О гипотезе Жане для системы дифференциальных уравнений в частных производных

М. В. КОНДРАТЬЕВА
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: marina.kondratieva@math.msu.ru

УДК 512.628.2

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, кольцо дифференциальных многочленов, размерностный многочлен Колчина, дифференциальный тип, неприводимое алгебраическое дифференциальное множество.

Аннотация

М. Жане в 1921 г. высказал гипотезу, что аналитическое решение системы n совместных дифференциальных уравнений в m частных производных от n неизвестных функций должно содержать хотя бы одну произвольную функцию от k переменных, $k \geqslant m-1$. Э. Колчин на Московском международном конгрессе в 1966 г. сформулировал алгебраический вариант этой гипотезы. В случае линейных систем он был доказан Дж. Джонсоном в 1978 г., но для нелинейных систем вопрос до сих пор открыт. В этой статье показано, что обобщённая гипотеза Жане не выполняется для пересечения n дифференциальных гиперпространств в случае любого числа дифференцирований $m > 0$.

Abstract

M. V. Kondratieva, On the conjecture of M. Janet for systems of partial differential equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 123—131.

M. Janet in 1921 conjectured that an analytic solution to systems of n consistent m-partial differential equations of n unknown functions must contain at least one arbitrary function of k variables, $k \geqslant m-1$. E. Kolchin at the Moscow International Congress in 1966 formulated an algebraic version of this conjecture. In the case of linear systems, it was proven by J. Johnson in 1978, but for nonlinear systems the question is still open. This paper shows that the generalized Janet conjecture does not hold for the intersection of n differential hyperspaces in the case of any number of derivations $m > 0$.

1. Введение

Дифференциальная алгебра берёт начало в работах Дж. Ритта [9] и Э. Колчина [7]. Это раздел коммутативной алгебры, где все структуры снабжены операциями дифференцирования. Важную роль в дифференциальной алгебре имеет дифференциальный размерностный многочлен, который ввёл, используя идеи Дж. Ритта, Э. Колчин [7]. Этот полином является аналогом размерности для дифференциальных алгебраических многообразий, а некоторые гипотезы о его коэффициентах относятся к классическим нерешённым проблемам дифференциальной алгебры.

Дифференциальные алгебраические множества имеют много общего с обычными алгебраическими множествами. В то же время есть и отличия. Так, можно было бы предположить, что для этого многочлена выполняется аналог теоремы о размерности пересечения алгебраических множеств,

$$\omega_{X\cap Y}(s) \geqslant \omega_X(s) + \omega_Y(s) - n\binom{s+m}{m} \tag{1}$$

(здесь X, Y — неприводимые замкнутые дифференциальные подмножества $\mathcal{F}^n$, m — количество дифференцирований поля $\mathcal{F}$, $\omega(s)$ — размерностный многочлен). Но такая оценка может не выполняться даже для линейных систем (см. пример 3).

Попробуем сравнить только степени:

$$\deg\bigl(\omega_{X\cap Y}(s)\bigr) \geqslant \deg\left(\omega_X(s) + \omega_Y(s) - n\binom{s+m}{m}\right). \tag{2}$$

Однако Дж. Ритт [9] в случае одного дифференцирования привел пример двух неприводимых алгебраических множеств дифференциальной размерности 2 в трёхмерном пространстве (гиперплоскостей), пересечением которых является точка (многообразие дифференциальной размерности 0), что противоречит (1) и (2).

В. Зит в [10, теорема 4.1] доказал, что для линейных дифференциальных алгебраических групп выполняется равенство для типовой дифференциальной размерности

$$a_\tau(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) + a_\tau(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) = a_\tau(\mathcal{M}_1) + a_\tau(\mathcal{M}_2)$$

(здесь τ — максимум из степеней многочленов $\omega_{\mathcal{M}_1}$, $\omega_{\mathcal{M}_2}$, a_τ — коэффициент многочлена ω при степени τ). Отсюда, в частности, следует [10, следствие 4.2], что будет выполнено неравенство для дифференциальной размерности пересечения

$$\begin{multline} a_m\bigl(\omega_{X\cap Y}(s)\bigr) \geqslant \\ \geqslant a_m\left(\omega_X(s) + \omega_Y(s) - n\binom{s+m}{m}\right) = a_m\bigl(\omega_X(s)\bigr) + a_m\bigl(\omega_Y(s)\bigr) - n. \tag{3} \end{multline}$$

Дж. Ритт в основном рассматривал случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Его последователь Э. Колчин, изучая алгебраические дифференциальные уравнения в частных производных, получил некоторые оценки для размерностного многочлена (из известных порядков исходных уравнений), которые до сих пор не улучшены.

Среди проблем, поставленных Э. Колчиным [6], есть гипотеза Жане, которую он переформулировал в терминах дифференциальной алгебры следующим образом. Пусть $\Sigma = \{F_1 = 0, \ldots, F_n = 0\}$ — система n алгебраических дифференциальных уравнений от n переменных, $\mathcal{P}$ — простая компонента Σ, и пусть $\omega_{\mathcal{P}}$ (размерностный многочлен $\mathcal{P}$) имеет степень меньше $m-1$ ($m > 1$ — количество дифференцирований). Тогда либо $\omega_{\mathcal{P}}$ равен нулю, либо система Σ несовместная (не имеет решений).

Дж. Джонсон [5] решил эту задачу для независимых над простой компонентой $\mathcal{P}$ систем (в частности, для линейных уравнений). Его доказательство основано на результате К. Р. Гудерла [3] о проективной размерности дифференциальных модулей. В общем случае гипотеза Жане в формулировке Колчина до сих не доказана.

В этой работе мы рассмотрим обобщённую гипотезу Жане, которая утверждает, что каждая компонента пересечения $\Sigma' = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{F_i = 0\}$ n гиперпространств $Z(\{F_i\})$ в n-мерном пространстве $\mathcal{F}^n$ либо является точкой, либо её размерностный многочлен имеет степень не менее $m-1$. Иными словами, размерностный многочлен такой компоненты не может иметь степень больше 0, но меньше $m-1$ и не может быть ненулевой константой. Отметим, что если неравенство (2) верно, то и обобщённая гипотеза Жане должна выполняться.

Мы докажем, что обобщённая гипотеза Жане не выполняется для $n \geqslant 2$. Более точно, пример 4 доказывает существование n дифференциальных многочленов, общие нули которых пересекаются по дифференциальному алгебраическому множеству, одна из компонент которого имеет дифференциальный тип $m-2$ ($m > 1$). Неизвестно, выполняется ли обобщённая гипотеза Жане, если в её формулировке позволить степени размерностного многочлена компоненты пересечения быть равной $m-2$.

2. Предварительные факты

Основные понятия и факты изложены в [7—9].

Определение 1. Оператор ∂, действующий на коммутативном кольце $\mathbb{K}$ с единицей, называется *дифференциальным оператором* (или *дифференцированием*), если он линеен, $\partial(a+b) = \partial(a) + \partial(b)$, и выполняется правило Лейбница $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$ для всех элементов $a, b \in \mathbb{K}$.

Дифференциальным кольцом (или Δ-кольцом) будем называть коммутативное кольцо $\mathbb{K}$ с конечным множеством $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ попарно коммутирующих дифференцирований на $\mathbb{K}$.

Пусть
$$\Theta = \Theta(\Delta) = \left\{\partial_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial_m^{i_m} \;\middle|\; i_j \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right\}.$$
Для $\theta = \partial_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial_m^{i_m}$ определим
$$\operatorname{ord}(\theta) = i_1 + \ldots + i_m, \quad \Theta(s) = \{\theta \in \Theta \mid \operatorname{ord}(\theta) \leqslant s\}.$$

Пусть

$$\mathbb{R} = \mathbb{K}\{y_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} := \mathbb{K}[\theta y_j \mid \theta \in \Theta,\ 1 \leqslant j \leqslant n] \,—$$

кольцо коммутативных многочленов с коэффициентами в $\mathbb{K}$ от бесконечного числа переменных $\Theta Y = \Theta(y_j)_{j=1}^n$ и

$$\mathbb{R}_s = \mathbb{K}[\Theta(s) y_j], \quad s \geqslant 0.$$

Кольцо $\mathbb{R}$ называется *кольцом дифференциальных многочленов* от дифференциальных переменных $y_1, \ldots, y_n$ с коэффициентами в $\mathbb{K}$.

Всюду в дальнейшем мы полагаем, что кольцо $\mathbb{K}$ является универсальным дифференциальным полем $\mathcal{F}$ характеристики 0. Если количество дифференцирований $|\Delta|$ равно 1, будем говорить об *обыкновенных* дифференциальных многочленах, если больше 1 — об уравнениях и многочленах *в частных производных*. Идеал I в кольце $\mathbb{R} = \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ называется *дифференциальным*, если $\partial f \in I$ для всех $f \in I$ и $\partial \in \Delta$. Будем обозначать через $\{I\}$ наименьший радикальный дифференциальный идеал, содержащий I. *Простой компонентой* идеала $\{I\}$ будем называть наименьший простой Δ-идеал, содержащий $\{I\}$. Согласно [7, с. 126, теорема 1] каждый радикальный дифференциальный идеал имеет конечное число простых компонент и является их пересечением.

Каждому радикальному дифференциальному идеалу I кольца $\mathbb{R}$ поставим в соответствие множество его общих нулей (или решений)

$$Z(I) = \{(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathcal{F}^n \colon f(\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0 \text{ для всех } f \in I\}.$$

Подмножество $\mathcal{F}^n$, которое является общим нулём некоторого радикального дифференциального идеала, называется *дифференциальным алгебраическим множеством*. Если $I = \{F\}$, то будем называть $Z(I)$ гиперпространством (иногда для случая $n = 3$ используют термин гиперплоскость). Определив как открытые множества, являющиеся дополнением к всевозможным дифференциальным алгебраическим множествам, мы можем ввести топологию Зариского на $\mathcal{F}^n$. Каждое дифференциальное алгебраическое множество раскладывается в объединение конечного числа неприводимых замкнутых (в смысле введённой топологии) множеств, которые называют его простыми компонентами. В кольце $\mathbb{R}$ неприводимые замкнутые подмножества $Z(I)$ соответствуют простым компонентам идеала $\{I\}$.

Пусть $\mathcal{P}$ — простой дифференциальный идеал кольца $\mathbb{R} = \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, $\mathcal{P}_s = \mathcal{P} \cap \mathbb{R}_s$. Определим *дифференциальный размерностный полином* (*Колчина*) $\omega_{\mathcal{P}}(s)$ следующим условием: для всех достаточно больших s $\omega_{\mathcal{P}}(s) = \dim \mathcal{P}_s$ ($\dim \mathcal{P}_s$ — алгебраическая размерность простого идеала $\mathcal{P}_s$ в кольце $\mathbb{R}_s$).

Размерностный полином может быть записан в виде

$$\sum_{i=0}^{d} a_i \binom{s+i}{i}, \quad d \leqslant m,$$

где a_i — целые. Будем называть эти числа его *стандартными коэффициентами*.

Определение 2. Стандартный коэффициент a_m называют *дифференциальной размерностью*, степень $d = \deg\bigl(\omega_{\mathcal{P}}(s)\bigr)$ называют *дифференциальным типом*.

Определение 3. *Ранжиром* на $\{y_1, \ldots, y_n\}$ будем называть полный порядок $\leqslant$ на множестве производных $T = \theta y_j$ ($\theta \in \Theta$, $1 \leqslant j \leqslant n$), удовлетворяющий следующим двум условиям:

— $u \leqslant \theta u$ для любых $\theta \in \Theta$ и $u \in T$;

— если $u \leqslant v$, то $\theta u \leqslant \theta v$ для любых $u \in T$, $v \in T$ и $\theta \in \Theta$.

Ранжир называется *степенным*, если из условия $\operatorname{ord}(\theta_1) \leqslant \operatorname{ord}(\theta_2)$ следует $\theta_1 y_i \leqslant \theta_2 y_k$ для всех $1 \leqslant i, k \leqslant n$.

Пусть задан ранжир на множестве $\{y_1, \ldots, y_n\}$ и $A \in \mathbb{R}$. Тогда

$$A = \sum_{i=0}^{d} I_i \mathbf{u}_A^i,$$

где $\mathbf{u}_A$ — производная, имеющий максимальный ранжир из входящих в A.

$$S_A = \sum_{i=1}^{d} i I_i \mathbf{u}_A^{i-1}$$

будем называть *сепарантой* A.

Определим

$$\mathcal{P}(A) = [A] : S_A^{\infty} \tag{4}$$

как множество многочленов $f \in \mathbb{R}$, для которых существует степень k, такая что $S_A^k f \in [A]$.

Согласно [7, с. 155, теорема 3] для каждого неразложимого дифференциального многочлена $A \in \mathbb{R}$ $\mathcal{P}(A_i)$ является простой компонентой идеала $\{A\}$ (и называются главной компонентой). Все остальные компоненты этого идеала содержат сепаранту S_A и называются сингулярными.

Нас интересует следующий вопрос.

Вопрос. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{R}$ — система n дифференциальных многочленов и $\mathcal{P}$ — простая компонента идеала $\{\Sigma\}$. Как оценить дифференциальный тип $\mathcal{P}$?

3. Основные результаты

В книге Дж. Ритта [9, с. 133] дан пример обыкновенного дифференциального многочлена F первого порядка от трёх переменных u, v, y, общий нуль главной компоненты которого $Z\bigl(\mathcal{P}(F)\bigr) = Z([F] : S_F^{\infty})$ даёт в пересечении с гиперплоскостью $y = 0$ точку $(0, 0, 0)$. Отметим, что дифференциальная размерность (любой) компоненты одного нетривиального дифференциального многочлена от n неизвестных равна $n - 1$ (теорема о компонентах [7, с. 185]). Поэтому пример Ритта опровергает аналог теоремы о размерности (1): здесь

$$\omega_X(s) = 2(s+1) + 1, \quad \omega_Y(s) = 2(s+1), \quad \omega_{X \cap Y} = 0, \quad m = 1, \quad n = 3.$$

Хотя в этом примере только одно дифференцирование, его можно рассматривать как систему в частных производных, формально добавив ещё один оператор дифференцирования.

Но гипотезы Жане пример Ритта всё же не опровергает, так как размерностный многочлен пересечения равен 0.

Пример 1. Пусть $m = |\Delta| > 1$, $F_i = y_i \subset \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Размерностный многочлен этой системы n дифференциальных многочленов равен 0, поэтому такой вариант в гипотезе Жане возможен.

Может ли размерностный многочлен компоненты пересечения быть ненулевой константой? Ответ даёт следующий пример.

Пример 2. Пусть $\Delta = \{\partial_x, \partial_y\}$,

$$F = u^5 - (\partial_x v)^5 + \partial_y v(u\partial^2_{x,x}v - \partial_x u \partial_x v)^2 \in \mathcal{F}\{u, v\}.$$

Фиксируем степенной ранжир на множестве дифференциальных неизвестных u, v. По теореме о малых степенях [7, с. 187] множество общих нулей F является объединением шести дифференциальных компонент, пять из которых сингулярные ($Z([u - k_i\partial_x v])$, k_i — константы поля $\mathcal{F}$, для которых выполняется $k_i^5 = 1$, $i = 1, \ldots, 5$) и одна главная:

$$\{F\} = \mathcal{P}(F) \bigcap_{i=1}^{5} [u - k_i \partial_x v]$$

(определение $\mathcal{P}(F)$ дано формулой (4)).

Докажем прямым вычислением, что множества $Z([u - k_i\partial_x v])$ являются простыми компонентами для $Z(\{F\})$, и найдём пересечение общих нулей главной компоненты с гиперплоскостью $\partial_y v = 0$.

Обозначим через S сепаранту F, $S = (u\partial^2_{x,x}v - \partial_x u\partial_x v)$. Пусть

$$G = \partial_x F = 5u^4\partial_x u - 5(\partial_x v)^4 \partial^2_{x,x}v + \partial^2_{x,y}vS^2 + 2\partial_y vS\partial_x S.$$

Теперь умножим F на $5\partial_x u$, G на u и вычтем, получим многочлен

$$f_1 = 5S(\partial_x v)^4 + 5\partial_y v\partial_x uS^2 - u\partial^2_{x,y}vS^2 - 2u\partial_y vS\partial_x S \in \{F\}.$$

Так как $f_1 : S \in \mathcal{P}(F)$, имеем

$$5(\partial_x v)^4 + 5\partial_y v\partial_x uS - u\partial^2_{x,y}vS - 2u\partial_y v\partial_x S \in \mathcal{P}(F). \tag{5}$$

Заметим, что этот полином не принадлежит ни одной из пяти линейных компонент $\{F\}$, так как все они обнуляют сепаранту S.

Аналогичным образом, умножив F на $5\partial^2_{x,x}v$, а G на $\partial_x v$, получим, что

$$f_2 = S(u^4 + g\partial^2_{x,y}v + h\partial_y v) \in \{F\},$$

откуда выведем, что

$$u^4 + g\partial^2_{x,y}v + h\partial_y v \in \mathcal{P}(F), \quad g, h \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Поскольку из $\partial_y v = 0$ и условий (5), (6) следует, что $u^4 = 0$, $(\partial_x v)^4 = 0$, пересечение общих нулей идеала $\mathcal{P}(F)$ с решениями уравнения $\partial_y v = 0$ содержится в множестве нулей системы $u = 0$, $\partial_x v = 0$, $\partial_y v = 0$.

С другой стороны, указанное пересечение не может быть пустым, так как многочлен F однородный. Отметим, что именно степень 5 мономов u^5, $(\partial_x v)^5$ гарантирует, что пересечение не пусто. Выбрав меньшую степень, мы бы нашли в идеале $\mathcal{P}(F)$ многочлен вида $1 + g\partial^2_{x,y}v + h\partial_y v$, что приведёт к пустоте пересечения.

Поскольку только производные от переменной v содержатся в многочлене F, пересечение совпадает с множеством нулей системы $u = 0$, $\partial_x v = 0$, $\partial_y v = 0$, и его размерностный многочлен $\omega(s)$ равен 1.

Найдём размерностные многочлены идеалов:

$$
\begin{aligned}
&\omega_{\mathcal{P}(F)}(s) = \binom{s+2}{2} + \omega_{(10)}(s) = \\
&\quad = \binom{s+2}{2} + \binom{s+2}{2} - \binom{s+2-1}{2} = \binom{s+2}{2} + (s+1), \\
&\omega_{[\partial_y v]}(s) = \binom{s+2}{2} + (s+1), \\
&\omega_{[u,\partial_x v,\partial_y v]}(s) = 1.
\end{aligned}
$$

Согласно предположению (1) мы бы имели $1 \geqslant 2(s+1)$, согласно (2) $0 \geqslant 1$, так что не выполняются условия (1), (2). Поскольку $m = 2$, $n = 2$, неравенство (3) выполняется.

Пример 3. Заметим, что для линейных идеалов $\mathcal{P}_1 = [u+k_i\partial_x v]$ и $\mathcal{P}_2 = [\partial_y v]$ выполняются условия (2), (3), а (1) не выполняется. В самом деле,

$$
\begin{aligned}
&\omega_{\mathcal{P}_1}(s) = \omega_{(1,0)v}(s) = \binom{s+2}{2} + s + 1, \\
&\omega_{\mathcal{P}_2}(s) = \omega_{(0,1)v}(s) = \binom{s+2}{2} + s + 1, \\
&\omega_{\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2}(s) = \omega_{[u+\partial_x y,\partial_y v]}(s) = \omega_{[u+\partial_x v,\partial_y v,\partial_y u]}(s) = \\
&\quad = \omega_{(0,1)u,(1,0)v,(0,1)v}(s) = (s+1) + 1.
\end{aligned}
$$

Согласно (1) должно выполняться $(s+1)+1 \geqslant 2(s+1)$. Неравенства для степени ($\deg = 1$, (2)) и старшего коэффициента ($m = 2$, (3)) являются верными.

Следующий пример показывает, что обобщённая гипотеза Жане неверна для любых $m > 1$, $n > 1$.

Пример 4. Пусть $\Delta = \{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_m\}$,

$$F_1 = y_1^5 - (\partial_1 y_2)^5 + \partial_2 y_2 (y_1 \partial^2_{1,1} y_2 - \partial_1 y_1 \partial_1 y_2)^2 \in \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}.$$

Рассмотрим пересечение общих нулей идеала $\mathcal{P}(F_1)$ с общими нулями многочленов $F_2 = \partial_2 y_2$, $F_3 = y_3, \ldots,$ $F_n = y_n$. Оно совпадает с нулями системы

$y_1 = 0,\ \partial_1 y_2 = 0,\ \partial_2 y_2 = 0,\ y_3 = 0, \ldots,\ y_n = 0$ и размерностный многочлен пересечения равен $\omega(s) = \binom{s+m-2}{m-2}$.

Теперь найдём

$$\bigcap_{i=1}^{n} Z(\{F_i\}).$$

Как и в примере 2, $\{F_1\}$ имеет шесть простых компонент. Обозначим через $\mathcal{M}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, соответствующие дифференциальные алгебраические множества (общих нулей). Так как многочлены F_j для $2 \leqslant j \leqslant n$ линейны, их множества нулей $\mathcal{M}_{F_j}$ состоят из одной компоненты. Найдём

$$\left(\bigcup_{i=1}^{6} \mathcal{M}_i\right) \cap \mathcal{M}_{F_2} \cap \mathcal{M}_{F_3} \cap \ldots \cap \mathcal{M}_{F_n} = \bigcup_{i=1}^{6} \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_{F_2} \cap \ldots \cap \mathcal{M}_{F_n}.$$

Мы уже показали, что алгебраическое множество $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_{F_2} \cap \ldots \cap \mathcal{M}_{\mathcal{F}_n}$ является неприводимым и имеет размерностный многочлен $\binom{s+2}{2}$. Остальные простые компоненты пересечения $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_{F_2} \cap \ldots \cap \mathcal{M}_{\mathcal{F}_n}$ $(i \geqslant 2)$ являются общими нулями идеалов $[y_1 - k_i \partial_y v, y_3, \ldots, y_n]$ и, как показано в примере (3), имеют размерностные многочлены $\binom{s+m-1}{m-1} + \binom{s+m-2}{m-2}$.

Итак, мы видим, что в примере (4) только одна компонента пересечения n дифференциальных гиперпространств в $\mathcal{F}^n$ имеет дифференциальный тип $m-2$, остальные имеют тип $m-1$. Неизвестно, может ли быть так, что все компоненты пересечения имеют размерностный многочлен степени меньше $m-2$ и больше 0. Неизвестно, может ли некоторая компонента пересечения таких гиперпространств иметь дифференциальный тип меньше $m-2$ и при этом не быть точкой.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

Литература

[1] Кондратьева М. Верхняя граница минимизирующих коэффициентов размерностного многочлена Колчина // Программирование. — 2010. — Т. 36, № 2. — С. 83—86.

[2] Кондратьева М. В. Оценка типовой дифференциальной размерности системы линейных дифференциальных уравнений // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 5. — С. 259—269.

[3] Goodearl K. R. Global dimension of differential operator rings. II // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 209, No. 6. — P. 5—85.

[4] Janet M. Sur les systémes aux dérivées partielles comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1921. — Vol. 172, no. 1. — P. 1637—1639.

[5] Johnson J. L. Systems of n partial differential equations in n unknown functions: the conjecture of M. Janet // Trans. Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 242. — P. 329—334.

[6] Kolchin E. R. Some problems in differential algebra // Proc. Int. Congress of Mathematicians (Moscow, 1966). — Moscow, 1968. — P. 269—276.

[7] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — Academic Press, 1973.

[8] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Kluwer Academic, 1999.

[9] Ritt J. Differential Algebra. — New York: Amer. Math. Soc., 1950.

[10] Sit W. Typical differential dimension of the intersection of linear differential algebraic groups // J. Algebra. — 1974. — Vol. 32, no. 3. — P. 476—487.