\ .\ \cdot)$ вместе с (2) также приводят к заключению, что $w \in I$. □

Следовательно, чтобы задать вертексную алгебру V при помощи порождающих элементов X (с функцией локальности N на $X \times X$) и определяющих соотношений R, нужно определить фактор-модуль $\mathrm{Vert}(X, N|R)$ свободного 1-порождённого модуля над $\mathcal{A}(X, N)$ по соотношениям (5) и R, выраженным при помощи (6).

Пример 3. Пусть $X = \{x, y\}$, $N(x, x) = N(y, y) = 0$, $N(x, y) = N(y, x) = 1$, $R = \{(x\ {}_{(0)}\ y) - \mathbf{1}\}$. Тогда

$$\mathcal{A}(X, N) = \Bbbk\langle T, x(n), y(m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\rangle/(S),$$

где S состоит из

$$[T, a(n)] = -na(n-1), \quad a \in \{x, y\},$$
$$[x(n), x(m)] = [y(n), y(m)] = [x(n), y(m)] - [x(n-1), y(m+1)] = 0, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Вертексная алгебра $W = \mathrm{Vert}(X, N|R)$ является фактором свободного левого $\mathcal{A}(X, N)$-модуля, порождённого вакуумным вектором $\mathbf{1}$ по соотношениям (5) и

$$x(0)y(-1)\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Ниже мы покажем, что W — это в точности вертексная алгебра Вейля (см., например, [2]).

Чтобы исследовать строение модуля над ассоциативной алгеброй, можно использовать технику базисов Грёбнера—Ширшова для модулей [17], которую мы кратко изложим в следующем разделе.

2. Базисы Грёбнера—Ширшова для модулей: приложение к вертексным алгебрам

Техника базисов Грёбнера—Ширшова для ассоциативных алгебр хорошо известна и описана в ряде работ с различных точек зрения (отметим, например, [8, 13]).

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое множество. Тогда свободная ассоциативная алгебра $\Bbbk\langle\mathcal{X}\rangle$, порождённая множеством $\mathcal{X}$, равна $\Bbbk\mathcal{X}^*$ — линейной оболочке множества всех (ассоциативных) слов в алфавите $\mathcal{X}$.

Допустим, $S \subset \Bbbk\langle\mathcal{X}\rangle$ — множество ненулевых многочленов, представленных в виде $f = \bar{f} - r(f)$, где $\bar{f}$ — выделенное слово с единичным коэффициентом, (старшая часть f), а $r(f)$ обозначает сумму остальных членов в f. Тогда по S можно построить ориентированный граф (переписывающую систему)

$\Gamma = \Gamma(\mathcal{X}, S)$, определённый следующим образом. Вершины Γ — многочлены из $\Bbbk\langle\mathcal{X}\rangle$, две вершины h_1, h_2 соединены дугой $h_1 \to h_2$ тогда и только тогда, когда многочлен h_2 может быть получен из h_1 при помощи редукции (исключения старшего слова) по модулю S, т. е. h_1 содержит слагаемое вида αu ($\alpha \in \Bbbk \setminus \{0\}$, $u \in \mathcal{X}^*$), такое что $u = w_1 \bar{f} w_2$ для некоторых слов $w_1, w_2 \in \mathcal{X}^*$ и некоторого $f \in S$, и $h_2 = h_1 - \alpha w_1 f w_2$.

Допустим, граф $\Gamma = \Gamma(\mathcal{X}, S)$ удовлетворяет следующим условиям (условия базисов Грёбнера—Ширшова).

— В графе Γ нет бесконечных ориентированных путей. Это *условие обрыва* гарантирует, что всякий многочлен $h \in \Bbbk\langle\mathcal{X}\rangle$ может быть за конечное число шагов приведён к терминальному виду, т. е. такому, который далее не может быть редуцирован.

— Если $h \to h_1$ и $h \to h_2$ — две дуги в Γ, то найдутся пути $h_1 \to \ldots \to g$ и $h_2 \to \ldots \to g$ для некоторой вершины g. Это *условие ромба* обеспечивает единственность терминальной вершины, в которую можно прийти из данной вершины в Γ.

В этом случае S называется *базисом Грёбнера—Ширшова* в $\Bbbk\langle\mathcal{X}\rangle$ и те слова, которые являются терминальными вершинами (*редуцированные слова*), образуют линейный базис ассоциативной алгебры $\Bbbk\langle\mathcal{X} \mid S\rangle = \Bbbk\langle\mathcal{X}\rangle/(S)$.

Достаточно проверять условие ромба только для пар дуг следующего вида в $\Gamma(\mathcal{X}, S)$ (сходимость «развилок»):

(C1) $h = \bar{f}_1 = w_1 \bar{f}_2 w_2$, $f_1, f_2 \in S$, $w_1, w_2 \in \mathcal{X}^*$; тогда $h_1 = r(f_1)$, $h_2 = w_1 r(f_2) w_2$;

(C2) $h = \bar{f}_1 u = v \bar{f}_2$, $f_1, f_2 \in S$, $u, v \in \mathcal{X}^*$ и $\deg \bar{f}_1 + \deg \bar{f}_2 > \deg h$ (это значит, что подслова $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ — старшие части f_1 и f_2 — пересекаются в слове h); тогда $h_1 = r(f_1)u$, $h_2 = v r(f_2)$.

В обоих случаях если найдутся пути $h \to h_1 \to \ldots \to g_1$ и $h \to h_2 \to \ldots \to g_2$, где $g_1 \neq g_2$ — терминальные вершины, то следует добавить многочлен $g_1 - g_2$ в множество S, выбрать в нём старшее слово и снова проверить условия базисов Грёбнера—Ширшова для полученного расширенного множества соотношений.

Замечание 1. Бывает удобно задать полный порядок $\leqslant$ на множестве $\mathcal{X}^*$, согласованный с умножением: в этом случае условие обрыва выполняется автоматически, если выбирать $\bar{f}$ как старшее слово в f относительно порядка $\leqslant$. Однако для отыскания базиса Грёбнера—Ширшова не обязательно определять такой порядок на словах.

Пример 4. Пусть S — множество определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}(X, N)$ из примера 3 с $\mathcal{X} = \{T, x(n), y(m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$. Запишем каждый $f \in S$ в виде $\bar{f} \to r(f)$, выбирая старшую часть следующим образом:

$$Tx(n) \to x(n)T - nx(n-1), \quad Ty(n) \to y(n)T - ny(n-1); \tag{7}$$

$$x(n)x(m) \to x(m)x(n), \quad y(n)y(m) \to y(m)y(n), \quad n > m; \tag{8}$$

$$x(n)y(m) \to y(m)x(n) + [x(n-1), y(m+1)], \quad n > m+1; \tag{9}$$

$$y(m)x(n) \to x(n)y(m) + [y(m-1), x(n+1)], \quad m \geqslant n+1. \tag{10}$$

Легко непосредственно проверить сходимость развилок (C1) и (C2) для этих соотношений. Именно, развилок типа (C1) нет, а все развилки типа (C2) сходящиеся. Ключевое вычисление для соотношений локальности (8)—(10) в общем виде (4) было проделано в [18]; добавление (7), очевидно, не портит сходимости, поскольку соотношения (4) инвариантны относительно дифференцирования $[T,\cdot]\colon z(n)\mapsto -nz(n-1)$, $z\in X$, $n\in\mathbb{Z}$.

Если A — ассоциативная алгебра, порождённая множеством $\mathcal{X}$ с определяющими соотношениями S, то левый модуль M над A также можно определить при помощи множества порождающих Y и соотношений R (последние можно рассматривать как элементы свободного модуля $\Bbbk\langle\mathcal{X}\rangle\otimes\Bbbk Y$; полагаем, что в каждом многочлене из R выделена старшая часть подобно тому, как это было сделано для S).

В этом случае расщепляемое нулевое расширение $A\oplus M$ с умножением

$$(a+u)(b+v)=ab+av,\quad a,b\in A,\quad u,v\in M,$$

можно рассматривать как ассоциативную алгебру с порождающими $\mathcal{X}\cup Y$ и соотношениями $\Sigma = S\cup R\cup\{yz\mid y\in Y,\ z\in\mathcal{X}\cup Y\}$. Чтобы построить переписывающую систему $\Gamma(\mathcal{X}\cup Y,\Sigma)$ для модуля M, достаточно рассматривать как вершины только те многочлены из $\Bbbk\langle\mathcal{X}\cup Y\rangle$, которые состоят из мономов вида uy, $u\in\mathcal{X}^*$, $y\in Y$, и проверять на них условия (C1), (C2). Это приводит нас к технике базисов Грёбнера—Ширшова для модулей над ассоциативной алгеброй, описанной в [17].

Именно, допустим, что S уже является базисом Грёбнера—Ширшова для ассоциативной алгебры $\Bbbk\langle\mathcal{X}\rangle$. Тогда достаточно проверить сходимость только для следующих типов «развилок» $h\to h_1$, $h\to h_2$:

(CM1) $h=\bar f_1=w_1\bar f_2 w_2 y$, $f_1\in R$, $f_2\in S$, $w_1,w_2\in\mathcal{X}^*$, $y\in Y$; при этом $h_1=r(f_1)$, $h_2=w_1r(f_2)w_2y$;

(CM2) $h=w_1\bar f_1=\bar f_2 w_2 y$, $f_1\in R$, $f_2\in S$, $w_1,w_2\in\mathcal{X}^*$, $y\in Y$, $\deg\bar f_1+\deg\bar f_2>$ $>\deg h$; тогда $h_1=w_1r(f_1)$, $h_2=r(f_2)w_2y$;

(CM3) $h=\bar f_1=w_1\bar f_2$, $f_1,f_2\in R$, $w_1\in\mathcal{X}^*$; тогда $h_1=r(f_1)$, $h_2=w_1r(f_2)$.

Определение 2. Пусть V — вертексная алгебра, порождённая множеством X с функцией локальности $N\colon X\times X\to\mathbb{Z}_+$, и пусть $A=\mathcal{A}(X,N)$ — ассоциативная алгебра, определённая выше. Множество определяющих соотношений R вертексной алгебры V называется базисом Грёбнера—Ширшова этой алгебры, если R вместе с (5) образует базис Грёбнера—Ширшова 1-порождённого A-модуля (т. е. при $Y=\{\mathbf{1}\}$).

Пример 5. Рассмотрим вертексную алгебру V, порождённую одним элементом v, таким что $N(v,v)=0$, без каких-либо других соотношений. Тогда базис Грёбнера—Ширшова алгебры $A=\mathcal{A}(X,N)$ состоит из соотношений $v(n)v(m)\to v(m)v(n)$, $n>m$, и $Tv(n)\to v(n)T-nv(n-1)$. Соотношения локальности и свойства вакуумного вектора (5) образуют базис Грёбнера—Ширшова V как A-модуля:

$$v(n)\mathbf{1}\to 0,\quad n\geqslant 0,\quad T\mathbf{1}\to 0.$$

Терминальные (редуцированные) слова, которые образуют линейный базис V, имеют вид

$$v(-n_1)\dots v(-n_k)\mathbf{1},\quad n_1 \geqslant \dots \geqslant n_k > 0,\quad k\geqslant 0. \tag{11}$$

Легко узнать в полученной системе свободную алгебру многообразия коммутативных алгебр с дифференцированием, порождённую одним элементом $v = v(-1)\mathbf{1}$, дифференцированием является оператор T.

Пример 6. Пусть V — вертексная алгебра, порождённая одним элементом e с соотношением $Te = 0$. Тогда $(e\,{}_{(\lambda)}\,e) = 0$ ввиду полуторалинейности, так что соответствующая алгебра $A = \mathcal{A}(X, N) = \mathcal{A}(\{e\}, 0)$ такая же, как в примере 5. Как A-модуль V порождается элементом $\mathbf{1}$ с определяющими соотношениями

$$e(n)\mathbf{1} = Te(-1)\mathbf{1} = T\mathbf{1} = 0,\quad n\geqslant 0.$$

Базис Грёбнера—Ширшова алгебры A состоит из соотношений (записанных в виде переписывающих правил)

$$e(n)e(m)\to e(m)e(n),\quad n>m,\quad Te(n)\to e(n)T - ne(n-1),\quad n\in\mathbb{Z},$$

и чтобы получить базис Грёбнера—Ширшова модуля V достаточно добавить соотношения

$$e(-n)\underbrace{e(-1)\dots e(-1)}_{l}\mathbf{1}\to 0,\quad n>1,\quad l\geqslant 0.$$

Для $l = 0$ эти дополнительные соотношения возникают при рассмотрении развилок вида $Te(-1)\mathbf{1}\to 0$, $Te(-1)\mathbf{1}\to e(-2)\mathbf{1} + e(-1)T\mathbf{1}$ типа (CM3), для $l>0$ развилки типа (CM2) дают искомые соотношения.

Терминальные слова имеют вид $e(-1)^m\mathbf{1}$, $m\geqslant 0$, так что V — просто алгебра многочленов от одной переменной с тривиальными дифференцированием T и λ-скобкой.

Рассмотрим более детально, как найти базис Грёбнера—Ширшова для более сложного примера, а именно для вертексной алгебры из примера 3.

Пример 7. Пусть A — алгебра $\mathcal{A}(X, N)$ с $X = \{x, y\}$, $N(x, x) = N(y, y) = 0$, $N(x, y) = N(y, x) = 1$, и пусть $Y = \{\mathbf{1}\}$. Тогда вертексная алгебра $W = \mathrm{Vert}(X, N \mid (x\,{}_{(0)}\,y) = \mathbf{1})$ изоморфна 1-порождённому A-модулю с определяющими соотношениями

$$x(n)\mathbf{1}\to 0,\quad y(n)\mathbf{1}\to 0,\quad n\geqslant 0, \tag{12}$$

$$T\mathbf{1}\to 0, \tag{13}$$

$$x(0)y(-1)\mathbf{1}\to\mathbf{1}. \tag{14}$$

Определим структуру A-модуля W, заданного выше. Заметим, что для каждого $a\in W$ выполняется $x(n)a = y(n)a = 0$ в W для достаточно больших n. Это свойство отражает свойство локальности в вертексной алгебре, оно также может быть выведено из (9), (10) и (12).

Имеется множество не сходящихся «развилок» типов (CM1)—(CM3) для дуг, заданных этими правилами вместе с соотношениями из примера 4.

Рассмотрим сперва вершину $Tx(0)y(-1)\mathbf{1}$. С одной стороны,

$$Tx(0)y(-1)\mathbf{1} \to x(0)Ty(-1)\mathbf{1} = -x(0)y(-2)\mathbf{1} + x(0)y(-1)T\mathbf{1} \to -x(0)y(-2)\mathbf{1}$$

по (7) и (13). С другой стороны,

$$Tx(0)y(-1)\mathbf{1} \to T\mathbf{1} \to 0$$

по (14). Следовательно, мы можем добавить правило $x(0)y(-2)\mathbf{1} \to 0$ к множеству определяющих соотношений. Аналогичным образом выводим

$$x(0)y(-n)\mathbf{1} \to 0, \quad n \geqslant 2. \tag{15}$$

Из соотношений (15) ввиду (9) и (12) вытекает

$$[x(n), y(m)]\mathbf{1} \to \delta_{n+m,-1}\mathbf{1}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

В более общем случае мы имеем следующее утверждение.

Предложение 2. *Если A — алгебра $\mathcal{A}(X, N)$ из примера 3 и W — A-модуль, порождённый элементом $\mathbf{1}$ с определяющими соотношениями (12)—(14), то для любого слова u (включая пустое) в алфавите $\{x(n), y(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ в W выполняются следующие соотношения:*

$$y(m)x(m)u\mathbf{1} \to x(m)y(m)u\mathbf{1}, \quad m \in \mathbb{Z}; \tag{17}$$

$$x(m+1)y(m)u\mathbf{1} \to y(m)x(m+1)u\mathbf{1}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m \neq -1; \tag{18}$$

$$x(0)y(-1)u\mathbf{1} \to y(-1)x(0)u\mathbf{1} + u\mathbf{1}. \tag{19}$$

Доказательство. Индукцией по длине u установим, что

$$x(n)y(m)u\mathbf{1} = y(m)x(n)u\mathbf{1} + \delta_{n+m,-1}u\mathbf{1}. \tag{20}$$

Для пустого слова u это следует из (16). Допустим, $u = x(k)v$, где v — слово меньшей длины (случай $u = y(k)v$ аналогичен). Предположение индукции и определяющие соотношения алгебры A (см. пример 3) влекут

$$\begin{aligned} x(n)y(m)u\mathbf{1} &= x(n)y(m)x(k)v\mathbf{1} = x(n)x(k)y(m)v\mathbf{1} - \delta_{m+k,-1}x(n)v\mathbf{1} = \\ &= x(k)x(n)y(m)v\mathbf{1} - \delta_{m+k,-1}x(n)v\mathbf{1} = \\ &= x(k)y(m)x(n)v\mathbf{1} + \delta_{n+m,-1}x(k)v\mathbf{1} - \delta_{m+k,-1}x(n)v\mathbf{1} = \\ &= y(m)x(k)x(n)v\mathbf{1} + [x(k), y(m)]x(n)v\mathbf{1} + \delta_{n+m,-1}x(k)v\mathbf{1} - \delta_{m+k,-1}x(n)v\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$[x(k), y(m)]x(n)v\mathbf{1} = [x(k+N), y(m-N)]x(n)v\mathbf{1} = x(k+N)y(m-N)x(n)v\mathbf{1}$$

для достаточно большого N. Снова применяя предположение индукции, получаем

$$\begin{aligned} x(k+N)y(m-N)x(n)v\mathbf{1} &= x(k+N)x(n)y(m-N)v\mathbf{1} = \\ &= x(n)x(k+N)y(m-N)v\mathbf{1} = x(n)[x(k+N), y(m-N)]v\mathbf{1} = \delta_{k+m,-1}x(n)v\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x(n)y(m)x(k)v\mathbf{1} = y(m)x(k)x(n)v\mathbf{1} + \delta_{n+m,-1}x(k)v\mathbf{1},$$

и остаётся поменять местами $x(n)$ и $x(k)$, чтобы получить искомое. □

Пусть Σ означает систему соотношений (7)—(10) вместе с (12)—(14) и (17)—(19). Для этой системы выполнено условие обрыва; терминальные слова в $\Gamma(X \cup \{\mathbf{1}\}, \Sigma)$ (те, что соответствуют элементам W) имеют вид

$$u\mathbf{1}, \quad u = z_1(n_1)z_2(n_2)\dots z_k(n_k), \quad z_i \in \{x, y\}, \tag{21}$$

где $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \dots \leqslant n_k < 0$ $(k \geqslant 0)$; при этом если $z_i = y$ и $z_{i+1} = x$, то $n_i < n_{i+1}$.

Теорема 1. *Соотношения* (12)—(14), *и* (17)—(19) *с терминальными словами вида* (21) *образуют базис Грёбнера—Ширшова вертексной алгебры* $W = \operatorname{Vert}(X, N|(x_{(0)}\, y) = \mathbf{1})$.

Доказательство. Условие ромба для (7)—(10), (12)—(14) и (17)—(19) можно проверить непосредственно. Выпишем все неопределённости (вершины «развилок») типов (CM1)—(CM3), для которых нужно проверить условие сходимости:

$$\begin{aligned}
&y(n)x(m)\mathbf{1}, \quad n > m \geqslant 0, \quad x(n)y(m)\mathbf{1}, \quad n > m+1 \geqslant 1,\\
&Tx(n)\mathbf{1},\ Ty(n)\mathbf{1}, \quad n \geqslant 0,\\
&x(n)x(m)\mathbf{1},\ y(n)y(m)\mathbf{1}, \quad n > m \geqslant 0, \quad x(m+1)y(m)\mathbf{1},\ y(m)x(m)\mathbf{1}, \quad m \geqslant 0,\\
&y(n)x(m+1)y(m)u\mathbf{1}, \quad n \geqslant m+2, \quad x(n)y(m)x(m)u\mathbf{1}, \quad n > m+1,\\
&x(n+1)y(n)x(m)u\mathbf{1}, \quad x(n+1)y(n)y(m)u\mathbf{1}, \quad n \geqslant m+1,\\
&y(n)x(n)y(m)u\mathbf{1}, \quad n > m+1, \quad y(n)x(n)x(m)u\mathbf{1}, \quad n > m,\\
&x(n)x(m+1)y(m)\mathbf{1}, \quad n > m+1, \quad y(n)y(m)x(m)u\mathbf{1}, \quad n > m,\\
&Tx(m+1)y(m)u\mathbf{1}, \quad Ty(m)x(m)u\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Для примера выберем $h = y(n)x(n)y(m)u\mathbf{1}$, $n > m+1$. С одной стороны,

$$h \to h_1 = x(n)y(n)y(m)u\mathbf{1}$$

по (17). С другой стороны,

$$h \to h_2 = y(n)y(m)x(n)u\mathbf{1} + y(n)[x(n-1), y(m+1)]u\mathbf{1}$$

по (9). Тогда

$$\begin{aligned}
&h_1 \to x(n)y(m)y(n)u\mathbf{1} \to g = y(m)x(n)y(n)u\mathbf{1} + [x(n-1), y(m+1)]y(n)u\mathbf{1},\\
&h_2 \to y(m)y(n)x(n)u\mathbf{1} + y(n)x(n-1)y(m+1)u\mathbf{1} - y(n)y(m+1)x(n-1)u\mathbf{1} \to\\
&\quad \to y(m)x(n)y(n)u\mathbf{1} + x(n-1)y(n)y(m+1)u\mathbf{1} +\\
&\quad + [y(n-1), x(n)]y(m+1)u\mathbf{1} - y(m+1)y(n)x(n-1)u\mathbf{1} \to\\
&\quad \to y(m)x(n)y(n)u\mathbf{1} + x(n-1)y(m+1)y(n)u\mathbf{1} + [y(n-1), x(n)]y(m+1)u\mathbf{1} -\\
&\quad - y(m+1)x(n-1)y(n)u\mathbf{1} - y(m+1)[y(n-1), x(n)]u\mathbf{1} =
\end{aligned}$$

$$= y(m)x(n)y(n)u\mathbf{1} + [x(n-1), y(m+1)]y(n)u\mathbf{1} + \\ + [y(n-1), x(n)]y(m+1)u\mathbf{1} - y(m+1)[y(n-1), x(n)]u\mathbf{1}.$$

Последние два слагаемых обращаются в нуль по (18) или (19), так что развилка $h \to h_1$, $h \to h_2$ типа (CM2) сходится к g.

Рассмотрим также пример с развилкой типа (CM1): $h = Tx(m+1)y(m)u\mathbf{1}$. С одной стороны,

$$h \to h_1 = x(m+1)Ty(m)u\mathbf{1} - (m+1)x(m)y(m)u\mathbf{1}.$$

С другой стороны,

$$h \to h_2 = Ty(m)x(m+1)u\mathbf{1} + \delta_{m,-1}Tu\mathbf{1}.$$

Заметим, что $Tu\mathbf{1} \to \ldots \to u'\mathbf{1}$, где u' — линейная комбинация слов, полученных дифференцированием $[T, u]$ в A. Тогда

$$\begin{aligned}
h_1 &\to x(m+1)y(m)u'\mathbf{1} - mx(m+1)y(m-1)u\mathbf{1} - (m+1)x(m)y(m)u\mathbf{1} \to \\
&\to y(m)x(m+1)u'\mathbf{1} + \delta_{m,-1}u'\mathbf{1} - \\
&- m(y(m-1)x(m+1)u\mathbf{1} + [x(m), y(m)]u\mathbf{1}) - (m+1)x(m)y(m)u\mathbf{1} \to \\
&\to g = y(m)x(m+1)u'\mathbf{1} + \delta_{m,-1}u'\mathbf{1} - \\
&- my(m-1)x(m+1)u\mathbf{1} - (m+1)x(m)y(m)u\mathbf{1}, \\
h_2 &\to y(m)x(m+1)u'\mathbf{1} - my(m-1)x(m+1)u\mathbf{1} - (m+1)y(m)x(m)u\mathbf{1} + \\
&+ \delta_{m,-1}Tu\mathbf{1} \to g,
\end{aligned}$$

как и выше. Следовательно, эта развилка также сходится. Сходимость остальных развилок проверяется аналогично. □

Следствие 1. *Линейный базис вертексной алгебры из примера* 3 *состоит из терминальных слов вида* (21).

Замечание 2. По модулю соотношений (20) базис (21) можно заменить множеством слов

$$x(-n_1)\ldots x(-n_r)y(-m_1)\ldots y(-m_k)\mathbf{1},$$

где $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_r > 0$, $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_k > 0$. Последнее известно как базис вертексной алгебры Вейля [2], в которой выполнено соотношение $(x\,_{(\lambda)}\,y) = \mathbf{1}$, поэтому пример 3 на самом деле описывает именно эту вертексную алгебру.

3. Универсальные вертексные обёртывающие конформных алгебр Ли

Как следует из определения, существует забывающий функтор из категории вертексных алгебр в категорию конформных алгебр Ли (схожий с забывающим функтором из категории алгебр Пуассона в категорию алгебр Ли). Для него существует левый присоединённый функтор U_{Vert}, превращающий конформную алгебру Ли в её универсальную вертексную обёртывающую. Строение такой вертексной алгебры было установлено в [18]. Его также нетрудно описать через порождающие элементы и определяющие соотношения.

Пусть L — конформная алгебра Ли, порождённая множеством X. Возьмём в качестве функции N ограничение функции локальности N_L на $X \times X$. Строение алгебры L задано каким-то набором определяющих соотношений R между порождающими в терминах операций T и $(\cdot\,{}_{(n)}\,\cdot)$, $n \geqslant 0$. При помощи аксиом конформной алгебры Ли каждое соотношение можно выразить в виде $\Bbbk[T]$-линейной комбинации правонормированных слов вида

$$\big(a_{1\,(n_1)}\,(a_{2\,(n_2)}\ldots(a_{k\,(n_k)}\,a_{k+1})\ldots)\big), \quad a_i \in X, \quad n_i \geqslant 0.$$

Тогда $U_{\mathrm{Vert}}(L) = \mathrm{Vert}(X, N|R)$, где элементы R следует понимать как такие же $\Bbbk[T]$-линейные комбинации слов вида

$$a_1(n_1)\ldots a_k(n_k)a_{k+1}(-1)\mathbf{1}.$$

Многие классические примеры вертексных алгебр являются факторами универсальных вертексных обёртывающих для достаточно просто устроенных конформных алгебр Ли. Пусть E — одномерное центральное расширение конформной алгебры Ли L с $\Bbbk[T]$-базисом X, т. е. задана точная последовательность конформных алгебр

$$0 \to \Bbbk e \to E \to L \to 0, \quad Te = 0. \tag{22}$$

Строение E полностью определяется таблицей умножения с полиномиальными коэффициентами:

$$(x\,{}_{(\lambda)}\,y) = \sum_{z\in X} h^z_{x,y}(T,\lambda)z + \varphi_{x,y}(\lambda)e$$

для $x, y \in X$. Допустим, что X линейно упорядочено тем или иным способом и $N\colon X \times X \to \mathbb{Z}_+$ — функция локальности в E, т. е.

$$N(x,y) = \max\{\deg\varphi_{x,y},\, \deg_\lambda h^z_{x,y} \mid z \in X\} + 1.$$

Поскольку e — центральный элемент, положим $N(e,x) = N(x,e) = N(e,e) = 0$. Тогда

$$U_{\mathrm{Vert}}(E) = \mathrm{Vert}(X \cup \{e\}, N|R),$$

где R состоит из соотношений

$$\begin{aligned}
&x(n)e(-1)\mathbf{1} \to 0, \quad e(n)x(-1)\mathbf{1} \to 0, \quad e(n)e(-1)\mathbf{1}, \quad n \geqslant 0,\\
&Te(-1)\mathbf{1} \to 0,\\
&x(n)y(-1)\mathbf{1} \to \sum_{z\in X} h^{z,n}_{x,y}(T)z(-1)\mathbf{1} + \varphi^n_{x,y}e(-1)\mathbf{1}, \quad x, y \in X, \quad n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Здесь $h^{z,n}_{x,y}(T)$ и $\varphi^n_{x,y}$ — коэффициенты соответствующих многочленов $h^z_{x,y}(T,\lambda)$ и $\varphi_{x,y}(\lambda)$ при $\lambda^n/n!$.

Упорядочим множество порождающих $\mathcal{X} = \{T, x(n), e(m) \mid x \in X,\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ алгебры $\mathcal{A}(X \cup \{e\}, N)$ следующим образом: $T > e(n) > x(m)$ для всех $x \in X$, $n, m \in \mathbb{Z}$, а для $x, y \in X$ положим $y(n) > x(m)$ тогда и только тогда, когда $(n, y) > (m, x)$ лексикографически. Удобно будет упорядочить $e(n)$ так:

$$e(-1) < e(0) < e(1) < \ldots < e(-2) < e(-3) < \ldots .$$

Теорема 2 (ср. с PBW-теоремой для вертексных алгебр [18]). *Базис Грёбнера—Ширшова вертексной алгебры $U_{\mathrm{Vert}}(E)$ как $\mathcal{A}(X \cup \{e\}, N)$-модуля состоит из*

$$\begin{aligned}
&x(n)e(-1)^l\mathbf{1} \to 0, \quad n \geqslant 0, \quad x \in X, \quad l \geqslant 0,\\
&T\mathbf{1} \to 0, \quad e(n)\mathbf{1} \to 0, \quad n \neq -1,\\
&x(n)y(m)u\mathbf{1} \to y(m)x(n)u\mathbf{1} +\\
&\quad + \sum_{z \in X} \sum_{k,s \geqslant 0} (-1)^k \binom{n}{s} \binom{n+m-s}{k} \alpha^{z,n}_{x,y,k} z(n+m-s-k)u\mathbf{1} +\\
&\quad + \sum_{s \geqslant 0} \binom{n}{s} \varphi^n_{x,y} e(n+m-s)u\mathbf{1}, \quad x(n) > y(m), \quad x, y \in X,
\end{aligned}$$

где u — слово в алфавите $\mathcal{X} \setminus \{T\}$, скаляр $\alpha^{z,n}_{x,y,k}$ означает коэффициент при $T^k/k!$ многочлена $h^{z,n}_{x,y}(T)$.

Это утверждение может быть как доказано непосредственно аналогично теореме 1, так и выведено из конструкции $U_{\mathrm{Vert}}(L)$ в терминах алгебры коэффициентов из [18]. Именно, последнее переписывающее правило отражает равенство

$$[x(n), y(m)] = \sum_{s \geqslant 0} \binom{n}{s} (x\ _{(s)}\ y)(n+m-s),$$

которое определяет умножение в алгебре Ли коэффициентов $\mathcal{L}(E)$ конформной алгебры E. Терминальные слова, которые образуют базис в $U_{\mathrm{Vert}}(L)$, имеют вид

$$x_1(n_1) \ldots x_k(n_k) \underbrace{e(-1) \ldots e(-1)}_{l} \mathbf{1}, \quad x_i \in X, \quad x_1(n_1) \leqslant \ldots \leqslant x_k(n_k), \quad n_i < 0, \quad l, k \geqslant 0.$$

Это в точности линейный базис $U\bigl(\mathcal{L}(E)\bigr) \otimes_{U_+} \Bbbk\mathbf{1}$, где U_+ — подалгебра в $U\bigl(\mathcal{L}(E)\bigr)$, порождённая $x(n)$, $n \geqslant 0$, $x \in X$. Этот индуцированный модуль и есть в точности $U_{\mathrm{Vert}}(E)$, как рассмотрено в [18].

Пример 8. Пусть L — конформная алгебра Вирасоро из примера 1, обозначенная Vir. У неё есть нетривиальное одномерное центральное расширение $E = \mathrm{Vir}_c$, которое порождается элементами v и e, где $Te = 0$, e центральный и

$$(v\ _{(\lambda)}\ v) = (T + 2\lambda)v + \frac{1}{12} c\lambda^3 e,$$

$c \in \Bbbk$.

Фактор универсальной обёртывающей вертексной алгебры $U_{\mathrm{Vert}}(\mathrm{Vir_c})$ по идеалу, порождённому $e(-1)\mathbf{1} - \mathbf{1}$, известен как *вертексная алгебра Вирасоро с центральным зарядом c* (см., например, [14]). Правило $e(-1)\mathbf{1} \to \mathbf{1}$ не порождает новых несходящихся развилок в переписывающей системе для $U_{\mathrm{Vert}}(\mathrm{Vir_c})$. Следовательно, линейный базис вертексной алгебры Вирасоро состоит из терминальных слов вида (11), как и в классической теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта (PBW).

Пример 9. Пусть L — абелева конформная алгебра Ли ранга 1, т. е. $L = \Bbbk[T]v$ с умножением $(v\,_{(\lambda)}\,v) = 0$. Тогда для любого нечётного многочлена $f = f(\lambda) \in \Bbbk[\lambda]$, такого что $f(-\lambda) = -f(\lambda)$, существует нетривиальное одномерное центральное расширение алгебры L, конформная алгебра Ли $E = H_f = \Bbbk[T]v + \Bbbk e$, $Te = 0$, где

$$(v\,_{(\lambda)}\,v) = f(\lambda)e.$$

Для $f(\lambda) = \lambda$ фактор-алгебра $U_{\mathrm{Vert}}(H_\lambda)$ по идеалу, порождённому $e(-1)\mathbf{1}-\mathbf{1}$, известна как *вертексная алгебра Гейзенберга*.

С точки зрения поиска базиса Грёбнера—Ширшова нет большой разницы между вертексными обёртывающими для H_λ и H_f при любом нечётном многочлене f. В частности, линейный базис $U_{\mathrm{Vert}}(H_\lambda)/(e(-1)\mathbf{1} - \mathbf{1})$ состоит из слов вида (11).

Отметим, что вертексная алгебра Вейля также является фактором универсальной обёртывающей для одномерного центрального расширения (22) абелевой конформной алгебры L ранга 2, порождённой элементами x, y, такого что $\varphi_{x,x} = \varphi_{y,y} = 0$, $\varphi_{x,y} = -\varphi_{y,x} = 1$. Тогда $(x\,_{(0)}\,y) = e$ в E, поэтому $U_{\mathrm{Vert}}(E)/(e - \mathbf{1})$ — вертексная алгебра Вейля.

Чтобы вычислить базис Грёбнера—Ширшова в более сложном примере, изменим пример 3 следующим образом.

Пример 10. Пусть $X = \{x, y\}$, $N(x,x) = N(y,y) = 0$, $N(x,y) = N(y,x) = 1$ и $R = \{x\,.\,y - y\,.\,x - \mathbf{1}\}$.

Для нахождения базиса Грёбнера—Ширшова вертексной алгебры $V = \mathrm{Vert}(X, N|R)$ заметим, что $x\,.\,y - y\,.\,x = T(x\,_{(0)}\,y)$ по (2). Добавим новый порождающий $e = (x\,_{(0)}\,y)$, такой что $T^2e = 0$, и рассмотрим центральное расширение

$$0 \to \Bbbk e + \Bbbk Te \to E \to L \to 0,$$

где L — абелева конформная алгебра Ли, свободно порождённая над $\Bbbk[T]$ элементами x и y. Следовательно, $V \cong U_{\mathrm{Vert}}(E)/(Te - \mathbf{1})$.

Базис Грёбнера—Ширшова универсальной обёртывающей вертексной алгебры $U_{\mathrm{Vert}}(E)$ легко найти тем же путём, как в теореме 2, с таким же упорядочением порождающих $\mathcal{X}$. Линейный базис этой вертексной обёртывающей можно представить в виде

$$ue(-1)^l e(-2)^m \mathbf{1}, \tag{23}$$

где $u = z_1(n_1)\ldots z_k(n_k)$ — слово такого же вида, как в (21), $k, l, m \geqslant 0$. Добавленное соотношение $Te = \mathbf{1}$, представленное в виде $e(-2)\mathbf{1} \to \mathbf{1}$, не даёт новых несходящихся развилок, поэтому базис V в примере 10 состоит из таких же слов (23) с $m = 0$.

Замечание 3. Левосимметрическая подалгебра, порождённая в V из примера 10 множеством X относительно операции $(\cdot\,.\,\cdot)$, не является ассоциативной.

В самом деле, например, ассоциатор $(x\,.\,x)\,.\,y - x\,.\,(x\,.\,y)$ равен

$$y(-1)x(-1)x(-1)\mathbf{1} - Ty(0)x(-1)x(-1)\mathbf{1} - x(-1)x(-1)y(-1)\mathbf{1}$$

по (2) и (3). Поскольку

$$y(-1)x(-1)u\mathbf{1} = x(-1)y(-1)u\mathbf{1} - e(-2)u\mathbf{1}$$

и

$$y(0)x(-1)u\mathbf{1} = x(-1)y(0)u\mathbf{1} - e(-1)u\mathbf{1},$$

мы получаем

$$(x\,.\,x)\,.\,y - x\,.\,(x\,.\,y) = 2x(-2)e(-1)\mathbf{1} \neq 0.$$

4. Вертексные обёртывающие левосимметрических алгебр

Пусть Vert — категория вертексных алгебр, LieConf и LSym обозначают соответственно категории конформных алгебр Ли и левосимметрических алгебр. Мы уже рассматривали забывающий функтор Vert $\to$ LieConf и его левый присоединенный функтор $U_{\mathrm{Vert}}(\cdot)$. Как следует из определения вертексной алгебры, также имеется функтор

$$\Psi\colon \mathrm{Vert} \to \mathrm{LSym},$$

забывающий λ-скобку на вертексной алгебре. Отметим ряд свойств этого функтора Ψ. Напомним, что левосимметрические алгебры являются Ли-допустимыми, т. е. операция $[a, b] = a\,.\,b - b\,.\,a$ превращает $A \in \mathrm{LSym}$ в алгебру Ли $A^{(-)}$.

Предложение 3. *Пусть A — левосимметрическая алгебра, вложимая в алгебру вида $\Psi(V)$ для вертексной алгебры V, и пусть существует такое $N \in \mathbb{Z}_+$, что $N_V(a, b) \leqslant N$ для всех $a, b \in A$. Тогда A является Ли-нильпотентной.*

Последнее условие означает, что коммутаторная алгебра Ли $A^{(-)}$ нильпотентна.

Доказательство. Допустим, A вкладывается в $\Psi(V)$ для подходящей вертексной алгебры V. Если $(a\;{}_{(\lambda)}\;b) \in \lambda^k V[\lambda]$ для некоторых $a, b \in A$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то из (2) вытекает, что

$$[a, b] = a\,.\,b - b\,.\,a \in T^{k+1}V.$$

Следовательно, $([a, b]\;{}_{(\lambda)}\;A) \in \lambda^{k+1}V[\lambda]$. Отсюда получаем, что

$$A^{(n)} = \bigl[\ldots\bigl[[A, A], A\bigr], \ldots, A\bigr] \subset A$$

обладает следующим свойством: для каждого $a \in A^{(n)}$ и для каждого $b \in A$ $\deg_\lambda(a\,{}_{(\lambda)}\,b) \geqslant n+2$. Поскольку степень λ-скобки элементов из A равномерно ограничена константой $N-1$, мы получаем $A^{(N+1)}=0$. $\square$

Замечание 4. Предложение 3 легко обобщается на супералгебры.

В частности, если конечномерная левосимметрическая алгебра A вкладывается в вертексную алгебру, то условия предложения 3 выполнены. Как было отмечено в [12], простая левосимметрическая алгебра не может быть Ли-нильпотентной. Таким образом, мы получаем следствие.

Следствие 2. *Простая конечномерная левосимметрическая алгебра не вкладывается в вертексную алгебру.*

Ассоциативная и коммутативная алгебра A (с абелевой $A^{(-)}$), очевидно, вкладывается в вертексную алгебру: достаточно определить тождественно нулевую λ-скобку, т. е. положить $N = N(a,b) = 0$ для всех $a, b \in A$. Такая вертексная алгебра является всего лишь дифференциальной коммутативной алгеброй.

Можно было бы предположить, что 3-нильпотентность коммутаторной алгебры Ли $A^{(-)}$ левосимметрической алгебры A достаточна для того, чтобы A вкладывалась в такую вертексную алгебру V, что $N_V(A,A) \leqslant 1$. В конце данного раздела мы приведём пример, показывающий, что это не так.

Допустим, A — левосимметрическая алгебра с базисом X, такая что $A^{(-)}$ 3-нильпотентна. Тогда $V(A,1) = \mathrm{Vert}(X,\ N=1 \mid x\,.\,y - xy,\ x,y \in X)$ — универсальный объект в классе вертексных обёртывающих V алгебры A с условием $N_V(a,b) \leqslant 1$ для всех $a,b \in A$.

Лемма 1. *Для любых $x,y,z \in X$ в вертексной алгебре $V(A,1)$ выполнено равенство $T^2x(0)y(0)z(-1)\mathbf{1} = 0$.*

Доказательство. Используем (2) и правило умножения вида

$$y(-1)z(-1)\mathbf{1} \to (yz)(-1)\mathbf{1},$$

чтобы вывести

$$T^2x(0)y(0)z(-1)\mathbf{1} = Tx(0)y(0)z(-2)\mathbf{1} = Tx(0)[y(-1),z(-1)]\mathbf{1} = \\ = Tx(0)[y,z](-1)\mathbf{1} = \big[x,[y,z]\big](-1)\mathbf{1} = 0. \quad \square$$

Обозначим $\circlearrowleft F(a,b,c) = F(a,b,c) + F(b,c,a) + F(c,a,b)$ для алгебраического выражения F от трёх переменных.

Предложение 4. *Для всех $a,b,c \in A$ в алгебре $V(A,1)$ выполнено*

$$\circlearrowleft (a,b,c)_{.} = 0, \tag{24}$$

где $(a,b,c)_{.} = (a\,.\,b)\,.\,c - a\,.\,(b\,.\,c)$.

Доказательство. По определению

$$\circlearrowleft (a,b,c)_{.} = (ab).c - a.(bc) + (bc).a - b.(ca) + (ca).b - c.(ab) = [ab,c] + [bc,a] + [ca,b]$$

для $a, b, c \in A$. Из (2) следует, что

$$[ab, c] = -\int\limits_{-T}^{0} (c\,{}_{(\lambda)}\, ab)\, d\lambda = -T\big(c\,{}_{(0)}\,(a\,.\,b)\big).$$

Применим (3), чтобы получить $\big(c\,{}_{(0)}\,(a\,.\,b)\big) = a\,.\,(c\,{}_{(0)}\,b) + (c\,{}_{(0)}\,a)\,.\,b$. Отсюда следует

$$\circlearrowleft \big(c\,{}_{(0)}\,(a\,.\,b)\big) =$$
$$= a\,.\,(c_{(0)}\,b) + (c_{(0)}\,a)\,.\,b + b\,.\,(a_{(0)}\,c) + (a_{(0)}\,b)\,.\,c + c\,.\,(b_{(0)}\,a) + (b_{(0)}\,c)\,.\,a = \circlearrowleft [a, (c_{(0)}\,b)]$$

ввиду того, что $(x\,{}_{(0)}\,y) = -(y\,{}_{(0)}\,x)$ при всех $x, y \in A$.

Следовательно,

$$\circlearrowleft (a, b, c)_{.} = -T \circlearrowleft [a, (c\,{}_{(0)}\,b)] = -T \circlearrowleft \int\limits_{-T}^{0} \big(a\,{}_{(\lambda)}\,(c\,{}_{(0)}\,b)\big).$$

Заметим, что $a(n)c(0)b(-1)\mathbf{1} = 0$ при $n \geqslant 2$ ввиду соотношений локальности в соответствующей алгебре $\mathcal{A}(X, 1)$. Таким образом,

$$\big(a\,{}_{(\lambda)}\,(c\,{}_{(0)}\,b)\big) = a(0)c(0)b(-1)\mathbf{1} + \lambda a(1)c(0)b(-1)\mathbf{1}$$

и

$$T\int\limits_{-T}^{0} \big(a\,{}_{(\lambda)}\,(c\,{}_{(0)}\,b)\big) = T^2\left(a(0)c(0)b(-1)\mathbf{1} - \frac{T}{2}a(1)c(0)b(-1)\mathbf{1}\right) =$$
$$= T^2\left(\frac{3}{2}a(0)c(0)b(-1)\mathbf{1} - \frac{1}{2}a(1)c(0)b(-2)\mathbf{1}\right).$$

Первое слагаемое обращается в нуль по лемме 1, второе можно представить в виде $a(1)[c, b](-1)\mathbf{1} = 0$, пользуясь локальностью. Следовательно, $\circlearrowleft (a, b, c)_{.} = 0$. □

Остаётся заметить, что (24) не является следствием левосимметричности и 3-нильпотентности коммутаторной алгебры. Например, пусть A — трёхмерная алгебра с базисом x, y, z и следующей таблицей умножения:

$$xx = x + y, \quad xy = (1-\gamma)z, \quad yx = -\gamma z, \quad yy = \gamma z,$$

где $\gamma \in \Bbbk$, а остальные произведения нулевые. Это левосимметрическая алгебра с нильпотентной $A^{(-)}$, но $\circlearrowleft (x, x, x) = 3[x + y, x] = -3z \neq 0$. Поэтому A нельзя вложить в вертексную алгебру V, в которой $N_V(A, A) \leqslant 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда научных исследований, проект № 21-11-00286.

Литература

[1] Михалёв А. В., Пинчук И. А. Универсальные центральные расширения конформных алгебр Ли. Часть 2: суперслучай. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2010. — № 1. — С. 36—41.

[2] Adamović D., Pedić V. On fusion rules and intertwining operators for the Weyl vertex algebra // J. Math. Phys. — 2019. — Vol. 60, no. 8. — 081701.

[3] Bakalov B., Kac V. G. Field algebras // Int. Math. Res. Notices. — 2003. — Vol. 3. — P. 123—159.

[4] Bakalov B., De Sole A. Kac V. G. Computation of cohomology of vertex algebras // Jpn. J. Math. — 2021. — Vol. 16, no. 1. — P. 81—154.

[5] Barakat A., De Sole A., Kac V. G. Poisson vertex algebras in the theory of Hamiltonian equations // Jpn. J. Math. — 2009. — Vol. 4. — P. 141—252.

[6] Beilinson A. A., Drinfeld V. G. Chiral Algebras. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. — (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; Vol. 51).

[7] Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // Nucl. Phys. — 1984. — Vol. 241. — P. 333—380.

[8] Bokut L. A., Chen Y. Gröbner—Shirshov bases and their calculation // Bull. Math. Sci. — 2014. — Vol. 4, no. 3. — P. 325—395.

[9] Bokut L., Chen Y., Kalorkoti K., Kolesnikov P., Lopatkin V. Gröbner—Shirshov bases. — Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2020.

[10] Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F. Composition-Diamond lemma for associative conformal algebras // J. Algebra. — 2004. — Vol. 272. — P. 739—774.

[11] Borcherds R. E. Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1986. — Vol. 83. — P. 3068—3071.

[12] Burde D. Simple left-symmetric algebras with solvable Lie algebra // Manuscripta Math. — 1998. — Vol. 95, no. 3. — P. 397—411.

[13] Dotsenko V., Tamaroff P. Tangent Complexes and the Diamond Lemma. — `arXiv: 2010.14792`.

[14] Frenkel E., Ben-Zvi D. Vertex algebras and algebraic curves. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 88).

[15] Frenkel I. B., Lepowsky J., Meurman A. Vertex Operator Algebras and the Monster. — New York: Academic Press, 1998. — (Pure Appl. Math.; Vol. 134).

[16] Kac V. G. Vertex Algebras for Beginners. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. — (Univ. Lect. Ser., Vol. 10).

[17] Kang S.-J., Lee K.-H. Gröbner—Shirshov bases for representation theory // J. Korean Math. Soc. — 2000. — Vol. 37. — P. 55—72.

[18] Roitman M. On free conformal and vertex algebras // J. Algebra. — 1999. — Vol. 217. — P. 496—527.

[19] Xu X. Quadratic conformal superalgebras // J. Algebra. — 2000. — Vol. 231. — P. 1—38.