Классификация коммутативных подалгебр длины $n-2$ в алгебре матриц порядка n над алгебраически замкнутыми полями

О. В. МАРКОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Петербургский государственный университет путей сообщения императора Александра I
e-mail: ov_markova@mail.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: функция длины алгебры, коммутативная матричная подалгебра, индекс нильпотентности, разбиение натурального числа.

Аннотация

В работе получена классификация с точностью до сопряжённости коммутативных подалгебр длины $n-2$ в алгебре матриц порядка n, т. е. длины, на единицу меньшей максимальной, над алгебраически замкнутыми полями. Показано, что для произвольного фиксированного порядка матриц количество попарно несопряжённых алгебр указанного типа конечно. С использованием числа разбиений натуральных чисел получена формула количества различных алгебр как функция от порядка матриц.

Abstract

O. V. Markova, Classification of commutative subalgebras of length $n-2$ in the algebra of $n\times n$ matrices over algebraically closed fields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 133—159.

In this paper, commutative subalgebras of length $n-2$ in the algebra of matrices of order n over algebraically closed fields are classified up to similarity. In other terms, commutative algebras having length one less than the maximum value are described. It is shown that for an arbitrary fixed order of matrices, the number of pairwise non-conjugate algebras of the indicated type is finite. Using the number of partitions of natural numbers, a formula is obtained for the number of different algebras as a function of the order of the matrices.

1. Введение

Изучение коммутативных матричных подалгебр является классической областью исследований, которая активно развивалась в течение XX века и в настоящее время продолжает привлекать интерес математиков по всему миру. Можно отметить такие направления исследований, как изучение возможных значений

Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 1, с. 133—159.

числовых характеристик коммутативных матричных подалгебр, вопросы построения и классификации.

Для функции размерности эти исследования восходят к работе И. Шура 1905 г. [35], в которой получена верхняя оценка размерности $[n^2/4]+1$ коммутативных подалгебр алгебры матриц порядка n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Затем в работе Н. Джекобсона 1944 г. [27] оценка Шура была перенесена на случай произвольного поля. Указанные доказательства основаны на матричной технике, позже, в 1976 г., У. Густафсон [23] получил теоретико-кольцевое доказательство. Отметим также работу М. Герштенхабера 1961 г. [22], в которой получена оценка размерности коммутативной алгебры, порождённой двумя матрицами, монографию Д. А. Супруненко и Р. И. Тышкевич 1966 г. [16] и также, например, [19,20,28,29,37,40]. Открытой остаётся гипотеза Густафсона [23] о верхней оценке $[(n-k+2)^2/4]+k-1$ для размерности коммутативных матричных алгебр в виде функции от двух переменных — порядка матриц n и индекса нильпотентности радикала Джекобсона k.

Важную роль в изучении конечномерных алгебр играет такой инвариант алгебры, как длина (длина понимается в смысле определения 2.4). Длина в некотором смысле измеряет мультипликативную сложность данной порождающей системы или алгебры в целом, поэтому она важна в ряде задач вычислительных методов теории матриц (см., например, [10, 18]). Заметим, что длина является нетривиальной для вычисления характеристикой, поскольку для нахождения длины алгебры требуется найти длины всех её систем порождающих.

Задача вычисления длины впервые возникла в работах А. Спенсера и Р. Ривлина 1958—1960 гг. [38, 39] для полной алгебры матриц порядка 3 в связи с возможным применением в механике сплошных сред. В общей формулировке проблема вычисления длины полной алгебры матриц
$Ma_n(\mathbb{F})$ как функции порядка матриц была поставлена А. Пазом в 1984 г. в [34] и до сих пор является открытой. Гипотеза Паза состоит в том, что зависимость между длиной и порядком матриц линейная и задаётся следующей формулой.

Гипотеза 1.1 [34]. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $l\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big)=2n-2$.

Известно, что эта гипотеза верна при $n\leqslant 5$ (см. [34,36]). Известные оценки длины полной матричной алгебры получены А. Пазом [34], К. Паппаченой [33] и Я. Шитовым [36], однако ни одна из них не является линейной.

Множество существенных результатов получено для длин собственных подалгебр и для длины полной матричной алгебры при дополнительных ограничениях на порождающие множества (см., например, работы [8, 12, 24, 26, 30—32] и библиографию в них).

Исследование длины коммутативных подалгебр алгебры матриц также восходит к работе А. Паза [34], в которой было установлено, что длина любой коммутативной подалгебры алгебры матриц порядка n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ не больше $n-1$. Поэтому для комплексных коммутативных подалгебр была получена линейная относительно порядка матриц верхняя оценка длины.

В [25] показано, что эта оценка справедлива в случае произвольного поля и является точной.

Теорема 1.2 [25, теорема 6.1]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant n-1$.*

Таким образом, можно говорить о коммутативных подалгебрах $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ длины $n-1$ как о коммутативных подалгебрах *максимальной длины*. В [5,11,25] охарактеризован класс подалгебр, для которых эта оценка достигается (подробнее см. раздел 2), в частности, получено, что максимальные по длине коммутативные подалгебры в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ являются также максимальными по включению. Пример однопорождённых подалгебр показывает, что коммутативная подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ может иметь любую длину из отрезка $[0, n-1]$. Естественным образом возникает вопрос описания коммутативных подалгебр в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ заданной длины $k \in [0, n-1]$. Для алгебр минимальной длины ответ на этот вопрос получен автором в [7].

В данной работе получено описание с точностью до сопряжённости коммутативных подалгебр длины $n-2$ в алгебре матриц порядка n, т. е. длины, на единицу меньшей максимальной, над алгебраически замкнутыми полями. Показано, что для фиксированного n количество попарно несопряжённых алгебр указанного типа конечно, получена формула их количества с использованием числа разбиений натуральных чисел.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 вводится система обозначений, здесь же представлены некоторые вспомогательные результаты относительно длины алгебр, матричных подалгебр, порождённых циклическими матрицами, а также нильпотентных и локальных алгебр. В разделе 3 задача описания коммутативных алгебр длины $n-2$ сводится к задаче описания нильпотентных и локальных алгебр длины $n-2$ и их прямых сумм с коммутативными алгебрами максимальной длины. В разделе 4 показано соответствие между коммутативными нильпотентными подалгебрами длины $n-2$ и подалгебрами индекса нильпотентности $n-1$. В разделе 5 вычислены длины прямых сумм локальных алгебр длины $n-2$ и коммутативных алгебр максимальной длины. В разделе 6 представлен основной результат данной работы (теорема 6.2): получено описание с точностью до сопряжённости коммутативных подалгебр длины $n-2$ в алгебре матриц порядка n над алгебраически замкнутыми полями. Показано, что для фиксированного n количество попарно несопряжённых алгебр указанного типа конечно, получена формула их количества как функция от порядка матриц с использованием числа разбиений натуральных чисел.

2. Обозначения, определения и известные результаты

В данном разделе вводится система обозначений, здесь же представлены некоторые вспомогательные результаты относительно длины алгебр, строения коммутативных нильпотентных матричных алгебр и матричных подалгебр, порождённых циклическими матрицами.

Понятия теории колец и алгебр, использованные в статье, можно найти, например, в [15]. Все рассматриваемые в работе алгебры — ассоциативные конечномерные алгебры с единицей над полями.

2.1. Системы порождающих и длина

Важную роль в изучении конечномерных алгебр играет такой инвариант алгебры, как *длина*, определим её согласно [33].

Пусть $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ — непустое конечное множество (алфавит). Конечные последовательности букв из B назовём словами. Пусть B^* обозначает множество всех слов в алфавите B, F_B — свободную полугруппу над алфавитом B, т. е. B^* с операцией конкатенации.

Определение 2.1. *Длина* слова $b_{i_1} \dots b_{i_t}$, где $b_{i_j} \in B$, равна t. Будем считать 1 (пустое слово) словом от элементов B *длины* 0.

Пусть B^i обозначает множество всех слов в алфавите B длины, не большей i, $i \geqslant 0$.

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ и её конечную систему порождающих $\mathcal{S}$. Произведения элементов из порождающего множества $\mathcal{S}$ можно рассматривать как образы элементов свободного моноида $F_{\mathcal{S}}$ при естественном гомоморфизме и их также можно называть словами от образующих и использовать естественное обозначение $\mathcal{S}^i$.

Положим $\mathcal{S}^0 = \{1_{\mathcal{A}}\}$, если алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $1_{\mathcal{A}}$, иначе положим $\mathcal{S}^0 = \varnothing$.

Обозначение 2.2. Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$, где $\langle S \rangle$ обозначает линейную оболочку множества S в некотором линейном пространстве над полем $\mathbb{F}$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle = \mathbb{F}$ для алгебр с единицей и $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = 0$ иначе. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\{a_1, \dots, a_k\}$.

Из конечномерности $\mathcal{A}$ следует, что найдётся такой номер h, что $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$. Если для некоторого $h \geqslant 0$ выполнено $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$, то

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$$

и также $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geqslant h$.

Определение 2.3. *Длиной системы порождающих* $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{A}$ называется число

$$l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ \colon \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

Определение 2.4. *Длиной алгебры* $\mathcal{A}$ называется число

$$l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) \colon \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

Обозначение 2.5. Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\deg a$ обозначает степень минимального многочлена элемента a над полем $\mathbb{F}$. Из конечномерности алгебры $\mathcal{A}$ следует, что для любого $a \in \mathcal{A}$ справедлива оценка $\deg a \leqslant \dim \mathcal{A}$. Тогда положим

$$m(\mathcal{S}) = \max\{\deg w, w \in \mathcal{S}\}, \quad m(\mathcal{A}) = \max_{\mathcal{S}} m(\mathcal{S}) = \max_{a\in\mathcal{A}}\{\deg a\}.$$

Теорема 2.6 [25, теорема 4.1]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{F}$ длин $l_{\mathcal{A}}$ и $l_{\mathcal{B}}$ соответственно. Тогда выполнены следующие неравенства*:

$$\max\{l_{\mathcal{A}}, l_{\mathcal{B}}\} \leqslant l(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \leqslant l_{\mathcal{A}} + l_{\mathcal{B}} + 1.$$

Предложение 2.7 [25, предложение 2.1]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра над $\mathbb{F}$. Если $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — система порождающих этой алгебры и $C = \{c_{ij}\} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{F})$ — невырожденная матрица, то множество координат вектора*

$$C \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \ldots + c_{1k}a_k \\ \vdots \\ c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2 + \ldots + c_{kk}a_k \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

т. е. множество

$$\mathcal{S}_c = \{c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \ldots + c_{1k}a_k, \ldots,\ c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2 + \ldots + c_{kk}a_k\},$$

является системой порождающих алгебры $\mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}_c) = l(\mathcal{S})$.

Предложение 2.8 [25, предложение 2.2]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра с единицей над $\mathbb{F}$. Пусть $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — система порождающих этой алгебры, такая что $1_{\mathcal{A}} \notin \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$. Тогда для любых $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{F}$ множество $\mathcal{S}_1 = \{a_1 + \gamma_1 1_{\mathcal{A}}, \ldots, a_k + \gamma_k 1_{\mathcal{A}}\}$ — система порождающих алгебры $\mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}_1) = l(\mathcal{S})$.*

Предложение 2.9 [25, предложение 2.4]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A}$ — конечномерная $\mathbb{F}$-алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — система порождающих для алгебры $\mathcal{A}$. Тогда существует система порождающих $\mathcal{S}'$ для $\mathcal{A}$, удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$;
2) $1_{\mathcal{A}} \notin \langle \mathcal{S}' \rangle$;
3) $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}') = |\mathcal{S}'| + 1$;
4) $l(\mathcal{S}') = l(\mathcal{S})$.

2.2. Циклические матрицы

Пусть далее $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ обозначает алгебру матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{T}_n(\mathbb{F})$ — подалгебру верхнетреугольных матриц в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $\mathrm{N}_n(\mathbb{F})$ — подалгебру нильпотентных матриц в $\mathrm{T}_n(\mathbb{F})$ (иными словами, алгебру верхних нильтреугольных матриц). Через $E_{i,j}$ будем обозначать матричную единицу, т. е. матрицу с 1 на позиции (i,j) и нулями на остальных местах. Для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ через a_{ij} и $(A)_{ij}$ будем обозначать её элемент, стоящий на позиции (i,j).

Нам потребуется следующий специальный класс матриц.

Определение 2.10. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если $\deg C = n$.

Известно больше десятка других содержательных эквивалентных описаний циклических матриц (см., например, [21]).

Отметим некоторые основные свойства циклических матриц, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 2.11 [8, лемма 4.21]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — циклическая матрица. Тогда матрица $C + \alpha E$ является циклической для любого $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Предложение 2.12 [9, предложение 3.2]. *Пусть $n \geqslant 2$ и $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда матрица $C = (c_{ij}) \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$, такая что все элементы $c_{k,k+1}$ отличны от 0, является циклической.*

Лемма 2.13 [25, лемма 6.3]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Если существует циклическая матрица $A \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ является подалгеброй, порождённой матрицей A и $l(\mathcal{A}) = n - 1$.*

Предложение 2.14 [8, предложение 4.26]. *Пусть $k, m, n \in N$, $n = k + m$, $\mathbb{F}$ — поле, содержащее не менее $[n^2/4] + 1$ различных элементов ($[.]$ обозначает целую часть числа). Рассмотрим подалгебры $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_k(\mathbb{F})$, $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{M}_m(\mathbb{F})$, порождённые циклическими матрицами. Обозначим $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ блочно-диагональную подалгебру в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Тогда $\mathcal{C}$ порождена циклической матрицей.*

Лемма 2.15 [8, лемма 4.34]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей над $\mathbb{F}$. Тогда $l(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A} - 1$ тогда и только тогда, когда существует элемент $A \in \mathcal{A}$ степени $\deg A = \dim \mathcal{A}$, порождающий алгебру $\mathcal{A}$. Как следствие, алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна.*

Предложение 2.16 [8, предложение 4.56]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, содержащая единичную матрицу. Тогда*

1) *если $m(\mathcal{A}) = n - 1$ и $\dim \mathcal{A} \leqslant 2n - 3$, то $l(\mathcal{A}) \leqslant n - 2$;*
2) *если $m(\mathcal{A}) \leqslant n - 2$ и $\dim \mathcal{A} \leqslant 2n - 5$, то $l(\mathcal{A}) \leqslant n - 3$.*

Предложение 2.17 [9, предложение 3.4]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ — поле и $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Пусть V — подпространство в $\mathbb{F}^n$, такое что для каждого $i = 1, \ldots, n$ найдётся вектор $v(i) \in V$, удовлетворяющий условию $v(i)_i \neq 0$ (векторы $v(i)$ не обязательно попарно различны). Тогда существует такой вектор $v \in V$, $v \in \langle v(i) \mid i = 1, \ldots, n \rangle$, что $v_i \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Следствие 2.18. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле, в котором есть по крайней мере n различных ненулевых элементов, и $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — произвольная матрица. Тогда найдётся число $\lambda \in \mathbb{F}$, такое что матрица $A_1 = A + \lambda E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ невырожденна.*

Доказательство. Пусть $\bar{\mathbb{F}}$ обозначает алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Обозначим через $\bar{\Gamma} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\} \subset \bar{\mathbb{F}}$ множество всех различных собственных значений матрицы A, $\Gamma = \bar{\Gamma} \cap \mathbb{F}$. Имеем $|\Gamma| \leqslant |\bar{\Gamma}| \leqslant n$. Если $0 \notin \Gamma$, в частности при $|\Gamma| = 0$, матрица A невырожденна и можно положить $\lambda = 0$. Будем считать, что $1 \leqslant |\Gamma| \leqslant n$ и $0 \in \Gamma$, т. е. $\Gamma = \{0, \gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_s}\}$, $0 \leqslant s = |\Gamma| - 1 \leqslant n - 1$. Заметим, что если $\gamma_j \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$, то $\gamma_j + \xi \notin \mathbb{F}$ для любого $\xi \in \mathbb{F}$ и, значит, $\gamma_j + \xi \neq 0$. По условию на число элементов поля существует $\lambda \in \mathbb{F}$, такое что $\lambda \neq 0$ и $-\lambda \notin \Gamma$. Следовательно, получаем, что $\gamma_q + \lambda \neq 0$ для любого $\gamma_q \in \bar{\Gamma}$, т. е. матрица $A + \lambda E$ невырожденна. □

Теорема 2.19 [5, теорема 3]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Коммутативная подалгебра $\mathcal{A}$ в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ имеет длину $n-1$ тогда и только тогда, когда она порождена циклической матрицей.*

В дальнейшем нам понадобятся следующие сведения из теории чисел.

Определение 2.20. *Разбиение* натурального числа n — это представление n в виде суммы положительных целых чисел, называемых частями, причём порядок следования частей не учитывается (т. е. разбиения, отличающиеся только порядком частей, считаются равными). В канонической записи разбиения части перечисляются в невозрастающем порядке.

Число разбиений $P(n)$ натурального числа n и его вычисление в виде функции от n является одним из фундаментальных объектов изучения в теории чисел. Асимптотическое равенство для числа разбиений предложено Г. Х. Харди и С. Рамануджаном (см., например, [17, гл. 5] и последовательность A000041 в энциклопедии целочисленных последовательностей OEIS [13]): при $n \to \infty$

$$P(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Обозначение 2.21. Рассмотрим циклическую матрицу $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. В жордановой нормальной форме матрицы C каждому собственному значению γ_j соответствует единственная жорданова клетка размера n_j, причём $\sum\limits_j n_j = n$. Известно, что жорданова нормальная форма матрицы единственна с точностью до порядка клеток, таким образом, жордановой нормальной форме матрицы C можно поставить в соответствие разбиение числа n. Обозначим его $p_{\mathrm{J}}(C)$.

Лемма 2.22 [11]. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, порождённую циклической матрицей A. Если $C \in \mathcal{A}$ — циклическая матрица, то $p_{\mathrm{J}}(C) = p_{\mathrm{J}}(A)$.*

Обозначение 2.23. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, порождённую циклической матрицей. Тогда через $p_{\mathrm{J}}(\mathcal{A})$ обозначим разбиение, соответствующее произвольной циклической матрице в алгебре $\mathcal{A}$.

Обозначение 2.24. Обозначим через

$$J_k = \sum_{i=1}^{k-1} E_{i,i+1} \in \mathrm{T}_k(\mathbb{F})$$

жорданову клетку размера k с собственным числом 0 и возьмём порождённую ей алгебру $\mathcal{N}_k = \langle E_k, J_k^i \mid i = 1, \ldots, k-1 \rangle \subset \mathrm{T}_k(\mathbb{F})$.

Пусть дано разбиение $\mathbf{p} = (n_1, \ldots, n_m)$ числа n, где $n \geqslant n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_m \geqslant 0$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$. Поставим ему в соответствие алгебру $\mathcal{T}_{\mathbf{p}} = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} \mathcal{N}_{n_j} \subset \subset \mathrm{T}_n(\mathbb{F})$, где прямая сумма понимается как алгебра блочно-диагональных матриц.

Теорема 2.25 [11]. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим коммутативные подалгебры $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, порождённые циклическими матрицами. Тогда*

1) *подалгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сопряжены в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $p_{\mathrm{J}}(\mathcal{A}) = = p_{\mathrm{J}}(\mathcal{B})$;*
2) *в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ содержится ровно $P(n)$ различных с точностью до сопряжённости подалгебр, порождённых циклическими матрицами;*
3) *подалгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с верхнетреугольной подалгеброй $\mathcal{T}_{p_{\mathrm{J}}(\mathcal{A})}$.*

2.3. Нильпотентные и локальные алгебры

Определение 2.26. Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{F}$. *Нильпотентный элемент* (или *нильпотент*) a алгебры $\mathcal{A}$ — элемент, удовлетворяющий равенству $a^n = 0$ для некоторого натурального n. Минимальное значение n, для которого справедливо это равенство, называется *индексом нильпотентности* элемента a. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *ниль-алгеброй*, если каждый её элемент является нильпотентным; *ниль-индексом* $\nu(\mathcal{A})$ ниль-алгебры $\mathcal{A}$ назовём максимальный индекс нильпотентности её элементов. *Индексом нильпотентности алгебры* $\mathcal{A}$ называется число k, такое что $\mathcal{A}^k = (0)$, но $\mathcal{A}^{k-1} \neq (0)$. Если такое k существует, алгебра называется *нильпотентной индекса k*. Любая нильпотентная алгебра очевидно является ниль-алгеброй.

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся следующие классические понятия теории колец и алгебр.

Определение 2.27. Ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ называется *локальной*, если фактор-алгебра по радикалу Джекобсона $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ является алгеброй с делением.

Определение 2.28. Конечномерная $\mathbb{F}$-алгебра называется *полупростой*, если её радикал Джекобсона $J(\mathcal{A})$ равен 0.

Предложение 2.29 [2, § 2.1, предложение 9]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная $\mathbb{F}$-алгебра. Тогда фактор-алгебра по радикалу Джекобсона $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ является полупростой.*

Предложение 2.30 [8, предложение 4.30]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — коммутативная конечномерная $\mathbb{F}$-алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$, не являющаяся локальной. Рассмотрим фактор-алгебру по радикалу Джекобсона $\mathcal{B} = \mathcal{A}/J(\mathcal{A})$. Тогда алгебра $\mathcal{B}$ содержит нетривиальное множество ортогональных идемпотентов $B_1, \dots, B_k$, $k \geqslant 2$, т. е. $B_i \neq 0, 1_{\mathcal{B}}$ и $B_iB_j = \delta_{ij}B_j$,*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Предложение 2.31 [2, § 3.6, предложения 1, 2]. *Пусть N — ниль-идеал кольца $\mathcal{R}$. В этом случае любое конечное или счётное ортогональное множество отличных от нуля идемпотентов может быть поднято по модулю N до ортогонального множества отличных от нуля идемпотентов кольца $\mathcal{R}$, т. е. если $R_1, R_2, \dots$ — элементы кольца $\mathcal{R}$, такие что $R_i \notin N$ и $R_iR_j - \delta_{ij}R_j \in N$, то найдутся элементы $U_1, U_2, \dots$, такие что $U_i \neq 0$, $U_i - R_i \in N$ и $U_iU_j = \delta_{ij}U_j$.*

Теорема 2.32 [6, теорема 5]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная локальная $\mathbb{F}$-алгебра. Пусть $J(\mathcal{A})$ — радикал Джекобсона алгебры $\mathcal{A}$, через N обозначен индекс нильпотентности $J(A)$. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ и $D = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant DN - 1$.*

3. Редукция к коммутативным нильпотентным и локальным подалгебрам длины $n - 2$

Как показано в [16], многие задачи, связанные с коммутативными матричными подалгебрами, сводятся к вопросам изучения нильпотентных алгебр. В соответствии с этим общим подходом в данном разделе задача описания коммутативных алгебр длины $n - 2$ сводится к задаче описания нильпотентных и локальных алгебр длины $n - 2$ и их прямых сумм с коммутативными алгебрами максимальной длины. Отметим, что для доказательств результатов данного раздела адаптирована техника из работы [25] (лемма 7.2, теорема 7.9), использованная ранее для описания коммутативных алгебр максимальной длины.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра блочно-диагональных матриц с блоками $\mathcal{A}_i \subseteq \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F})$, $i = 1, \dots, k$, длина которой $l(\mathcal{A})$ равна $n - 2$. Тогда существуют числа $i_0 \in \{1, \dots, k\}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, такие что для всех индексов $i \in \{1, \dots, k\} \backslash \{i_0\}$ выполнено $l(\mathcal{A}_i) = n_i - 1$ и $l(\mathcal{A}_{i_0}) = n_{i_0} - 2 + \varepsilon$.*

Доказательство. По теореме 1.2 для каждого индекса $i \in \{1, \dots, k\}$ справедливо неравенство $l(\mathcal{A}_i) \leqslant n_i - 1$.

Покажем, что существует индекс $i_0 \in \{1, \dots, k\}$, такой что для всех $i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i_0\}$ выполнено $l(\mathcal{A}_i) = n_i - 1$.

Предположим противное. Допустим, найдутся $p, q \in \{1, \dots, k\}$, такие что $p \neq q$, $l(\mathcal{A}_p) \leqslant n_p - 2$ и $l(\mathcal{A}_q) \leqslant n_q - 2$. Тогда по теореме 2.6 получаем, что

$$l(\mathcal{A}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} l(\mathcal{A}_j) + k - 1 \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p,q}}^{k} (n_j - 1) + n_p - 2 + n_q - 2 + k - 1 = \\ = \sum_{j=1}^{k} n_j - 3 = n - 3.$$

Противоречие.

Предположим, что $l(\mathcal{A}_{i_0}) \leqslant n - 3$. В этом случае по теореме 2.6 получаем, что

$$l(\mathcal{A}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} l(\mathcal{A}_j) + k - 1 \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{k} (n_j - 1) + n_{i_0} - 3 + k - 1 = \sum_{j=1}^{k} n_j - 3 = n - 3.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. □

Предложение 3.2. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Коммутативная подалгебра $\mathcal{A}$ в $\mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ имеет длину $n - 2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} = \mathbb{F}E$. Как следствие, в $\mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ нет максимальных коммутативных подалгебр длины $n - 2$.*

Доказательство. Предположим, существует матрица $A \in \mathcal{A}$, такая что $A \neq \alpha E$. В этом случае $\dim\langle E, A\rangle = 2$, матрица A циклическая, алгебра $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей A. Следовательно, по лемме 2.13 $l(\mathcal{A}) = 1$, противоречие с условием.

Таким образом, алгебра $\mathcal{A}$ порождена единичной матрицей. □

Теорема 3.3. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, и пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ длины $l(\mathcal{A}) = n - 2$. Тогда существуют $m \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{M}_m(\mathbb{F})$ — локальная коммутативная подалгебра длины $m-2$ — и (при $m < n$) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_{n-m}(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, порождённая циклической матрицей, — такие что алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с алгеброй $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$.*

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по n.

База индукции. При $n = 2$ утверждение следует из предложения 3.2.

Шаг индукции. Предположим, что для коммутативных подалгебр в $\mathrm{M}_k(\mathbb{F})$, $k < n$, выполнено утверждение теоремы. Возможны два случая.

1. Подалгебра $\mathcal{A}$ является локальной коммутативной алгеброй длины $n - 2$.

2. Алгебра $\mathcal{A}$ не является локальной. Согласно предложениям 2.30 и 2.31 в алгебре $\mathcal{A}$ найдётся нетривиальный идемпотент — матрица A. Имеем $A^2 = A$ и $A \neq 0, E$, следовательно, A имеет ровно два различных собственных значения 0 и 1, причём в жордановой форме матрицы A все клетки имеют размер 1×1. Пусть 1 как собственное число A имеет кратность s, $1 \leqslant s \leqslant n - 1$. Заметим, что при $n \geqslant 3$ одно из чисел s и $n - s$ не меньше 2, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $s \geqslant 2$. Тогда по теореме о жордановой нормальной форме найдётся такая невырожденная матрица $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, что

$$E_s' = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0_{n-s} \end{pmatrix}.$$

По теореме об общем виде матрицы, коммутирующей с данной (см. [3, § 16.6]), все матрицы, перестановочные с E'_s, также являются блочно-диагональными и состоят из двух блоков.

Обозначим
$$\mathcal{A}_V = V^{-1}\mathcal{A}V = \{V^{-1}AV \mid A \in \mathcal{A}\}.$$
Очевидно, что $l(\mathcal{A}) = l(\mathcal{A}_V)$.

Имеем
$$E'_{n-s} = \begin{pmatrix} 0_s & 0 \\ 0 & E_{n-s} \end{pmatrix} = E - E'_s \in \mathcal{A}_V.$$
Таким образом, получаем, что $\mathcal{A}_V = E'_s\mathcal{A}_V \oplus E'_{n-s}\mathcal{A}_V$ — блочно-диагональная подалгебра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Для краткости обозначим блоки алгебры $\mathcal{A}_V$ через $\mathcal{A}_s \subseteq \mathrm{M}_s(\mathbb{F})$, $\mathcal{A}_{n-s} \subseteq \mathrm{M}_{n-s}(\mathbb{F})$.

Из леммы 3.1 получаем, что найдутся $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$, такие что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqslant 1$, $l(\mathcal{A}_s) = s - 2 + \varepsilon_1$ и $l(\mathcal{A}_{n-s}) = n - s - 2 + \varepsilon_2$.

Покажем, что случай $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2$ не реализуется. Действительно, если блоки $\mathcal{A}_V$ имеют длины $s - 1$ и $n - s - 1$, то по теореме 2.19 они порождены циклическими матрицами. Тогда из предложения 2.14 получаем, что алгебра $\mathcal{A}_V$ порождена циклической матрицей и по теореме 2.19 $l(\mathcal{A}_V) = n - 1 \neq n - 2$. Противоречие.

Таким образом, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$ и без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 1$.

В этом случае по предположению индукции существуют $m \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant m \leqslant s$, $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{M}_m(\mathbb{F})$ — локальная коммутативная подалгебра длины $m - 2$ — и (при $m < s$) $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathrm{M}_{s-m}(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, порождённая циклической матрицей, — и невырожденная матрица $U \in \mathrm{M}_s(\mathbb{F})$, такие что $U^{-1}\mathcal{A}_sU = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}_1$. Положим $W \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$,
$$W = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{A}_{n-s} \subseteq \mathrm{M}_{n-m}$. Согласно предложению 2.14 алгебра $\mathcal{C}$ порождена циклической матрицей.

Таким образом, получаем утверждение теоремы: $(VW)^{-1}\mathcal{A}VW = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$. $\square$

4. Нильпотентные и локальные подалгебры алгебры $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ длины $n - 2$

В данном разделе будет показано соответствие между коммутативными нильпотентными подалгебрами длины $n - 2$ и подалгебрами индекса нильпотентности $n - 1$, которое позволяет использовать известные классификационные результаты из [16, гл. 3; 14; 9].

Лемма 4.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим коммутативную локальную подалгебру $\mathcal{A}$ в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ вида $\mathcal{A} = \mathbb{F}E + J(\mathcal{A})$. Пусть*

N — индекс нильпотентности радикала Джекобсона алгебры $\mathcal{A}$. Если $l(\mathcal{A}) = n-2$, то $N = n-1$.

Доказательство. По условию каждая матрица $A \in \mathcal{A}$ имеет одно собственное значение $\lambda(A) \in \mathbb{F}$ кратности n и $A = \lambda(A)E + A_0$, где $A_0 \in \mathcal{A}$ — нильпотентная матрица. Также $J(\mathcal{A}) = \{A - \lambda(A)E \mid A \in \mathcal{A}\}$ и $J(\mathcal{A})$ нильпотентен.

Так как нильпотентная матричная подалгебра над произвольным полем триангулизуема (см. [16, гл. 2, теорема 6]), то найдётся такая невырожденная матрица $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, что $V^{-1}J(\mathcal{A})V \subseteq \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$. Обозначим $\mathcal{A}_V = V^{-1}\mathcal{A}V$. Пусть $C \in A_V$. Тогда существует $A \in \mathcal{A}$, такая что $C = V^{-1}AV$. Как доказано выше, $A = \alpha E + A_0$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $A_0 \in J(\mathcal{A})$. Значит,

$$C = V^{-1}(\alpha E + A_0)V = \alpha V^{-1}EV + V^{-1}A_0V = \alpha E + C_0, \quad C_0 \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F}).$$

Пусть $J = J(\mathcal{A}_V)$ — радикал Джекобсона $\mathcal{A}_V$, и пусть M — индекс нильпотентности J. Из сопряжённости алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_V$ получаем равенство $M = N$.

Из теоремы 2.32 получаем оценку $l(\mathcal{A}_V) = l(\mathcal{A}) = n-2 \leqslant N-1$, т. е. $N \geqslant n-1$.

Поскольку $l(\mathcal{A}_V) < n-1$, то по лемме 2.13 алгебра $\mathcal{A}_V$ не содержит циклической матрицы. Как отмечено в предложении 2.12, матрица $C \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$, такая что все $c_{k,k+1}$ отличны от 0, является циклической. Следовательно, для любой матрицы $X = x_{ij} \in J$ существует индекс $r(X) \in \{1, \ldots, n-1\}$, такой что $x_{r(X),r(X)+1} = 0$.

Пусть $B_k = \{b^{(k)}_{i,j}\} \in J$, $k = 1, \ldots, n-1$. Из коммутативности алгебры $\mathcal{A}_V$ следует, что для любой перестановки $\sigma \in \mathrm{S}_{n-1}$ верно равенство $B_1B_2\cdots B_{n-1} = B_{\sigma(1)}B_{\sigma(2)}\cdots B_{\sigma(n-1)}$. В частности, пусть $r = r(B_1)$ — такой номер, для которого $b^{(1)}_{r,r+1} = 0$, и $\sigma = (1, r) \in \mathrm{S}_{n-1}$. Получаем, что

$$B_1B_2\cdots B_{n-1} = B_{\sigma(1)}B_{\sigma(2)}\cdots B_{\sigma(n-1)} = b^{(r)}_{1,2}b^{(2)}_{2,3}\cdots b^{(1)}_{r,r+1}\cdots b^{(n-1)}_{n-1,n}E_{1,n} = 0.$$

Это означает, что произведение любых $n-1$ матриц в J равно 0 и $N \leqslant n-1$.

Таким образом, $N = n-1$. □

Перечислим основные матричные алгебры, встречающиеся в данной работе.

Обозначение 4.2. Пусть $n \geqslant 3$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Пусть

$$A = E_{1,2} + \ldots + E_{n-2,n-1} \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F}).$$

Положим

$$\mathcal{B}_{0;n} = \langle A, A^2, \ldots, A^{n-2}\rangle \subset \mathrm{N}_n(\mathbb{F}), \qquad \mathcal{A}_{0;n} = \langle E_n, A, A^2, \ldots, A^{n-2}\rangle \subset \mathrm{T}_n(\mathbb{F});$$

$$\mathcal{B}_{1;n} = \langle E_{1,n}, B \mid B \in \mathcal{B}_{0;n}\rangle \subset \mathrm{T}_n(\mathbb{F}), \qquad \mathcal{A}_{1;n} = \langle E_{1,n}, C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle \subset \mathrm{T}_n(\mathbb{F});$$

$$\mathcal{B}_{2;n} = \langle E_{n,n-1}, B \mid B \in \mathcal{B}_{0;n}\rangle \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \ \mathcal{A}_{2;n} = \langle E_{n,n-1}, C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F});$$

$$\mathcal{B}_{3;n}(\alpha) = \langle E_{1,n} + \alpha E_{n,n-1},\ B \mid B \in \mathcal{B}_{0;n}\rangle \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F}),$$

$$\mathcal{A}_{3;n}(\alpha) = \langle E_{1,n} + \alpha E_{n,n-1},\ C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \quad n \geqslant 4, \quad \alpha \in \mathbb{F}, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\mathcal{B}_{4;4} = \langle E_{1,2} + E_{3,4},\ E_{1,3} + E_{2,4},\ E_{1,4}\rangle \subset \mathrm{N}_4(\mathbb{F}),$$

$$\mathcal{A}_{4;4} = \langle E_4,\ E_{1,2} + E_{3,4},\ E_{1,3} + E_{2,4},\ E_{1,4}\rangle \subset \mathrm{T}_4(\mathbb{F}).$$

Для максимальных (относительно включения) коммутативных нильпотентных подалгебр в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$ над полями характеристики 0 либо большей порядка матриц известны классификационные результаты, полученные Д. А. Супруненко и Р. И. Тышкевич [16, гл. 3] и И. А. Павловым [14].

Теорема 4.3 [16, гл. 3, теорема 1]. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная нильпотентная подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ индекса нильпотентности $n-1$. Тогда*

1) *$\mathcal{A}$ сопряжена с одной из трёх попарно несопряжённых алгебр $\mathcal{B}_{1;n}$, $\mathcal{B}_{2;n}$, $\mathcal{B}_{3;n}(1)$;*
2) *алгебры $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$, где $\alpha \neq 0 \in \mathbb{C}$, сопряжены в $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ с алгеброй $\mathcal{B}_3(1)$.*

Теорема 4.4 [14]. *Пусть $n > 3$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле нулевой характеристики или характеристики $p > n-1$. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q — подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная нильпотентная подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$. Тогда*

1) *при нечётном n алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из трёх попарно несопряжённых алгебр $\mathcal{B}_{1;n}$, $\mathcal{B}_{2;n}$, $\mathcal{B}_{3;n}(1)$;*
2) *при чётном n алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых алгебр $\mathcal{B}_{1;n}, \mathcal{B}_{2;n}, \mathcal{B}_{3;n}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{B}_{3;n}(\alpha_i), \ldots,$ где $\{\alpha_j\}$ — полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q.*

В доказательстве этих теорем существенно используется существование в указанной алгебре элемента a, индекс нильпотентности которого совпадает с индексом нильпотентности всей алгебры, т. е. совпадение ниль-индекса и индекса нильпотентности алгебры. Этим объясняется условие на характеристику поля, поскольку при таком условии существование требуемого элемента следует из следующего результата, принадлежащего Г. Фробениусу.

Теорема 4.5 [16, гл. 1, предложение 5, следствие]. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathbb{F}$ — поле с условием $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ или $\operatorname{char}\mathbb{F} > s$.*

1. *Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная ассоциативная алгебра произвольной размерности над $\mathbb{F}$. Если для любого $a \in \mathcal{A}$ выполнено $a^s = 0$, то $\mathcal{A}^s = (0)$.*
2. *Если $\mathcal{A}$ — нильпотентная коммутативная ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$ индекса нильпотентности s, то существует элемент $a \in \mathcal{A}$, такой что $a^{s-1} \neq 0$.*

В [9] автором доказано существования элемента индекса нильпотентности $n-1$ в любой нильпотентной коммутативной подалгебре индекса нильпотентности $n-1$ в алгебре верхних нильтреугольных матриц $\mathrm{N}_n(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ из не менее чем n элементов при всех $n \geqslant 5$. Из этого результата следует улучшение относительно основного поля известных классификационных теорем Д. А. Супруненко, Р. И. Тышкевич и И. А. Павлова для алгебр данного класса. Для удобства приведём здесь основные классификационные результаты работы [9].

Теорема 4.6 [9, теорема 2.1]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда произвольная коммутативная нильпотентная подалгебра $\mathcal{A}$ в $\mathrm{M}_3(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 2 сопряжена с одной из следующих попарно несопряжённых алгебр*:

1) $\mathcal{B}_{0;3} = \langle E_{1,2} \rangle$;
2) $\mathcal{B}_{1;3} = \langle E_{1,2}, E_{1,3} \rangle$;
3) $\mathcal{B}_{2;3} = \langle E_{1,2}, E_{3,2} \rangle$.

Теорема 4.7 [9, теорема 2.3]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле характеристики, отличной от 2. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q — подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная нильпотентная подалгебра в $\mathrm{M}_4(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 3. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых алгебр $\mathcal{B}_{0;4}$, $\mathcal{B}_{1;4}$, $\mathcal{B}_{2;4}$, $\mathcal{B}_{3;4}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{B}_{3;4}(\alpha_i), \ldots$, где $\{\alpha_j\}$ — полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q.*

Теорема 4.8 [9, теорема 2.4]. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики 2. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q — подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная нильпотентная подалгебра в $\mathrm{M}_4(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 3. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых алгебр $\mathcal{B}_{0;4}$, $\mathcal{B}_{1;4}$, $\mathcal{B}_{2;4}$, $\mathcal{B}_{4;4}$, $\mathcal{B}_{3;4}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{B}_{3;4}(\alpha_i), \ldots$, где $\{\alpha_j\}$ — полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q.*

Теорема 4.9 [9, теорема 3.10]. *Пусть $n \geqslant 5$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Тогда произвольная коммутативная нильпотентная подалгебра $\mathcal{A}$ в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$ содержит элемент A индекса нильпотентности $n-1$.*

Теорема 4.10 [9, теорема 3.11]. *Пусть $n \geqslant 5$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q — подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Положим $A = E_{1,2} + \ldots + E_{n-2,n-1} \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная нильпотентная подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$. Тогда*

1) *алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ с одной из следующих подалгебр*:
   (i) $\mathcal{B}_{0;n}$,
   (ii) $\mathcal{B}_{1;n}$,
   (iii) $\mathcal{B}_{2;n}$,
   (iv) $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$;
2) *подалгебры разных типов не сопряжены между собой*; *подалгебры типов* (ii)—(iv) *являются максимальными по включению коммутативными нильпотентными подалгебрами и содержат подалгебру $\mathcal{B}_{0;n}$, не являющуюся максимальной по включению*;
3) *при нечётном n и произвольном $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ подалгебра $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$ сопряжена с подалгеброй $\mathcal{B}_{3;n}(1)$; при чётном n и произвольном $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, подалгебра $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых*

подалгебр $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{B}_{3;n}(\alpha_i), \ldots$, где $\{\alpha_j\}$ — полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q.

Поскольку при сопряжении длина алгебры сохраняется, то для того, чтобы вычислить длину коммутативной нильпотентной подалгебры в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$, достаточно вычислить длины алгебр $\mathcal{B}_{i;n}$.

Теорема 4.11. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда*

1) $l(\mathcal{B}_{0;n}) = l(\mathcal{A}_{0;n}) = n-2$;
2) $l(\mathcal{B}_{1;n}) = l(\mathcal{A}_{1;n}) = n-2$;
3) $l(\mathcal{B}_{2;n}) = l(\mathcal{A}_{2;n}) = n-2$;
4) $l(\mathcal{B}_{4;4}) = l(\mathcal{A}_{4;4}) = 2$.

Доказательство. Равенства $l(\mathcal{B}_i) = l(\mathcal{A}_i)$ выполнены для любых $n \geqslant 3$ и $i = 0,1,2,4$ в силу [25, теорема 3.1, следствие 3.2].

1. По лемме 2.15 имеет место равенство $l(\mathcal{A}_{0;n}) = n-2$.

2. По построению алгебра $\mathcal{A}_{1;n}$ является локальной, $J(\mathcal{A}_{1;n}) = \mathcal{B}_{1;n}$, соответственно, индекс нильпотентности $N = N\big(J(\mathcal{A}_{1;n})\big)$ равен $n-1$. Следовательно, верхняя оценка $l(\mathcal{A}_1) \leqslant n-2$ следует из теоремы 2.32.

Рассмотрим систему порождающих $\mathcal{S}_1 = \{A, E_{1,n}\}$ для алгебры $\mathcal{A}_{1;n}$. Для любой матрицы $C \in \mathcal{B}_{0;n}$ выполнено $E_{1,n}C = CE_{1,n} = 0$. Значит, $l(\mathcal{S}_1) = n-2$ и $l(\mathcal{A}_1) = n-2$.

3. По построению алгебра $\mathcal{A}_{2;n}$ является локальной, $J(\mathcal{A}_{2;n}) = \mathcal{B}_{2;n}$, соответственно, индекс нильпотентности $N = N\big(J(\mathcal{A}_{2;n})\big)$ равен $n-1$. Следовательно, $l(\mathcal{A}_2) \leqslant n-2$, согласно теореме 2.32.

Рассмотрим систему порождающих $\mathcal{S}_2 = \{A, E_{n,n-1}\}$ для алгебры $\mathcal{A}_{2;n}$. Для любой матрицы $C \in \mathcal{B}_{0;n}$ выполнено $CE_{n,n-1} = E_{n,n-1}C = 0$. Значит, $l(\mathcal{S}_2) = n-2$ и $l(\mathcal{A}_2) = n-2$.

4. По построению алгебра $\mathcal{A}_{4;4}$ является локальной, $J(\mathcal{A}_{4;4}) = \mathcal{B}_{4;4}$, соответственно, индекс нильпотентности $N = N\big(J(\mathcal{A}_{4;4})\big)$ равен 3. Следовательно, верхняя оценка $l(\mathcal{A}_4) \leqslant 2$ следует из теоремы 2.32.

Рассмотрим систему порождающих $\mathcal{S}_4 = \{E_{1,2}+E_{3,4},\ E_{1,3}+E_{2,4}\}$ для алгебры $\mathcal{A}_{4;4}$. Имеем $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_4) = 3 < \dim \mathcal{A}_{4;4} = 4$, $(E_{1,2}+E_{3,4}) \cdot (E_{1,3}+E_{2,4}) = E_{1,4} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S}_4)$, $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}_4) = \mathcal{A}_{4;4}$. Значит, $l(\mathcal{S}_4) = 2$ и $l(\mathcal{A}_4) = 2$. $\square$

Теорема 4.12 [8, теорема 4.11]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ выполнено*

$$l\big(\mathcal{B}_{3;4}(\alpha)\big) = l\big(\mathcal{A}_{3;4}(\alpha)\big) = 2,$$
$$l\big(\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)\big) = l\big(\mathcal{A}_{3;n}(\alpha)\big) = n-3 \quad \text{при} \quad n \geqslant 5.$$

Следствие 4.13. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим коммутативную локальную подалгебру $\mathcal{A}$ в $\mathrm{M}_3(\mathbb{F})$ вида $\mathcal{A} = \mathbb{F}E + J(\mathcal{A})$. Тогда $l(\mathcal{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена в $\mathrm{M}_3(\mathbb{F})$ с одной из алгебр $\mathcal{A}_{i;n}$, $i = 0,1,2$.*

Следствие 4.14. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим коммутативную локальную подалгебру $\mathcal{A}$ в $\mathrm{M}_4(\mathbb{F})$ вида $\mathcal{A} = \mathbb{F}E + J(\mathcal{A})$. Тогда $l(\mathcal{A}) = 2$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена в $\mathrm{M}_4(\mathbb{F})$ с одной из алгебр $\mathcal{A}_{i;n}$, $i = 0, 1, 2$, $\mathcal{A}_{3;n}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, и, если $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$, $\mathcal{A}_{4;4}$.*

Следствие 4.15. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Рассмотрим коммутативную локальную подалгебру $\mathcal{A}$ в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ вида $\mathcal{A} = \mathbb{F}E + J(\mathcal{A})$. Тогда $l(\mathcal{A}) = n - 2$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ с одной из алгебр $\mathcal{A}_{i;n}$, $i = 0, 1, 2$.*

5. О длине прямых сумм коммутативных нильпотентных подалгебр индекса нильпотентности $n - 1$ и подалгебр максимальной длины

В данном разделе будет представлено обращение теоремы 3.3, а именно будет показано, для каких локальных алгебр из предыдущего раздела прямая сумма с алгеброй максимальной длины останется алгеброй длины $n - 2$.

Теорема 5.1. *Пусть $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$, $n_1 \geqslant 2$ и $n = n_1 + n_2$. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant \max\{n_1 + 1, n_2 + 1\}$. Рассмотрим коммутативную локальную подалгебру $\mathcal{B}$ в $\mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{F})$ вида $\mathcal{B} = \mathbb{F}E + J(\mathcal{B})$ длины $l(\mathcal{B}) = n_1 - 2$. Будем предполагать, что при $n_1 = 4$ алгебра $\mathcal{B}$ не сопряжена с алгебрами $\mathcal{A}_{3,4}(\alpha)$ и, если $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$, с алгеброй $\mathcal{A}_{4;4}$. Пусть $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_{n_2}(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, порождённая циклической матрицей. Положим $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Тогда $l(\mathcal{A}) = n - 2$.*

Доказательство. Верхняя оценка $l(\mathcal{A}) \leqslant n - 2 = (n_1 - 2) + (n_2 - 1) + 1$ следует из теоремы 2.6.

Для доказательства нижней оценки $l(\mathcal{A}) \geqslant n - 2$ построим систему порождающих для алгебры $\mathcal{A}$ длины $n - 2$.

Пусть $C \in \mathcal{C}$ — циклическая матрица. Обозначим через $\bar{\mathbb{F}}$ алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Положим, что $\bar{X} \subset \bar{\mathbb{F}}$ — множество различных собственных чисел матрицы C, $X = \bar{X} \cap \mathbb{F}$. Имеем $|X| \leqslant |\bar{X}| \leqslant n_2$. Следовательно, по условию на поле существует число $\gamma \in \mathbb{F}$, $\gamma \notin X$. Рассмотрим три следующих возможных случая.

I. Пусть $n_1 = 2$. По предложению 3.2 тогда $\mathcal{B} = \mathbb{F}E_2$. Рассмотрим матрицу $B = \gamma E_2 \oplus C \in \mathcal{A}$. По определению B порождает алгебру $\mathcal{A}$ и $\deg B = \deg C + 1 = n_2 + 1 = n - 1$. Следовательно, для системы порождающих $\mathcal{S} = \{B\}$ верно $l(\mathcal{S}) = \deg B - 1 = n - 2$.

II. Пусть $n_1 \geqslant 3$. Пусть $A = E_{1,2} + \ldots + E_{n_1-2,n_1-1} \in \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{F})$. Согласно условию данной теоремы и следствиям 4.13—4.15 найдётся невырожденная матрица $T \in \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{F})$, такая что для алгебры $\mathcal{A}_{0;n_1} = \langle E_{n_1}, A, A^2, \ldots, A^{n_1-2} \rangle$ выполнено включение $\mathcal{A}_{0;n_1} \subseteq T^{-1}\mathcal{B}T = \mathcal{A}_j$, $j = 0, 1, 2$. Положим

$$T_n = \begin{pmatrix} T & O_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_2 \times n_1} & I_{n_2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}).$$

Пусть $\mathcal{A}_T = T_n^{-1}\mathcal{A}T_n$. Имеем $l(\mathcal{A}_T) = l(\mathcal{A})$. Таким образом, достаточно построить систему порождающих длины $n-2$ в алгебре $\mathcal{A}_T$.

Рассмотрим матрицу $B = (\gamma E_{n_1} + A) \oplus C \in \mathcal{A}_T$. По построению $\deg B = \deg A + \deg C = n_1 - 1 + n_2 = n - 1$.

1. Если $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_{0;n} \oplus \mathcal{C}$, то матрица B порождает алгебру $\mathcal{A}_T$. Следовательно, для системы порождающих $\mathcal{S} = \{B\}$ в алгебре $\mathcal{A}_T$ верно $l(\mathcal{S}) = \deg B - 1 = n - 2$.

2. Пусть $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_{1;n} \oplus \mathcal{C}$. Пусть $\mathcal{S}_0$ — произвольная система порождающих для алгебры $\mathcal{A}_{0;n} \oplus \mathcal{C}$. Рассмотрим систему порождающих $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \cup \{E_{1,n_1} \oplus 0\} \subset \mathcal{A}_T$. Для произвольной матрицы $S \in \mathcal{S}_0$ имеем

$$(E_{1,n_1} \oplus 0) \cdot S = S \cdot (E_{1,n_1} \oplus 0) = \big((S)_{1,1} E_{1,n_1}\big) \oplus 0 = (S)_{1,1}(E_{1,n_1} \oplus 0),$$
$$(E_{1,n_1} \oplus 0)^2 = 0.$$

Следовательно, $l(\mathcal{S}_1) = \max\{l(\mathcal{S}_0), 1\} = l(\mathcal{S}_0)$. В частности, если $\mathcal{S}_0 = \{B\}$, то $l(\mathcal{S}_1) = l(\mathcal{S}_0) = n - 2$.

3. Пусть $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_{2;n} \oplus \mathcal{C}$. Пусть $\mathcal{S}_0$ — произвольная система порождающих для алгебры $\mathcal{A}_{0;n} \oplus \mathcal{C}$. Рассмотрим систему порождающих $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_0 \cup \{E_{n_1,n_1-1} \oplus 0\} \subset \mathcal{A}_T$. Для произвольной матрицы $S \in \mathcal{S}_0$ имеем

$$\begin{aligned} &(E_{n_1,n_1-1} \oplus 0) \cdot S = S \cdot (E_{n_1,n_1-1} \oplus 0) = \\ &\quad = \big((S)_{1,1} E_{n_1,n_1-1}\big) \oplus 0 = (S)_{1,1}(E_{n_1,n_1-1} \oplus 0), \\ &(E_{n_1,n_1-1} \oplus 0)^2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $l(\mathcal{S}_1) = \max\{l(\mathcal{S}_0), 1\} = l(\mathcal{S}_0)$. В частности, если $\mathcal{S}_0 = \{B\}$, то $l(\mathcal{S}_1) = l(\mathcal{S}_0) = n - 2$. □

Лемма 5.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_m(\mathbb{F})$, порождённую циклической матрицей, и подалгебру*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\ B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\ E_{1,3} \rangle \subseteq \mathrm{M}_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. Положим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(\alpha) \oplus \mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_{m+4}(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant m + 1$.

Доказательство. Докажем верхнюю оценку $l(\mathcal{A}) \leqslant m + 1$. Для этого рассмотрим произвольную систему порождающих $\mathcal{S} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ для алгебры $\mathcal{A}$ и покажем, что $l(\mathcal{S}) \leqslant m + 1$. Заметим, что по определению алгебры $\mathcal{A}$ и её систем порождающих имеют место равенства $B_j = A_j \oplus C_j$, множество $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \{C_1, \ldots, C_k, E_m\}$ порождает алгебру $\mathcal{C}$, множество $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{A_1, \ldots, A_k, E_4\}$ порождает алгебру $\mathcal{A}_{3;4}(\alpha)$.

Доказательство проведём отдельно для различных значений $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$, $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_\mathcal{C})$ и $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_\mathcal{A})$. Заметим, что $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_\mathcal{C})$ и $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant$ $\geqslant \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_\mathcal{A})$.

Как показано в теореме 4.12, $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_\mathcal{A}) \geqslant 3$, следовательно, $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 3$. Используя технику доказательства [8] (лемма 4.34), при $N = \dim \mathcal{A}$ получаем

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{L}_{N-2}(\mathcal{S}) &= \dim \mathcal{L}_0(\mathcal{S}) + \sum_{k=1}^{N-2}\bigl(\dim \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) - \dim \mathcal{L}_{k-1}(\mathcal{S})\bigr) = \\ &= \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) + \sum_{k=2}^{N-2}\bigl(\dim \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) - \dim \mathcal{L}_{k-1}(\mathcal{S})\bigr) \geqslant \\ &\geqslant \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) + \sum_{k=2}^{N-2} 1 = \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) + N - 3 \geqslant N = \dim \mathcal{A}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

1. Если $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 4$, то из равенства (5.1) получаем оценку

$$l(\mathcal{S}) \leqslant \dim \mathcal{A} - \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) + 1 \leqslant m + 4 - 4 + 1 = m + 1.$$

2. Пусть $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 3$. Согласно предложению 2.9 можно считать, что $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = |\mathcal{S}| + 1$, т. е. $\mathcal{S} = \{B_1, B_2\}$.

(i) Если $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_\mathcal{C}) = 3$, то из равенства (5.1) получаем оценку

$$l(\mathcal{S}_\mathcal{C}) \leqslant \dim \mathcal{C} - \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_\mathcal{C}) + 1 \leqslant m - 3 + 1 = m - 2.$$

Тогда из доказательства теоремы 2.6 получаем оценку

$$l(\mathcal{S}) \leqslant l(\mathcal{S}_\mathcal{C}) + l\bigl(\mathcal{A}_{3;4}(\alpha)\bigr) + 1 \leqslant m - 2 + 2 + 1 = m + 1.$$

(ii) Пусть $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_\mathcal{C}) = 1$. Это возможно в том и только в случае, когда $m = 1$. Имеем

$$B_1 = (\alpha_1 A + \delta_1 E_{1,4} + \beta_1 B) \oplus \gamma_1, \quad B_2 = (\alpha_2 A + \delta_2 E_{1,4} + \beta_2 B) \oplus \gamma_2.$$

Алгебра $\mathcal{A}$ не локальна, поэтому хотя бы одно из чисел γ_1 и γ_2 не равно нулю. Для образующих алгебры $\mathcal{A}_{3;4}(\alpha)$ выполнены соотношения

$$AB = BA = 0, \quad B^2 = \alpha E_{1,3} = \alpha A^2, \quad B^3 = 0, \tag{5.2}$$

из которых следует, что при $k \geqslant 2$ имеет место включение $\mathcal{S}_\mathcal{A}^k \setminus {\mathcal{S}_\mathcal{A}}^{k-1} \subseteq \langle E_{1,4}\rangle$. Поэтому если $\mathcal{S}$ — система порождающих, то A_1 и A_2 линейно независимы по модулю пространства $\langle E_{1,4}\rangle$, т. е.

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Пусть

$$T = \{t_{i,j}\} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}^{-1} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{F}).$$

По предложению 2.7 множество

$$\mathcal{S}' = \{B_1' = t_{1,1}B_1 + t_{1,2}B_2,\ B_2' = t_{2,1}B_1 + t_{2,2}B_2\}$$

является системой порождающих для $\mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}') = l(\mathcal{S})$. Покажем, что $l(\mathcal{S}') \leqslant \leqslant m + 1 = 2$.

По построению

$$B_1' = (A + \delta_1' E_{1,4}) \oplus \gamma_1', \quad B_2' = (\delta_2' E_{1,4} + B) \oplus \gamma_2', \quad (\gamma_1', \gamma_2') \neq (0, 0).$$

Тогда

$$(B_1')^2 = E_{1,4} \oplus (\gamma_1')^2, \quad (B_2')^2 = \alpha E_{1,4} \oplus (\gamma_2')^2, \quad B_1'B_2' = 0 \oplus \gamma_1'\gamma_2'$$

и

$$\langle (B_1')^2, (B_2')^2, B_1'B_2' \rangle = \langle 0 \oplus 1,\ E_{1,4} \oplus 0 \rangle.$$

Следовательно, $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}') = \mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}') = 2 = m + 1$.

(iii) Пусть $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_\mathcal{C}) = 2$, $m \geqslant 2$. Существует циклическая матрица $C \in \mathcal{C}$, такая что

$$B_1 = (\alpha_1 A + \delta_1 E_{1,4} + \beta_1 B) \oplus C, \quad B_2 = (\alpha_2 A + \delta_2 E_{1,4} + \beta_2 B) \oplus \gamma E.$$

Имеем $(0 \oplus E) \in \mathcal{A}$, поэтому $(\det C, \gamma) \neq (0, 0)$. Из равенств (5.2) следует, что при $k \geqslant 2$ $\mathcal{S}_\mathcal{A}^k \setminus {\mathcal{S}_\mathcal{A}}^{k-1} \subseteq \langle E_{1,4} \rangle$. Поэтому если $\mathcal{S}$ — система порождающих, то A_1 и A_2 линейно независимы по модулю пространства $\langle E_{1,4} \rangle$, т. е.

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Возможны два случая.

Предположим, что $\gamma = 0$. Тогда по условию $\det C \neq 0$. По построению множество матриц $E = C^0, C, \ldots, C^{m-1}$ образует базис алгебры $\mathcal{C}$, при этом матрица $C^2 \in \mathcal{C}$ невырожденна, поэтому множество матриц $C^2, C^3, \ldots, C^{m+1}$ также будет базисом алгебры $\mathcal{C}$.

Имеем

$$\begin{gathered} B_1^2 = (\alpha_1^2 + \alpha\beta_1^2)E_{1,4} \oplus C^2, \quad B_1^j = 0 \oplus C^j, \quad j \geqslant 3, \\ B_2^2 = (\alpha_2^2 + \alpha\beta_2^2)E_{1,4} \oplus 0, \qquad B_2^j = 0, \quad j \geqslant 3, \\ B_1B_2 = B_2B_1 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha\beta_1\beta_2)E_{1,4} \oplus 0. \end{gathered}$$

Покажем, что система

$$\begin{cases} \alpha_2^2 + \alpha\beta_2^2 = 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha\beta_1\beta_2 = 0, \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0, \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

относительно неизвестных α_i, β_i не имеет решений. Действительно, из первого уравнения и двух неравенств получаем, что $\alpha_2\beta_2 \neq 0$, $-\alpha_2^2/\beta_2^2 = \alpha$. Подставив это выражение во второе уравнение, находим

$$\alpha_1\alpha_2 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2}\beta_1\beta_2 = 0,$$

или

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 0.$$

При данных ограничениях это уравнение не имеет решений. Это означает, что $E_{1,4} \oplus 0 \in \langle B_2^2, B_1B_2\rangle \subseteq \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_{m+1}(\mathcal{S})$, и следовательно,

$$0 \oplus C^2 = B_1^2 - (\alpha_1^2 + \alpha\beta_1^2) \cdot (E_{1,4} \oplus 0) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_{m+1}(\mathcal{S}).$$

Таким образом, базис алгебры $\mathcal{A}$

$$\{E,\, 0 \oplus C^2,\, 0 \oplus C^3, \dots,\, 0 \oplus C^{m+1},\, E_{1,4} \oplus 0,\, A_1 \oplus 0,\, A_2 \oplus 0\}$$

содержится в $\mathcal{L}_{m+1}(\mathcal{S})$ и $l(\mathcal{S}) \leqslant m+1$.

Предположим, $\gamma \neq 0$. Имеем

$$B_1^2 = (\alpha_1^2 + \alpha\beta_1^2)E_{1,4} \oplus C^2, \qquad B_1^j = 0 \oplus C^j, \quad j \geqslant 3,$$
$$B_2^2 = (\alpha_2^2 + \alpha\beta_2^2)E_{1,4} \oplus \gamma^2 E, \quad B_2^j = 0 \oplus \gamma^j E, \quad j \geqslant 3,$$
$$B_1B_2 = B_2B_1 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha\beta_1\beta_2)E_{1,4} \oplus \gamma C,$$
$$B_1^2B_2 = 0 \oplus \gamma C^2, \quad B_1B_2^2 = 0 \oplus \gamma^2 C.$$

Тогда

$$0 \oplus E = \gamma^{-3}B_2^3 \in \mathcal{L}_3(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_{m+1}(\mathcal{S}),$$
$$0 \oplus C = \gamma^{-2}B_1B_2^2 \in \mathcal{L}_3(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_{m+1}(\mathcal{S}),$$
$$0 \oplus C^2 = \gamma^{-1}B_1^2B_2 \in \mathcal{L}_3(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_{m+1}(\mathcal{S}).$$

Как показано выше, при данных ограничениях хотя бы одно из чисел $\alpha_2^2 + \alpha\beta_2^2$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha\beta_1\beta_2$ не равно нулю и

$$E_{1,4} \oplus 0 \in \langle B_2^2, B_1B_2, 0 \oplus E, 0 \oplus C\rangle \subseteq \mathcal{L}_3(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_{m+1}(\mathcal{S}).$$

Таким образом, базис алгебры $\mathcal{A}$

$$\{E,\, 0 \oplus E,\, 0 \oplus C,\, 0 \oplus C^2, \dots,\, 0 \oplus C^{m-1},\, E_{1,4} \oplus 0,\, A_1 \oplus 0,\, A_2 \oplus 0\}$$

содержится в $\mathcal{L}_{m+1}(\mathcal{S})$ и $l(\mathcal{S}) \leqslant m+1$.

Таким образом, для любой системы порождающих $\mathcal{S}$ в алгебре $\mathcal{A}$ справедлива оценка $l(\mathcal{S}) \leqslant m+1$. Следовательно,

$$l(\mathcal{A}) \leqslant \max_{\mathcal{S}} l(\mathcal{S}) \leqslant \max_{\mathcal{S}}(m+1) = m+1. \qquad \square$$

Лемма 5.3. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим алгебры*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\, B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\, E_{1,3}\rangle \subseteq \mathrm{M}_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, и

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(\alpha) \oplus \mathbb{F} \subseteq \mathrm{M}_5(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = 2$.

Доказательство. Верхняя оценка $l(\mathcal{A}) \leqslant 2$ следует из леммы 5.2.

Рассмотрим множество $\mathcal{S}_1 = \{D_1 = A \oplus 1,\ D_2 = B \oplus 0\} \subset \mathcal{A}$. Покажем, что $\mathcal{S}_1$ является системой порождающих для алгебры $\mathcal{A}$ длины 2.

Заметим, что $\dim \mathcal{A} = 5$ и $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_1) = 3$. Также $D_2^2 = \alpha E_{1,4} \oplus 0$, $D_1^2 - \alpha^{-1} D_2^2 = 0 \oplus 1$, т. е. $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}_1) = \mathcal{A}$ и $\mathcal{S}_1$ является порождающим множеством для алгебры $\mathcal{A}$ длины 2. □

Лемма 5.4. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_m(\mathbb{F})$, порождённую невырожденной циклической матрицей $C \in \mathcal{C}$, и подалгебру*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\ B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\ E_{1,3} \rangle \subseteq \mathrm{M}_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. Положим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(\alpha) \oplus \mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_{m+4}(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = m + 1$.

Доказательство. Верхняя оценка $l(\mathcal{A}) \leqslant m + 1$ следует из леммы 5.2.

Рассмотрим множество $\mathcal{S} = \{D_1 = A \oplus C,\ D_2 = B \oplus 0\} \subset \mathcal{A}$. Покажем, что $\mathcal{S}$ является системой порождающих для алгебры $\mathcal{A}$ длины $m + 1$.

Заметим, что $\dim \mathcal{A} = m + 4$ и $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 3$. Также справедливы равенства $D_1^2 = E_{1,4} \oplus C^2$, $D_1^j = 0 \oplus C^j$, $j \geqslant 3$, $D_1 D_2 = D_2 D_1 = 0$, $D_2^2 = \alpha E_{1,4} \oplus 0$, $D_2^j = 0$, $j \geqslant 3$. Следовательно, $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 5$ и $\dim \mathcal{L}_{k+2}(\mathcal{S}) = 5 + k$, где $1 \leqslant k \leqslant m - 1$, т. е. $\dim \mathcal{L}_m(\mathcal{S}) = m + 3 < \dim \mathcal{A}$, но $\dim \mathcal{L}_{m+1}(\mathcal{S}) = m + 4 = \dim \mathcal{A}$, поэтому $\mathcal{S}$ является порождающим множеством для $\mathcal{A}$ длины $m + 1$. □

Лемма 5.5. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant m + 1$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_m(\mathbb{F})$, порождённую циклической матрицей, и подалгебру*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\ B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\ E_{1,3} \rangle \subseteq \mathrm{M}_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. Положим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(\alpha) \oplus \mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_{m+4}(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = m + 1$.

Доказательство. Пусть C — циклическая матрица, порождающая алгебру $\mathcal{C}$. Согласно следствию 2.18 существует число $\lambda \in \mathbb{F}$, такое что матрица $C_1 = C + \lambda E \in \mathrm{M}_m(\mathbb{F})$ невырожденна. По лемме 2.11 матрица C_1 также является циклической. Следовательно, $l(\mathcal{A}) = m + 1$ по лемме 5.4. □

Лемма 5.6. *Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ — поле из двух элементов. Рассмотрим алгебры*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\ B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\ E_{1,3} \rangle \subseteq \mathrm{M}_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, т. е. в данном случае $\alpha = 1$, и

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(1) \oplus D_2(\mathbb{F}_2) \subseteq \mathrm{M}_6(\mathbb{F}_2).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = 3$.

Доказательство. Верхняя оценка $l(\mathcal{A}) \leqslant 3$ следует из леммы 5.2.

Рассмотрим множество $\mathcal{S} = \{D_1 = A \oplus E_{1,1},\, D_2 = B \oplus E_{2,2}\} \subset \mathcal{A}$. Покажем, что $\mathcal{S}$ является системой порождающих для алгебры $\mathcal{A}$ длины 3.

Заметим, что $\dim \mathcal{A} = 6$ и $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 3$. Также справедливы равенства $D_1^2 = E_{1,4} \oplus E_{1,1}$, $D_1^j = 0 \oplus E_{1,1}$, $j \geqslant 3$, $D_1D_2 = D_2D_1 = 0$, $D_2^2 = E_{1,4} \oplus E_{2,2}$, $D_2^j = 0 \oplus E_{2,2}$, $j \geqslant 3$.

Следовательно, $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 5 < \dim \mathcal{A}$ и $\dim \mathcal{L}_3(\mathcal{S}) = 6 = \dim \mathcal{A}$, поэтому $\mathcal{S}$ является порождающим множеством для $\mathcal{A}$ длины 3. $\square$

Следствие 5.7. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим алгебры*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\, B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\, E_{1,3} \rangle \subseteq \mathrm{M}_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, и

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(\alpha) \oplus D_2(\mathbb{F}) \subseteq \mathrm{M}_6(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = 3$.

Лемма 5.8. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле характеристики 2. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_k(\mathbb{F})$, порождённую циклической матрицей, и подалгебру*

$$\mathcal{A}_{4;4} = \langle E_4,\, B_1 = E_{1,2} + E_{3,4},\, B_2 = E_{1,3} + E_{2,4},\, E_{1,4} \rangle \subseteq \mathrm{T}_4(\mathbb{F}).$$

Положим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{4;4} \oplus \mathcal{C} \subseteq \mathrm{M}_{k+4}(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant k + 1$.

Доказательство. Обозначим $n = k + 4 \geqslant 5$. Имеем $m(\mathcal{A}_{4;4}) = 2$, $m(\mathcal{C}) = k$, $m(\mathcal{A}) = m(\mathcal{A}_{4;4}) + m(\mathcal{C}) = k+2 = n-2$. При $n \geqslant 5$ также выполнено $\dim \mathcal{A} = n \leqslant 2n - 5$, следовательно, алгебра $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям предложения 2.16, и $l(\mathcal{A}) \leqslant n - 3 = k + 1$. $\square$

6. Характеризация коммутативных матричных алгебр длины $n - 2$ над алгебраически замкнутыми полями

На основе результатов предыдущих разделов и классификации коммутативных матричных подалгебр максимальной длины в данном разделе будет получена классификация коммутативных матричных алгебр длины $n - 2$.

Если не оговорено дополнительно, всюду в данном разделе предполагается рассматривать коммутативные матричные подалгебры, содержащие единичную матрицу.

Теорема 6.1. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ длины $n-2$. Пусть $\mathcal{A}$ сопряжена в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ с алгебрами блочно-диагональных матриц*

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}_i \subset \mathrm{M}_{k_i}(\mathbb{F})$ — локальная коммутативная подалгебра длины $k_i - 2$, $\mathcal{C}_i \subset \mathrm{M}_{n-k_i}(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая циклической матрицей, $\mathcal{R}_i = \mathcal{A}_i \oplus \mathcal{C}_i$, $i = 1, 2$. Тогда

1) $k_1 = k_2$;
2) *алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сопряжены в $\mathrm{M}_{k_1}(\mathbb{F})$;*
3) *алгебры $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ сопряжены в $\mathrm{M}_{n-k_1}(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Заметим, что алгебра $\mathcal{A}$ локальна при $n - k_i = 0$ и не локальна при $n - k_i > 0$. Поэтому одновременно либо $n - k_1 = n - k_2 = 0$, либо $n - k_1 > 0$, $n - k_2 > 0$.

Если $n-k_1 = n-k_2 = 0$, то локальные алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сопряжены в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ и сопряжены с алгеброй $\mathcal{A}$ по условию.

Далее будем предполагать, что $n - k_1 > 0$ и $n - k_2 > 0$.

Из леммы 5.8 следует, что алгебра $\mathcal{A}_1$ не сопряжена с алгеброй $\mathcal{A}_{4,4}$, поэтому содержит матрицу A_1 со степенью минимального многочлена $k_1 - 1$. Пусть C_1 — циклическая матрица из $\mathcal{C}_1$. Поскольку поле $\mathbb{F}$ бесконечно, то $\sigma(A_1 + \lambda_1 E_{k_1}) \cap \sigma(C_1) = \varnothing$ для некоторого $\lambda_1 \in \mathbb{F}$, где $\sigma(A)$ как обычно обозначает спектр матрицы A. Следовательно, матрица $A = (A_1 + \lambda_1 E_{k_1}) \oplus C_1 \in \mathcal{R}_1$ имеет степень минимального многочлена $n-1$. Она сопряжена в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ с некоторой матрицей B из $\mathcal{R}_2$. По определению $B = A_2 \oplus C_2$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$, $C_2 \in \mathcal{C}_2$. Для блочной матрицы справедливо неравенство $\deg B \leqslant \deg A_2 + \deg C_2$, которое превращается в равенство, если и только если $\sigma(A_2) \cap \sigma(C_2) = \varnothing$. Алгебра $\mathcal{A}_2$ не содержит циклической матрицы, поэтому $\deg A_2 \leqslant k_2 - 1$. Следовательно,

$$n - 1 = \deg B \leqslant \deg A_2 + \deg C_2 \leqslant k_2 - 1 + n - k_2 = n - 1.$$

Значит, $\deg A_2 + \deg C_2 = n - 1$, откуда получаем, что $\deg A_2 = k_2 - 1$, $\deg C_2 = n - k_2$ и $\sigma(A_2) \cap \sigma(C_2) = \varnothing$. Матрица A имеет одно собственное число алгебраической кратности k_1 и геометрической кратности 2. По свойству циклической матрицы все собственные числа C_1 имеют геометрическую кратность 1. Матрица B имеет одно собственное число алгебраической кратности k_2 геометрической кратности 2, все остальные её собственные числа имеют геометрическую кратность 1. Поскольку при сопряжении кратности собственного значения сохраняются, то $k_1 = k_2$. Также $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$ и $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$.

Рассмотрим матрицу $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, для которой $T^{-1}\mathcal{R}_1 T = \mathcal{R}_2$. Условие $T^{-1}AT = B$ влечёт совместность уравнения $AT = TB$. Разобьём матрицу T на блоки в соответствии с блочным разбиением A и B:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} A_1T_1 = T_1A_2, \\ A_1T_2 = T_2C_2, \\ C_1T_3 = T_3A_2, \\ C_1T_4 = T_4C_2. \end{cases}$$

По условию на спектры матриц A_i и C_i, $i = 1, 2$, уравнения $A_1T_2 = T_2C_2$ и $C_1T_3 = T_3A_2$ имеют только нулевые решения (см. [1, гл. VII, § 1, теорема 1]), т. е. $T_2 = 0$ и $T_3 = 0$. Таким образом, $T_1^{-1}\mathcal{A}_1T_1 = \mathcal{A}_2$, $T_4^{-1}\mathcal{C}_1T_4 = \mathcal{C}_2$. □

Объединяя теоремы 3.3, 4.11, 4.12, 5.1 и 6.1, получаем основной результат данной работы.

Теорема 6.2. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *алгебраически замкнутое поле и* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Рассмотрим коммутативную подалгебру* $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, *содержащую единичную матрицу. Тогда*:

I. $l(\mathcal{A}) = n - 2$ *тогда и только тогда, когда алгебра* $\mathcal{A}$ *сопряжена в* $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *с одной из следующих алгебр.*

— *При* $n = 2$:

1. $\mathbb{F}E_n$.

— *При* $n \geqslant 3$:

2. $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-2)}$, *где* $\mathbf{p}(n-2)$ — *всевозможные разбиения числа* $n-2$, *а* $\mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-2)}$ — *соответствующие им в смысле обозначения* 2.24 *подалгебры в* $\mathrm{M}_{n-2}(\mathbb{F})$.
3. $\mathcal{A}_{0;n} = \langle E_n, A, A^2, \ldots, A^{n-2} \rangle$, $A = E_{1,2} + \ldots + E_{n-2,n-1} \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$.
4. $\mathcal{A}_{1;n} = \langle E_{1,n}, C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n} \rangle$.
5. $\mathcal{A}_{2;n} = \langle E_{n,n-1}, C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n} \rangle$.

— *При* $n = 4$:

6. $\mathcal{A}_{3;4}(1) = \langle E_{1,n} + E_{n,n-1}, C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n} \rangle$.

— *При* $n = 4$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$:

7. $\mathcal{A}_{4;4} = \langle E_4, E_{1,2} + E_{3,4}, E_{1,3} + E_{2,4}, E_{1,4} \rangle$.

— $j.m$, *где* $j \in \{0, 1, 2\}$, $m \in \{3, \ldots, n-1\}$:

8. $\mathcal{A}_{j;m} \oplus \mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-m)}$, *где* $\mathbf{p}(n-m)$ — *всевозможные разбиения числа* $n - m$, *а* $\mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-m)}$ — *соответствующие им подалгебры в* $\mathrm{M}_{n-m}(\mathbb{F})$.

II. *Различные алгебры попарно не сопряжены.*

III. 1. *В* $\mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ *есть ровно одна подалгебра длины* 0 — *алгебра* $\mathbb{F}E_2$.

2. *В* $\mathrm{M}_3(\mathbb{F})$ *содержится четыре различные с точностью до сопряжённости подалгебры длины* 1.

3. *В* $\mathrm{M}_4(\mathbb{F})$ *содержится девять различных с точностью до сопряжённости подалгебр длины* 2*, если* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$*, и десять в противном случае.*
4. *При* $n \geqslant 5$ $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *содержит* $P(n-2) + 3\sum\limits_{m=3}^{n-1} P(n-m) + 3$ *различных с точностью до сопряжённости подалгебр длины* $n-2$.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00267).

Литература

[1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.

[2] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[3] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1975.

[4] Маркова О. В. Верхняя оценка длины коммутативных алгебр // Матем. сб. — 2009. — Т. 200, № 12. — С. 41—62.

[5] Маркова О. В. Характеризация коммутативных матричных подалгебр максимальной длины над произвольным полем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2009. — № 5. — С. 53—55.

[6] Маркова О. В. О некоторых свойствах функции длины // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 1. — С. 83—91.

[7] Маркова О. В. Классификация матричных подалгебр длины 1 // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 1. — С. 169—188.

[8] Маркова О. В. Функция длины и матричные алгебры // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 6. — С. 65—173.

[9] Маркова О. В. Коммутативные нильпотентные подалгебры индекса нильпотентности $n-1$ в алгебре матриц порядка n // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 453. — С. 219—242.

[10] Маркова О. В. Функция длины и одновременная триангулизуемость пар матриц // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2022. — Т. 514. — С. 126—137.

[11] Маркова О. В. Коммутативные матричные алгебры, порождённые циклическими матрицами // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2023. — Т. 524. — С. 112—124.

[12] Маркова О. В., Новочадов Д. Ю. Системы порождающих полной матричной алгебры, содержащие циклические матрицы // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2021. — Т. 504. — С. 157—171.

[13] Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей (англ. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS). — `https://oeis.org/`.

[14] Павлов И. А. О коммутативных нильпотентных алгебрах матриц // ДАН БССР. — 1967. — Т. 11, № 10. — С. 870—872.

[15] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[16] Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. — М.: УРСС, 2003.

[17] Эндрюс Г. Теория разбиений. — М.: Наука, 1982

[18] Al'pin Yu. A., Ikramov Kh. D. Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria // Linear Algebra Appl. — 2000. — Vol. 313. — P. 155—161.

[19] Brown W. C., Call F. W. Maximal commutative subalgebras of $n \times n$ matrices // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21, no. 12. — P. 4439—4460.

[20] Courter R. C. The dimension of maximal commutative subalgebras of K_n // Duke Math. J. — 1965. — Vol. 32. — P. 225—232.

[21] Dolinar G., Guterman A., Kuzma B., Oblak P. Extremal matrix centralizers // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 438, no. 7. — P. 2904—2910.

[22] Gerstenhaber M. On dominance and varieties of commuting matrices // Ann. Math. — 1961. — Vol. 73, no. 2. — P. 324—348.

[23] Gustafson W. H. On maximal commutative algebras of linear transformations // J. Algebra. — 1976. — Vol. 42, no. 2. — P. 557—563.

[24] Guterman A. E., Laffey T., Markova O. V., Šmigoc H. A resolution of Paz's conjecture in the presence of a nonderogatory matrix // Linear Algebra Appl. — 2018. — Vol. 543. — P. 234—250.

[25] Guterman A. E., Markova O. V. Commutative matrix subalgebras and length function // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 430. — P. 1790—1805.

[26] Guterman A. E., Markova O. V., Mehrmann V. Lengths of quasi-commutative pairs of matrices // Linear Algebra Appl. — 2016. — Vol. 498. — P. 450—470.

[27] Jacobson N. Schur's theorems on commutative matrices // Bull. Amer. Math. Soc. — 1944. — Vol. 50. — P. 431—436.

[28] Laffey T. J. The minimal dimension of maximal commutative subalgebras of full matrix algebras // Linear Algebra Appl. — 1985. — Vol. 71. — P. 199—212.

[29] Laffey T. J., Lazarus S. Two-generated commutative matrix subalgebras // Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 147. — P. 249—273.

[30] Longstaff W. E. Burnside's theorem: irreducible pairs of transformations // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 382. — P. 247—269.

[31] Longstaff W. E. On minimal sets of $(0,1)$-matrices whose pairwise products form a basis for $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ // Bull. Austral. Math. Soc. — 2018. — Vol. 98, no. 3. — P. 402—413.

[32] Longstaff W. E. Irreducible families of complex matrices containing a rank-one matrix // Bull. Austral. Math. Soc. — 2020. — Vol. 102, no. 2. — P. 226—236.

[33] Pappacena C. J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 535—545.

[34] Paz A. An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables // Linear Multilinear Algebra. — 1984. — Vol. 15. — P. 161—170.

[35] Schur I. Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen // J. Reine Angew. Math. — 1905. — B. 130. — S. 66—76.

[36] Shitov Ya. An improved bound for the lengths of matrix algebras // Algebra Number Theory. — 2019. — Vol. 13, no. 6. — P. 1501—1507.

[37] Song Y. A construction of maximal commutative subalgebra of matrix algebras // J. Korean Math. Soc. — 2003. — Vol. 40, no. 2. — P. 241—250.

[38] Spencer A. J. M., Rivlin R. S. The theory of matrix polynomials and its applications to the mechanics of isotropic continua // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1959. — Vol. 2. — P. 309—336.

[39] Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Further results in the theory of matrix polynomials // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1960. — Vol. 4. — P. 214—230.

[40] Wadsworth A. The algebra generated by two commuting matrices // Linear Multilinear Algebra. — 1990. — Vol. 27. — P. 159—162.